

Podstawy Fizyki III

Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 26, 18.01.2018

wykład:

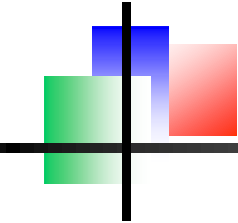
Czesław Radzewicz

pokazy:

Mateusz Winkowski, Łukasz Zinkiewicz

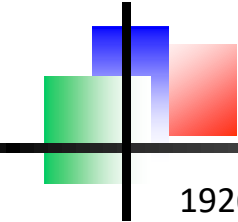
ćwiczenia:

Radosław Łapkiewicz



Wykład 25 - przypomnienie

- promienienie katodowe i anodowe
- promienie Roentgena, dyfrakcja na kryształach
- fale materii – hipoteza de Broglie'a



Równanie Schrodingera, 1

1926 E. Schrödinger, cząstce przypisujemy zespoloną funkcję (funkcję falową) $\Psi(z, t)$

Postulaty:

1. Spełnione są równania :

długość fali de Broglie'a
↙ ↘
 $\lambda = \frac{h}{p} \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} \right), \quad \nu = E/h$
↖ ↗
częstość fali de Broglie'a

2. Energia cząstki:

$$E = p^2/2m + V$$

3. Równanie musi być liniowe w Ψ - możliwa interferencja

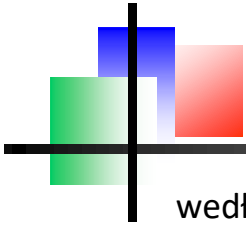
4. Dla $V = \text{const}$ dostajemy funkcję falową swobodnej cząstki $\Psi_{\text{sw}}(z, t) = e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z)}$

wyprowadzenie.....

ostatecznie, 1D r-nie Scrodingera to

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + V(z, t) \Psi = i\hbar \frac{d\Psi}{dt}$$

o poprawności r-nia Schrodingera wnioskujemy na podstawie zgodności jego przewidywań z doświadczeniem



Interpretacja funkcji falowej, 1

według M. Borna Rozważamy zagadnienie 1-D: $\Psi(z, t)$

Funkcja falowa $\Psi(z, t)$ kompletnie opisuje układ fizyczny – nie możemy mieć więcej informacji o układzie

gęstość prawdopodobieństwa $P(z, t) = |\Psi(z, t)|^2$

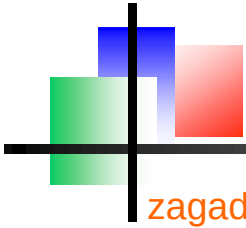
interferencja $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, |\Psi|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2\text{Re}(\Psi_1 \Psi_2^*)$

normalizacja f.f. $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(z, t)|^2 dz = 1$

prąd prawdopodobieństwa
$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi \Psi^*) = \dots = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\hbar}{2im} \left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dz} - \frac{d\Psi^*}{dz} \Psi \right) \right]$$
$$\frac{\partial}{\partial t} P(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} j(z, t) = 0$$

prąd prawdopodobieństwa

Oczekujemy, że prąd prawdopodobieństwa będzie różniczkowalną funkcją zmiennych przestrzennych. Stąd wynika ciągłość funkcji falowej i jej pochodnych.



Interpretacja funkcji falowej, 2

zagadnienie stacjonarne

Nadal rozważamy przypadek 1-D: $\Psi(z, t)$

Potencjał nie zależy o czasu. Załóżmy, że da się rozdzielić zmienne: $\Psi(z, t) = \psi(z)f(t)$

Wstawiamy do r-nia Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} f + V(z)\psi f = i\hbar \psi \frac{df}{dt}$$

skąd mamy

$$\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + V\psi}{\psi} = \frac{i\hbar \frac{df}{dt}}{f}$$

Obie strony równania muszą być stałą. Nazwijmy ją E

dostajemy 2 równania:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + V\psi &= E\psi \\ i\hbar \frac{df}{dt} &= Ef \end{aligned}$$

Potrafimy rozwiązać 2. r-nie:

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar} = e^{-i\omega t}$$

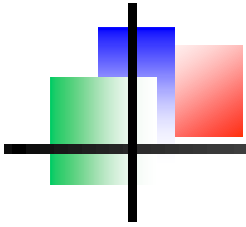
Porównując z funkcją falową swobodnej cząstki widzimy, że $E = \hbar\omega$ to energia cząstki

Ostatecznie:

$$\Psi(z, t) = \psi(z)e^{-iEt/\hbar}$$

$$|\Psi(z, t)|^2 = |\psi(z)|^2$$

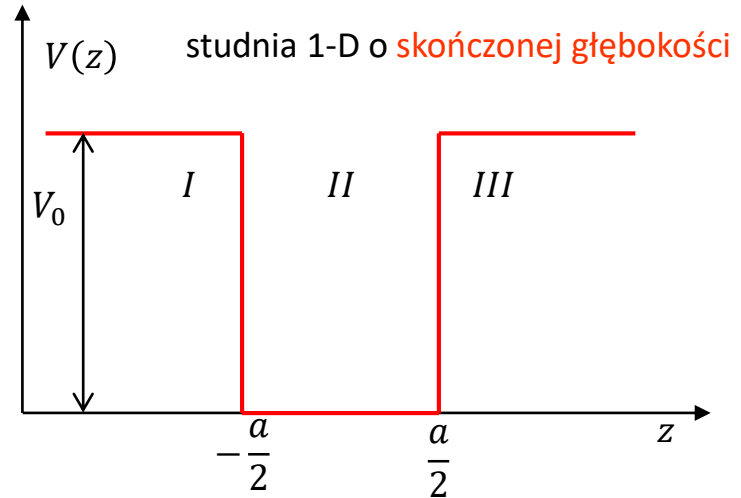
← gęstość prawd. nie zależy od czasu – **stan stacjonarny**
o zadanej energii



cząstka w jamie (o skończonej głębokości)

Cząstka o masie m umieszczona w jednowymiarowej jamie (studni) potencjału. Szerokość studni: a

$$V(z) = \begin{cases} V_0 & \text{dla } z \leq -\frac{a}{2} \\ 0 & \text{dla } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ V_0 & \text{dla } z \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$



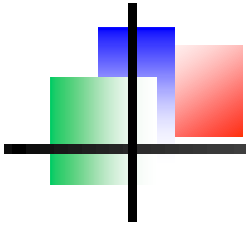
r-nie Schrodingera: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + V\psi = E\psi$

Rozważamy ruch cząstki oddzielnie w każdym z obszarów I – III

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dz^2} = (E - V_0)\psi \quad z \leq -\frac{a}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dz^2} = E\psi \quad -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dz^2} = (E - V_0)\psi \quad z \geq \frac{a}{2} \quad (3)$$



cząstka w skończonej jamie, 2

W obszarze II mamy

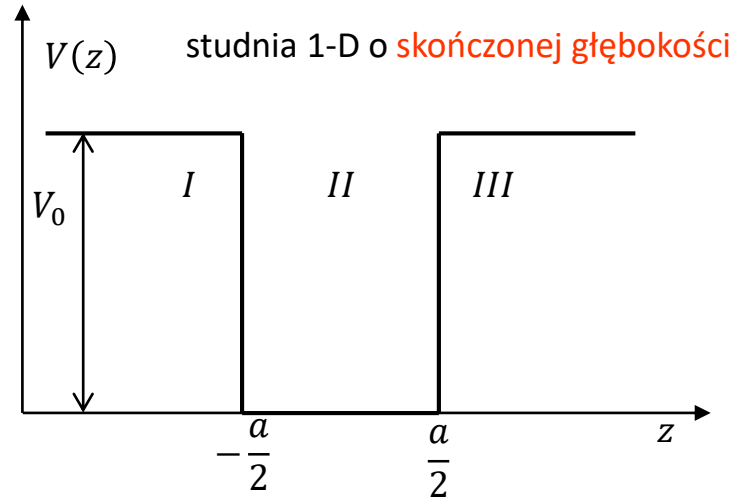
$$\psi_{II}(z) = A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

gdzie $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

W obszarach I i III mamy dwie możliwości

1. $E > V_0$ cząstka swobodna
2. $E < V_0$ cząstka uwięziona w jamie

Zajmiemy się przypadkiem 2.



