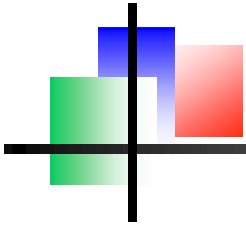


Podstawy Fizyki IV

Optyka z elementami fizyki współczesnej

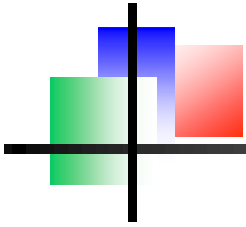
wykład 24, 11.01.2018

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Mateusz Winkowski, Łukasz Zinkiewicz
ćwiczenia:	Radosław Łapkiewicz



Wykład 23 - przypomnienie

- argumenty za kwantową naturą światła
 - promieniowanie ciała doskonale czarnego
 - efekt foto-elektryczny
 - rozpraszanie Comptona
- własności fotonu: energia, pęd, spin
- foton vs rozkłady przestrzenno-czasowe pola
 - amplituda prawdopodobieństwa
 - prawdopodobieństwo
- statystyka Poissona
- doświadczenie Younga dla pojedynczych fotonów
- dodawanie amplitud prawdopodobieństwa
- bra-ket
- fala prawdopodobieństwa
- stany Focka (n -fotonowe) na płytce światłodzielącej



stan koherentny, 1

Prawdopodobieństwo zarejestrowania dokładnie n fotonów z modu przestrzennego α :

$$P(n|\alpha) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!}$$

Amplituda prawdopodobieństwa:

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{(\bar{n})^{n/2} e^{-\bar{n}/2}}{\sqrt{n!}}$$

$$\langle n|\alpha\rangle = \langle n| \cdot |\alpha\rangle$$

$\langle n|$ „ket” – stan układu (wektor)

$|\alpha\rangle$ „bra” – mierzona wielkość fizyczna obserwabla (kowiektor)

Bardzo prosty przykład: stan o ustalonej liczbie fotonów, np. $|n=3\rangle = |3\rangle$

$$P(1|3) = |\langle 1|3\rangle|^2 = 0; \quad P(3|3) = |\langle 3|3\rangle|^2 = 1$$

generalnie

$$P(m|n) = |\langle m|n\rangle|^2 = \delta_{mn} \Rightarrow \langle m|n\rangle = \delta_{mn}$$

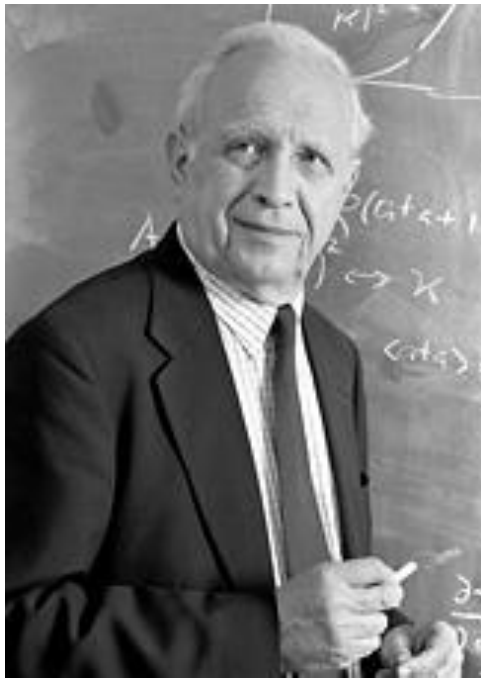
stan koherentny, definicja

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha\rangle |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^{n/2} e^{-\bar{n}/2}}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

stan koherentny, 2

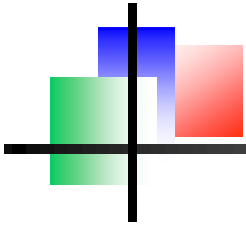
Sprawdzenie – policzmy prawdopodobieństwo zarejestrowania dokładnie m fotonów z modu α :

$$\langle m|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle m|\alpha\rangle|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^{n/2} e^{-n/2}}{\sqrt{n!}} \delta_{mn} = \frac{(\bar{n})^{m/2} e^{-m/2}}{\sqrt{m!}}$$
$$P(m|\alpha) = \frac{(\bar{n})^m e^{-m}}{m!}$$



Roy J. Glauber

The Nobel Prize in Physics 2005 was divided, one half awarded to Roy J. Glauber *"for his contribution to the quantum theory of optical coherence"*, the other half jointly



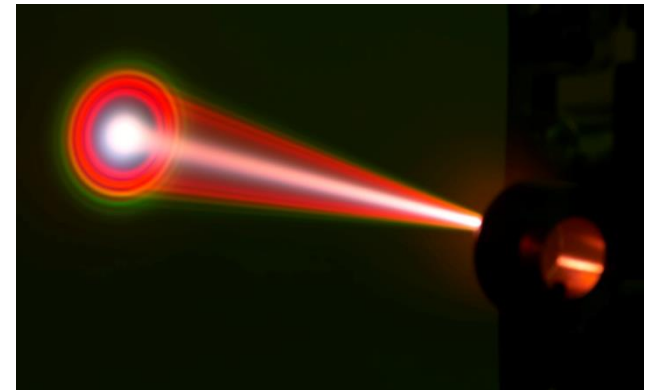
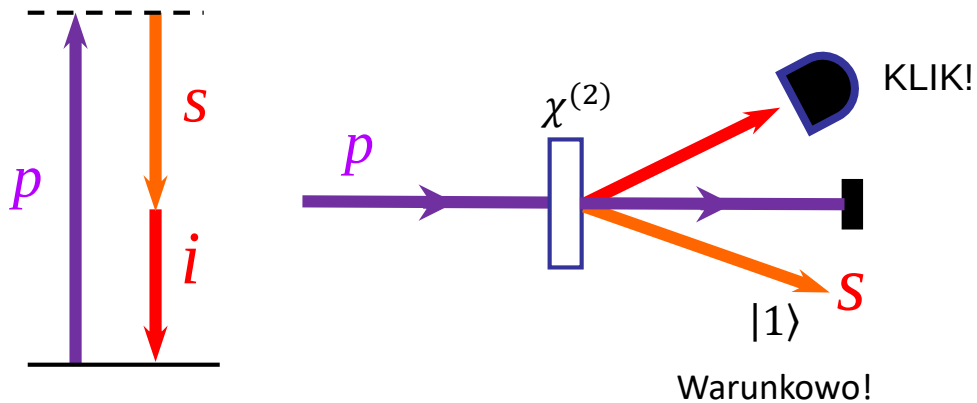
stany Fock'a

Stan Fock'a, definicja: stan o ustalonej liczbie fotonów n :

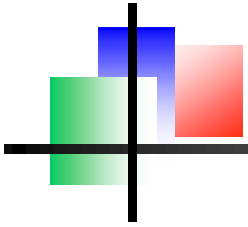
$$P(m|n) = \langle m|n \rangle = 1 \Leftrightarrow m = n$$

Jak wytworzyć taki stan?

