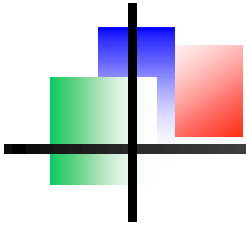


Podstawy Fizyki III

Optyka z elementami fizyki współczesnej

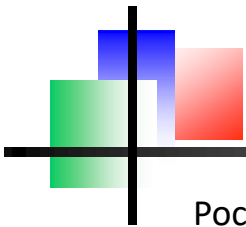
wykład 25, 12.01.2018

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Mateusz Winkowski, Łukasz Zinkiewicz
ćwiczenia:	Radosław Łapkiewicz



Wykład 24 - przypomnienie

- stan koherentny
- stan koherentny vs pojedyncze fotony na płytce światłodzielącej
- 2 fotony na płytce światłodzielącej
- 2 identyczne fotony na płytce światłodzielącej
 - doświadczenie Hong-Ou-Mandela
- polaryzacja fotonu w różnych nieortogonalnych bazach
- kryptografia kwantowa
- stany splątane, przykład 2 fotony splątane w polaryzacji
- korelacje kwantowe
- stany splątane na płytce światłodzielącej

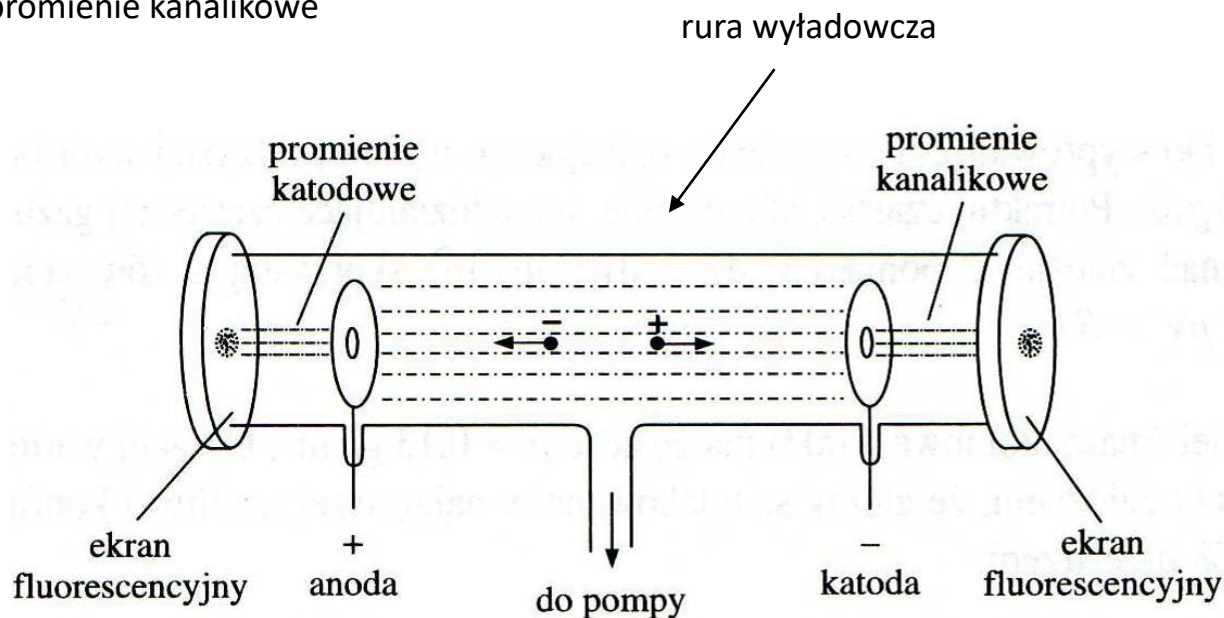


XIX wiek: promienie katodowe i anodowe

Początek XIX w. Dalton – proporcje substancji w reakcjach chemicznych

1859 Plücker, rurki wyładowcze, promienie katodowe

1886 Goldstein, promienie kanalikowe



promienie katodowe = elektrony
promienie kanalikowe = dodatnie jony atomowe

(1897, Thompson, Nagroda Nobla z fizyki 1906r.)
(1900, Wien)

Promieniowanie X, 1

1985 W.K. Roentgen
1912 M. Laue

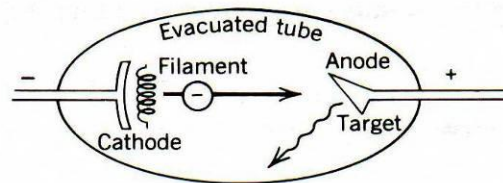
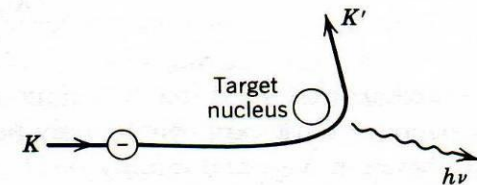
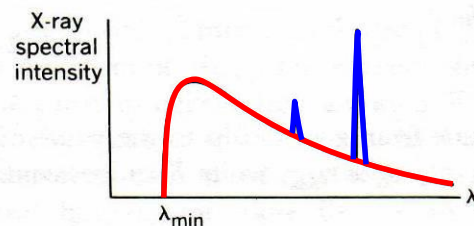


Figure 2-17

Bremsstrahlung process for an electron entering the field of an atomic nucleus.



promieniowanie hamowania
 $e \rightarrow e + \gamma$

energia kin. elektr.
przed zderzeniem

energia kin. elektr.
po zderzeniu

$$h\nu = K - K'$$

$$K' = 0 \Rightarrow h\nu_{max} = K = eU$$

napięcie
na lampie

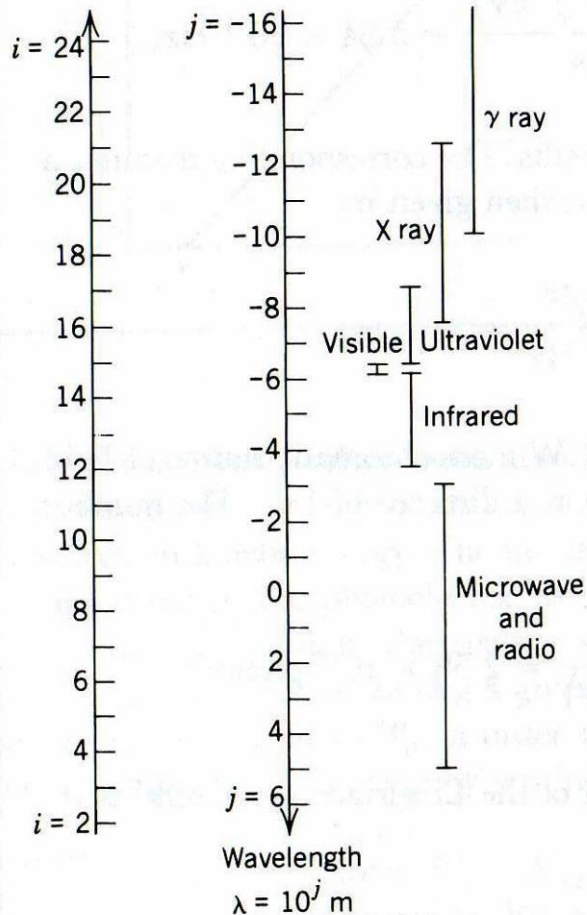
$$h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

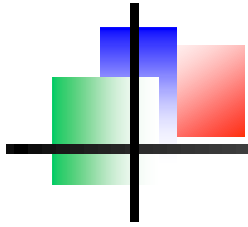
$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$$

$$\lambda_{min} = \frac{1.240 \text{ kV}}{U} [\text{nm}]$$

promieniowanie charakterystyczne – przejścia pomiędzy poziomami energetycznymi atomów katody

Frequency
 $\nu = 10^i \text{ Hz}$





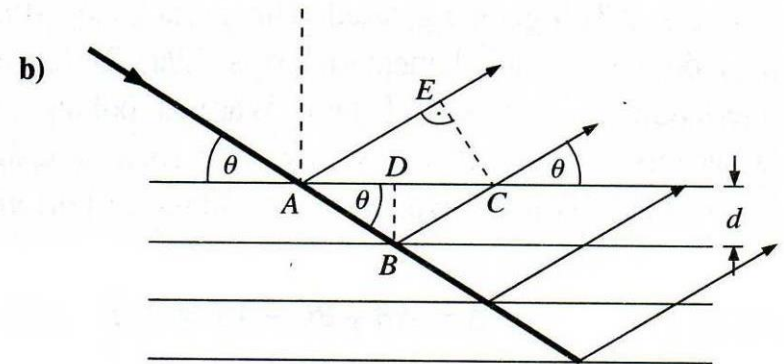
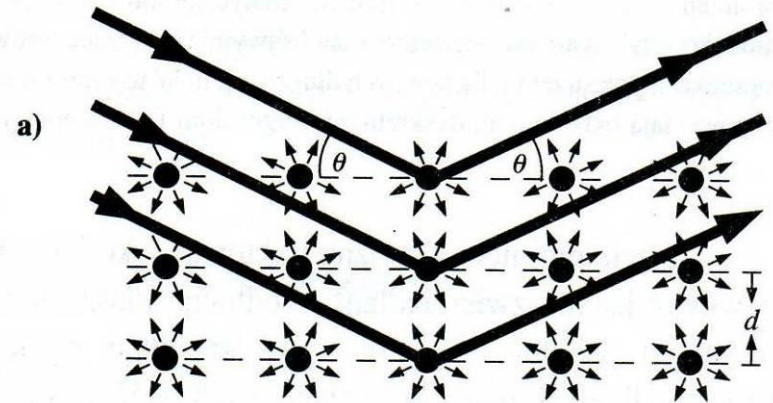
Promieniowanie X, 2

