Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki
Zakład Teorii Cząstek i Oddziaływań Elementarnych

Radosław Matyszkiewicz

Hierarchia mas i stabilizacja pól modułów w pięciu wymiarach

Praca magisterska wykonana pod kierunkiem
dra hab. Zygmunta Lalaka[1]

Warszawa 2000

[1] Zakład Teorii Cząstek i Oddziaływań Elementarnych, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Podziękowania

Chciałbym przede wszystkim podziękować mojemu promotorowi dr hab. Zygmuntowi Lalakowi za sformułowanie tematu mojej pracy magisterskiej, cenne uwagi w trakcie jej pisania i za owocną współpracę naukową w przeciągu dwóch ostatnich lat. Znaczna część tej pracy powstała w okresie mojego półrocznego pobytu na Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität w Bonn w ramach programu Socrates-Erasmus. W związku z tym chciałbym podziękować kolegom z grupy prof. H. P. Nillesa za okazaną życzliwość i pomoc. Dziękuję także pracownikom naukowym i kolegom z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, bez których nie byłbym w stanie ukończyć studiów i napisać pracy magisterskiej.

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Model Standardowy

Przez ostatnich kilka dziesięcioleci obserwujemy gwałtowny rozwój fizyki wysokich energii. Mnogość nowoodkrytych cząstek elementarnych i różnorodność występujących pomiędzy nimi oddziaływań sprawiały, że przez długie lata nie potrafiono znaleźć konsystentnej teorii opisującej ówczesny stan wiedzy. Dopiero pod koniec lat sześćdziesiątych i na początku siedemdziesiątych, został zaproponowany i ściśle matematycznie sformułowany kwantowy model oddziaływań nazwany później Modelem Standardowym. Do dzisiaj stanowi on podstawę "rozumienia" otaczającego nas świata cząstek elementarnych i jest punktem wyjścia dla nowopowstających teorii, wykraczających poza jego zakres stosowalności. Model Standardowy opisuje trzy generacje kwarków i leptonów oraz trzy rodzaje oddziaływań: elektromagnetyczne, słabe i silne. Jest to czterowymiarowa kwantowa teoria pola, zachowująca niezmienniczość Poincare. Oddziaływania związane są z istnieniem dodatkowych, wewnętrznych, lokalnych symetrii, opisywanych przez grupy cechowania $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Stany kwantowe cząstek elementarnych występują w odpowiednich reprezentacjach tych grup. Dopełnieniem tego modelu jest skalarne pole Higgsa, którego istnienie pozwala nadać cząstkom masy, zachowując przy tym niezmienniczość względem symetrii cechowania [1].

Teoria ta bardzo dobrze opisuje wszystkie odkryte dotychczas cząstki i jej przewidywania zgadzają się z zadziwiająco dobrą dokładnością z dotychczas przeprowadzanymi eksperymentami, czyli dla energii do $\sim 100GeV$. Jedyną niewiadomą tej układanki jest istnienie cząstki Higgsa, której do dziś nie udało się zaobserwować w akceleratorach. Można by było zapytać dlaczego fizycy poszukują teorii wykraczających poza ten model i w jakich kierunkach te poszukiwania mogłyby być prowadzone? Okazuje się, że są pewne przesłanki, sugerujące istnienie nowej teorii opisującej fizykę wyższych energii. łłę

Duża liczba wolnych parametrów - Pomimo tego, że Model Standardowy odnosi wielkie sukcesy na polu porównywania przewidywań teoretycznych z doświadczeniem, to jednocześnie stawia on wiele problemów o charakterze pojęciowym. Nie potrafimy wyjaśnić pochodzenia grup cechowania $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, istnienia dokładnie trzech generacji kwarków i leptonów oraz wartości wolnych parametrów tego modelu, takich jak stałe Yukawy. Sugeruje to, że Model Standardowy jest tylko teorią efektywną a bardziej fundamentalna teoria odpowie na nurtujące nas pytania.

Problem hierarchii mas - Poprawki kwantowe do masy pola skalarnego, związane ze sprzężeniami tego pola do par fermionów oraz z jego samoodziaływaniem, okazują się być proporcjonalne do kwadratu skali, stanowiącej granicę stosowalności naszej teorii. Jeżeli więc chcielibyśmy aby Model Standardowy opisywał fizykę do skali $M_{Pl} \sim 10^{19} GeV$ to obserwowana, fizyczna masa pola Higgsa musiałaby być znacznie większa od skali $1TeV$, co stoi w sprzecznoci z danymi eksperymentalnymi. Istnieje kilka alternatywnych propozycji rozwiązujących ten problem. Jedną z nich jest założenie, że pole skalarne nie jest polem fundamentalnym, tylko silnie związaną parą fermionów, a poprawki pętlowe do mas fermionów są proporcjonalne do logarytmu ze skali obcięcia, czyli problem hierarchii znika. Modele tego typu określane są mianem modeli Technikolorowych i mają problemy ze zgodnością z danymi doświadczalnymi. W inny sposób problem hierarchii rozwiązują teorie supersymetryczne i teorie z dodatkowymi wymiarami, o których napiszę w dalszej części tej pracy.

Unifikacja sprzężeń - Model Standardowy jest teorią renormalizowalną. Rachunki kwantowe w wyższych rzędach rachunku zaburzen wydają się wprowadzać nieskończone poprawki do parametrów występujących w lagranżjanie. Procedura renormalizacji polega na zdefiniowaniu wielkości fizycznych występujących w doświadczeniu jako wyjściowe parametry skorygowane o porawki kwantowe. Jeśli procedura ta nie wymaga wprowadzenia nieskończenie wielu nowych parametrów do lagranżjanu teorii, to mówimy że teoria taka jest renormalizowalna. Zrenormalizowane wielkości zależą od skali, przy której występuje proces fizyczny, którego używamy do ich zdefiniowania. Ewolucją takich parametrów rządzą równania grupy renormalizacji. Znając więc wartości wielkości fizycznych przy pewnej energii możemy obliczyć je dla innej skali. Okazuje się, że stałe sprzężeń elektromagnetyczego, słabego i silnego mają w przybliżeniu te same wartości przy energiach rzędu $10^{14} GeV$. Sugeruje to istnienie nowej teorii przy wyższych energiach, unifikującej wyżej wymienione oddziaływania. Modele takie noszą wspólną nazwę Teorii Wielkiej Unifikacji (GUT) i zakładają istnienie jednej stałej sprzężenia z odpowiadającą jej grupą symetrii cechowania (rozpatruje się grupy $SU(5)$, $SO(10)$ i E_6), która jest łamana przy energii $10^{14} GeV$ na grupy $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ występujące w Modelu Standardowym. Najnowsze doświadczenia wykazują jednak, że stałe te nie przecinają się dokładnie przy jednej energii. Poza tym obserwowany obecnie czas życia protonu wyklucza istnienie unifikacji przy skali $10^{14} GeV$. Sytuację ratuje tu ponownie supersymetria.