W obszarze I r-nie Schrodingera:

$$\frac{d^2\psi_I}{dz^2} - \alpha^2\psi_I = 0$$

gdzie $\alpha = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$

ma rozwiązania wykładnicze

$$\psi_I(z) = C e^{-\alpha z} + D e^{\alpha z}$$

Analogicznie,

$$\psi_{III}(z) = E e^{-\alpha z} + F e^{\alpha z}$$

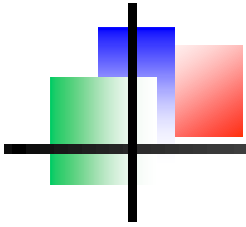
Wybieramy rozwiązania zanikające:

$$\begin{aligned}\psi_I(z) &= D e^{\alpha z} \\ \psi_{III}(z) &= E e^{-\alpha z}\end{aligned}$$

Żądamy ciągłości funkcji falowej i jej pochodnej na granicach obszarów

$$\begin{aligned}\psi_I(-a/2) &= \psi_{II}(-a/2) \\ \left. \frac{d\psi_I}{dz} \right|_{-a/2} &= \left. \frac{d\psi_{II}}{dz} \right|_{-a/2}\end{aligned}$$

To samo dla granicy w $a/2$.



cząstka w skończonej jamie, 3

Dzielimy rozwiązania na parzyste i nieparzyste. Zajmiemy się pierwszymi. Ciągłość funkcji falowej i jej pochodnej w $a/2$ daje

$$A \cos(ka/2) = D e^{-\alpha a/2}$$
$$-kA \sin\left(\frac{ka}{2}\right) = -\alpha D e^{-\alpha a/2}$$

Dzieląc powyższe r-nia stronami dostajemy

$$k \tan(ka/2) = \alpha$$

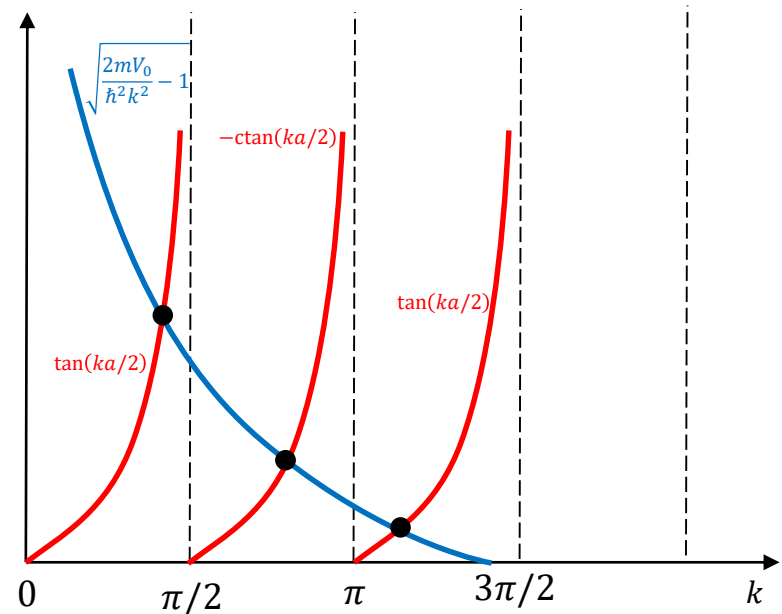
i przekształcamy do

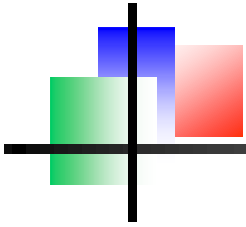
$$\tan(ka/2) = \frac{\alpha}{k} = \sqrt{\frac{V_0}{E} - 1} = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2 k^2} - 1}$$

Dla modów niesymetrycznych analogiczne rachunki dają

$$-\cot(ka/2) = \alpha/k$$

r-nia przestępne $\rightarrow$ rozwiązania numeryczne





cząstka w skończonej jamie, 4

Analogia do dielektrycznego płaskiego falowodu symetrycznego (wykład 6).

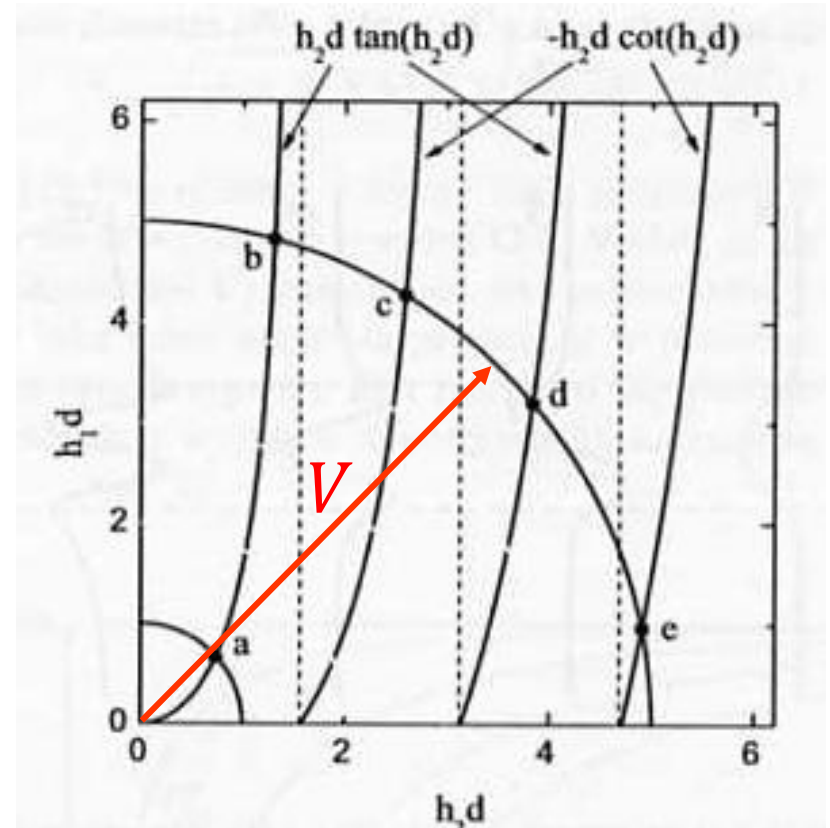
$$u^2 + v^2 = V$$

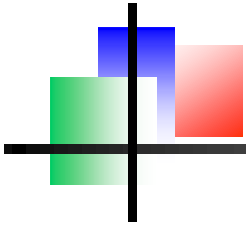
$$u = v \tan v$$

$$u = -v \cot v$$

rozw. symetryczne

rozw. niesymetryczne

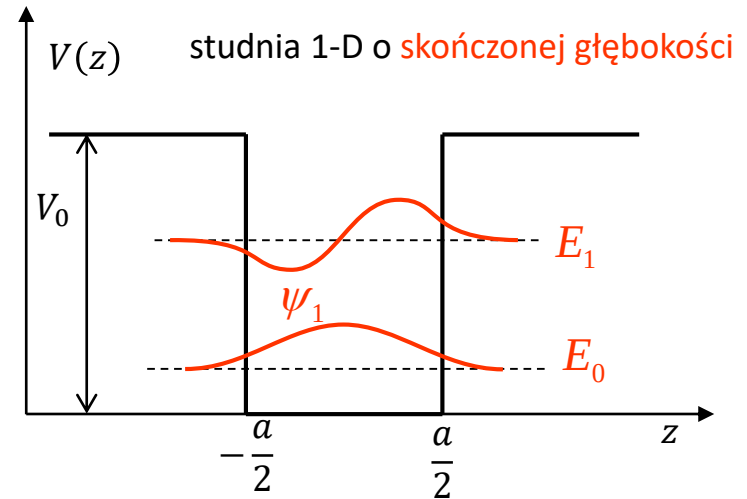




cząstka w skończonej jamie, 5

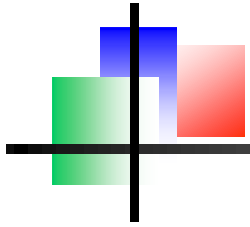
Wnioski 1:

1. Liczba rozwiązań n_{max} jest zawsze skończona i zależy od wartości parametrów. W szczególności można dobrać parametry tak by istniało tylko jedno rozwiązanie – pojedynczy stan związany w studni.
2. Rozwiązania możemy ponumerować poczynając od 1 do n_{max} . Liczba n numerujące rozwiązania nazywana jest liczbą kwantową.
3. Energie kolejnych stanów rosną z numerem liczby kwantowej n .