Ugięcie Bragga (na monokryształach)
(analogie: wykład 13, siatka dyfrakcyjna;
wykład 20, modulator akusto-optyczny)

$$\Delta = AB + BC - AE = 2AB - AE = \frac{2d}{\sin \theta} - 2AD \cos \theta$$

$$AD = \frac{d}{\tan \theta} \Rightarrow \Delta = 2d \sin \theta = n\lambda$$

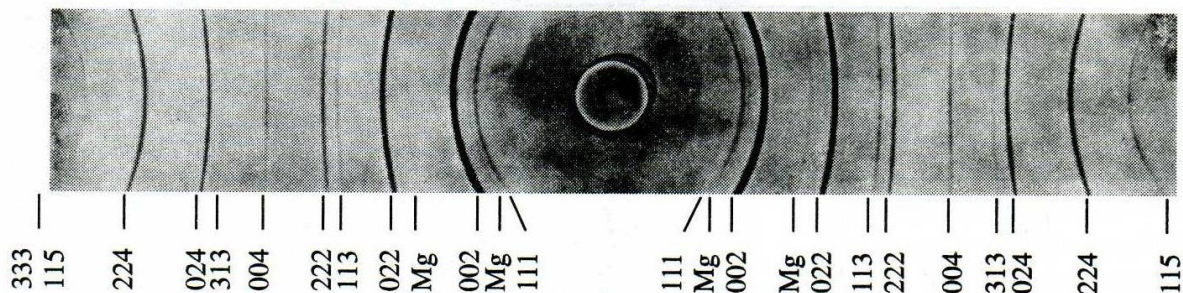
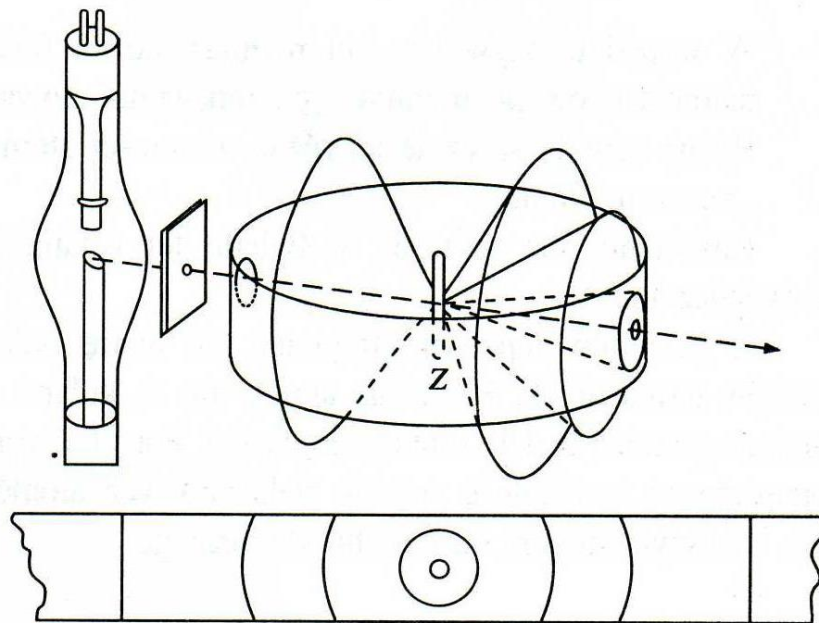
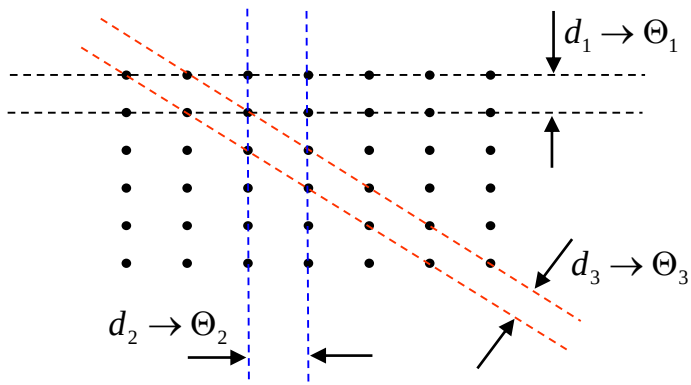
(warunek Bragga)

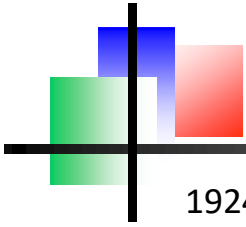


Promieniowanie X, 3

Metoda Debye'a-Scherrera
(metoda proszkowa)

$$2d \sin \theta = n\lambda$$





Hipoteza de Broglie'a

1924 L. de Broglie

Oczekujemy symetrii: jeśli fale elektromagnetyczne są cząstkami to cząstki powinny być falami

$$k = \frac{p}{\hbar} \rightarrow \lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{mv}$$

Dla swobodnej cząstki o energii $E = \hbar\omega$ mamy: $\Psi(z, t) = e^{i(kz - \omega t)}$.

Podobnie jak dla fotonu z płaskiej fali monochromatycznej (wykład 23) dokładnie znamy energię i pęd cząstki ale kompletnie nieokreślone jest jej położenie oraz własności czasowe.

Jeśli chcemy zdefiniować położenie oraz czas potrzebujemy pakiety falowe w przestrzeni (np. wiązka gaussowska) i czasie (np. impuls gaussowski). Obowiązuje zasada nieoznaczoności Heisenberga

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

gdzie Δx oraz Δp_x należy rozumieć jako wariancje położenia i pędu. Podobna nierówność obowiązuje dla czasu i energii:

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Liczby:

1. elektron, energia 100 eV

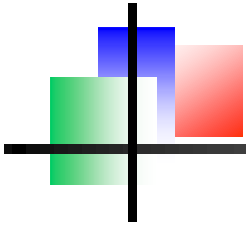
$$p = \sqrt{2m_e E} \cong 5.4 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}, \lambda = h/p \cong 0.12 \text{ nm}$$

2. atom sodu, $T=10^{-8}\text{K}$

$$E = kT \cong 0.7 \times 10^{-31} \text{ J}, p = \sqrt{mkT} \cong 5 \times 10^{-29} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}, \lambda = h/p \cong 0.12 \mu\text{m}$$

3. kulka, 10g, 800m/s

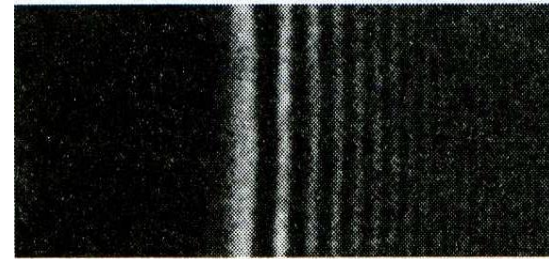
$$\lambda = h/(Mv) \cong 0.8 \times 10^{-34} \text{ m}$$



dyfrakcja i interferencja elektronów

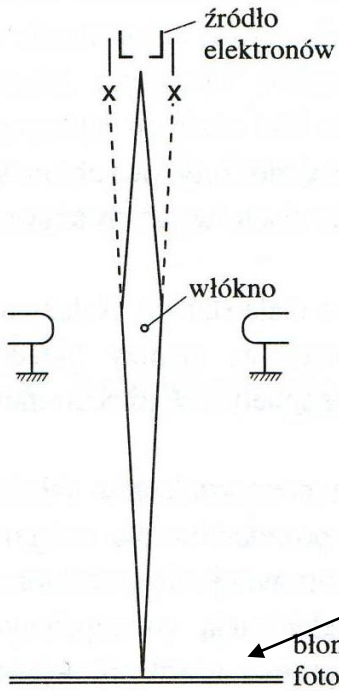
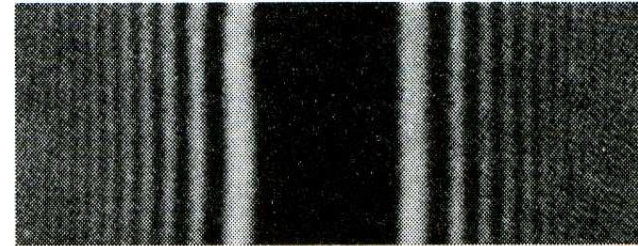
Dyfrakcja na krawędzi

$$E = 3 \times 10^4 \text{ eV}, \quad \lambda = 5 \times 10^{-12} \text{ m}$$

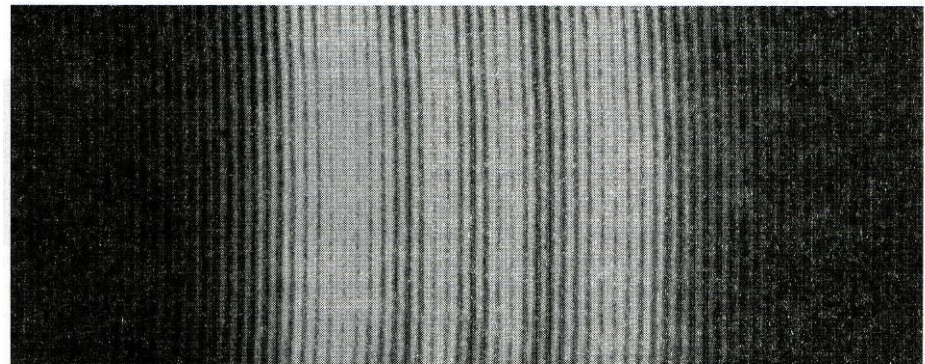


Dyfrakcja na drucie $2 \mu\text{m}$

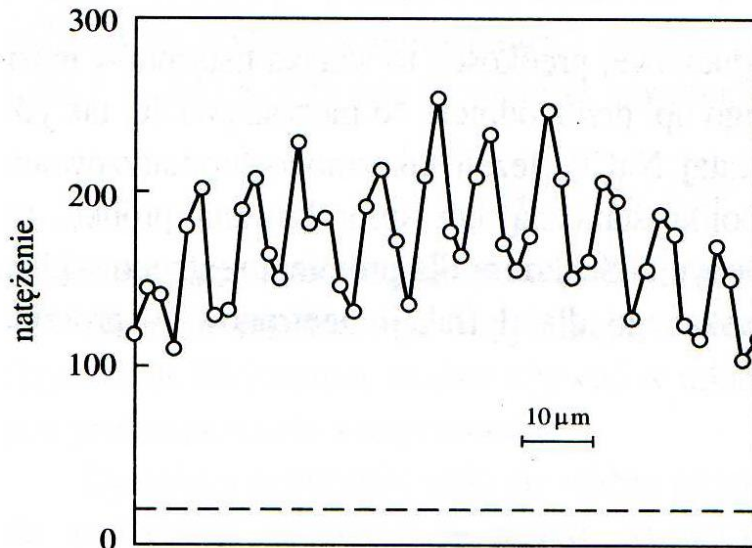
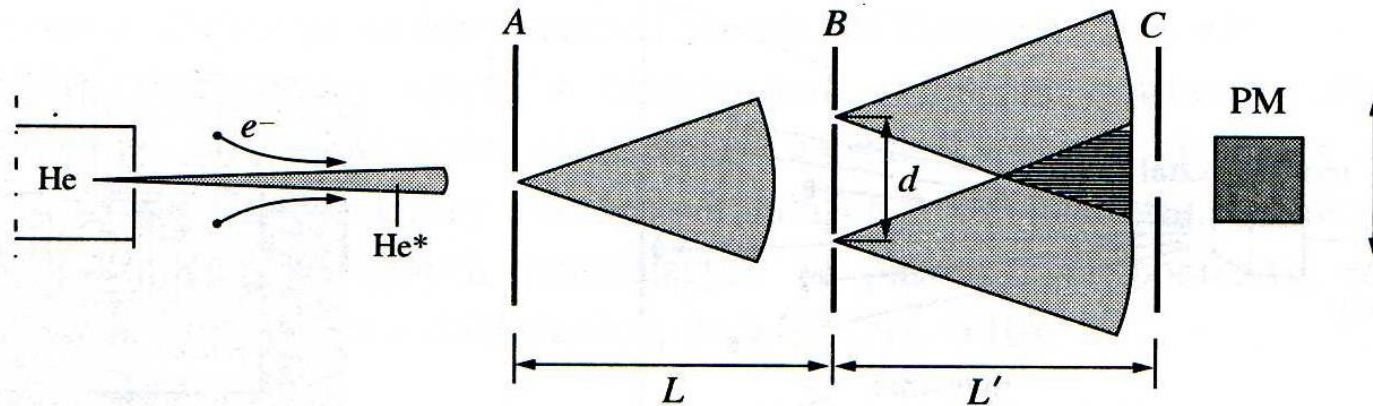
$$E = 1.9 \times 10^4 \text{ eV}$$



włókno ma dodatni potencjał



Interferencja atomów



He – dysza wytwarzająca strugę helu
A – szczelina $2 \mu\text{m}$
B – 2 szczeliny $1 \mu\text{m}$ odległe o $8 \mu\text{m}$
PM - fotopowielacz