Grawitacja - W przyrodzie istnieją cztery fundamentalne oddziaływania: elektromagnetyczne, słabe, silne i grawitacyjne. Model Standardowy opisuje tylko pierwsze trzy. Próby pogodzenia go z grawitacją w ramach lokalnej teorii pola prowadzą do powstania teorii nierenormalizowalnych. Wydaje się więc naturalne poszukiwanie nowej teorii zawierającej także to ostatnie oddziaływanie. Poszukiwania takie prowadzą poprzez supersymetrię i supergrawitację do teorii bardziej fundamentalnych takich jak Teorie Strun, czy Teoria M.

1.2 Supersymetria

Próby stworzenia teorii opisującej wszystkie cztery znane nam oddziaływania napotkały w pewnym momencie na poważne trudności. W 1967 roku Coleman i Mandula podali i udowodnili twierdzenie, które wykluczało nietrywialne związki pomiędzy grupą Poincare, a symetriami wewnętrznymi [2]. Opiera się ono na trzech, bardzo fundamentalnych założeniach jakie musi spełniać macierz rozpraszania:

1. Macierz rozpraszania oparta jest na relatywistycznej kwantowej teorii pola w czterowymiarowej czasoprzestrzeni.

2. Istnieje skończona liczba różnych cząstek stowarzyszonych z jednocząstkowymi stanami o danej masie.

3. Istnieje przerwa energetyczna pomiędzy próżnią a stanami jednocząsteczkowymi.

Twierdzenie to mówi, że najogólniejsza algebra Liego symetrii macierzy rozpraszania zawiera operator energii-pędu P_μ, generator obrotów Lorentza $M_{\mu\nu}$ i skończoną liczbę operatorów B_l należących do algebry Liego zwartej grupy Liego. Operatory te muszą być skalarami względem grupy Poincare. Wyklucza to unifikację grawitacji z pozostałymi oddziaływaniami. Jedynym sposobem na ominięcie tego ograniczenia jest założenie jakiejś bardziej ogólnej klasy symetrii. Tak narodziła się idea supersymetrii. Supersymetria oparta jest na tak zwanej gradowanej algebrze Liego. Oprócz dobrze znanych nam operatorów bozonowych, pomiędzy którymi zachodzą relacje komutacyjne, wprowadzamy operatory fermionowe z relacjami antykomutacyjnymi [3]:

$$[B_i, B_j] = c_{ij}^k B_k,$$

$$[F_\alpha, B_i] = s_{\alpha i}^\beta F_\beta,$$

$$\{F_\alpha, F_\beta\} = t_{\alpha\beta}^i B_i,$$

gdzie przez B_i oznaczyliśmy operatory bozonowe, przez F_α fermionowe, a c_{ij}^k, $s_{\alpha i}^\beta$ i $t_{\alpha\beta}^i$ są stałymi struktury. Jeśli będziemy starali się stworzyć teorię pola opartą na symetriach grupy Poincare i gradowanej grupy Liego, to okazuje się, że antykomutator dwóch generatorów fermionowych zawiera w sobie operator energii-pędu. Poza tym generator supersymetrii nie komutuje z operatorem obrotów Lorentza $M_{\mu\nu}$. Jest to furtka, która pozwala nam konstruować teorie unifikujące wszystkie znane oddziaływania.

Operatory supersymetrii przeprowadzają stany jednocząstkowe w odpowiadające im stany tzw. partnerów supersymetrycznych, mających spin różniący się o $1/2$ od spinu cząstki wyjściowej. Jeśli spróbujemy rozszerzyć Model Standardowy o supersymetrię, to każdemu fermionowi odpowiadać będzie cząstka o spinie całkowitym zwana *sfermionem*, a bozonom cechowania odpowiadać będą fermiony nazywane *gauginami*. Takie najprostrze rozszerzenie nazywane jest w literaturze Minimalnym Supersymetrycznym Modelem Standardowym (MSSM).

Pomimo tego, że niskoenergetyczna supersymetria została poczatkowo zastosowana w teorii oddziaływań fundamentalnych jako rozwiązanie problemu hierarchii, to pomaga ona rozwiązać także inne problemy Modelu Standardowego. Równania ewolucji dla stałych sprzężenia elektromagnetycznego, słabego i silnego, zmodyfikowane przez supersymetrię, prowadzą do zbiegania się tych stałych z dużą dokładnością w jednym punkcie przy energii rzędu $10^{16} GeV$, co zostało sprawdzone doświadczalnie z wielką precyzją. Podniesienie skali unifikacji w stosunku do Modelu Standardowego sprawia, że nie stoi ona w sprzeczności z mierzonym obecnie czasem życia protonu. Wydaje się więc, że teorie GUT powinny zawierać w sobie supersymetrię. Poza tym, do poprawek kwantowych do masy pola skalarnego, związanych z wymianą pary lepton-antylepton, dochodzą poprawki związane z wymianą ich supersymetrycznych partnerów. Supersymetria zapewnia, że relacje pomiędzy masami i odpowiednimi sprzężeniami wymienianych cząstek prowadzą do kasowania się poprawki zależącej od kwadratu skali obcięcia. Ostatecznie poprawki do masy cząstki Higgsa są rzędu $\Delta_{soft} m^2$, co rozwiązuje problem hierarchii.

Podstawowym problemem niskoenergetycznej supersymetrii jest to, że przewiduje ona degenerację mas cząstek będących w tym samym multiplecie supersymetrycznym. Niestety spektrum odkrytych dotychczas cząstek nie wykazuje takiej własności. Zakłada się więc, że supersymetria ulega złamaniu przy obserwowanych skalach. Chcielibyśmy aby było to tzw. spontaniczne złamanie polegające na tym, że tylko efektywna niskoenergetyczna teoria pola będąca fluktuacją wokół spontanicznie wybranego stanu próżni nie jest supersymetryczna. Taki scenariusz prowadzi do relacji pomiędzy masami w danym multiplecie:

$$\sum_s m_s^2 - 2\sum_f m_f + 3\sum_w m_w^2,$$

gdzie s oznacza skalary, f - fermiony a w - bozony wektorowe. Niestety relacja ta jest sprzeczna z danymi doświadczalnymi. Ponieważ mechanizm łamania supersymetrii nie jest znany, dodaje się do lagranżjanu dodatkowe człony, powodujące rozszczepienie mas i nie wprowadzające kwadratowych poprawek do masy pola skalarnego. Taka operacja znana jest pod pojęciem miękkiego złamania supersymetrii. Mimo wielu interesujących cech, MSSM nie został bezposrednio potwierdzony eksperymentalnie, tzn. nie zaobserwowano dotychczas żadnego supersymetrycznego partnera. Budowane obecnie akceleratory (przede wszystkim LHC w CERN-ie) będą dysponowały energiami, które pozwolą potwierdzić lub wykluczyć niskoenergetyczną supersymetrię.