Wnioski 2:

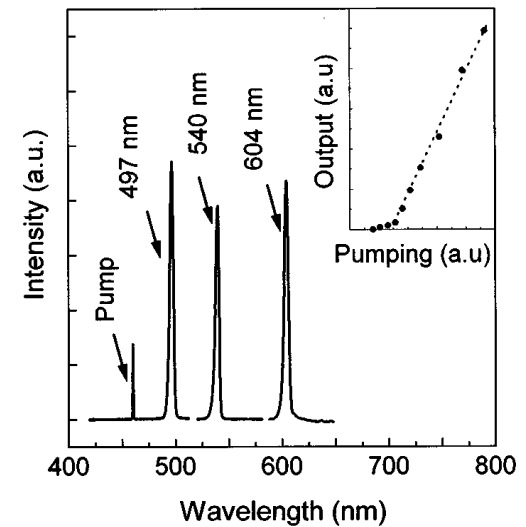
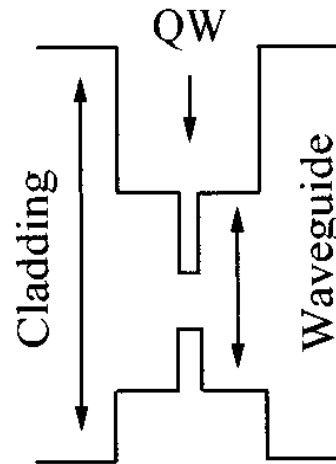
1. Funkcja falowa cząstki „wypełnia” jamę potencjału – cząstka jest równocześnie w całej jamie choć prawdopodobieństwo znalezienia jej w poszczególnych obszarach nie jest takie samo.
2. Funkcje falowe mają niezerową amplitudę także w obszarach gdzie $E < V_0$. W obrazie klasycznym nie ma takiej możliwości.
3. Głębokość „wnikania” funkcji falowej w obszar klasycznie zabroniony jest różna dla różnych rozwiązań – generalna zasada: im bliżej V_0 jest energia cząstki tym głębiej penetruje ona obszary poza studnią



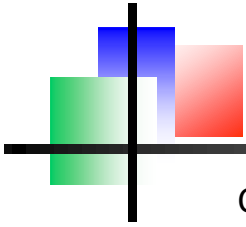
Półprzewodnikowe studnie kwantowe

Przykład: laser na studniach kwantowych

ZnSe cap layer
ZnCdMgSe cladding
ZnCdMgSe guiding
ZnCdSe QW
ZnCdMgSe guiding
ZnCdMgSe cladding
III-V buffer layer
InP substrate



L. Zeng, et al. APL 72 3136-3138 (1998)



Nieskończona studnia 3-D, 1

Cząstka o masie m zamknięta w prostopadłościennym pudełku o wymiarach $a \times b \times c$

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}, -\frac{c}{2} < z < \frac{c}{2} \\ \infty & \text{wszędzie indziej} \end{cases}$$

Funkcja falowa zeruje się poza pudełkiem. Wewnątrz pudełka szukamy rozwiązań iloczynowych

$$\psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$$

Wstawiamy do r-nia Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi$$

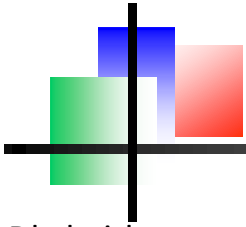
i przekształcamy do

$$\frac{1}{\psi_x} \frac{d^2\psi_x}{dx^2} + \frac{1}{\psi_y} \frac{d^2\psi_y}{dy^2} + \frac{1}{\psi_z} \frac{d^2\psi_z}{dz^2} + k^2 = 0$$

gdzie, ponownie, $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Ostatnia równość jest równoważna 3 r-niom

$$\frac{d^2\psi_i}{dx^2} + k_i^2\psi_i = 0, \quad i = x, y, z, \quad \sum_i k_i^2 = k^2$$



Nieskończona studnia 3-D, 2

Dla każdego wymiaru stosujemy znane rozwiązania studni 1-D:

$$\psi_{xl}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{l\pi x}{a} \quad \text{dla } l = 1, 3, 5, \dots$$

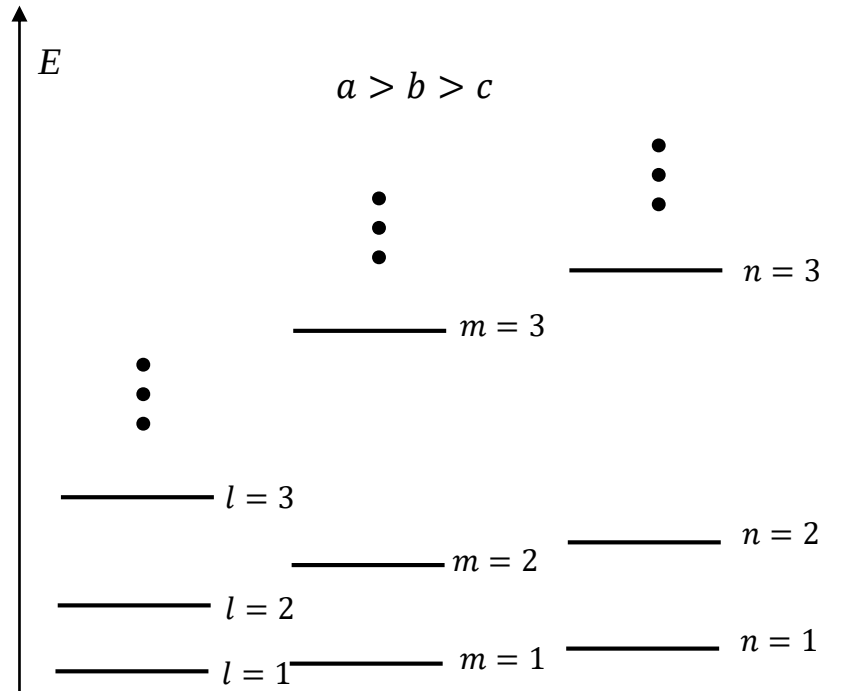
$$\psi_{xl}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{l\pi x}{a} \quad \text{dla } l = 2, 4, 6, \dots$$

$$\psi_{ym}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos \frac{m\pi y}{b} \quad \text{dla } m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\psi_{ym}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad \text{dla } m = 2, 4, 6, \dots$$

$$\psi_{zn}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \cos \frac{n\pi z}{c} \quad \text{dla } n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\psi_{zn}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{n\pi z}{c} \quad \text{dla } n = 2, 4, 6, \dots$$



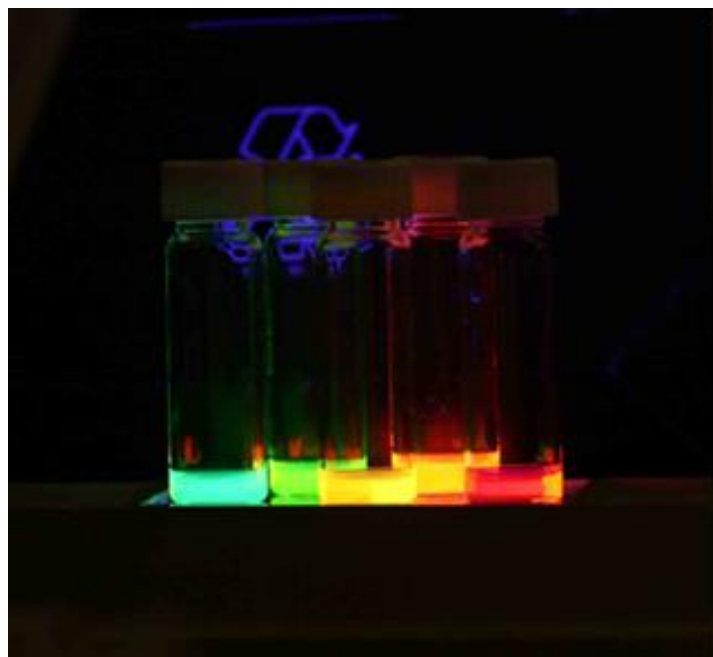
$$\psi_{lmn}(x, y, z) = \psi_{xl}(x) \psi_{ym}(y) \psi_{zn}(z)$$

$$E_{lmn} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right)$$

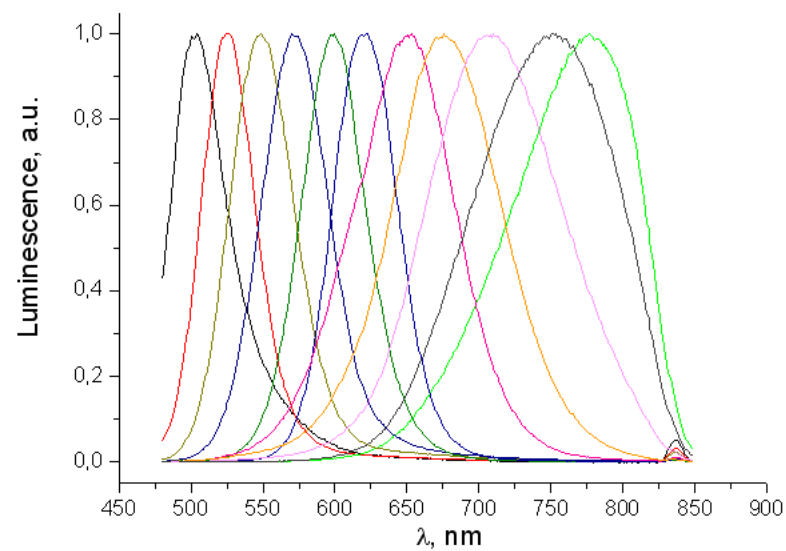
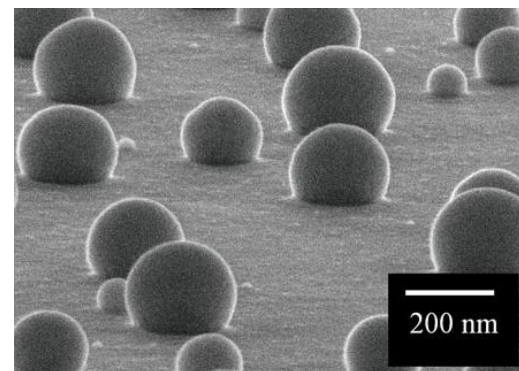
układ jest opisany przez 3 liczby kwantowe
 $l, m, n = 1, 2, 3 \dots$