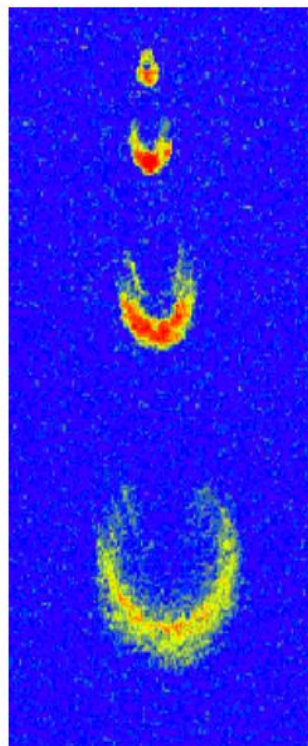
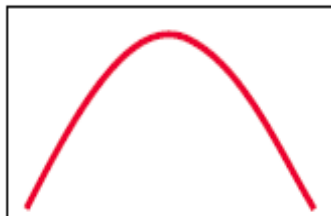
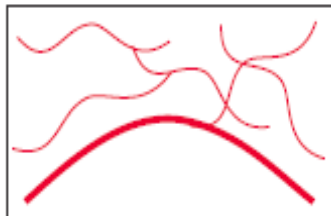
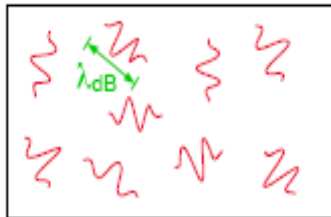
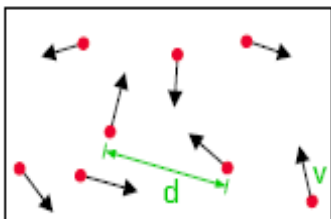
O. Carnal, J. Mlynek, PRL **66**, 2689 (1991)

Physical
Review
Letters

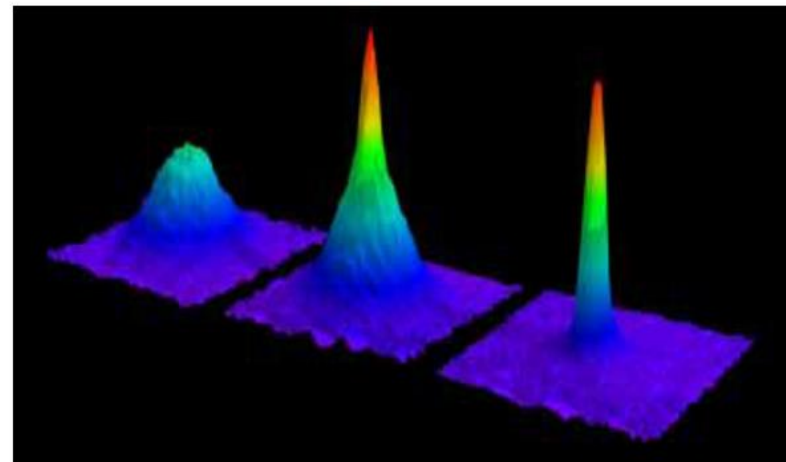
BEC - fale materii

Kondensat Bosego-Einsteina (ang. Bose – Einstein Condensate BEC)

$$\lambda = 12\mu m \Leftrightarrow \rho \cong 6 \times 10^8 cm^{-3}$$

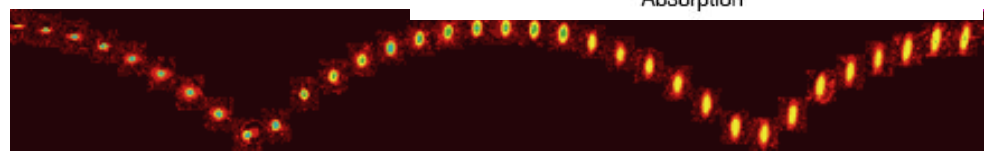
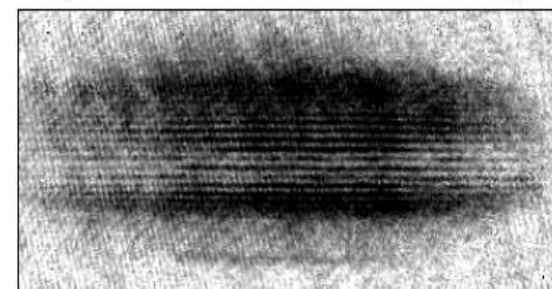


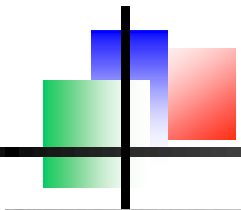
„laser” atomowy



tworzenie kondensatu
1 mm

interferencja 2
kondensatów

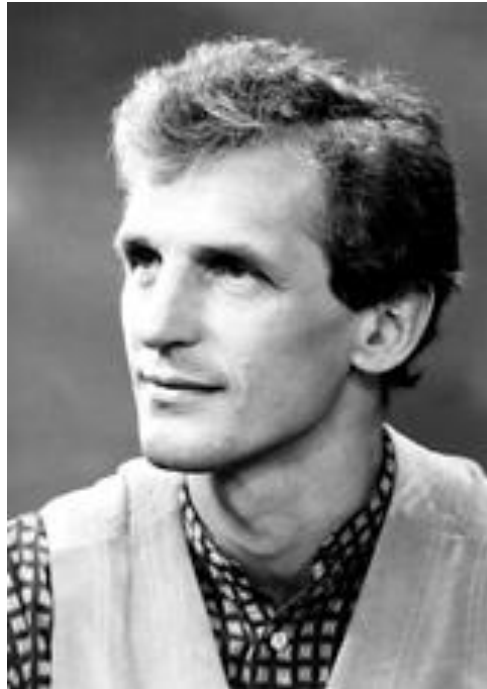




BEC - fale materii



Eric A. Cornell

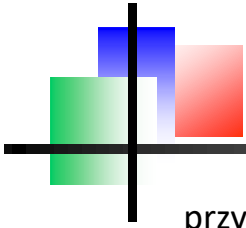


Wolfgang Ketterle



Carl E. Wieman

The Nobel Prize in Physics 2001 was awarded jointly to Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle and Carl E. Wieman *"for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates"*.



konsekwencje lokalizacji cząstki

przykład: elektron w atomie

$$E = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Założmy, że elektron krąży po orbicie o promieniu r .

Lokalizacja elektronu skutkuje rozmyciem jego

pędu – pęd nie może być mały. Z zasady nieoznaczoności

Heisenberga mamy: $\Delta p \geq \hbar/2\Delta x \cong \hbar/r$

Przyjmijmy: $p = \hbar/r$

wtedy:

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

szukamy minimum energii:

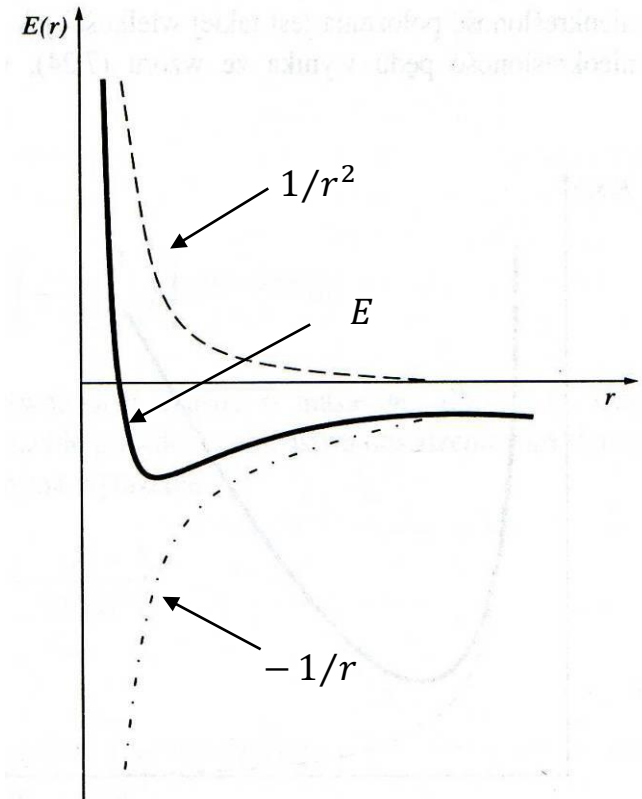
$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

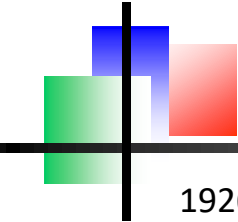
skąd

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

oraz

$$E_{min} = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}$$





Równanie Schrodingera, 1

1926 E. Schrodinger, cząstce przypisujemy zespoloną funkcję (funkcję falową) $\Psi(z, t)$

Postulaty:

1. Spełnione są równania :

długość fali de Broglie'a
częstość fali de Broglie'a

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \nu = E/h$$

2. Energia cząstki:

$$E = p^2/2m + V$$

3. Równanie musi być liniowe w Ψ - możliwa interferencja

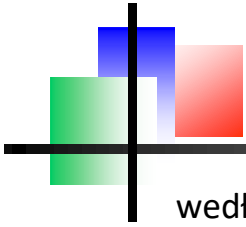
4. Dla $V = \text{const}$ dostajemy funkcję falową swobodnej cząstki $\Psi_{\text{sw}}(z, t) = e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z)}$

wyprowadzenie.....

ostatecznie, 1D r-nie Scrodingera to

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + V(z, t) \Psi = i\hbar \frac{d\Psi}{dt}$$

O poprawności r-nia Schrodingera wnioskujemy na podstawie zgodności jego przewidywań z doświadczeniem



Interpretacja funkcji falowej, 1

według M. Borna Rozważamy zagadnienie 1-D: $\Psi(z, t)$

Funkcja falowa $\Psi(z, t)$ kompletnie opisuje układ fizyczny – nie możemy mieć więcej informacji o układzie

gęstość prawdopodobieństwa

$$P(z, t) = |\Psi(z, t)|^2$$

interferencja

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, |\Psi|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2\text{Re}(\Psi_1 \Psi_2^*)$$

normalizacja f.f.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(z, t)|^2 dz = 1$$

prąd prawdopodobieństwa

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi \Psi^*) = \dots = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\hbar}{2im} \left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dz} - \frac{d\Psi^*}{dz} \Psi \right) \right]$$

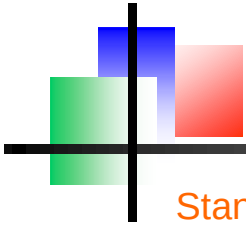
$$\frac{\partial}{\partial t} P(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} j(z, t) = 0$$

prąd prawdopodobieństwa

zachowanie prawdopodobieństwa

$$\int_{z_1}^{z_2} P(z, t) dz = \dots = j(z_1, t) - j(z_2, t)$$

Oczekujemy, że prąd prawdopodobieństwa będzie różniczkowalną funkcją zmiennych przestrzennych. Stąd wynika ciągłość funkcji falowej i jej pochodnych.