Procesy nieliniowe: spontaniczna fluorescencja
parametryczna (parametric downconversion).



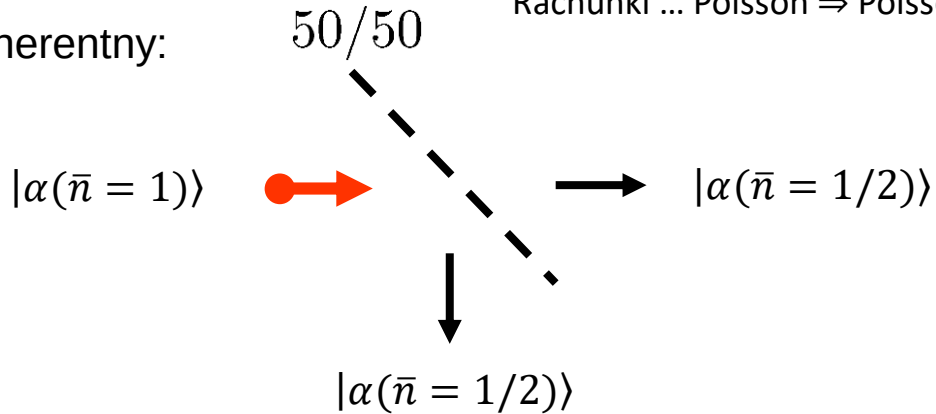
Inne metody: pułapkowane atomy, kropki kwantowe, defekty sieci krystalicznej diamentu...



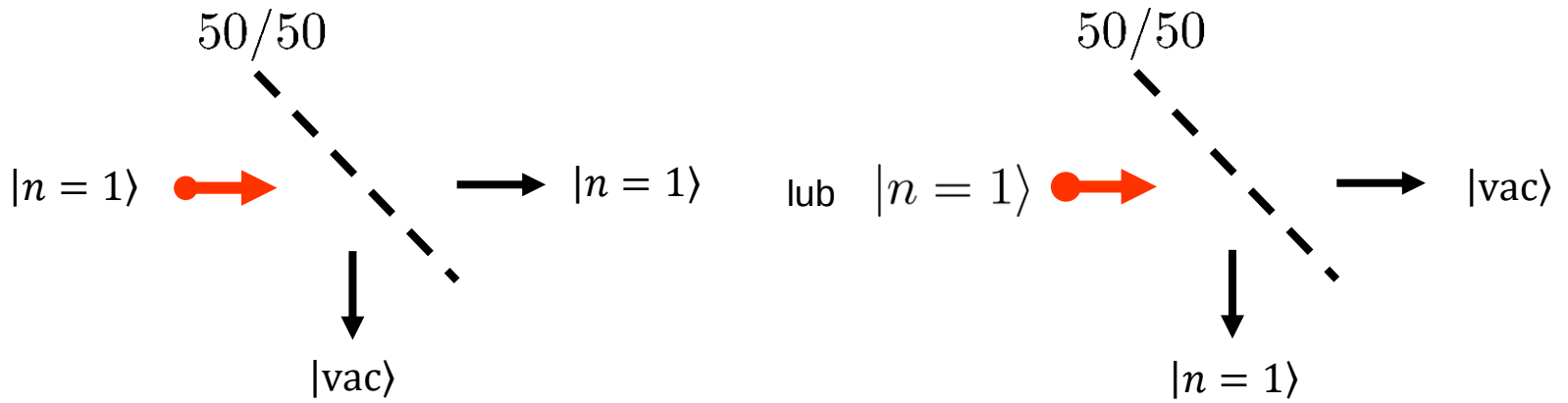
fotony na płytce światłodzieliącej

z wykładu 23: $p(m) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} T^m (1-T)^{n-m} p_0(n)$
 Rachunki ... Poisson $\Rightarrow$ Poisson

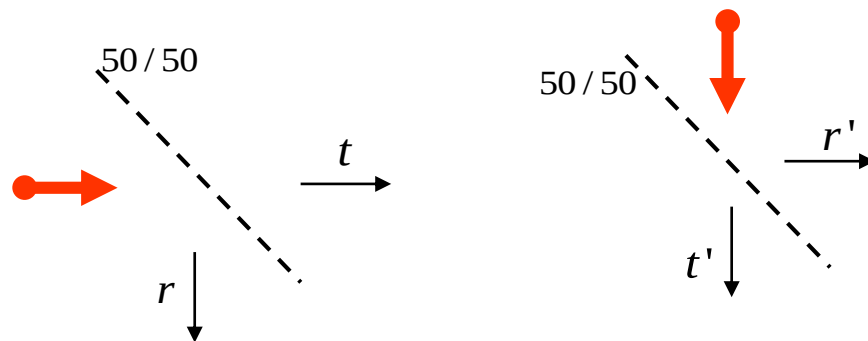
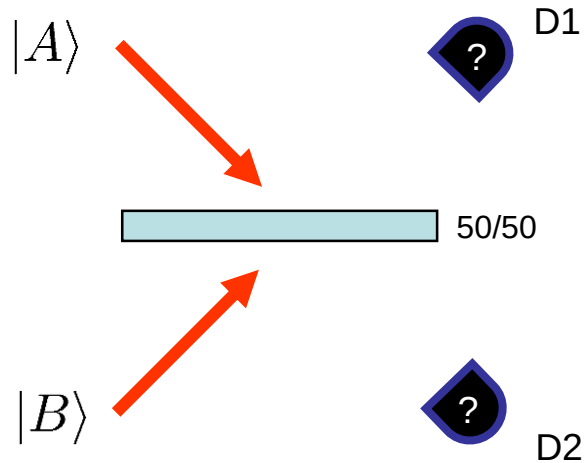
Stan koherentny:



Pojedynczy foton:

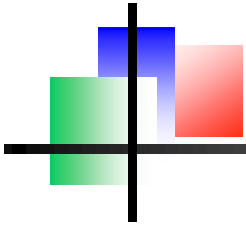


fotony i płytka światłodziela

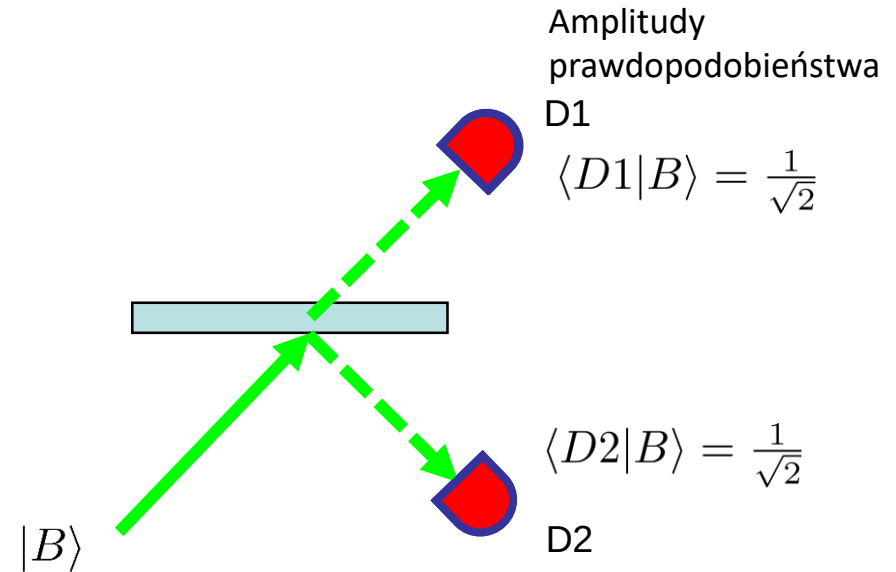
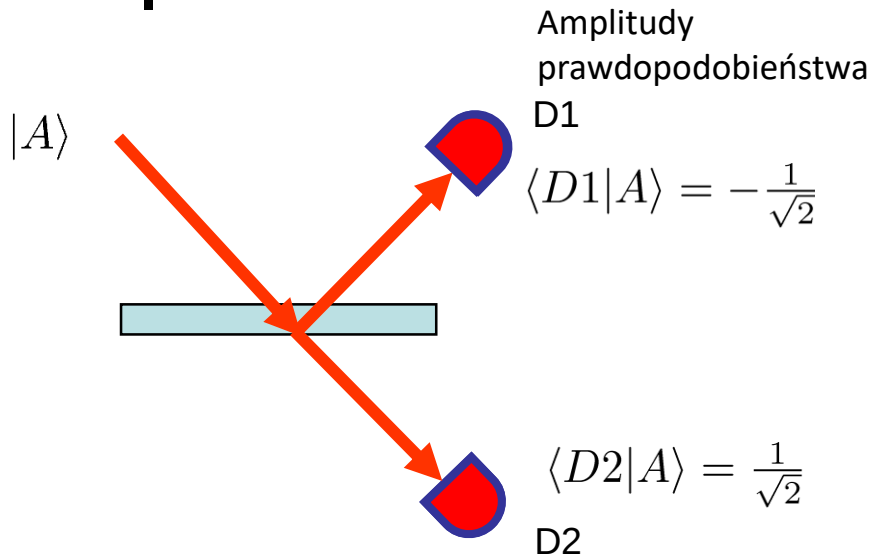


wykład 5: relacje Stokesa

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\sqrt{2}} & r' &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ t &= \frac{1}{\sqrt{2}} & t' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



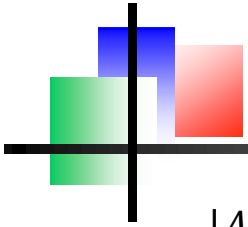
jeden foton i płytką światłodziącą



Działanie płytki na stan pojedynczego fotonu:

$$|A\rangle \rightarrow |A'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|A_1\rangle + |A_2\rangle)$$

$$|B\rangle \rightarrow |B'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|B_1\rangle + |B_2\rangle)$$



jeden foton i płytką światłodzielną, 2

$$|A\rangle \rightarrow |A'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|A_1\rangle + |A_2\rangle)$$
$$|B\rangle \rightarrow |B'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|B_1\rangle + |B_2\rangle)$$

Porządný opis:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - foton w „górnym” modzie

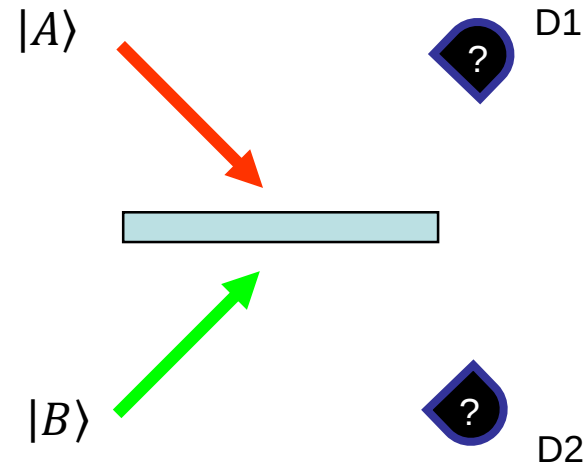
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - foton w „dolnym” modzie

Działanie płytki:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

można opisać przy pomocy macierzy U

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Macierz U jest unitarna: $U^\dagger U = 1$

† oznacza sprzężenie hermitowskie =
transpozycja + sprzężenie zespolone

dwa fotony i płytki światłodziela

$|A\rangle$



$|B\rangle$



Reguła: dwie niezależne cząstki – mnożymy kety

$$|A\rangle|B\rangle \rightarrow |A'\rangle|B'\rangle = \frac{1}{2}(-|A_1\rangle + |A_2\rangle)(|B_1\rangle + |B_2\rangle)$$

$$|A'\rangle|B'\rangle = -\frac{1}{2}|A_1\rangle|B_1\rangle - \frac{1}{2}|A_1\rangle|B_2\rangle + \frac{1}{2}|A_2\rangle|B_1\rangle + \frac{1}{2}|A_2\rangle|B_2\rangle$$

Prawdopodobieństwa zdarzeń:

$$P[(D_1, D_1)|(A'B')] = |\langle A_1|\langle A'|A'\rangle|B'\rangle|^2 = \frac{1}{4}$$

$$P[(D_2, D_2)|(A'B')] = |\langle B_2|\langle B'|A'\rangle|B'\rangle|^2 = \frac{1}{4}$$

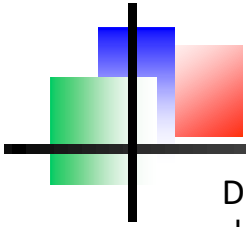
Prawdopodobieństwa liczb zliczeń zależą od ewentualnych korelacji pomiędzy cząstkami.