1.3 Supergrawitacja

MSSM oparty jest o globalną supersymetrię. Powstaje pytanie do czego doprowadzi wprowadzenie do teorii lokalnej supersymetrii. Ponieważ realizuje się ją w podobny sposób jak teorie z bozonowymi grupami cechowania, można się spodziewać, że pojawi się nowe pole cechowania. Ponieważ parametrem lokalnej transformacji supersymetrycznej musi być zależna od współrzędnych czasoprzestrzennych wielkość spinorowa ξ^α, pole cechowania musi posiadać indeks spinorowy α i związany z transformacją tego pola indeks lorentzowski μ:

$$\delta_Q \psi_\mu^\alpha(x) = \partial_\mu \xi^\alpha(x),$$

gdzie δ_Q oznacza infinitezymalną transformację supersymetryczną. Pole ψ_μ^α jest tzw. polem Rarity-Schwingera odpowiadające cząstce o spinie 3/2. Poza tym algebra supersymetryczna zapisana za pomocą komutatorów i spinorowych parametrów ξ^α zawiera związek:

$$[\xi Q, \bar{\xi}\bar{Q}] = 2\xi\sigma^\mu\bar{\xi}P_\mu,$$

gdzie Q jest generatorem supersymetrii. Ponieważ parametry ξ zależą od x_μ, to po prawej stronie tego równania dostaliśmy translację w czasoprzestrzeni zależną od współrzędnych, czyli ogólną transformację współrzędnych. Oznacza to, że w modelach z lokalną supersymetrią musi pojawić się grawitacja z tensorem metrycznym $g_{\mu\nu}$. Mamy więc teorię niezmienniczą względem lokalnej supersymetrii i ogólnej transformacji wspólrzędnych. Dokładając do tego inne symetrie cechowania, możemy otrzymać modele opisujące w sposób konsystentny wszystkie znane nam oddziaływania [4], [5].

Okazuje się, że największą możliwą liczbą wymiarów, w jakich może istnieć konsystentna teoria supergrawitacji jest 11. Dodatkowo w takim przypadku dostajemy najprostszą teorię, zawierającą pola g_{MN}, ψ_M^α i trójformę C_{MNO}. W mniejszej liczbie wymiarów supergrawitacja się komplikuje, a wiele takich modeli możemy uzyskać z 11-to wymiarowej supergrawitacji. Lagranżjan supergrawitacji jest bardzo skomplikowany. Interesujący z naszego punktu widzenia będzie potencjał skalarny:

$$V = \exp(-G)(G_k(G^{-1})^k_l G^l - 3) + \frac{1}{2}(f^{-1})_{\alpha\beta} D^\alpha D^\beta, \tag{1.1}$$

gdzie G jest funkcją pól supergrawitacji nazywaną potencjałem Kählera, a pozostałe wielkości są od niej zależne:

$$D^\alpha = g G^i T_i^{\alpha j} \phi_j,$$
$$G^i = \frac{\partial G}{\partial \phi_i}, \qquad G_i = \frac{\partial G}{\partial \phi_i^*}.$$

Można wykazać, że warunek na niezłamaną supergrawitację przyjmuje postać $< G_i >= 0$. Podstawiając to do wyrażenia (1.1) otrzymujemy

$$< V >= -3 < \exp(-G) > .$$

Widzimy więc, że w takim wypadku potencjał jest mniejszy od zera. Stanowi to istotną różnicę w porównaniu z niezłamaną globalną supersymetrią, gdzie energia próżni musiała być równa zeru. Lokalną supersymetrię możemy złamać nadając wartości próżniowe wielkościom G_i. Łatwo pokazać, że w takim przypadku możliwa jest każda wartość oczekiwana próżni (tzn. $E_{vac} < 0$, $E_{vac} = 0$ lub $E_{vac} > 0$). Złamanie globalnej supersymetrii zawsze prowadziło do warunku $E_{vac} > 0$. Jest to o tyle ważne, że energia próżni jest równoważna stałej kosmologicznej.

1.4 Teorie Superstrun

Wydawać by się mogło, że supergrawitacja jest kandydatem na najbardziej fundamentalną teorię opisującą znaną nam fizykę. Niestety, zawiera ona w sobie oddziaływania punktowe, prowadzące do ultrafioletowych rozbieżności w rachunkach kwantowych. O ile w Modelu Standardowym potrafiliśmy sobie radzić z takimi problemami przez renormalizację, w przypadku supergrawitacji ten mechanizm nie pracuje. Problem ten pozwalają ominąć teorie strun [6], [7].

Idea teorii strun zasadniczo odbiega od naszego wyobrażenia o elementarnych składnikach otaczającego nas świata. Zakłada ona, że fundamentalnym obiektem nie są punktowe cząstki ale obiekty jednowymiarowe zwane strunami. Ruch takiego obiektu jest opisywany nie tylko przez zależność od czasu własnego τ ale przez dodatkowy parametr σ będący współrzędną wzdłuż struny:

$$X^M = X^M(\tau, \sigma).$$

Rozpatruje się przy tym zarówno struny otwarte z dwoma punktami brzegowymi, pomiędzy którymi struna jest rozciągnięta, jak i zamknięte ze sklejonymi końcami. Różne wzbudzenia takiej elementarnej struny odpowiadają różnym cząstkom. Oddziaływanie strun zachodzi poprzez ich łączenie się lub dzielenie. A ponieważ procesy te zachodzą w skończonym obszarze zmiennych τ i σ, pozbywamy się rozbieżności ultrafioletowych.

Rozpatrując najprostszy model struny zamkniętej otrzymujemy wyrażenia na masy poszczególnych wzbudzeń.

$$m^2 = \frac{1}{\alpha}(N_l + N_p - 2), \tag{1.2}$$

gdzie N_l i N_p są operatorami liczby wzbudzeń odpowiednio lewo i prawoskrętnych, a $1/\alpha$ jest współczynnikiem napięcia struny. Istnieje dodatkowy warunek dla stanów fizycznych: $N_l = N_p$.

Można pokazać, że dla $N_l = N_p = 1$ otrzymujemy tensor drugiego rzędu we wskaźnikach lorentzowskich, a ze wzoru (1.2) widzimy, że jest to mod bezmasowy. Utożsamiamy go z grawitonem. Widzimy więc, że teoria strun zawiera w sobie grawitację. Niestety mamy też dla $N_l = N_p = 0$ cząstkę o ujemnym kwadracie masy zwaną tachionem, co dyskwalifikuje taki model. Dodatkowo wzbudzenia takiej struny odpowiadają tylko cząstkom bozonowym, co stoi w sprzeczności z obserwowanym spektrum.