Interpretacja funkcji falowej, 2

Stany stacjonarne

Nadal rozważamy zagadnienie 1-D: $\Psi(z, t)$

Potencjał nie zależy o czasu. Załóżmy, że da się rozdzielić zmienne $\Psi(z, t) = \psi(z)f(t)$

Wstawiamy do r-nia Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} f + V(z)\psi f = i\hbar \psi \frac{df}{dt}$$

skąd mamy

$$\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + V\psi}{\psi} = \frac{i\hbar \frac{df}{dt}}{f}$$

Obie strony równania muszą być stałą. Nazwijmy ją E

dostajemy 2 równania:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + V\psi &= E\psi \\ i\hbar \frac{df}{dt} &= Ef \end{aligned}$$

Potrafiemy rozwiązać 2. r-nie:

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar} = e^{-i\omega t}$$

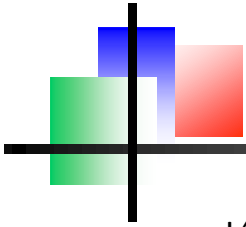
Porównując z funkcją falową swobodnej cząstki widzimy, że $E = \hbar\omega$ to energia cząstki

Ostatecznie:

$$\Psi(z, t) = \psi(z)e^{-iEt/\hbar}$$

$$|\Psi(z, t)|^2 = |\psi(z)|^2$$

← gęstość prawd. nie zależy od czasu – **stan stacjonarny**
o zadanej energii



Od rozwiązań stacjonarnych do dynamiki

załóżmy, że (dla danego układu) potrafimy znaleźć stany stacjonarne oraz opowiadające im energie $\psi_n(z), E_n$ gdzie n oznacza indeks bądź zbiór indeksów (niekoniecznie dyskretnych)
Wtedy wiemy, że:

$$\Psi_n(z, t) = \psi_n(z) e^{-iE_n t/\hbar}$$

Mechanika kwantowa dopuszcza superpozycje.

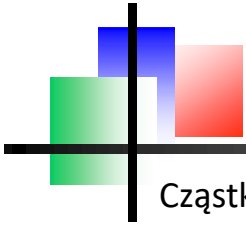
Rozważmy najprostszą z nich:

$$\Psi(z, t) = a_1 \psi_1(z) e^{-iE_1 t/\hbar} + a_2 \psi_2(z) e^{-iE_2 t/\hbar}$$

i policzmy gęstość prawdopodobieństwa

$$\begin{aligned} |\Psi(z, t)|^2 &= (a_1 \psi_1(z) e^{-iE_1 t/\hbar} + a_2 \psi_2(z) e^{-iE_2 t/\hbar}) (a_1^* \psi_1^*(z) e^{iE_1 t/\hbar} + a_2^* \psi_2^*(z) e^{iE_2 t/\hbar}) = \\ &= |a_1 \psi_1(z)|^2 + a_1^* a_2 \psi_1^*(z) \psi_2(z) e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} + a_2^* a_1 \psi_2^*(z) \psi_1(z) e^{-i(E_1 - E_2)t/\hbar} + |a_2 \psi_2(z)|^2 \end{aligned}$$

dudnienia z częstością $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$



nieskończona studnia 1-D, 1

Cząstka o masie m zamknięta w jednowymiarowym pudełku. Długość pudełka: a

$$V(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ \infty & \text{dla } |z| \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

Dla $|z| \geq \frac{a}{2}$ mamy $\psi(z) = 0$

W obszarze $-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$ trzeba znaleźć rozwiązanie r-nia

Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} = E\psi$$

czyli

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + k^2\psi = 0$$

gdzie $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

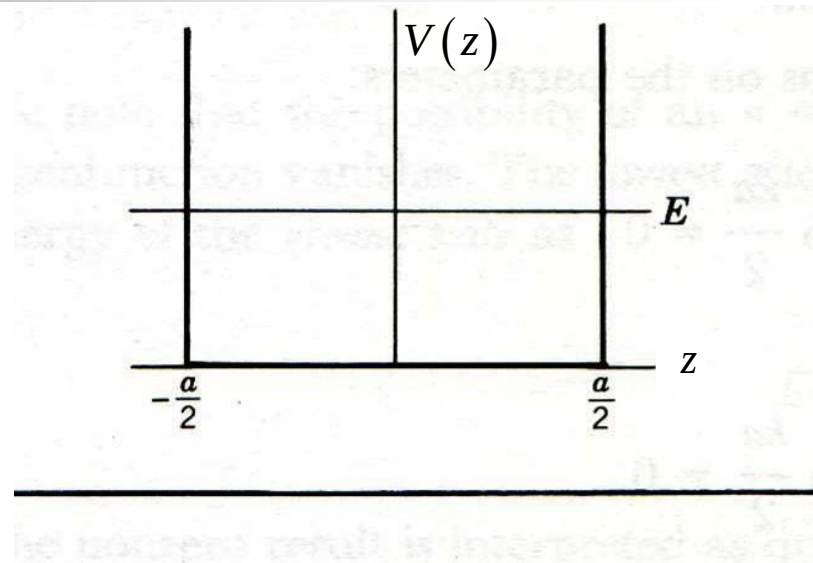
Rozwiązania to

$$\psi(z) = A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

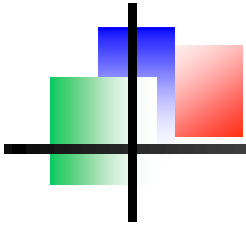
Funkcja falowa musi być ciągła:

$$A \cos(ka/2) + B \sin(ka/2) = 0$$

$$A \cos(-ka/2) + B \sin(-ka/2) = 0$$



Uwaga: w tym zagadnieniu nie żądamy ciągłości pochodnych f.f. bo mamy nieskończony skok potencjału



Nieskończona studnia 1-D, 2

$$\psi(z) = A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

+ równania ciągłości dają dyskretny zbiór funkcji falowych i energii cząstki

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi z}{a} \text{ dla } n = 1, 3, 5, \dots$$

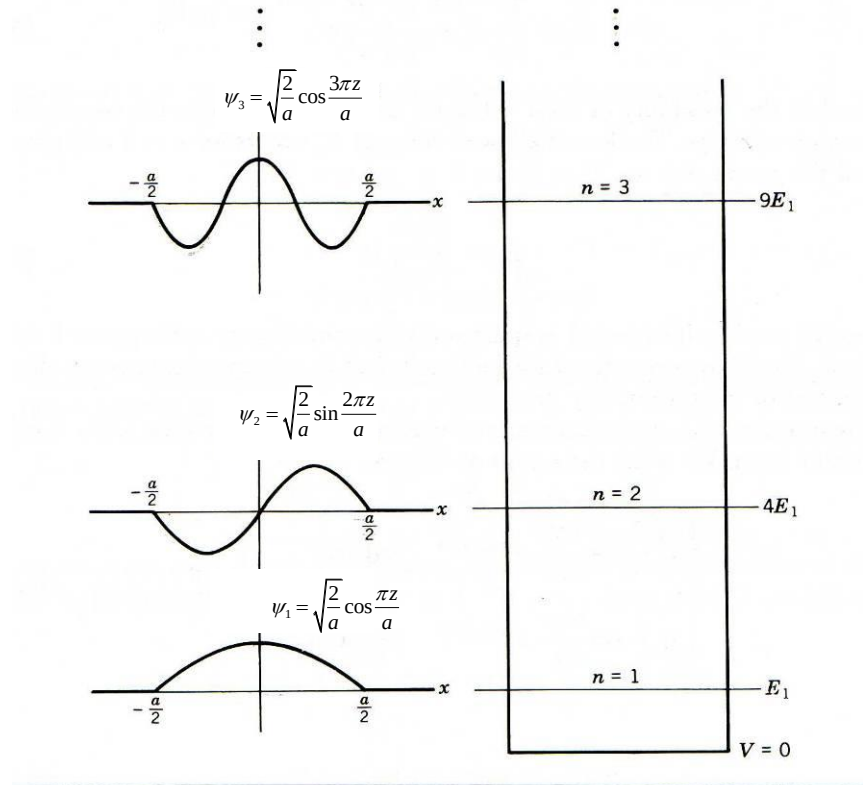
$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi z}{a} \text{ dla } n = 2, 4, 6, \dots$$

funkcje falowe są orto-normalne

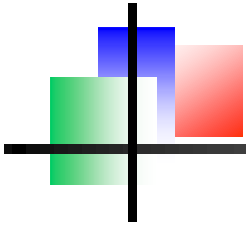
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m \psi_m^* dz = \delta_{nm}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2$$

$$E_n = n^2 E_1$$



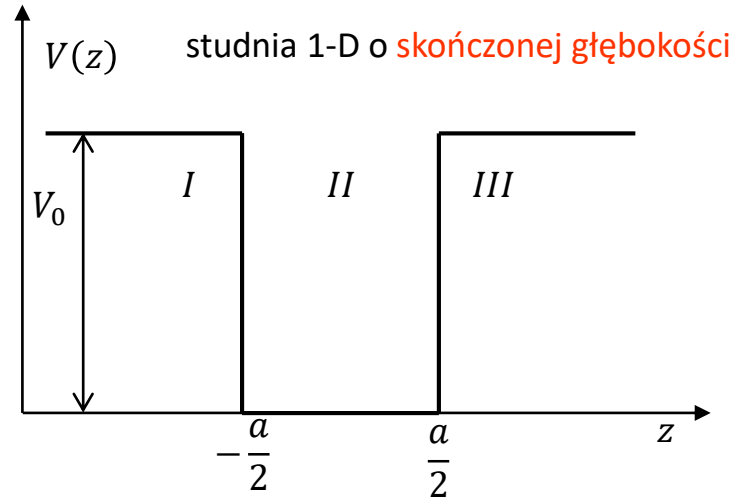
nieskończona liczba dyskretnych poziomów energetycznych



cząstka w jamie (o skończonej głębokości)

Cząstka o masie m umieszczona w jednowymiarowej jamie (studni) potencjału. Szerokość studni: a

$$V(z) = \begin{cases} V_0 & \text{dla } z \leq -\frac{a}{2} \\ 0 & \text{dla } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ V_0 & \text{dla } z \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

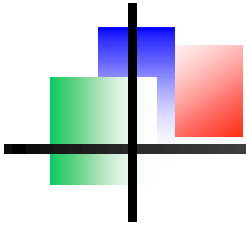


Rozważamy ruch cząstki oddzielnie w każdym z obszarów $I - III$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} = (E - V_0)\psi \quad z \leq -\frac{a}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} = E\psi \quad -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} = (E - V_0)\psi \quad z \geq \frac{a}{2} \quad (3)$$



cząstka w skończonej jamie, 2

W obszarze II korzystamy z gotowych rozwiązań dla nieskończenie głębokiej studni

$$\psi_{II}(z) = A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

W obszarach I i III mamy dwie możliwości

1. $E > V_0$ cząstka swobodna
2. $E < V_0$ cząstka uwięziona w jamie

Zajmiemy się przypadkiem 2.