Dla cząstek rozdzielalnych sumujemy prawdopodobieństwa:

$$P[(n_1 = 2, n_2 = 0)|(A', B')] = P[(A_1, B_1)|(A', B')] = \frac{1}{4}$$

$$P[(n_1 = 0, n_2 = 2)|(A', B')] = P[(A_2, B_2)|(A', B')] = \frac{1}{4}$$

$$P[(n_1 = 1, n_2 = 1)|(A', B')] = P[(A_1, B_2)|(A', B')] + P[(A_2, B_1)|(A', B')] = \frac{1}{2}$$



dwa fotony i płytki światłodziela, 2

Dla **identycznych fotonów** mamy: $|A\rangle = |B\rangle$ co daje

$$\begin{aligned} |A'\rangle|B'\rangle &= |A'\rangle|A'\rangle = \\ &= -\frac{1}{2}|A_1\rangle|A_1\rangle - \frac{1}{2}|A_1\rangle|A_2\rangle + \frac{1}{2}|A_2\rangle|A_1\rangle + \frac{1}{2}|A_2\rangle|A_2\rangle = \\ &= -\frac{1}{2}|A_1\rangle|A_1\rangle + \frac{1}{2}|A_2\rangle|A_2\rangle \end{aligned}$$

Renormalizacja

$\sum P_i = 1$ prowadzi do

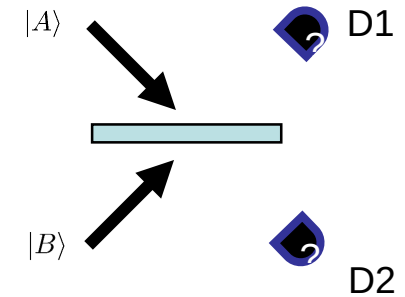
$$|A'\rangle|A'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|A_1\rangle|A_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|A_2\rangle|A_2\rangle$$

oraz prawdopodobieństw

$$P[(n_1 = 2, n_2 = 0)|(A', A')] = P[(A_1, A_1)|(A', A')] = \frac{1}{2}$$

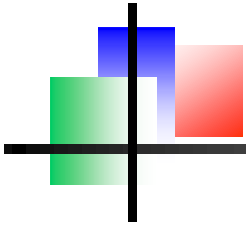
$$P[(n_1 = 0, n_2 = 2)|(A', A')] = P[(A_2, A_2)|(A', A')] = \frac{1}{2}$$

$$P[(n_1 = 1, n_2 = 1)|(A', A')] = 0$$



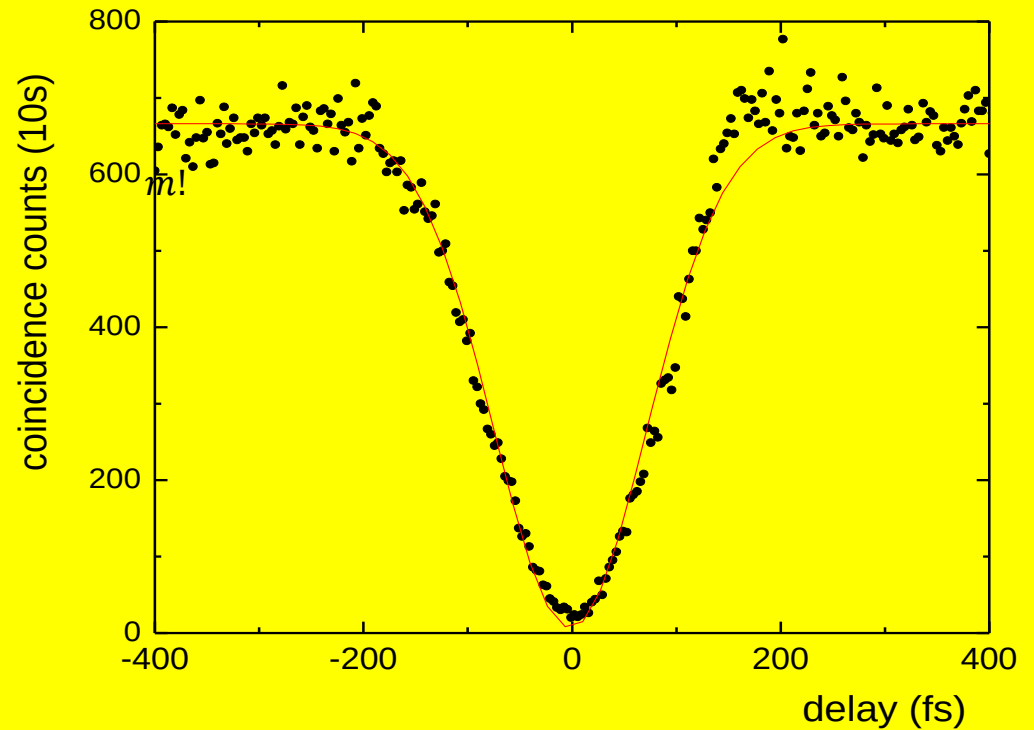
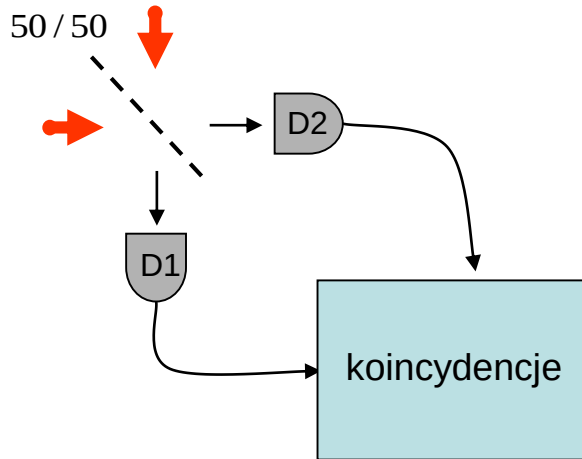
$|\uparrow\downarrow\rangle |\uparrow\downarrow\rangle$