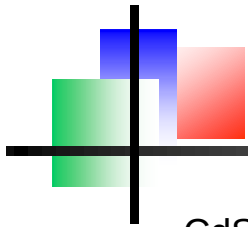
kropki kwantowe, 1

Studnia 3-D o skończonej głębokości

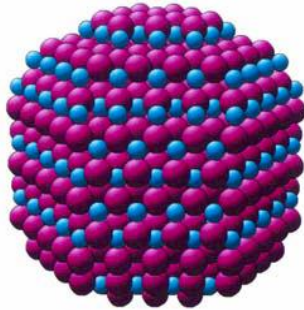


Im mniejsze kropki kwantowe tym
bardziej niebieskie świecenie

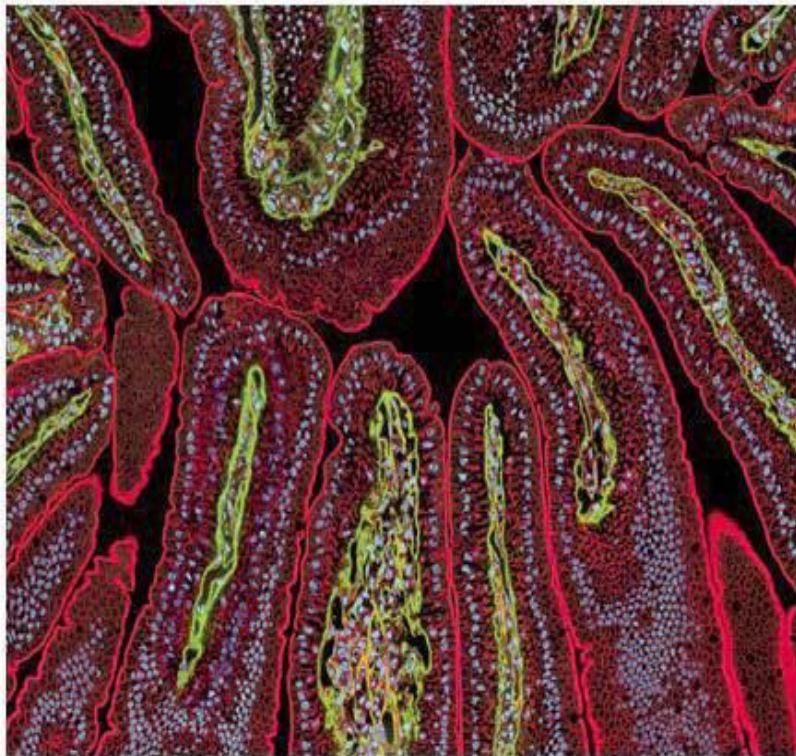
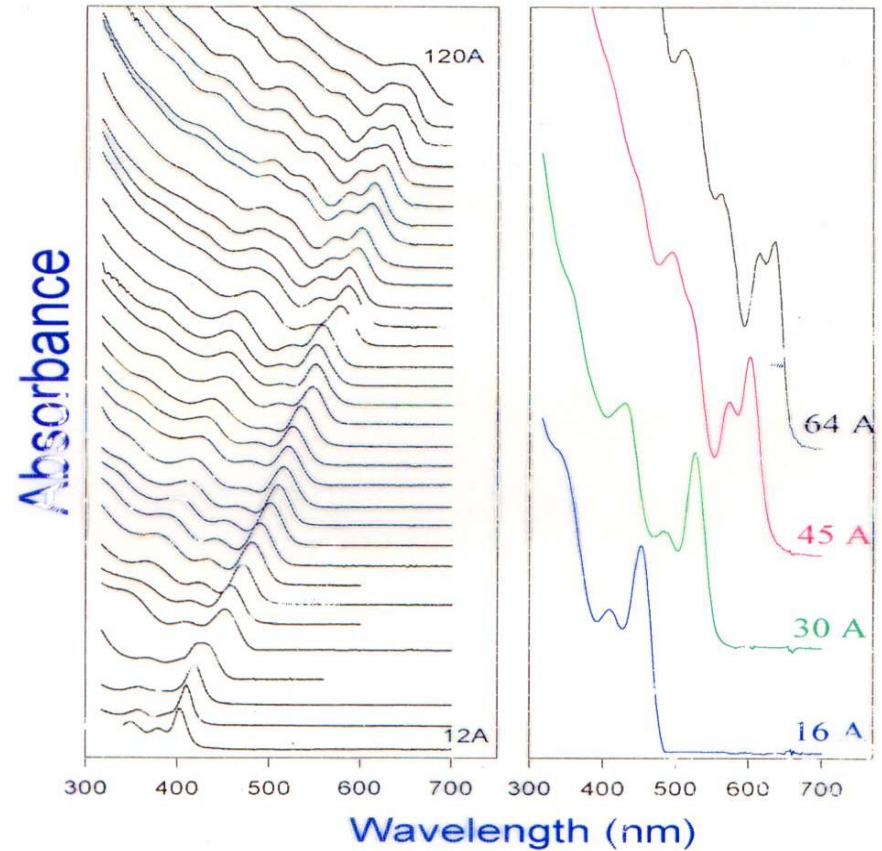




kropki kwantowe, 2



CdSe Size Dependent Absorbance



jelito myszy, różne markery:

- actina
- laminina
- jądro komórki
- czerwony
- zielony
- niebieski

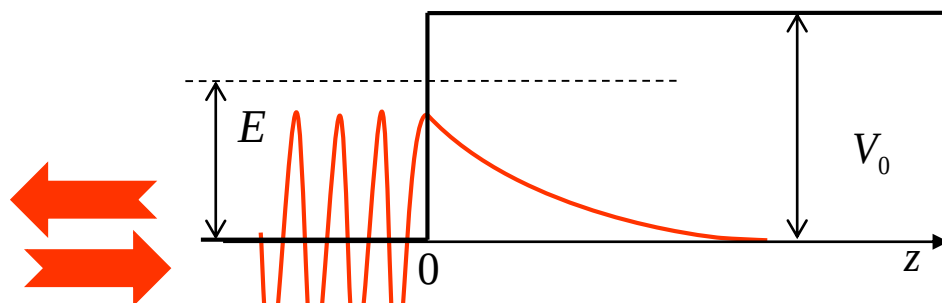
Schodek potencjału

cząstka pada od lewej strony na barierę potencjału. Oddzielnie wypisujemy r-nie Schrodingera dla obu obszarów

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + k_1^2\psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - k_2^2\psi = 0$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0, \quad k_2^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} > 0$$



fala padająca
fala obita

$$\psi(z) = \begin{cases} Ae^{ik_1z} + Be^{-ik_1z} & \text{dla } z < 0 \\ Ce^{-k_2z} & \text{dla } z > 0 \end{cases}$$

penetracja bariery
(fala ewanescencyjna)

Ciągłość f.f. i jej pochodnej

$$A + B = C$$

$$ik_1(A - B) = -k_2C$$



$$B = \frac{1 - i\frac{k_1}{k_2}}{1 + i\frac{k_1}{k_2}}A$$



$$|B|^2 = |A|^2$$

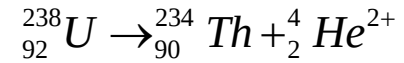
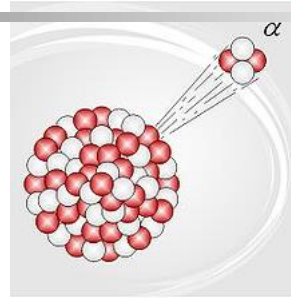
cząstka odbija się od schodka

głębokość wnikania $\cong 1/k_2$

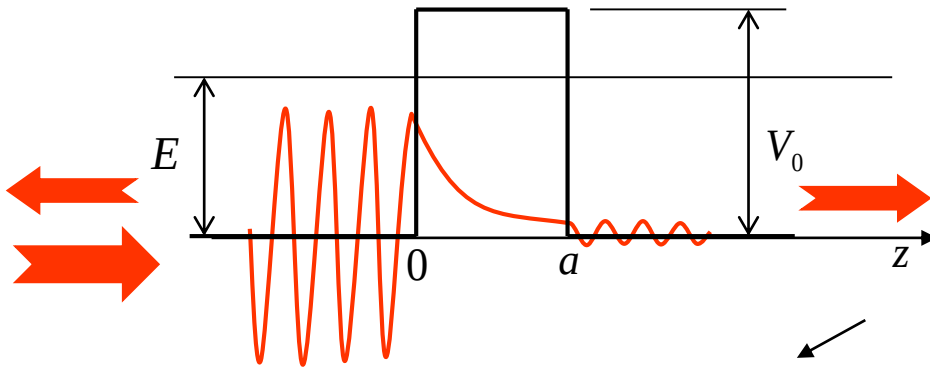
analogia z całkowitym wewn. odbiciem (wykład 5)