Problemów tych nie posiada supersymetryczna wersja tej teorii. Do zmiennych bozonowych $X^M(\tau, \sigma)$ dokładamy ich supersymetryczny, fermionowy odpowiednik $\psi^M(\tau, \sigma)$. Wszystkie teorie superstrun są konsystentne tylko w dziesięciu wymiarach. Historycznie pierwszymi zaproponowanymi modelami superstrunowymi były teoria zawierająca zarówno struny otwarte jak i zamknięte nazwana teorią strun Typu I oraz dwie teorie dopuszczające tylko struny zamknięte nazwane teoriami strun Typu IIA i Typu IIB. Problemy pojawiły się przy próbach uzyskania z tych teorii spektrum Modelu Standardowego. Pierwsza z nich prowadziła do pojawienia się w modelach efektywnych tzw. anomalii, czyli poprawek kwantowych niszczących symetrie, które zawiera teoria na poziomie drzewowym. Natomiast z obu modeli strun Typu II nie można było uzyskać chiralnych, nieabelowych teorii znanych z Modelu Standardowego. W 1986 roku Green i Schwarz pokazali [8], że startując z grupy cechowania $SO(32)$ można skompensować wszystkie anomalie. Niedługo po tym zaproponowano dwa dodatkowe modele superstrunowe: heterotyczne $SO(32)$ i $E_8 \times E_8$, które także nie prowadziły do anomali i dawały nieabelowe, chiralne teorie. Szczególnie ta ostatnia jest warta zainteresowania, ponieważ po skompaktyfikowaniu do czterech wymiarów daje przy niskich energiach teorię cechowania z grupą E_6, która jest jednym z rozpatrywanych kandydatów na grupę GUT, a także N=1 supersymetrię.

Obecnie w środowisku teoretyków dominuje pogląd, że pięć różnych modeli superstrun stanowi niskoenergetyczne przybliżenie pewnej hipotetycznej, fundamentalnej teorii, żyjącej w jedenastu wymiarach. Określa się ją mianem M-teorii i jak na razie niewiele wiadomo o jej formalizmie. Wiadomo natomiast, że w niskoenergetycznym przybliżeniu redukuje się do jedenastowymiarowej supergrawitacji.

1.5 Efektywne modele z branami

W ostatnich latach fizycy coraz bardziej zaczęli się interesować modelami, w których kluczową rolę odgrywają tzw. brany. Zakłada się w nich, że część występujących w teorii pól nie wypełnia całej przestrzeni, tylko egzystuje na podprzestrzeniach o niższej niż czasoprzestrzeń tła liczbie wymiarów. W typowym przypadku Modelu Standardowego pola cechowania i materię umieszcza się na (3+1) - wymiarowej branie zaś sektorem "żyjącym" w całej przestrzeni jest grawitacja, naogół uzupełniona o dodatkowy sektor złożony z pól skalarnych (dylatonów). Inspiracje dla takich teorii pochodzą bezpośrednio z teorii superstrun zawierającej struny otwarte Typu I. Występują w niej obiekty zwane D-branami, będące hiperpowierzchniami, po których mogą się poruszać końce struny otwartej, spełniające warunki brzegowe Dirichleta [9]. Powodzenie tego typu modeli wynika z faktu, że można podjąć na nowo próby rozwiązania wielu klasycznych problemów współczesnej fizyki teoretycznej.

Ponieważ obecnie obserwowane spektrum cząstek nie wykazuje cech niezłamanej supersymetrii, to na poziomie efektywnym zajmiemy się teoriami bez supersymetrii. W rozdziale (3) tej pracy będziemy badać problem hierarchii w jednym z takich modeli, zaproponowanym przez Randall i Sundruma [10] i [11]. Zbadamy również poprawki do czterowymiarowego, efektywnego prawa Newtona. Następnie zajmiemy się problemem stabilizacji rozmiaru piątego wymiaru. W następnych dwóch rozdziałach będziemy szukali modów Kaluzy-Kleina w modelach inspirowanych pracami [12], [13] i [14] . Dodatkowo w rozdziale (4) znajdziemy poprawki do efektywnego prawa Newtona.

Rozdział 2

Grawitacja w wielowymiarowych teoriach z branami

2.1 Hierarchia skal

Zgodnie z obecnym stanem wiedzy, wydaje się że w przyrodzie istnieją dwie fundamentalne skale energetyczne: skala łamania symetrii elektrosłabej $M_{SM} \sim 1TeV$ i skala Plancka $M_{Pl} \sim 10^{19}GeV$ określająca siłę oddziaływania grawitacyjnego. Olbrzymia różnica pomiędzy nimi (16 rzędów wielkości) prowadzi do braku stabilności mas pól skalarnych. Szereg teorii takich jak supersymetria, czy technikolor rozwiązuje ten problem, likwidując rozbieżności kwadratowe do mas skalarów w rachunku perturbacyjnym. Nie wyjaśnia to jednak bardziej fundamentalnego pytania: dlaczego są dwie takie skale i z jakich powodów jest pomiędzy nimi tak duża rozpiętość?

Istnieje zasadnicza różnica w naszym zrozumieniu obu tych skal masowych. O ile oddziaływania elektrosłabe potrafimy testować na odległościach $\sim M_{SM}^{-1}$, to oddziaływania grawitacyjne są mierzone na odległościach powyżej $1mm$ co jest o 33 rzędy wielkości więcej niż odległość Plancka M_{Pl}^{-1}. Stwierdzenie że skala Plancka jest wielkością fundamentalną opiera się na założeniu, że grawitacja nie ulega modyfikacji na tak olbrzymim, nie pozananym przez nas obszarze energetycznym . Coraz częściej we współczesnych modelach zakłada się, że istnieje tylko jedna fundamenatlna skala energetyczna, która w naszej efektywnej teorii rozszczepia się na dwie. Najprostszy mechanizm który do tego prowadzi jest oparty na toroidalnych kompaktyfikacjach teorii $(n+4)$-wymiarowych.

Załóżmy, że nasz Wszechświat składa się z dobrze nam znanej czterowymiarowej czasoprzestrzeni i z n dodatkowych, zwartych wymiarów przestrzennych o promieniu $\sim r_c$. Siła grawitacyjna z jaką oddziałują dwie masy leżące w odległości $r \ll r_c$ od siebie jest w przybliżeniu równa:

$$F_G \sim \frac{m_1 m_2}{M^{n+2}} \frac{1}{r^{n+2}}, \tag{2.1}$$

gdzie M jest fundamentalną, $(n+4)$-wymiarową skalą Plancka. Jeśli eksperyment przeprowadzany jest na odległości $r \gg r_c$ to dodatkowe wymiary nie są bezpośrednio obserwowane i analogiczny wzór ma postać:

$$F_G \sim \frac{m_1 m_2}{M^{n+2} r_c^n} \frac{1}{r^2}. \tag{2.2}$$

Widzimy więc, że w tym przypadku odtwarza się dobrze nam znane czterowymiarowe prawo Newtona z efektywną masą Plancka

$$M_{PL} \sim M^{1+\frac{n}{2}} r_c^{\frac{n}{2}}. \tag{2.3}$$

Wynika z tego, że jeśli eksperymenty testujące grawitację będziemy przeprowadzać na odległościach większych niż rozmiar dodatkowych wymiarów, to nie będziemy w stanie zweryfikować naszego $(n+4)$-wymarowego modelu.