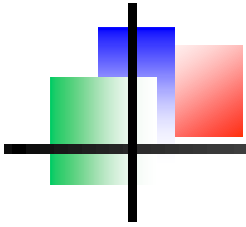


2 identyczne fotony na płytce, wyniki

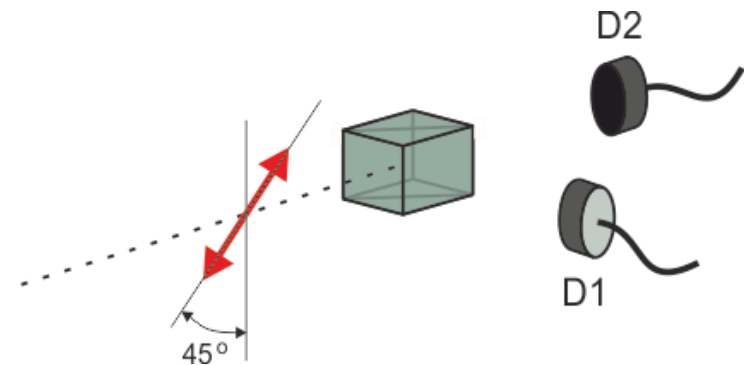
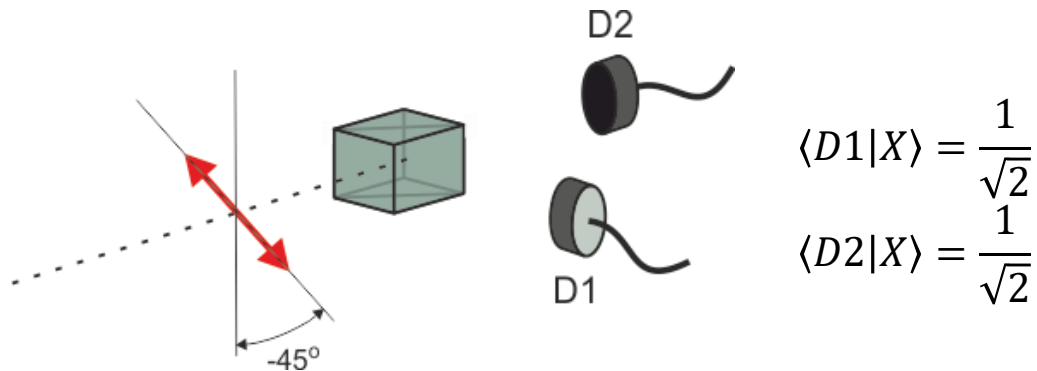
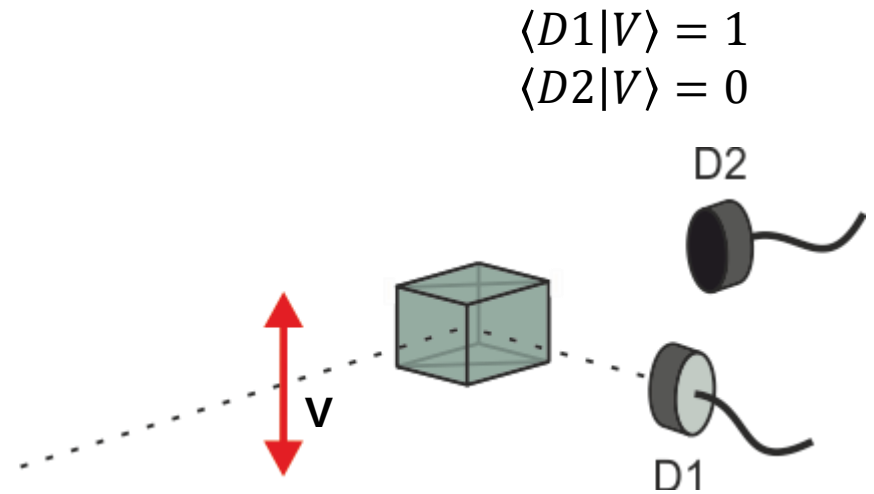
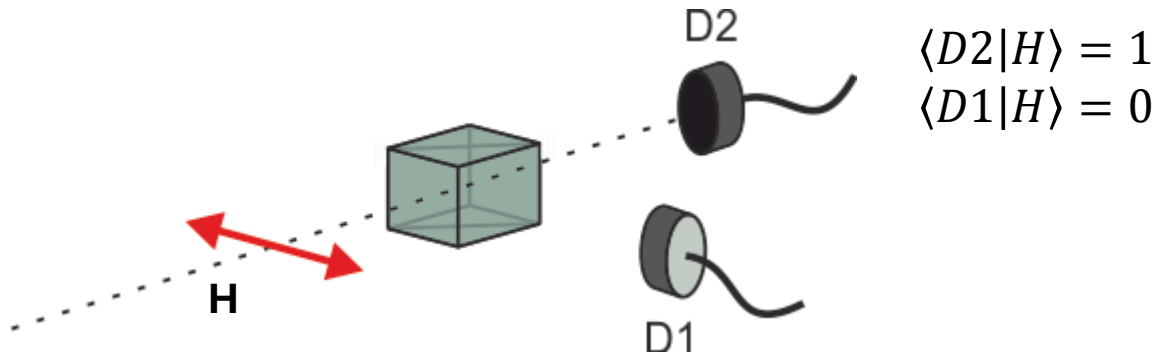
Interferencja Hong-Ou-Mandla:
C. K. Hong, Z. Y. Ou, L. Mandel, 1987