tunelowanie

1928 G. Gamov, emisja α



$$\alpha \equiv {}_2^4\text{He}^{2+}$$



rozwiązania:
$$\psi(z) = \begin{cases} Ae^{ik_1z} + Be^{-ik_1z} & \text{dla } z < 0 \\ Ce^{-k_2z} & \text{dla } 0 < z < a \\ A'e^{ik_1z} + B'e^{-ik_1z} & \text{dla } z > a \end{cases}$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0$$

$$k_2^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} > 0$$

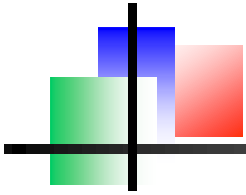
ciągłość f.f. i jej 1. pochodnej + rachunki...

$$T = \left| \frac{A'}{A} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right)^2 \sinh^2(k_2 a)}$$

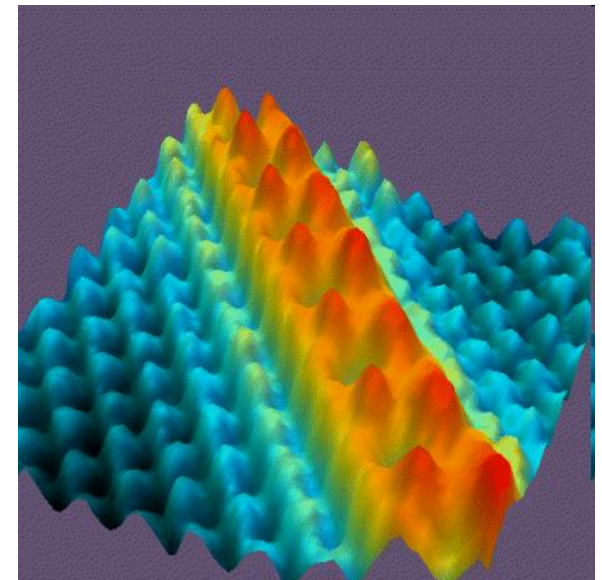
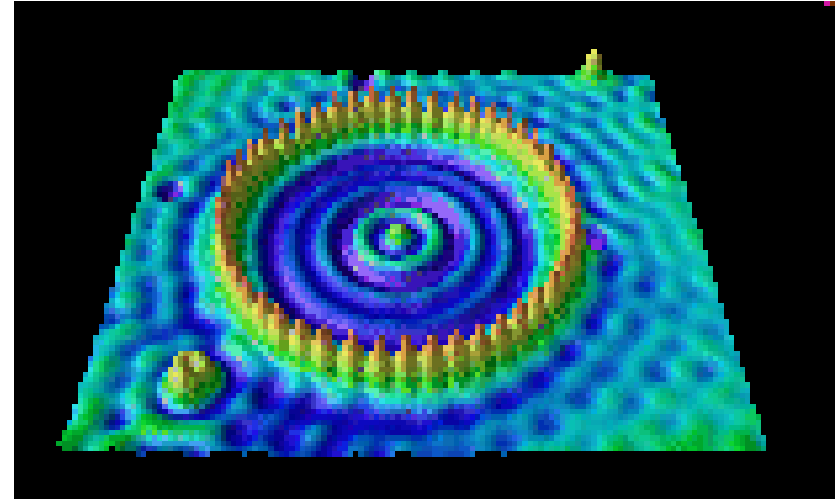
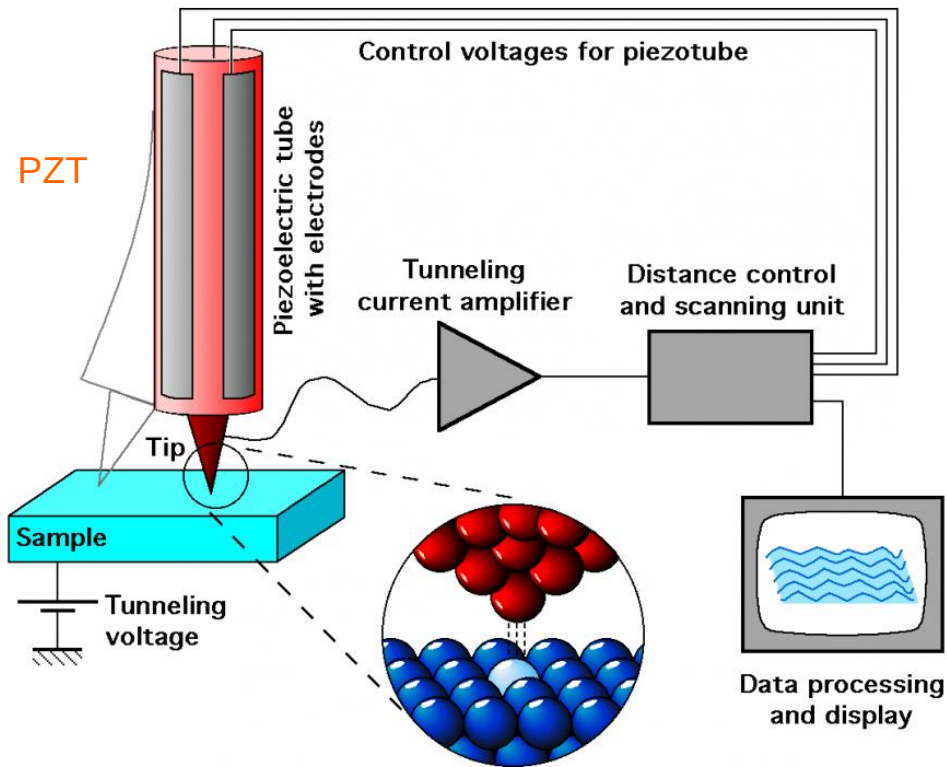
Słabe tunelowanie $k_2 a \gg 1$

$$T \cong 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0} \right) e^{-2k_2 a}$$

analogia z tunelowaniem światła

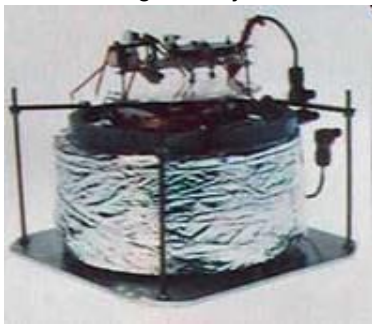


Scanning Tunelling Microscope (STM)



Czerwone - atomy Cs na GaAs (110) - niebieskie

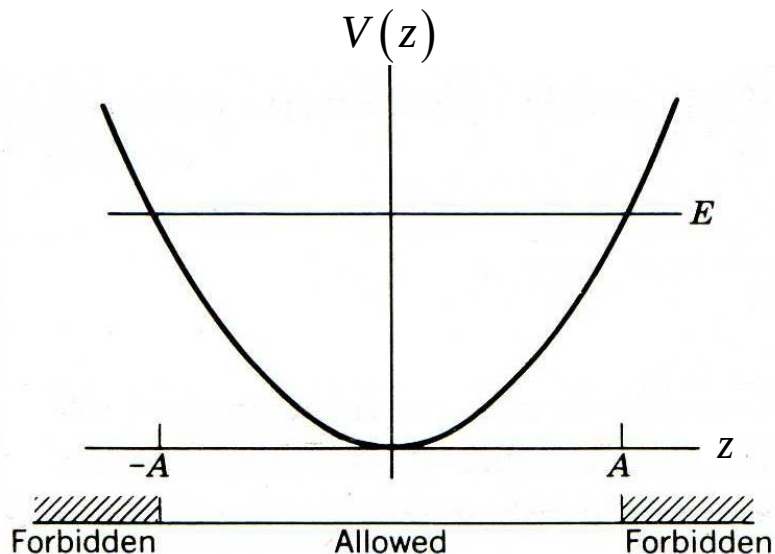
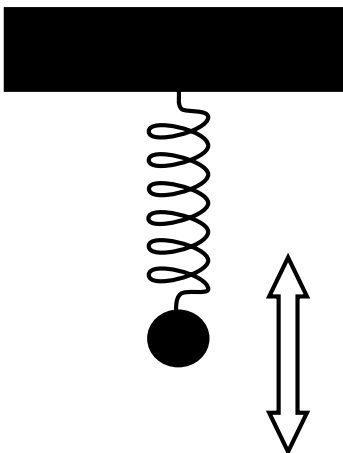
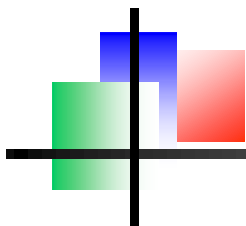
1. generacja