Możemy teraz założyć że jedyną fundamentalną stałą o wymiarze masy jest skala łamania symetrii elektrosłabej $M = M_{SM} \sim 1TeV$. Żądając aby efektywna masa Plancka wynosiła $\sim 10^{19}GeV$ i biorąc pod uwagę równanie (2.3) otrzymujemy warunek na rozmiar dodatkowych wymiarów:

$$r_c \sim 10^{\frac{32}{n}-3}\frac{1}{GeV}. \tag{2.4}$$

Dla $n = 1$ mamy $r_c \sim 10^{29}\frac{1}{GeV} = 10^{15}mm$. Jest to odległość rzędu rozmiarów Układu Słonecznego. Dla $n = 2$ równanie (2.4) implikuje $r_c \sim 10^{13}\frac{1}{GeV} = 10^{-1}mm$ co jest nieznacznie mniejsze od obecnych ograniczeń eksperymentalnych. Widzimy więc, że w naszym prostym modelu liczba dodatkowych wymiarów powinna być większa niż jeden, a przypadek $n = 2$ ma szansę być zweryfikowany w najbliższej przyszłości.

Ponieważ Model Standardowy jest obecnie testowany na odległościach $\sim M_{SM}^{-1}$, cząstki elementarne i pola cechowania nie mogą się propagować w całej $(n+4)$-wymiarowej czasoprzestrzeni, tylko powinny być zlokalizowane na czterowymiarowej branie. Nie jest rzeczą oczywistą jak w praktyce zrealizować takie "uwięzienie". Jak już zauważyliśmy w rozdziale (1), konstrukcje z branami można w naturalny sposób wyprowadzić z teorii superstrun. Konkretną realizację modelu w którym grawitacja propaguje się w sześciowymiarowej czasoprzestrzeni a pola Modelu Standardowego są w sposób dynamiczny umiejscowione na czterowymiarowej podprzestrzeni pokazano w [15].

Zauważmy, że w teorii z jedną skalą masową M_{SM}, problem hierarchii nie istnieje. Poprawki pętlowe do mas skalarów mogą zależeć od kwadratu skali obcięcia i nie powoduje to braku stabilności tych mas ponieważ są one tego samego rzędu co masy na poziomie drzewowym. Nie potrzebujemy więc niskoenergetycznej supersymetrii do wyjaśnienia problemu hierarchii, aczkolwiek przy wyższych energiach supersymetria jest niezbędna do konstrukcji konsystentnej kwantowej grawitacji.

Dotychczas zakładaliśmy, że $(n+4)$-wymiarowa czasoprzestrzeń jest sumą prostą czterowymiarowej czaoprzestrzeni i n-wymiarowej zwartej rozmaitości. Oznacza to, że czterowymiarowe składowe metryki nie zależą od pozostałych współrzędnych. O ile udawało się w takich modelach rozwiązać problem hierarchii przez założenie jednej fundamentalnej skali masowej, to niestety pojawiła się kolejna skala związana z rozmiarem dodatkowych wymiarów r_c. Sytuacja zmienia się diametralnie jeśli dopuścimy zależność czterowymiarowych komponenetów metryki od pozostałych współrzędnych. W rozdziale (3) pokażemy, jak uzyskać hierarchię mas w pięciowymiarowym modelu, w którym czterowymiarowa metryka mnożona jest przez czynnik zależny od piątej współrzędnej (tzw. warp-factor). Zobaczymy, że rozmiar piątego wymiaru nie wprowadza w takim przypadku dodatkowej skali masowej. Okaże się również, że odstępstwa od prawa Newtona są zaniedbywalne na odległościach powyżej $1/TeV$ czyli dużo mniejszych niż obecna granica eksperymentalna.

2.2 Doświadczalne badanie prawa Newtona

Jak zauważyliśmy w poprzednim rozdziale, jednym z głównych testów weryfikujących teorie z dodatkowymi wymiarami jest doświadczalne sprawdzanie prawa Newtona na małych odległościach. Klasyczny potencjał grawitacyjny V_G, generowany przez masę μ umieszczoną w początku układu współrzędnych, ma postać:

$$V_G(r) = -G_N \frac{\mu}{r}, \tag{2.5}$$

gdzie $G_N \sim 1/M_{PL}^2$ jest stałą grawitacyjną. Jak dotąd, wyznaczona wprost granica na poprawność tej zależności wynosi ok. $1\ mm$.

Istnieje szereg metod, które pośrednio mogą dać nam informacje na temat istnienia dodatkowych wymiarów i związanych z nimi niezerowych poprawek do prawa Newtona. W rozdziale tym postaramy się zaprezentować najważniejsze z nich.

2.2.1 Testowanie efektu Casimira

Wydaje się, że najbardziej obiecującym eksperymentem mogącym w przyszłości zweryfiokować teorie z dodatkowymi wymiarami jest pomiaru tzw. efektu Casimira. Poprawki do prawa Newtona, związane z pojawiającymi się po kompaktyfikacji efektywnymi masywnymi grawitonami, mają postać potencjału Yukawy [16]:

$$\delta V(r) \sim -\frac{G_N \mu}{r} \alpha_n e^{-r/\lambda}, \tag{2.6}$$

gdzie α_n jest współczynnikiem numerycznym zależnym od liczby wymiarów i od rodzaju kompaktyfikacji a $\lambda \sim r_c$ zasięgiem dodatkowego oddziaływania, proporcjonalnym do odwrotności mas grawitonów. Jeśli dodatkowa podprzestrzeń jest n-wymiarowym torusem to $\alpha_n = 2n$.

Załóżmy, że mamy dwie jednakowe, kwadratowe płytki o gęstości ρ, grubości D, powierzchni $A = L^2$, odsunięte od siebie na odległość $d \ll L$. Dodatkowo ustalmy stałą temperaturę $T = 300K$. Układ ten jest opisany dokładnie w pracy [17].

Siła działająca pomiędzy tymi płytkami, pochodząca od klasycznego oddziaływania grawitacyjnego w przybliżeniu nie zależy od d i wynosi:

$$F_{Grav}(d) = -2\pi G_N \rho^2 L^2 D^2. \tag{2.7}$$

Wkład pochodzący od dodatkowego oddziaływania Yukawy wyraża się przez:

$$\delta F_{Grav}(d) = -2\pi \alpha_n \lambda^2 G_N \rho^2 L^2 \left(1 - e^{-D/\lambda}\right)^2 e^{-d/\lambda}. \tag{2.8}$$

Efekt Casimira zależy od temperatury w jakiej jest przeprowadzany eksperyment i w dwóch granicznych przypadkach wynosi:

$$F_{Casimir}(d) = \begin{cases} -1{,}202\left(\frac{kTL^2}{4\pi d^3}\right) & dla \quad d \gg \frac{\pi\hbar c}{kT} \\ -\frac{\pi^2 \hbar c L^2}{240 d^4} & dla \quad d \ll \frac{\pi\hbar c}{kT} \end{cases}, \tag{2.9}$$

gdzie k jest stałą Boltzmanna, c prędkością światła a $\hbar$ stałą Plancka.