W obszarze I r-nie Schrodingera:

$$\frac{d^2\psi_I}{dz^2} - \alpha^2\psi_I = 0$$

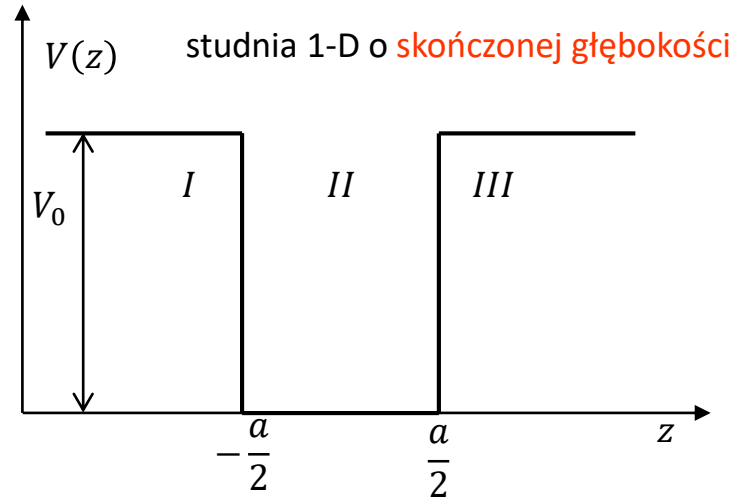
$$\text{gdzie } \alpha^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

ma rozwiązania wykładnicze

$$\psi_I(z) = Ce^{-\alpha z} + De^{\alpha z}$$

Analogicznie,

$$\psi_{III}(z) = Ee^{-\alpha z} + Fe^{\alpha z}$$



Wybieramy rozwiązania zanikające:

$$\psi_I(z) = De^{\alpha z}$$

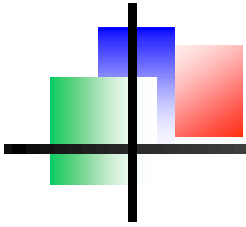
$$\psi_{III}(z) = Ee^{-\alpha z}$$

Żądamy ciągłości funkcji falowej i jej pochodnej na granicach obszarów

$$\psi_I(-a/2) = \psi_{II}(-a/2)$$

$$\left. \frac{d\psi_I}{dz} \right|_{-a/2} = \left. \frac{d\psi_{II}}{dz} \right|_{-a/2}$$

To samo dla granicy w $a/2$.



cząstka w skończonej jamie, 3

Dzielimy rozwiązania na parzyste i nieparzyste. Zajmiemy się pierwszymi. Ciągłość funkcji falowej i jej pochodnej w $-a/2$ daje

$$A \cos(-ka/2) = D e^{-\alpha a/2}$$

$$-kA \sin(-ka/2) = \alpha D e^{-\alpha a/2}$$

Dzieląc powyższe równaniami stronami dostajemy

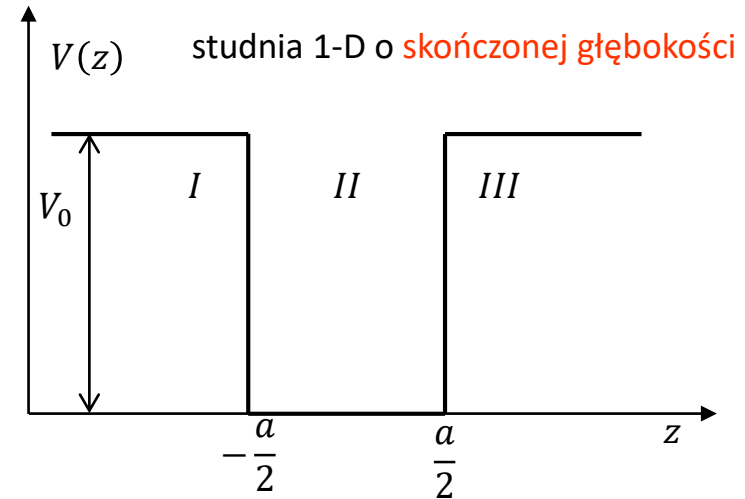
$$k \tan(ka/2) = \alpha$$

i przekształcamy do

$$(ka/2) \tan(ka/2) = \alpha a/2$$

Dla modów niesymetrycznych analogiczne rachunki dają

$$-(ka/2) \cot(ka/2) = \alpha a/2$$



Nowe, bezwymiarowe, zmienne:

$$u = \alpha a/2$$

$$v = ka/2$$

pozwalają zapisać równania wyżej w postaci

$$u = v \tan v$$

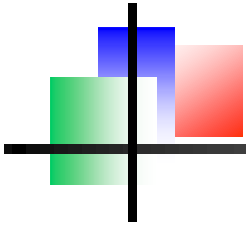
rozwiąz. symetryczne

$$u = -v \cot v$$

rozwiąz. niesymetryczne

Jednocześnie, z poprzedniej transparencji, wyliczamy

$$u^2 + v^2 = \frac{mV_0 a^2}{\hbar^2}$$



cząstka w skończonej jamie, 4

$$u^2 + v^2 = \frac{mV_0 a}{\hbar^2}$$

$$u = v \tan v$$

rozw. symetryczne

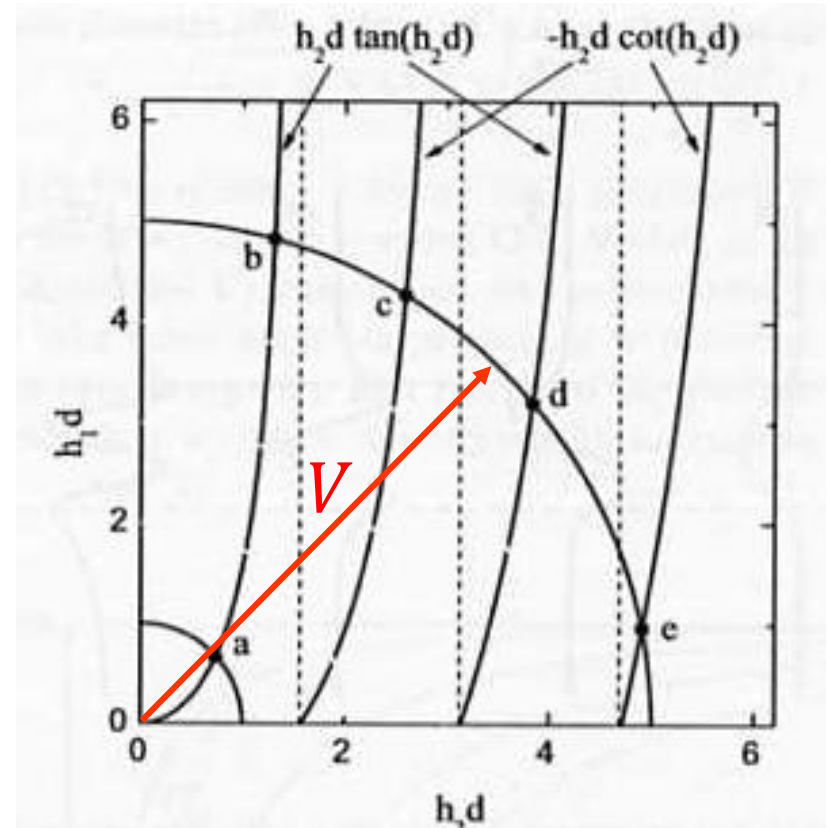
$$u = -v \cot v$$

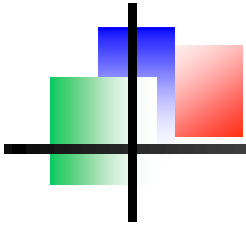
rozw. niesymetryczne

Taki zestaw równań już raz rozwiązywaliśmy przy okazji analizy dielektrycznego płaskiego falowodu symetrycznego (wykład 6). Wystarczy zrobić podstawienie $v \rightarrow h_2 d$, $u \rightarrow h_1 d$ oraz $\frac{mV_0 a}{\hbar^2} \rightarrow V$ aby skorzystać z gotowych rozwiązań...

Wnioski:

1. Liczba rozwiązań n_{max} jest zawsze skończona i zależy od wartości parametru $\frac{mV_0 a}{\hbar^2}$. W szczególności dla $\frac{mV_0 a}{\hbar^2} < \frac{\pi}{2}$ istnieje tylko jedno rozwiązanie – pojedynczy stan związany w studni.
2. Rozwiązania możemy ponumerować poczynając od 1 do n_{max}
3. Energie kolejnych stanów rosną numerem indeksu

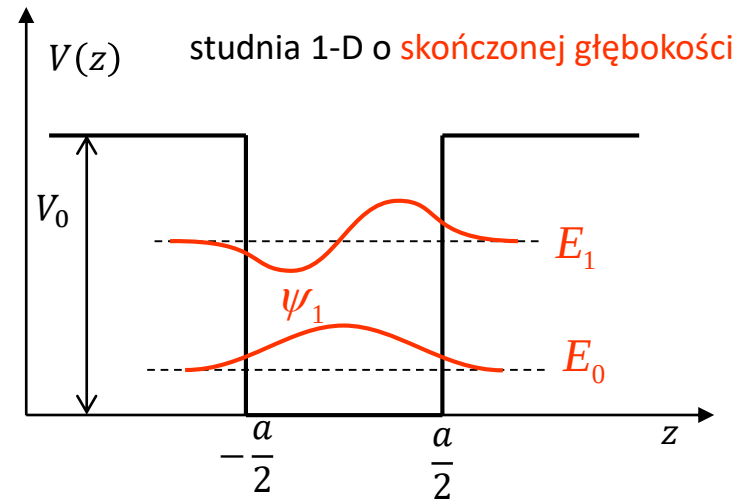


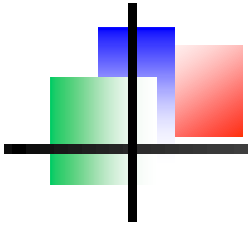


cząstka w skończonej jamie, 5

Wnioski:

1. Funkcja falowa cząstki „wypełnia” jamę potencjału – cząstka jest równocześnie w całej jamie choć prawdopodobieństwo znalezienia jej w poszczególnych obszarach nie jest takie samo.
2. Funkcje falowe mają niezerową amplitudę także w obszarach gdzie $E < V_0$. W obrazie klasycznym nie ma takiej możliwości.
3. Głębokość „wnikania” funkcji falowej w obszar klasycznie zabroniony jest różna dla różnych rozwiązań – generalna zasada: im bliżej V_0 jest energia cząstki tym głębiej penetruje ona obszary poza studnią

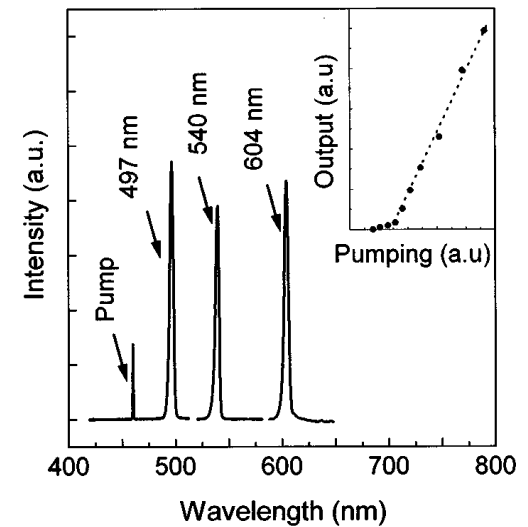
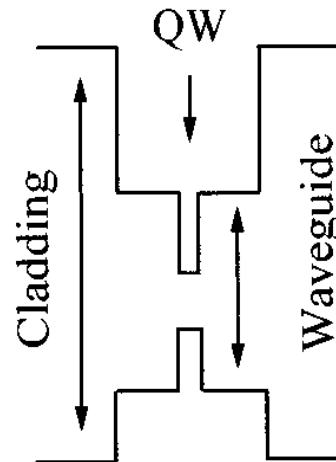