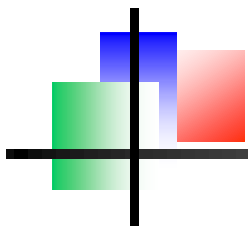


zmierzone w KL FAMO, Toruń

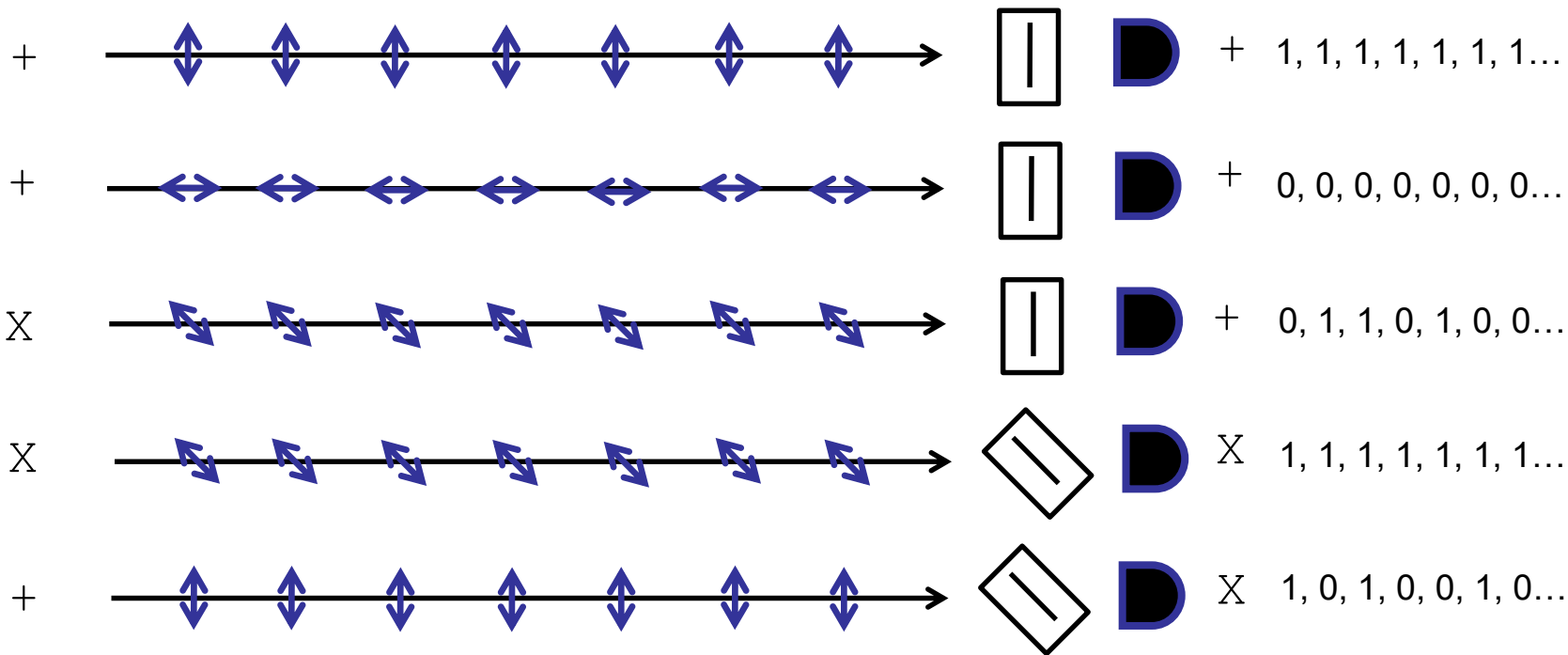


pojedyncze fotony na polaryzatorze





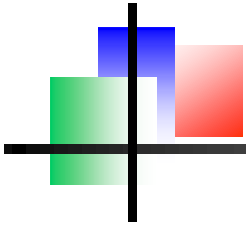
Bazy



Bazy:

$|\updownarrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle$ +

$|\nearrow\rangle, |\searrow\rangle$ X



Bazy

Baza: $|\uparrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle$ +

$$|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle)$$
$$|\searrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\leftrightarrow\rangle)$$

Prawdopodobieństwa wyników pomiarów w bazie + dla różnych stanów wejściowych:

$$P(\uparrow | \uparrow) = |\langle \uparrow | \uparrow \rangle|^2 = 1, \quad P(\uparrow | \leftrightarrow) = |\langle \uparrow | \leftrightarrow \rangle|^2 = 0$$

$$P(\uparrow | \nearrow) = \left| \langle \uparrow | \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(\leftrightarrow | \nearrow) = \left| \langle \leftrightarrow | \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Druga baza: $|\nearrow\rangle, |\searrow\rangle$ X

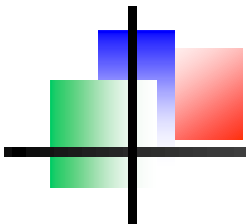
$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + |\searrow\rangle)$$

$$|\leftrightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle - |\searrow\rangle)$$

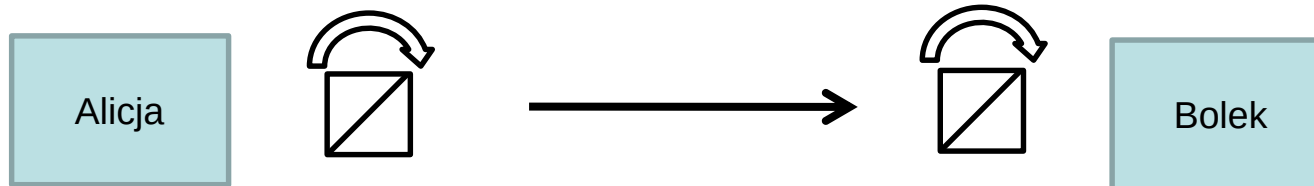
$$P(\nearrow | \nearrow) = 1, \quad P(\nearrow | \searrow) = 0$$

$$P(\searrow | \leftrightarrow) = \frac{1}{2}, \quad P(\searrow | \uparrow) = \frac{1}{2}$$

Dla pojedynczego fotonu niemożliwe jest rozróżnienie nieortogonalnych polaryzacji. Fotony spolaryzowane ortogonalnie możemy odróżnić tylko wtedy gdy znamy bazę, w której należy dokonać pomiaru.



Kryptografia kwantowa



A losowo wysyła fotony spolaryzowane w bazie X lub + (wybór baz losowy 50/50), B losuje swoją bazę i dokonuje pomiaru.

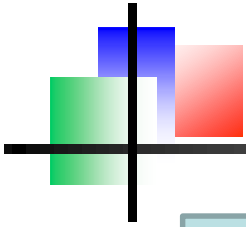
A:	X	+	X	X	+	+	+	X	+	+	X	X	+	X	...
	/	-	\	/		-	-	\	-		/	\	-	/	...
B:	+	+	X	+	X	+	X	X	X	+	+	X	+	+	...
		-	\	-	/	-	\	\	\		-	\	-		...
	0	1			0		1		1			1		0	

Po zakończeniu A i B publicznie porównują bazy i odrzucają pomiary, dla których bazy były niezgodne.

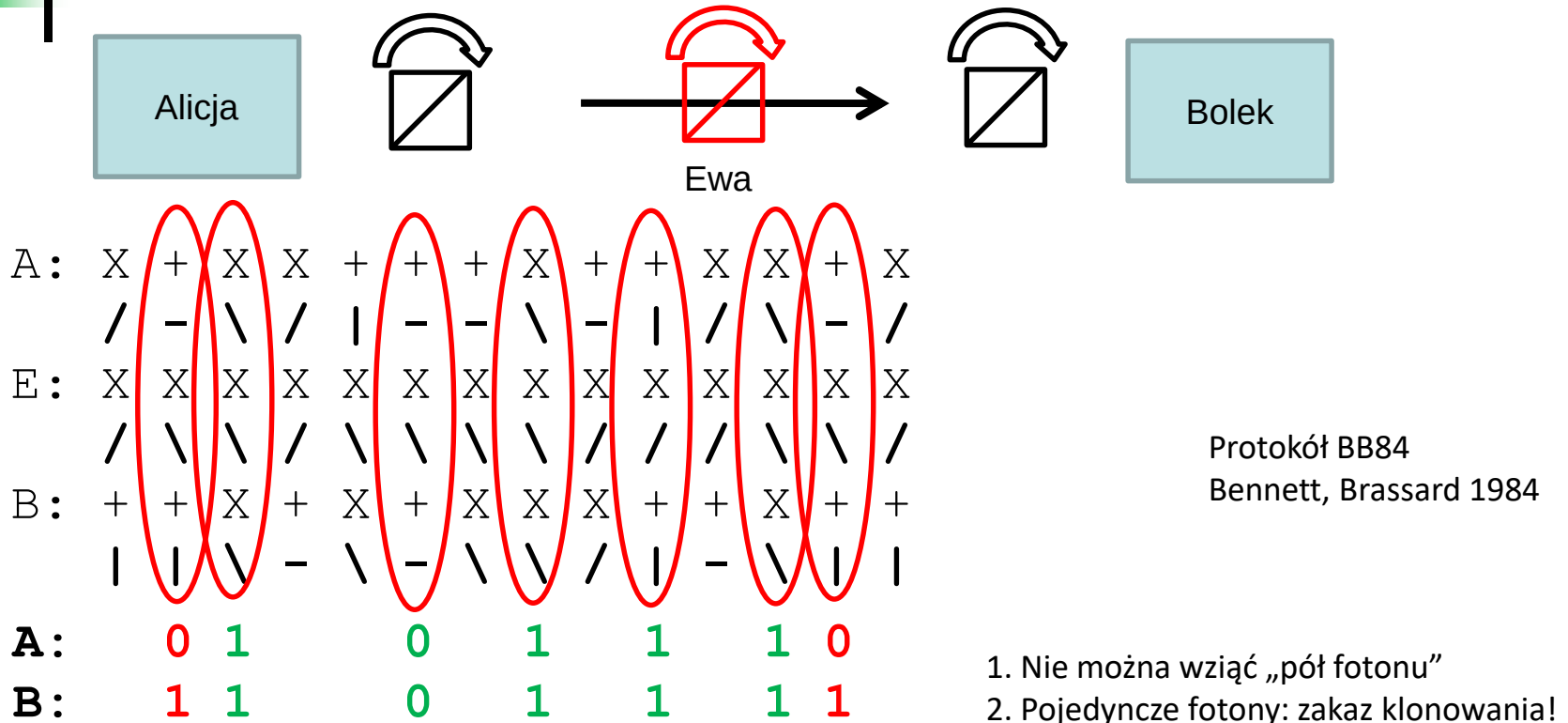
Stany polaryzacji $\Leftrightarrow$ wartości logiczne:

$$\begin{array}{lcl} -, / & \equiv & 0 \\ |, \backslash & \equiv & 1 \end{array}$$

A i B uzyskują sekretny ciąg uzgodnionych bitów.



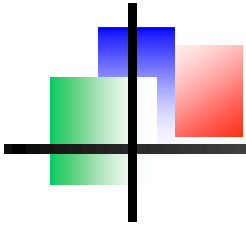
Kryptografia kwantowa - podsłuch



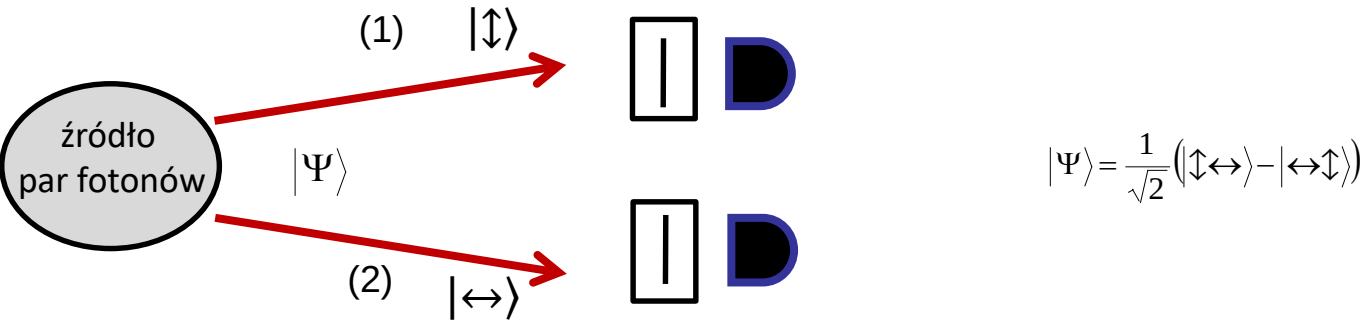
Kwestia podsłuchu: aby podsłuchać, należy dokonać pomiaru na fotonie podróżującym A → B nie mając informacji o bazie, której należy użyć – 50% szansy na użycie właściwej.

Pomiar rzutuje stan fotonu na bazę użytą podczas próby podsłuchu.

Wykrycie podsłuchu: A i B ujawniają część uzgodnionych bitów i szukają niezgodności. Dla 1 sprawdzanego bitu prawdopodobieństwo, że A i B nie zauważą podsłuchu wynosi $\frac{3}{4}$: prawdopodobieństwo, że E odgadła dobrą bazę ($\frac{1}{2}$) + prawdopodobieństwo, że pomimo użycia złej bazy bity pozostały zgodne ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$). Dla k sprawdzanych bitów, prawdopodobieństwo niezauważenia podsłuchu wynosi $(\frac{3}{4})^k$, np. $P = 10^{-13}$ dla $k = 100$, $P = 10^{-125}$ dla $k = 1000$.



Stany splątane



Osobno:

$$P(\uparrow_1 |\Psi) = P(\uparrow_1 \uparrow_2 |\Psi) + P(\uparrow_1 \leftrightarrow_2 |\Psi) = |\langle \uparrow\uparrow | \Psi \rangle|^2 + |\langle \uparrow\leftrightarrow | \Psi \rangle|^2 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(\leftrightarrow_1 |\Psi) = P(\leftrightarrow_1 \uparrow_2 |\Psi) + P(\leftrightarrow_1 \leftrightarrow_2 |\Psi) = |\langle \leftrightarrow\uparrow | \Psi \rangle|^2 + |\langle \leftrightarrow\leftrightarrow | \Psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Analogicznie dla drugiego fotonu oraz w innych bazach: **pojedyncze fotony z pary są niespolaryzowane!**

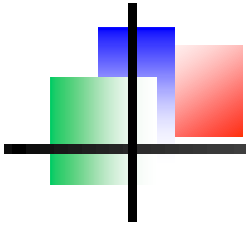
Korelacje: $P(\uparrow_1 \uparrow_2 |\Psi) = |\langle \uparrow\uparrow | \Psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \uparrow\uparrow | (|\uparrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\uparrow\rangle) \right|^2 = 0$

$$P(\uparrow_1 \leftrightarrow_2 |\Psi) = |\langle \uparrow\leftrightarrow | \Psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \uparrow\leftrightarrow | (|\uparrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\uparrow\rangle) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

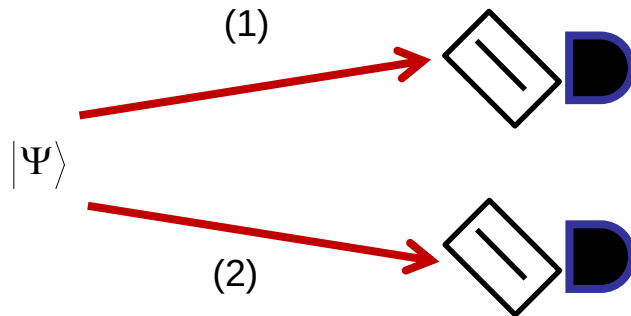
$$P(\leftrightarrow_1 \uparrow_2 |\Psi) = |\langle \leftrightarrow\uparrow | \Psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \leftrightarrow\uparrow | (|\uparrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\uparrow\rangle) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(\leftrightarrow_1 \leftrightarrow_2 |\Psi) = |\langle \leftrightarrow\leftrightarrow | \Psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \leftrightarrow\leftrightarrow | (|\uparrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\uparrow\rangle) \right|^2 = 0$$

**polaryzacje fotonów
zawsze ortogonalne!**



Stany splątane – korelacje



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\uparrow\rangle)$$

Korelacje w obróconej bazie – klasycznie spodziewamy się ½ przypadków zgodnych polaryzacji, ½ ortogonalnych.