W celu otrzymania numerycznych wyników podstawmy wartości parametrów, które występują w eksperymentach [18]. Niech $L = 1\ cm$ i $D = 1\ mm$. Odległość pomiędzy płytkami będzie się zmieniać w zakresie $10^{-8}m \leq d \leq 10^{-3}m$. Płytki są wykonane z czystej miedzi o gęstości $\rho = 8{,}96 \times 10^3 kg/m^3$.

Teraz możemy już porównać siłę dodatkowego oddziaływania Yukawy z tłem generowanym przez siłę grawitacyjną i przez efekt Casimira. Dla $\lambda \sim 10^{-5}m$ staje się on istotny dla $d \sim 10^{-5}m$ i wynosi:

$$\frac{\delta F_{Grav}}{F_{GraV} + F_{Casimir}} = 3 \times 10^{-6}.$$

Ponieważ w obecnie przeprowadzanych eksperymentach efekt Casimira mierzony jest z 1% precyzją [19], to nie jesteśmy w stanie zweryfikować teorii z dodatkowymi wymiarami. Jednak w najbliższej przyszłości planowane są doświadczenia ze zwiększoną precyzją, uzyskiwaną dzięki częściowym wyeliminowaniu tła [17].

2.2.2 Ugięcie promieni świetlnych

Pole grawitacyjne powoduje, że poruszające się w nim promienie świetlne ulegają ugięciu. W nierelatywistycznym, kwazistatycznym przybliżeniu kąt ugięcia fali elektromagnetycznej, poruszającej się w kierunku y, wyraża się przez potencjał Newtona następującym wyrażeniem [20]:

$$\alpha = -2 \int dy \partial_x V(r), \tag{2.10}$$

gdzie przez x oznaczyliśmy odległość promienia świetlnego od środka ciała o masie μ. Podstawiając do tego wzoru klasyczne prawo Newtona (2.5) dostajemy:

$$\alpha_0 = -2G_N\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{4G_N\mu}{x}. \tag{2.11}$$

Obliczmy wkład do ugięcia pochodzący od ewentualnej zależności potencjału od odległości typu $1/r^3$:

$$\tilde{V}(r) = -G_s \frac{\mu}{r^3},$$

gdzie G_s jest stałą związaną z fundamentalną skalą: $G_s \sim 1/M^4$. Po podstawieniu do równania (2.10) otrzymujemy:

$$\Delta\alpha = -6G_s\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdy}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{8G_s\mu}{x^3}. \tag{2.12}$$

Pamiętając o zależności (2.3), wiążącej skale M_{PL} i M, otrzymujemy warunek na odległość, przy której dodatkowy wkład staje się znaczący:

$$x < r_c.$$

Rozmiary ciał, dla których potrafimy mierzyć takie odchylenia ($\mu \sim M_{gwiazd}$) są znacznie większe od r_c, w praktyce niemożliwe jest więc zaobserwowanie w ten sposób odstępstw od klasycznego prawa Newtona.

Rozdział 3

Model Randall i Sundruma

3.1 Założenia

Rozważmy pięciowymiarową rozmaitość, składającą się z nieskończonej, czterowymiarowej czasoprzestrzeni i orbifoldu: $x_M = (x_\mu, \varphi) \in \Omega = M^4 \times S^1/\mathbf{Z_2}$, gdzie $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Ze względu na symetrię piątego wymiaru, mamy identyfikacje pomiędzy dwoma punktami tej rozmaitości: $(x_\mu, \varphi) = (x_\mu, -\varphi)$. W punktach $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$ umiejscawiamy dwie czterowymiarowe brany odpowiednio ukrytą i widzialną, które mogą zawierać (3+1)-wymiarowe teorie pola, sprzęgające się do czterowymiarowych komponentów pełnego tensora metrycznego:

$$g^{vis}_{\mu\nu}(x_\rho) \equiv G_{\mu\nu}(x_\rho, \varphi = \pi), \quad g^{hid}_{\mu\nu}(x_\rho) \equiv G_{\mu\nu}(x_\rho, \varphi = 0), \tag{3.1}$$

gdzie G_{MN} jest pięciowymiarowym tensorem metrycznym, a $M, N \in \{0, 1, 2, 3, 5\}$.

Klasyczne działanie opisujące powyższy układ przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} S &= S_5 + S_{vis} + S_{hid}, \\ S_5 &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sqrt{-G}[-\Lambda + 2M^3 R], \\ S_{vis} &= \int d^4x \sqrt{-g_{vis}}[\mathscr{L}_{vis} - V_{vis}], \\ S_{hid} &= \int d^4x \sqrt{-g_{hid}}[\mathscr{L}_{hid} - V_{hid}]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Gdzie Λ oznacza pięciowymiarową stałą kosmologiczną, M - pięciowymiarową stałą Plancka, R - skalar krzywizny, utworzony z tensora G_{MN}, a V_i stałą energię próżni, która nie zależy od pól w $\mathscr{L}_i$.

3.2 Klasyczne rozwiązanie

Z powyższego działania otrzymujemy pięciowymiarowe równania Einsteina:

$$\begin{aligned} \sqrt{-G}(R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R) = -\frac{1}{4M^3}[&\Lambda\sqrt{-G}G_{MN} + V_{vis}\sqrt{-g_{vis}}g^{vis}_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\delta(\varphi - \pi) \\ &+ V_{hid}\sqrt{-g_{hid}}g^{hid}_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\delta(\varphi)]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Załóżmy, że istnieje rozwiązanie zachowujące czterowymiarową niezmienniczość Poincare w kierunku prostopadłym do piątego wymiaru. Pięciowymiarowy tensor metryczny możemy wtedy poszukiwać w postaci:

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\varphi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\varphi^2. \tag{3.4}$$

Współrzędne wybieramy tak, aby φ było proporcjonalne do właściwej odległości wzdłuż piątego wymiaru. Wtedy r_c będzie niezależnym od φ współczynnikiem proporcjonalności. W takim wypadku możemy interpretować r_c jako promień orbifoldu. Jest on także niezależny od x_μ ze względu na czterowymiarową niezmienniczość Poincare.