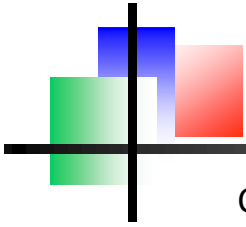
Półprzewodnikowe studnie kwantowe

Przykład: laser na studniach kwantowych

ZnSe cap layer
ZnCdMgSe cladding
ZnCdMgSe guiding
ZnCdSe QW
ZnCdMgSe guiding
ZnCdMgSe cladding
III-V buffer layer
InP substrate



L. Zeng, et al. APL 72 3136-3138 (1998)



Nieskończona studnia 3-D, 1

Cząstka o masie m zamknięta w prostopadłościennym pudełku o wymiarach $a \times b \times c$

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}, -\frac{c}{2} < z < \frac{c}{2} \\ \infty & \text{wszędzie indziej} \end{cases}$$

Funkcja falowa zeruje się poza pudełkiem. Wewnątrz pudełka szukamy rozwiązań iloczynowych

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$$

Wstawiamy do r-nia Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi$$

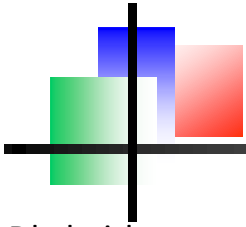
i przekształcamy do

$$\frac{1}{\psi_x} \frac{d^2\psi_x}{dx^2} + \frac{1}{\psi_y} \frac{d^2\psi_y}{dy^2} + \frac{1}{\psi_z} \frac{d^2\psi_z}{dz^2} + k^2 = 0$$

gdzie, ponownie, $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Ostatnia równość jest równoważna 3 r-niom

$$\frac{d^2\psi_i}{dx^2} + k_i^2\psi_i = 0, \quad i = x, y, z, \quad \sum_i k_i^2 = k^2$$



Nieskończona studnia 3-D, 2

Dla każdego wymiaru stosujemy znane rozwiązania studni 1-D:

$$\psi_{xl}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{l\pi x}{a} \quad \text{dla } l = 1, 3, 5, \dots$$

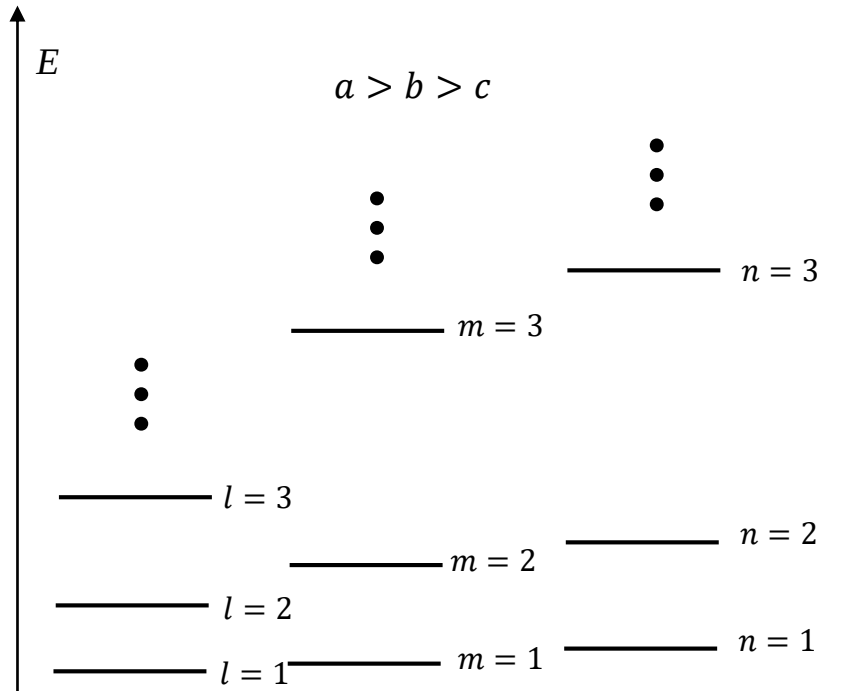
$$\psi_{xl}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{l\pi x}{a} \quad \text{dla } l = 2, 4, 6, \dots$$

$$\psi_{ym}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad \text{dla } m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\psi_{ym}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad \text{dla } m = 2, 4, 6, \dots$$

$$\psi_{zn}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \cos \frac{n\pi z}{c} \quad \text{dla } n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\psi_{zn}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{n\pi z}{c} \quad \text{dla } n = 2, 4, 6, \dots$$



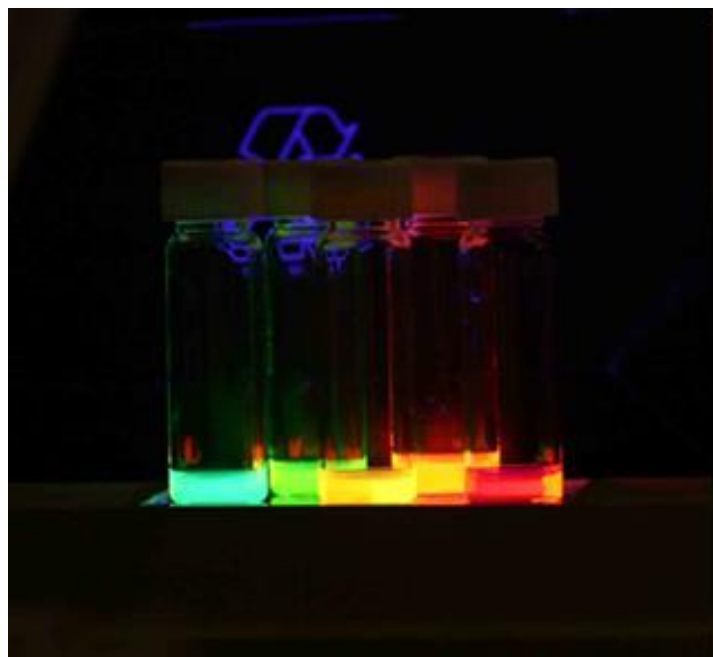
$$\psi_{lmn}(x, y, z) = \psi_{xl}(x) \psi_{ym}(y) \psi_{zn}(z)$$

$$E_{lmn} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right)$$

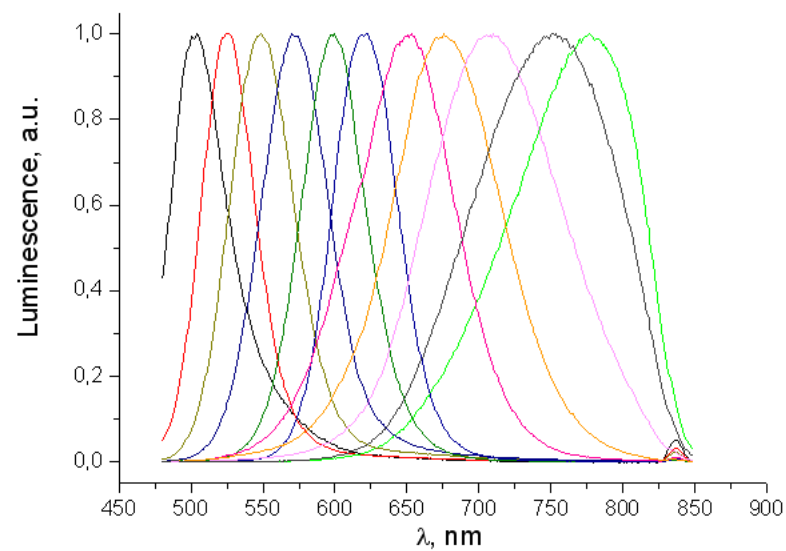
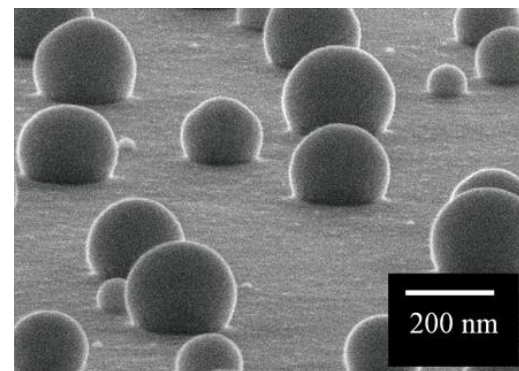
układ jest opisany przez 3 liczby kwantowe
 $l, m, n = 1, 2, 3 \dots$

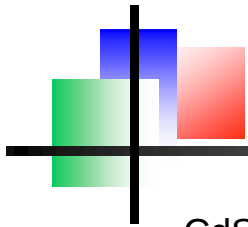
kropki kwantowe, 1

Studnia 3-D o skończonej głębokości

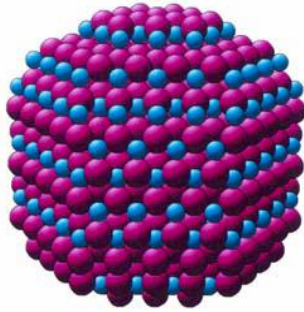


Im mniejsze kropki kwantowe tym
bardziej niebieskie świecenie

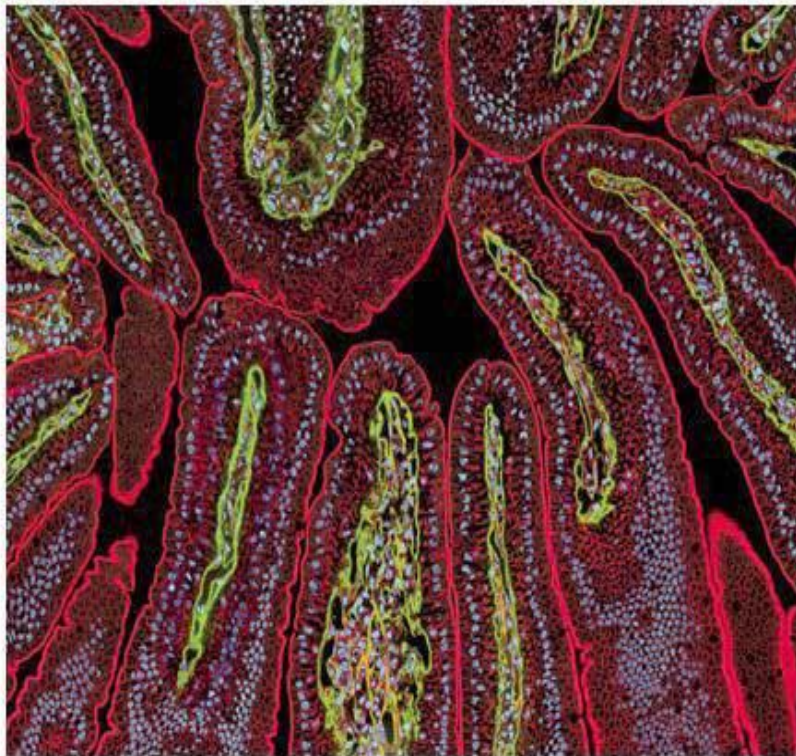
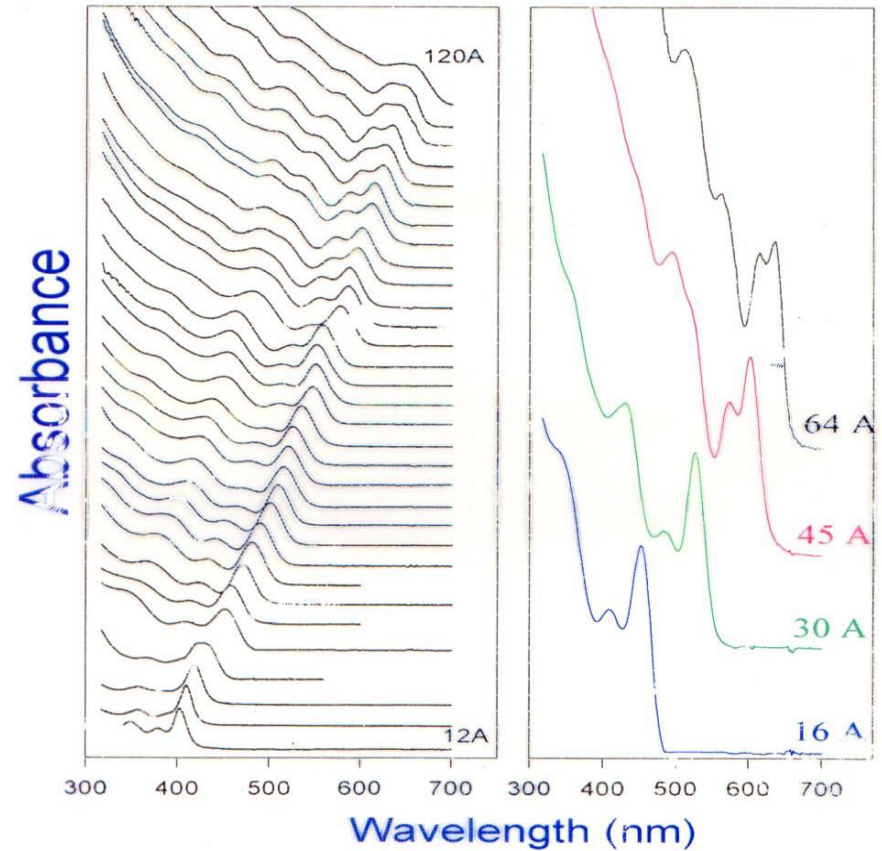