4. generacja



oscylator harmoniczny, klasyczny



Potencjał i siła

$$V(z) = \frac{K}{2} z^2$$

$$F(z) = -\frac{dV}{dz} = -Kz$$

Równanie ruchu

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -Kz$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

Rozwiązanie

$$z(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

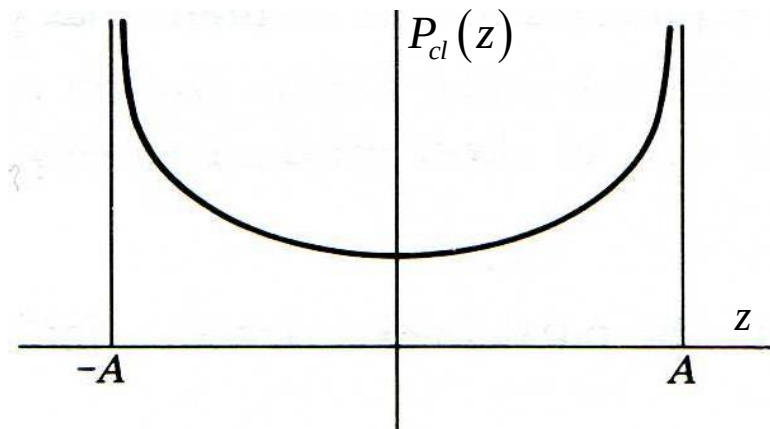
$$v(t) = -\frac{dz}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

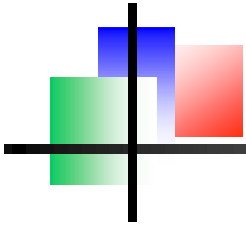
energia

$$E = \frac{m}{2} v^2(t) + \frac{K}{2} z^2(t) = \frac{K}{2} A^2$$

gęstość prawdopodobieństwa

$$P_{cl}(z) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - z^2}}$$





oscylator harmoniczny, kwantowy, 1

Równanie Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{K}{2} z^2 \psi = E$$

$$-\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{\hbar^2} \zeta^2 \psi = E, \quad \text{gdzie } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} = (\zeta^2 - \lambda) \psi$$

$$\zeta^2 = \frac{m\omega}{\hbar}, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

Potencjał i siła

$$V(z) = \frac{K}{2} z^2$$

rozwiązanie

$$\psi_n(\zeta) = H_n(\zeta) e^{-\zeta^2/2}$$

wielomian Hermite'a

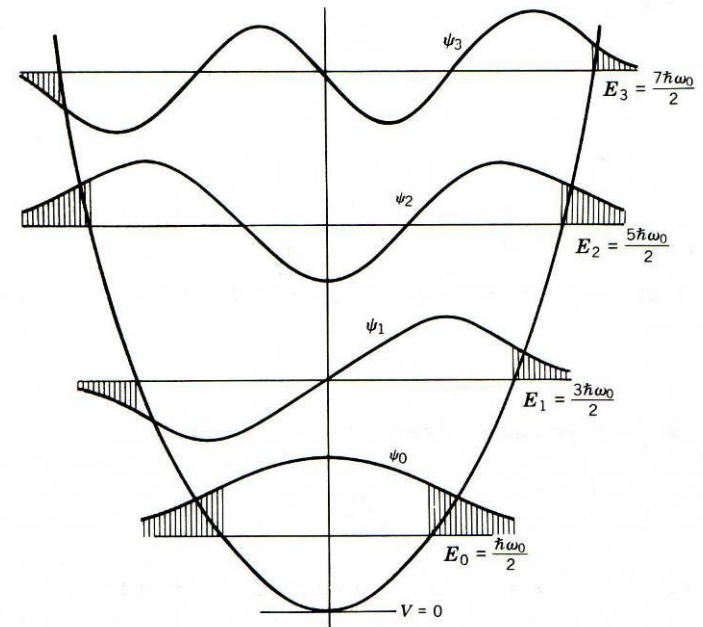
energia

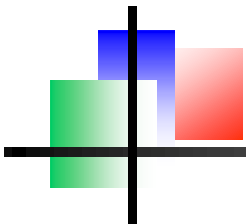
$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