Szukamy następujących prawdopodobieństw:

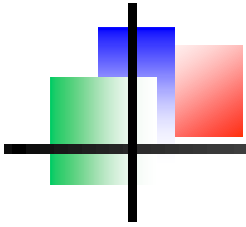
$$P(\nearrow_1 \nearrow_2 | \Psi), P(\nearrow_1 \nwarrow_2 | \Psi), P(\nwarrow_1 \nearrow_2 | \Psi), P(\nwarrow_1 \nwarrow_2 | \Psi)$$

Zapiszmy stan Ψ w bazie X:

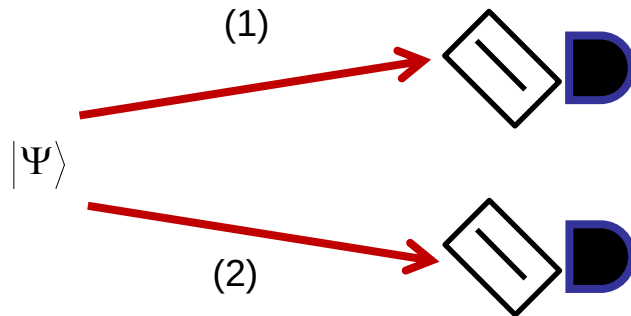
$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle) \\ |\leftrightarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle) \end{aligned}$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\uparrow\rangle) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\cancel{|\nearrow\nearrow\rangle} - |\nearrow\nwarrow\rangle + |\nwarrow\nearrow\rangle - \cancel{|\nwarrow\nwarrow\rangle} - \cancel{|\nearrow\nearrow\rangle} - |\nearrow\nwarrow\rangle + |\nwarrow\nearrow\rangle + \cancel{|\nwarrow\nwarrow\rangle}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nwarrow\nearrow\rangle - |\nearrow\nwarrow\rangle) \end{aligned}$$



Stany splątane – korelacje



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow_1 \nwarrow_2\rangle - |\nwarrow_1 \nearrow_2\rangle)$$

Prawdopodobieństwa:

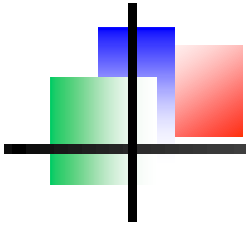
$$P(\nearrow_1 \nearrow_2 | \Psi) = |\langle \nearrow_1 \nearrow_2 | \Psi \rangle|^2 = \left| \langle \nearrow_1 \nearrow_2 | \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow_1 \nwarrow_2\rangle - |\nwarrow_1 \nearrow_2\rangle) \right|^2 = 0$$

$$P(\nearrow_1 \nwarrow_2 | \Psi) = |\langle \nearrow_1 \nwarrow_2 | \Psi \rangle|^2 = \left| \langle \nearrow_1 \nwarrow_2 | \frac{1}{\sqrt{2}} (|\nearrow_1 \nwarrow_2\rangle - |\nwarrow_1 \nearrow_2\rangle) \right|^2 = \frac{1}{2}$$

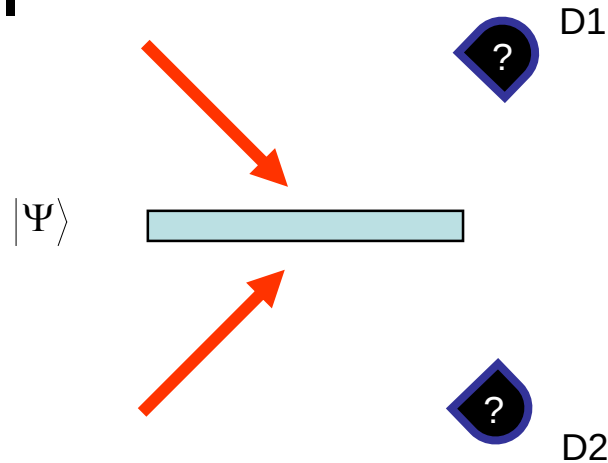
Analogicznie:

$$P(\nwarrow_1 \nearrow_2 | \Psi) = \frac{1}{2}, \quad P(\nwarrow_1 \nwarrow_2 | \Psi) = 0$$

Zawsze ortogonalne – pełna korelacja!



Stany splątane i płytki światłodziela



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1 \leftrightarrow_2\rangle - |\leftrightarrow_1 \uparrow_2\rangle)$$

Działanie płytki:

$$|\uparrow_1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\uparrow'_1\rangle + |\uparrow'_2\rangle)$$

$$|\leftrightarrow_1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\leftrightarrow'_1\rangle + |\leftrightarrow'_2\rangle)$$

$$|\uparrow_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow'_1\rangle + |\uparrow'_2\rangle)$$

$$|\leftrightarrow_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow'_1\rangle + |\leftrightarrow'_2\rangle)$$

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &\rightarrow |\Psi'\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(-|\uparrow'_1\rangle + |\uparrow'_2\rangle)(|\leftrightarrow'_1\rangle + |\leftrightarrow'_2\rangle) - (-|\leftrightarrow'_1\rangle + |\leftrightarrow'_2\rangle)(|\uparrow'_1\rangle + |\uparrow'_2\rangle)] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (-\cancel{|\uparrow'_1 \leftrightarrow'_1\rangle} - |\uparrow'_1 \leftrightarrow'_2\rangle + |\leftrightarrow'_1 \uparrow'_2\rangle + \cancel{|\uparrow'_2 \leftrightarrow'_2\rangle} + \cancel{|\uparrow'_1 \leftrightarrow'_1\rangle} + |\leftrightarrow'_1 \uparrow'_2\rangle - |\uparrow'_1 \leftrightarrow'_2\rangle - \cancel{|\uparrow'_2 \leftrightarrow'_2\rangle}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\leftrightarrow'_1 \uparrow'_2\rangle - |\uparrow'_1 \leftrightarrow'_2\rangle) \end{aligned}$$

Zawsze osobno!