kropki kwantowe, 2

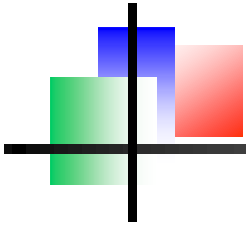


CdSe Size Dependent Absorbance



jelito myszy, różne markery:

- actina
- laminina
- jądro komórki
- czerwony
- zielony
- niebieski



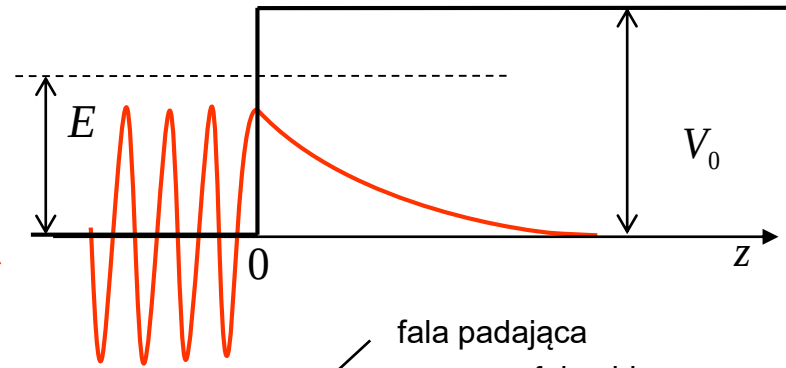
Schodek potencjału

cząstka pada od lewej strony na barierę potencjału. Oddzielnie wypisujemy r-nie Schrodingera dla obu obszarów

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + k_1^2\psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - k_2^2\psi = 0$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0, \quad k_2^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} > 0$$



$$\psi(z) = \begin{cases} Ae^{ik_1z} + Be^{-ik_1z} & \text{dla } z < 0 \\ Ce^{-k_2z} & \text{dla } z > 0 \end{cases}$$

fala padająca
fala obita
penetracja bariery (fala ewanescencyjna)

Ciągłość f.f. i jej pochodnej

$$A + B = C$$

$$ik_1(A - B) = -k_2C$$



$$B = \frac{1 - i\frac{k_1}{k_2}}{1 + i\frac{k_1}{k_2}}$$



$$|B|^2 = |A|^2$$

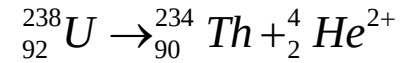
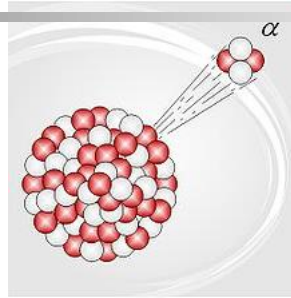
cząstka odbija się od schodka

głębokość wnikania $\cong 1/k_2$

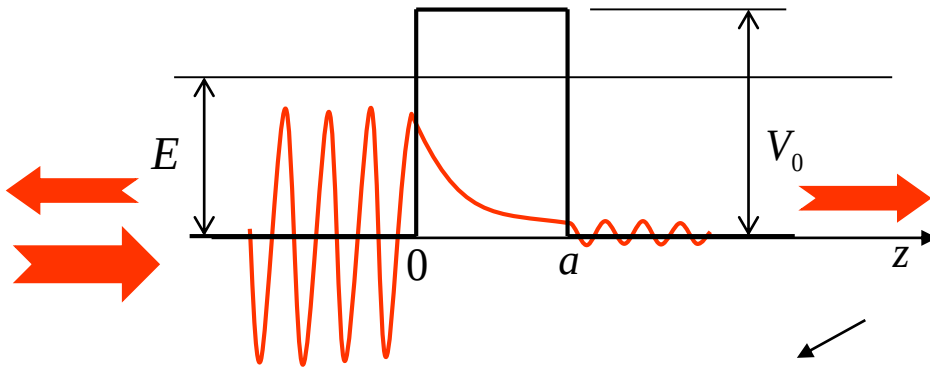
analogia z całkowitym wewn. odbiciem (wykład 5)

tunelowanie

1928 G. Gamov, emisja α



$$\alpha \equiv {}_2^4\text{He}^{2+}$$



rozwiązania:
$$\psi(z) = \begin{cases} Ae^{ik_1 z} + Be^{-ik_1 z} & \text{dla } z < 0 \\ Ce^{-k_2 z} & \text{dla } 0 < z < a \\ A'e^{ik_1 z} + B'e^{-ik_1 z} & \text{dla } z > a \end{cases}$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

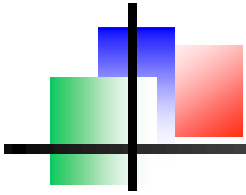
$$k_2^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

ciągłość f.f. i jej 1. pochodnej + rachunki...

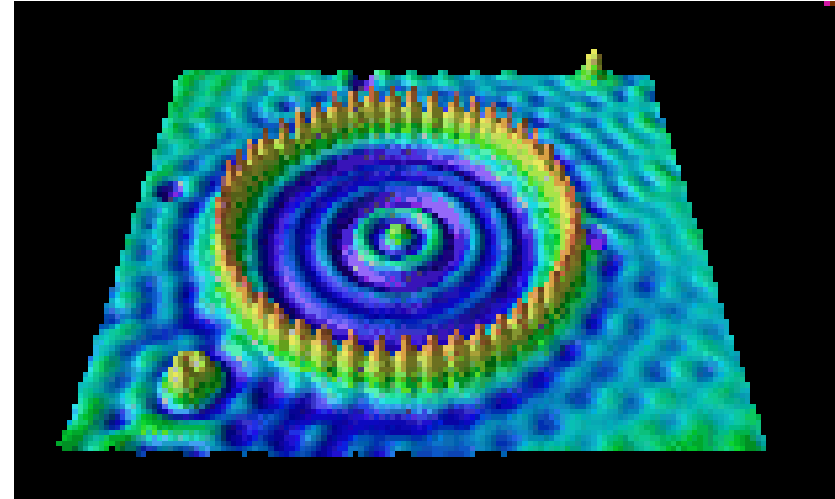
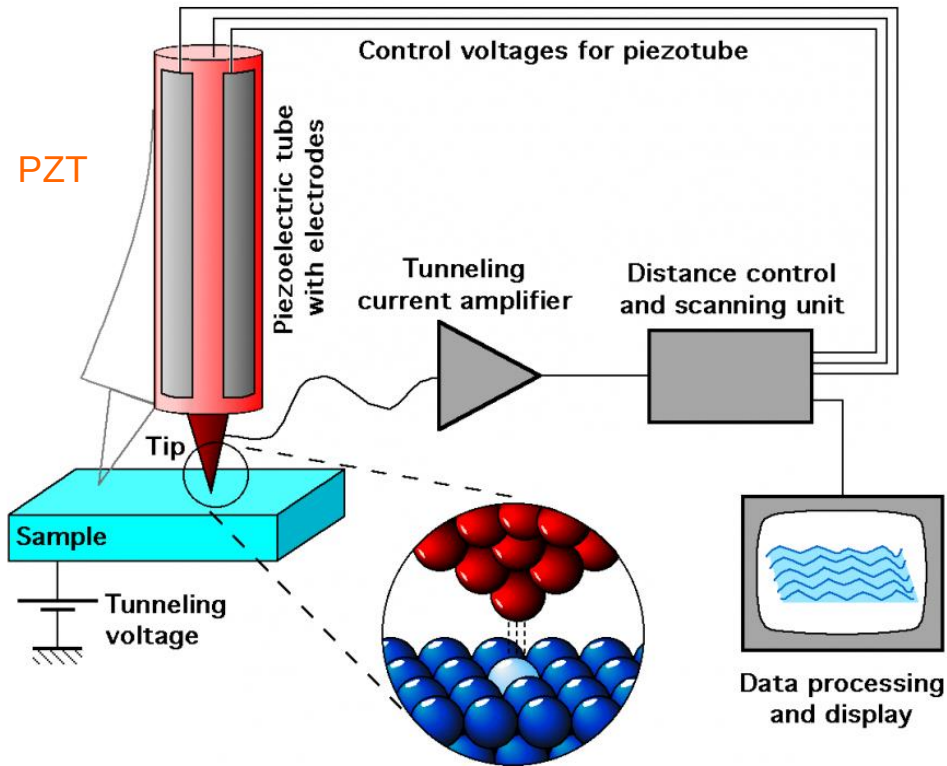
$$T = \left| \frac{A'}{A} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right)^2 \sinh^2(k_2 a)}$$

Słabe tunelowanie $k_2 a \gg 1$

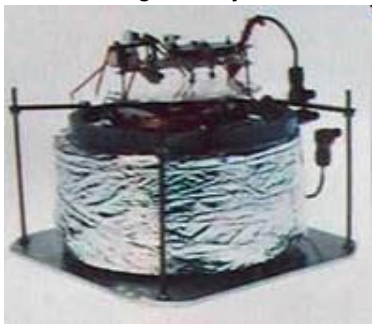
$$T \cong 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) e^{-2k_2 a}$$