patrz wykład 14: wiązki Gaussa-Hermita

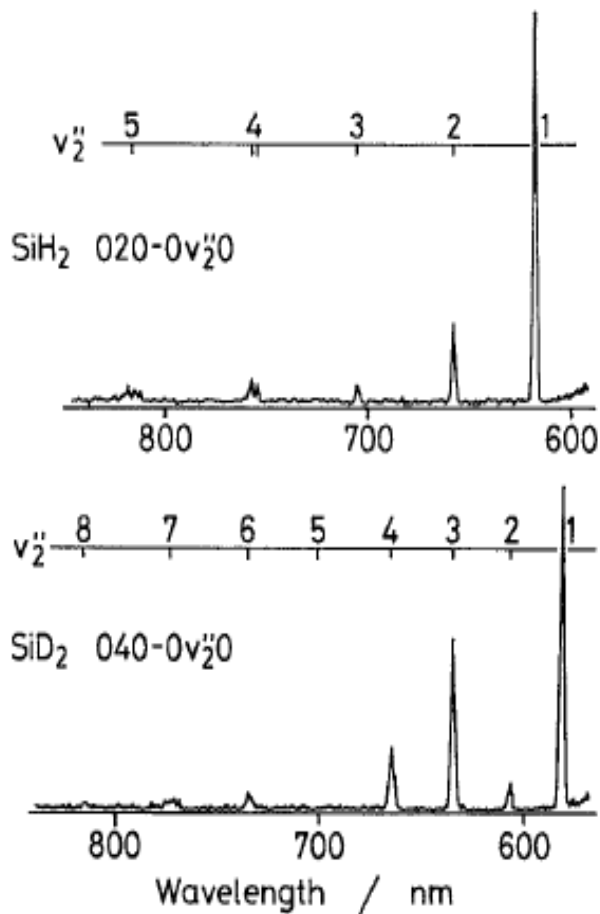
Normalizacja

$$\int \psi_m(z) \psi_n dz = \delta_{mn}$$





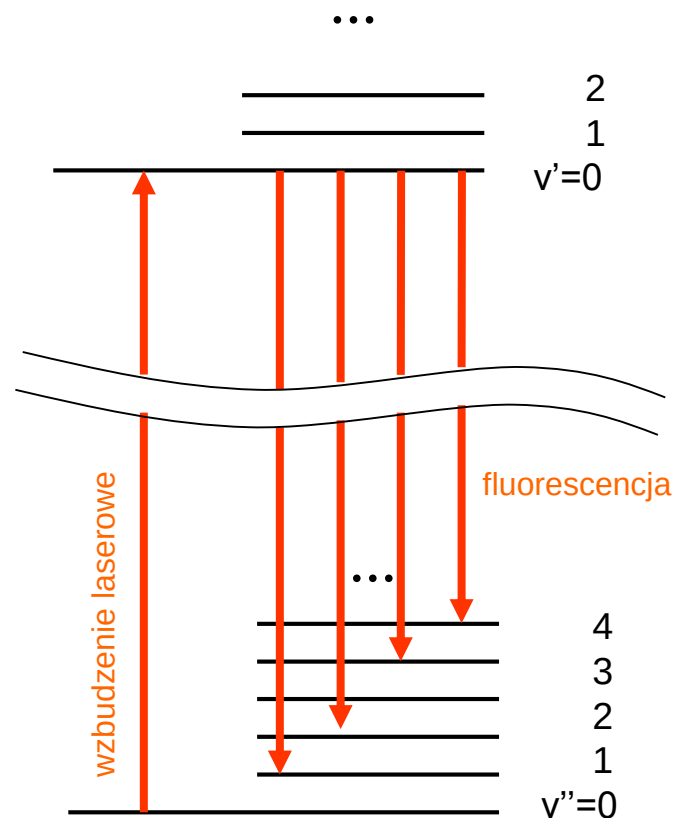
poziomy oscylacyjne cząsteczek, 1

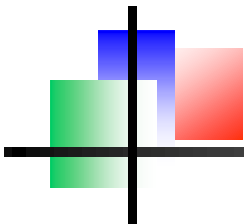


SiH₂

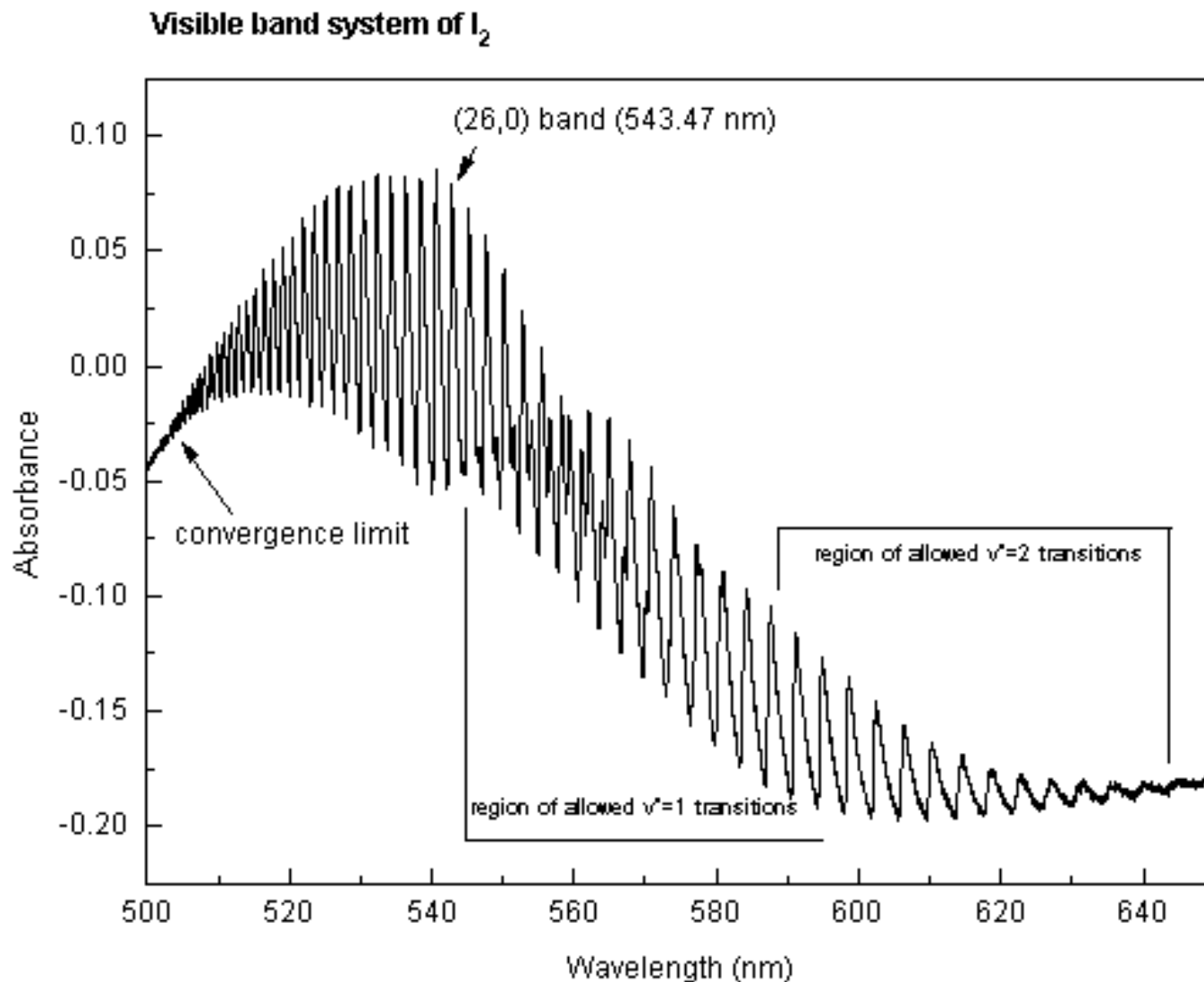
SiD₂

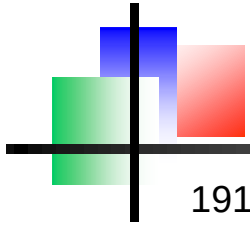
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$





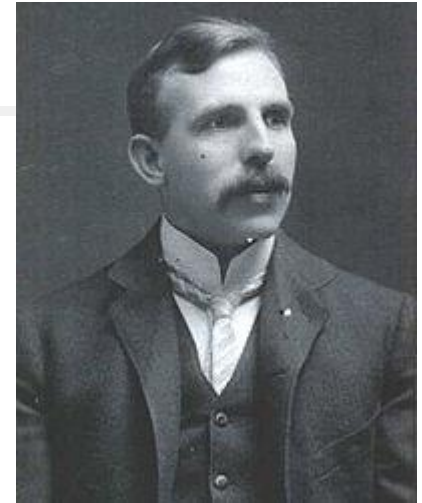
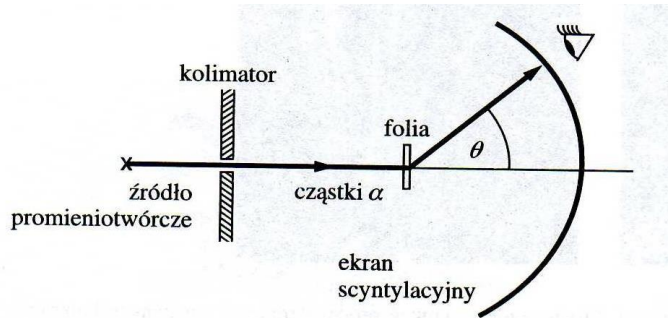
poziomy oscylacyjne cząsteczek, 2



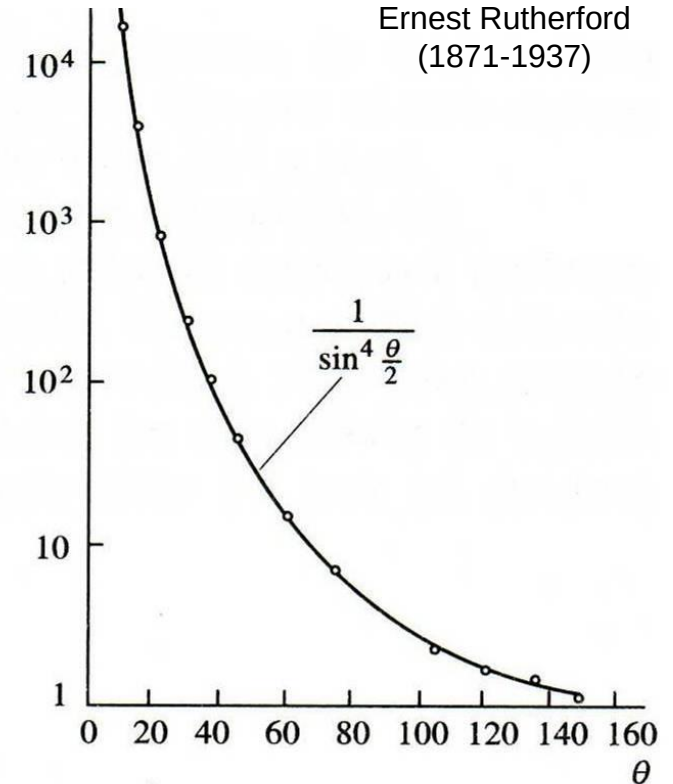
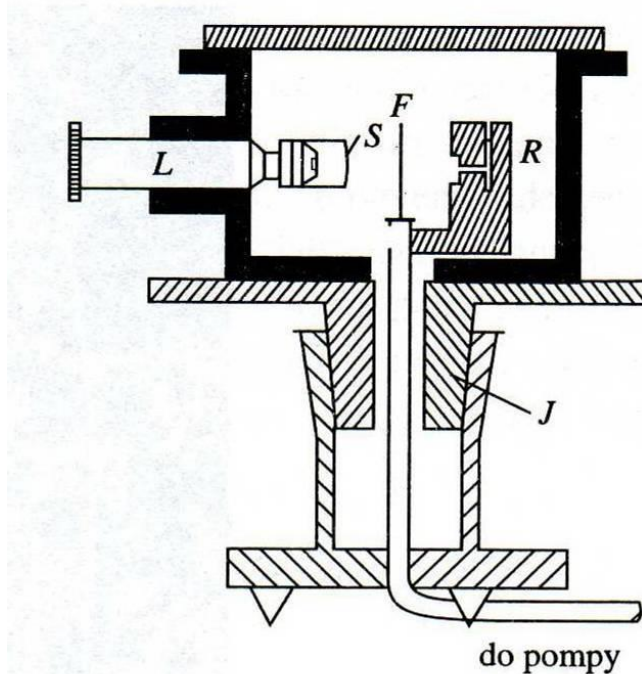