Symbole Christoffela dla metryki (3.4) przedstawiają się następująco:

$$\Gamma^5_{55} = \Gamma^5_{5\mu} = \Gamma^5_{\mu 5} = \Gamma^\mu_{55} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0,$$

$$\Gamma^5_{\mu\nu} = \frac{\sigma'}{r_c^2}e^{-2\sigma}\eta_{\mu\nu},$$

$$\Gamma^\nu_{\mu 5} = \Gamma^\nu_{5\mu} = -\sigma'\delta^\nu_\mu, \tag{3.5}$$

gdzie "prim" oznacza różniczkowanie po φ. Po podstawieniu symboli Christoffela z (3.5) do (A.6), otrzymujemy:

$$R_{\mu 5} = R_{5\mu} = 0,$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{e^{-2\sigma}}{r_c^2}\eta_{\mu\nu}[\sigma'' - 4\sigma'^2],$$

$$R_{55} = 4\sigma'' - 4\sigma'^2,$$

$$R = \frac{1}{r_c^2}(8\sigma'' - 20\sigma'^2). \tag{3.6}$$

I ostatecznie równania (3.3) redukują się do:

$$6\sigma'^2 = r_c^2\frac{-\Lambda}{4M^3},$$

$$3\frac{\sigma''}{r_c} = \frac{V_{vis}}{4M^3}\delta(\varphi - \pi) + \frac{V_{hid}}{4M^3}\delta(\varphi). \tag{3.7}$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie z (3.7) i bierzemy rozwiązania zachowujące symetrię orbifoldu:

$$\sigma = \pm r_c|\varphi|\sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}.$$

Zauważmy, że rozwiązania te mają sens tylko dla $\Lambda < 0$.

Bez straty ogólności możemy się tutaj ograniczyć do rozważania rozwiązania dodatniego. Ujemne można sprowadzić do pierwszego przez proste przeskalowanie współrzędnych. Mamy więc:

$$\sigma = r_c|\varphi|k, \tag{3.8}$$

gdzie wprowadziliśmy pojedyńczą skalę $k = \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}}$. Pamiętając o symetrii orbifoldu, możemy obliczyć:

$$\sigma'' = 2r_c k[\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)].$$

Wstawiając to do drugiego z równań (3.7) otrzymujemy warunek zgodności dla równań Einsteina:

$$V_{hid} = -V_{vis} = 24M^3k, \quad \Lambda = -24M^3k^2. \tag{3.9}$$

Ostatecznie tensor metryczny przyjmuje formę:

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\varphi|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\varphi^2. \tag{3.10}$$

Drugie rozwiązanie otrzymujemy po przeskalowaniu współrzędnych:

$$x_\mu \longrightarrow e^{kr_c\pi}x_\mu, \quad \varphi \longrightarrow \varphi + \pi.$$

3.3 Hierarchia mas

Rozważmy efektywną, czterowymiarową teorię grawitacji, będącą fluktuacją wokół naszego rozwiązania na metrykę (3.10):

$$ds^2 = e^{-2kT(x)|\varphi|}\overline{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + T^2(x)d\varphi^2, \tag{3.11}$$

gdzie:

$$\overline{g}_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \overline{h}_{\mu\nu}(x),$$

W naszym przypadku $\overline{h}_{\mu\nu}(x)$ jest małą fluktuacją wokół metryki Minkowskiego, a T(x) jest jakimś dobrze określonym polem modułowym, lokalnie stałym, którego próżniowa wartość oczekiwana wynosi r_c. Kluczowe jest, aby istniał mechanizm stabilizujący to pole. Rozwiązanie tego problemu zostanie przedstawione w dalszej części tej pracy, a na razie założymy jego istnienie i zastąpimy T(x) przez r_c.

Tensor Ricciego dla metryki (3.11), przy założeniu, że $\overline{h}_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$ przedstawia się następująco:

$$R_{\mu\nu} = \overline{R}_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{r_c^2}e^{-2kr_c|\varphi|}[2r_ck(\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)) - 4r_c^2k^2]\eta_{\mu\nu},$$

$$R_{55} = 8r_ck[\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)] - 4r_c^2k^2,$$

gdzie przez “bar” będziemy oznaczać wielkości utworzone z metryki $\overline{g}_{\mu\nu}(x)$. Skalar krzywizny wynosi:

$$R = G^{MN}R_{MN} = \frac{1}{r_c^2}[16r_ck(\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)) - 20r_c^2k^2] + e^{2kr_c|\varphi|}\overline{R}.$$

Teraz już możemy zidentyfikować człon kinetyczny dla pola $\overline{g}_{\mu\nu}$ w działaniu (3.2):

$$S_{eff} \supset \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\sqrt{-\overline{g}}2M^3r_ce^{-2kr_c|\varphi|}\overline{R}.$$

Efektywna, czterowymiarowa stała Plancka przyjmuje więc postać:

$$M_{Pl}^2 = M^3r_c\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-2kr_c|\varphi|} = \frac{M^3}{k}[1 - e^{-2kr_c\pi}]. \tag{3.12}$$

Pozostała część działania da nam po wycałkowaniu efektywną stałą kosmologiczną:

$$S_{eff} \supset \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\sqrt{-\overline{g}}r_ce^{-4kr_c|\varphi|}\{-\Lambda + 2M^3\frac{1}{r_c}[16k(\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)) - 20r_ck^2]$$

$$-\frac{1}{r_c}V_{vis}\delta(\varphi-\pi)-\frac{1}{r_c}V_{hid}\delta(\varphi)\}=$$
$$=\int d^4x\sqrt{-\overline{g}}\{\frac{\Lambda}{2k}(e^{-4kr_c\pi}-1)-12M^3k(e^{-4kr_c\pi}-1)-V_{vis}e^{-4kr_c\pi}-V_{hid}\}.$$

Po podstawieniu wartości z (3.9) widzimy, że efektywna stała kosmologiczna znika, co jest zgodne z naszym założeniem o czterowymiarowej niezmienniczości Poincare.

Rozważmy teraz (3+1) wymiarowe pole skalarne Higgsa, egzystujące na widzialnej branie:

$$S_{vis}\supset\int d^4x\sqrt{-g_{vis}}\{g_{vis}^{\mu\nu}D_\mu H^\dagger D_\nu H-\lambda(|H|^2-v_0^2)^2\}.$$

Po przepisaniu powyższego wyrażenia w języku teorii efektywnej otrzymujemy:

$$S_{eff}\supset\int d^4x\sqrt{-\overline{g}}e^{-4kr_c\pi}\{\overline{g}^{\mu\nu}e^{2kr_c\pi}D_\mu H^\dagger D_\nu H-\lambda(|H|^2-v_0^2)^2\}.$$

Po przeskalowaniu funkcji falowej $H\longrightarrow e^{kr_c\pi}H$, mamy:

$$S_{eff}\supset\int d^4x\sqrt{-\overline{g}}\{\overline{g}^{\mu\nu}D_\mu H^\dagger D_\nu H-\lambda(|H|^2-v^2)^2\},$$

gdzie wprowadziliśmy efektywną skalę łamania symetrii elektro-słabej: $v\equiv e^{-kr_c\pi}v_0$. Wynik ten można uogólnić: każdy fundamentalny parametr masowy m_0, teorii z polami bozonowymi, egzystującej na widzialnej branie, będzie w teorii efektywnej przyjmował wartość:

$$m\equiv e^{-kr_c\pi}m_0. \tag{3.13}$$

Załóżmy teraz, że wszystkie fundamentalne parametry teorii są tej samej skali. Niech $kr_c\gg 1$. Z równania (3.12) otrzymujemy $M\sim k\sim M_{Pl}$. Jeśli tylko $kr_c\sim 12$ to przy założeniu, że $v_0\sim m_0\sim M_{Pl}\sim 10^{19}GeV$, efektywne masy bozonów i skala łamania symetrii elektro-słabej jest rzędu $1TeV$.