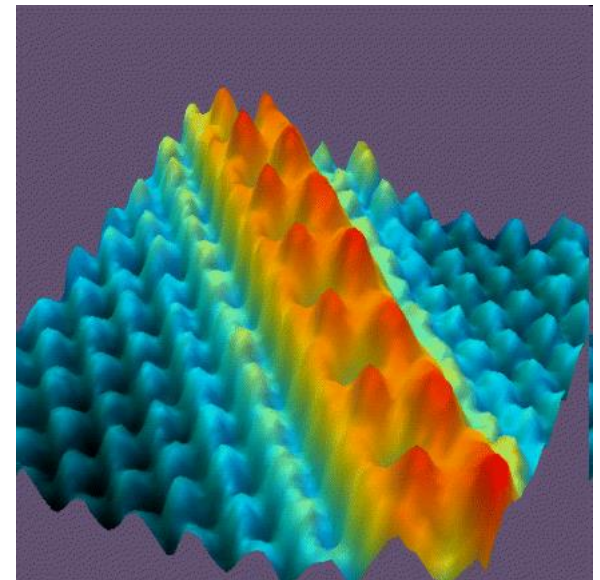
Scanning Tunelling Microscope (STM)



1. generacja

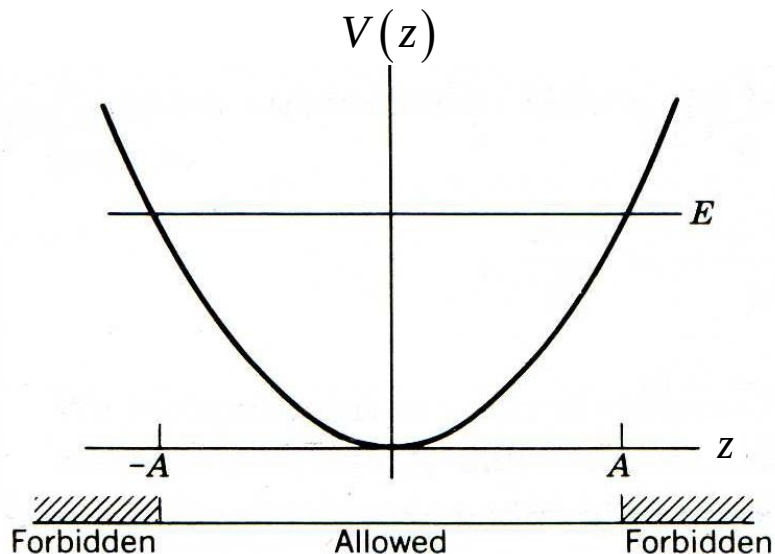
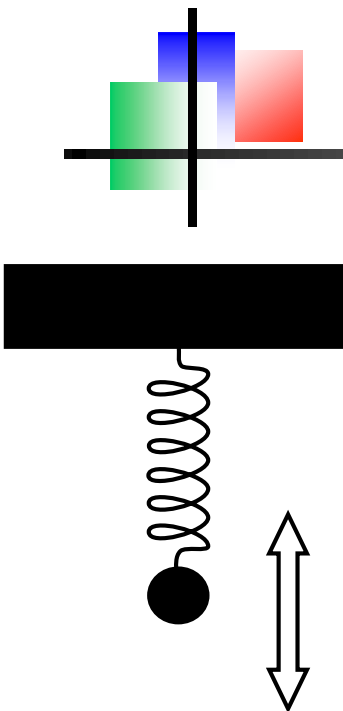


4. generacja



Czerwone - atomy Cs na GaAs (110) - niebieskie

oscylator harmoniczny, klasyczny



Potencjał i siła

$$V(z) = \frac{K}{2} z^2$$

$$F(z) = -\frac{dV}{dz} = -Kz$$

Równanie ruchu

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -Kz$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0, \omega^2 = \frac{K}{m}$$

Rozwiązanie

$$z(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

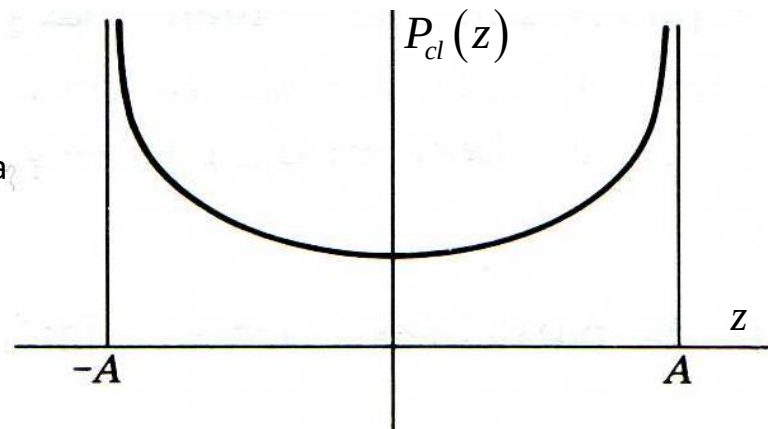
$$v(t) = \frac{dz}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

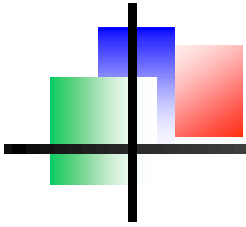
energia

$$E = \frac{m}{2} v^2 + \frac{K}{2} z^2 = \frac{K}{2} A^2$$

gęstość prawdopodobieństwa

$$P_{cl} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - z^2}}$$





oscylator harmoniczny, kwantowy, 1

Stacjonarne równanie Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{K}{2} z^2 \psi = E\psi$$

$$-\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{\omega^2}{\hbar^2} z^2 \psi = \frac{2mE}{\hbar^2} \psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = (\zeta^2 - \lambda)\psi, \quad \zeta^2 = \frac{m\omega}{\hbar} z, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

Potencjał

$$V(z) = \frac{K}{2} z^2$$

Rozwiązania:

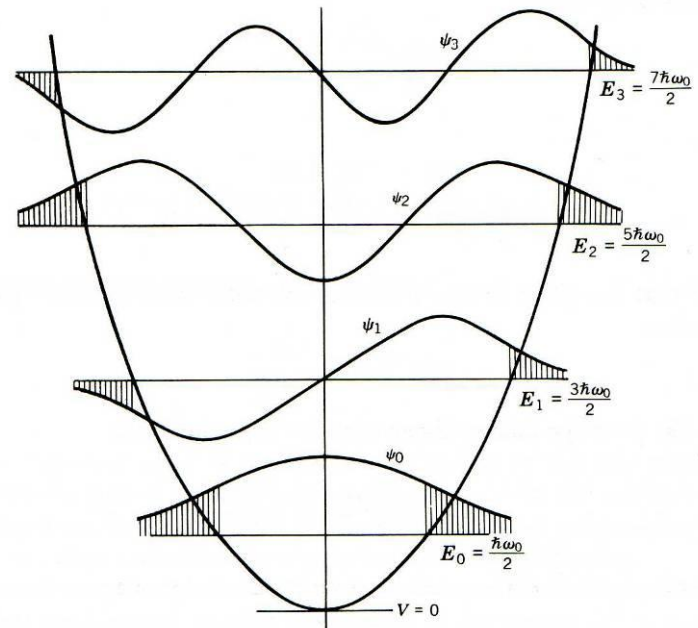
$$\psi_n(\zeta) = H_n(\zeta) e^{-\frac{\zeta^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

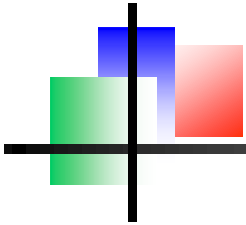
↑
wielomian Hermite'a

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

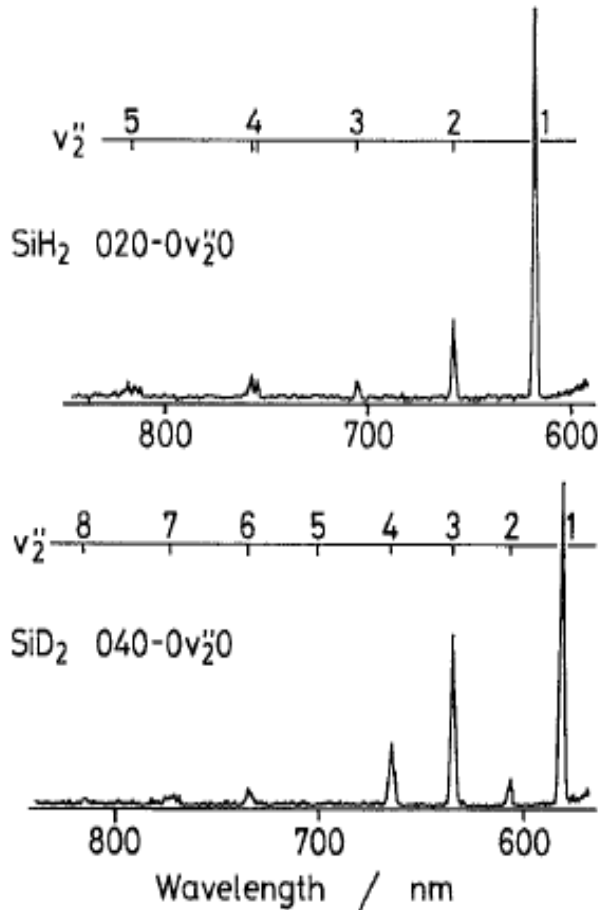
Normalizacja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(\zeta) \psi_m^*(\zeta) d\zeta = \delta_{nm}$$



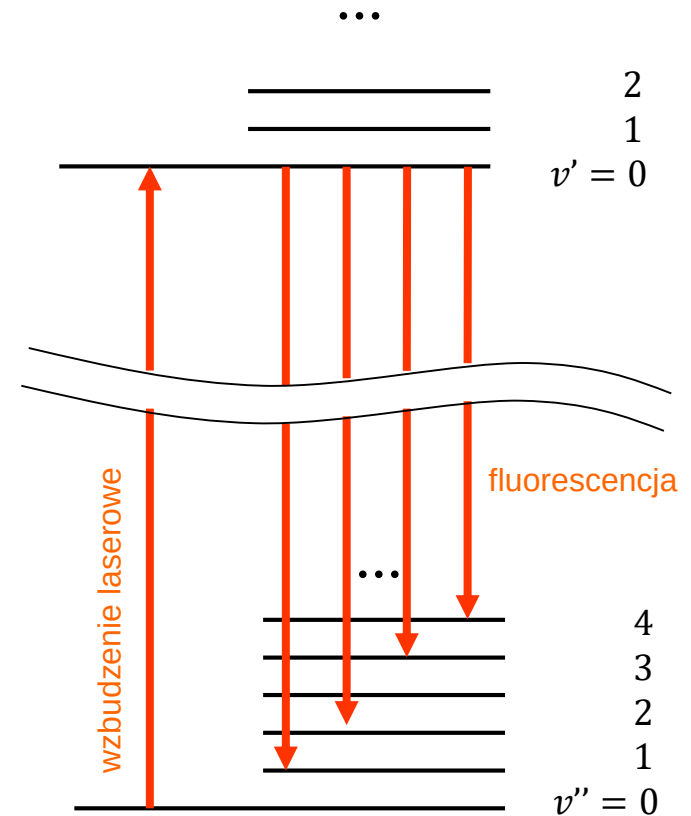


oscylator harmoniczny, kwantowy, 2



SiH₂

SiD₂



$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$