Doświadczenie Rutherforda, 1

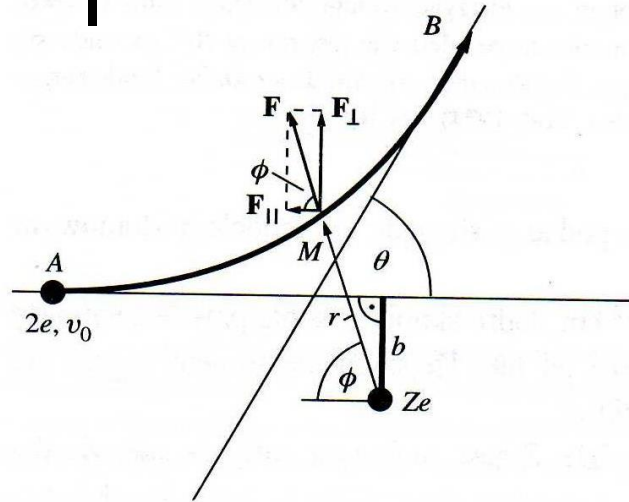
1911



Ernest Rutherford
(1871-1937)



Doświadczenie Rutherforda, 2



załóżmy, że jądro jest punktowe

1) siła:

$$\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$F_{\perp} = F \sin \phi$$

$$F_{\parallel} = F \cos \phi$$

2) zachowanie momentu pędu:

$$(mv_0 b)_A = \left(mr^2 \frac{d\phi}{dt} \right)_M$$

stąd mamy:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{d\phi}{dt} / v_0 b$$

z 1) i 2) mamy

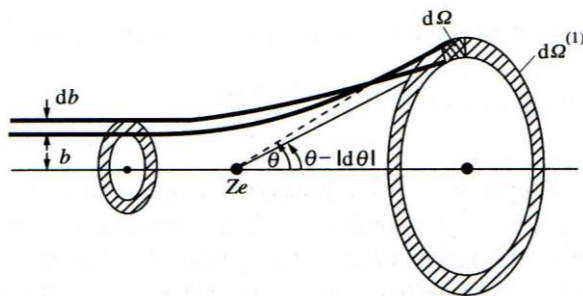
$$m \frac{dv_{\perp}}{dt} = F_{\perp} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \phi = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} \frac{d\phi}{dt} \sin \phi$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{dv_{\perp}}{dt} dt = \frac{\kappa}{mv_0 b} \int_{t_A}^{t_B} \sin \phi \frac{d\phi}{dt} dt, \quad \kappa = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\int_0^{v_0 \sin \Theta} dv_{\perp} = \frac{\kappa}{mv_0 b} \int_0^{\pi - \Theta} \sin \phi d\phi \Rightarrow v_0 \sin \Theta = \frac{\kappa}{mv_0 b} (1 + \cos \Theta)$$

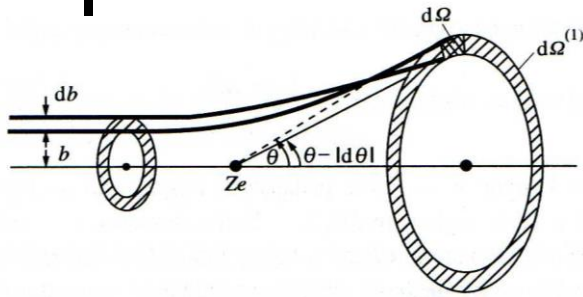
...

$$b = \frac{\kappa}{mv_0^2} \cot(\Theta/2)$$



b - parametr zderzenia

Doświadczenie Rutherforda, 3



$$b = \frac{\kappa}{mv_0^2} \cot(\Theta/2)$$

$$db = \frac{\kappa}{mv_0^2} \frac{1}{\sin^2(\Theta/2)} d\Theta$$

różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie: $d\sigma = 2\pi b db$

Efektywna powierzchnia atomów w folii o grubości D , polu A oraz gęstości N to

$$dA = 2\pi b N D A db$$

Procent rozproszonych cząstek α spośród n cząstek padających:

$$dn = n \cdot 2\pi b N D A db$$

$$\frac{dn}{n} = \frac{Z^2 e^4 D N}{(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 v_0^4 \sin^4(\Theta/2)} d\Omega$$

kąt bryłowy

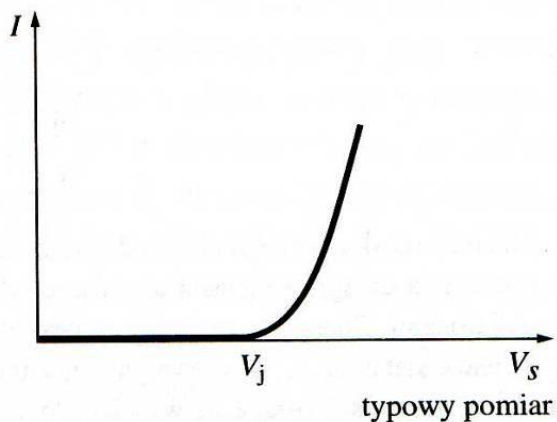
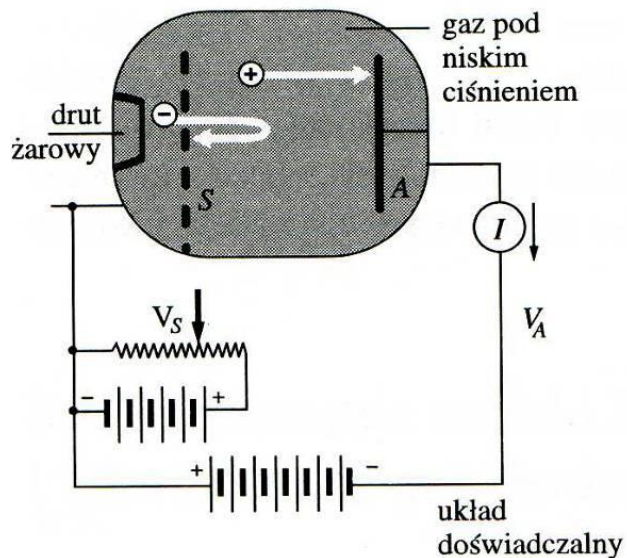
Odstępstwa od powyższej formuły powyżej pozwalają oszacować promień jądra atomowego

$$R \cong 10^{-15} \text{ m}$$

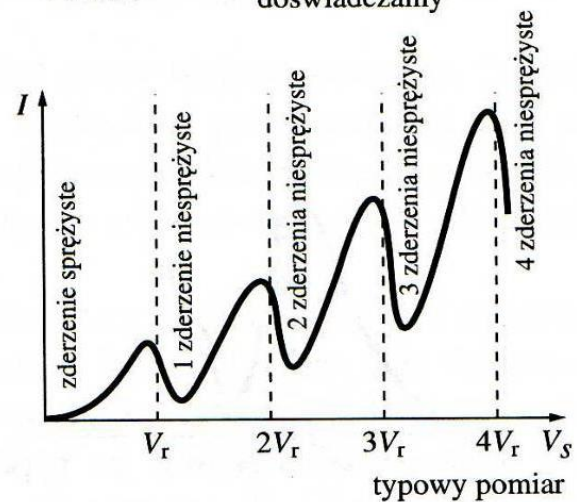
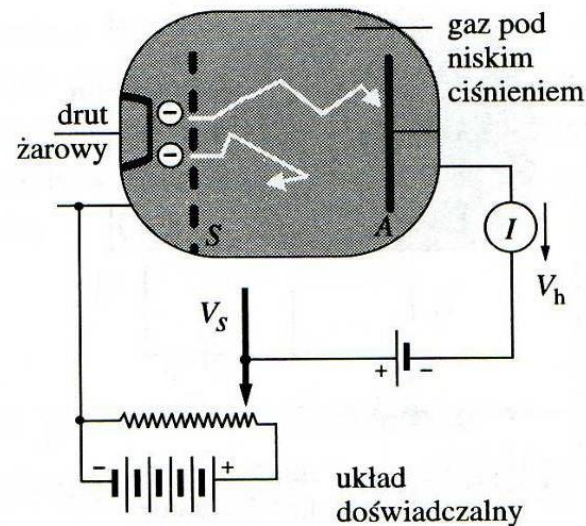
atom jest pusty!

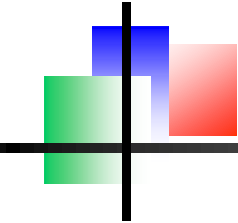
Doświadczenie Franka-Hertza

1902 Lenard



1913 Franck i Hertz





Wracamy do wykładu 25

Układ fizyczny, w języku kwantowym, możemy opisać funkcją falową
 $\Psi(x, y, z, t)$

Funkcja Ψ spełnia nierelatywistyczne r-nie Schrodingera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(z, t)\Psi = i\hbar\frac{d\Psi}{dt}$$

gdzie $V(z, t)$ opisuje potencjał

Interpretacja funkcji falowej:

- gęstość prawdopodobieństwa $P(z, t) = |\Psi(z, t)|^2$
- interferencja $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, |\Psi|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2\text{Re}(\Psi_1\Psi_2^*)$
- normalizacja f.f. $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(z, t)|^2 dz = 1$
- rozwiązania stacjonarne $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, E - \text{energia cząstki}$
 $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + V\psi = E\psi$