Na problem hierarchii można też spojrzeć z innego punktu widzenia: Załóżmy, że $v_0 \sim m_0 \sim M \sim k \sim 1TeV$ i przeskalujmy współrzędne: $x_\mu \longrightarrow e^{kr_c\pi}x_\mu$. Wtedy wzory (3.12) i (3.13) przyjmują postać:

$$M_{Pl}^2 = \frac{M^3}{k}[e^{2kr_c\pi} - 1],$$
$$m \equiv m_0. \tag{3.14}$$

Jeśli więc $kr_c \sim 12$ to ze wzorów (3.14) otrzymujemy: $M_{Pl} \sim 10^{19}GeV, \quad v \sim m \sim 1TeV$.

Wynik ten można łatwo uogólnić: Zakładając praktycznie dowolną fundamentalną skalę, poprzez odpowiednie przeskalowanie współrzędnych czterowymiarowych, dostaniemy efektywnie obserwowane skale v, m i M_{Pl}.

W dalszej części tego rozdziału będziemy zakładać, że $kr_c \sim 12$.

3.4 Mody Kaluzy-Kleina

Rozwiązanie (3.10) jest metryką tła. W rozdziale tym będziemy starali się znaleźć spektrum liniowych fluktuacji wokół tej metryki:

$$G_{MN} = \begin{bmatrix} e^{-2kr_c|\varphi|}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & r_c^2 \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

gdzie $h_{\mu\nu} \ll e^{-2kr_c|\varphi|}$ jest szukaną przez nas fluktuacją. Tensor odwrotny do G_{MN} ma postać:

$$G^{MN} = \begin{bmatrix} e^{2kr_c|\varphi|}\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_c^2} \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

3.4.1 Ogólna postać

Przyjmijmy następujące cechowanie dla pola $h_{\mu\nu}$:

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0. \tag{3.17}$$

Symbole Christoffela dla metryki (3.15),(3.16) przyjmują z dokładnością do liniowego rzędu w $h_{\mu\nu}$ następującą formę:

$$\Gamma^5_{55} = \Gamma^5_{5\mu} = \Gamma^5_{\mu 5} = \Gamma^\mu_{55} = 0,$$
$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}e^{2kr_c|\varphi|}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\nu h_{\sigma\mu} + \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}),$$
$$\Gamma^5_{\mu\nu} = \frac{1}{r_c^2}[kr_c\epsilon(\varphi)e^{-2kr_c|\varphi|}\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_5 h_{\mu\nu}],$$
$$\Gamma^\mu_{5\nu} = \Gamma^\mu_{\nu 5} = -kr_c\epsilon(\varphi)\delta^\mu_\nu + \frac{1}{2}\partial_5 h^\mu_\nu + kr_c\epsilon(\varphi)h^\mu_\nu, \tag{3.18}$$

gdzie $\epsilon(\varphi)$ oznacza znak φ.

Podstawiamy (3.18) do wzorów (A.6) i otrzymujemy:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{r_c^2}\{e^{-2kr_c|\varphi|}[2r_ck(\delta(\varphi) - \delta(\varphi-\pi)) - 4r_c^2k^2]\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_5^2 h_{\mu\nu} - 2r_c^2k^2h_{\mu\nu}\} - \frac{1}{2}e^{2kr_c|\varphi|}\Box h_{\mu\nu},$$

$$R_{55} = 8r_ck[\delta(\varphi) - \delta(\varphi-\pi)] - 4r_c^2k^2,$$

$$R = G^{MN}R_{MN} = \frac{1}{r_c^2}[16r_ck(\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)) - 20r_c^2k^2], \tag{3.19}$$

gdzie ponownie zachowaliśmy wyrazy co najwyżej liniowego rzędu w $h_{\mu\nu}$ i przyjęliśmy oznaczenie $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$.

Możemy teraz podstawić (3.19) do równań Einsteina (3.3). Komponent (55) tych równań jest spełniony tożsamościowo, a komponent $(\mu\nu)$ prowadzi do wyrażenia na $h_{\mu\nu}$:

$$-\frac{1}{2}r_c^2e^{2kr_c|\varphi|}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_5^2h_{\mu\nu} + 2r_c^2k^2h_{\mu\nu} - 2r_ck[\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)]h_{\mu\nu} = 0. \tag{3.20}$$

Jak łatwo zauważyć, równanie (3.20) można rozseparować na część zależną od x_μ i na część zależną od φ:

$$h(x_\mu, \varphi) = \Phi(x_\mu) \cdot \psi(\varphi), \tag{3.21}$$

$$\Box\Phi(x_\mu) = m^2, \tag{3.22}$$

$$-\frac{1}{2}r_c^2e^{2kr_c|\varphi|}m^2\psi(\varphi) - \frac{1}{2}\psi''(\varphi) + 2r_c^2k^2\psi(\varphi) - 2r_ck[\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)]\psi(\varphi) = 0, \tag{3.23}$$

gdzie bez straty ogólności opuściliśmy wskaźniki $\mu\nu$, a "prim" oznacza różniczkowanie po φ. Rozwiązaniem równania (3.22) są fale płaskie:

$$\Phi = e^{ipx}, \quad gdzie \;\; p^2 = -m^2,$$

które można interpretować w czterowymiarowej teorii efektywnej jako grawitony o masie m.

Przejdźmy do równania (3.23), którego rozwiązaniem będą wzbudzenia Kaluzy-Kleina dla naszego modelu. Wprowadźmy nowe zmienne:

$$z \equiv \epsilon(\varphi)\frac{e^{kr_c|\varphi|} - 1}{k}, \quad \hat{\psi}(z) = \psi(\varphi)e^{\frac{kr_c|\varphi|}{2}}. \tag{3.24}$$

Druga pochodna i funkcja delta wyrażają się w nowych zmiennych:

$$\partial_\varphi^2\psi(\varphi) = r_c^2(k|z| + 1)^{-\frac{1}{2}}\left\{-k(k|z| + 1)[\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)] + (k|z| + 1)^2\partial_z^2 + \frac{k^2}{4}\right\}\hat{\psi}(z),$$

$$\delta(\varphi) = r_c\delta(z),$$

$$\delta(\varphi - \pi) = r_c(kz_c + 1)\delta(z - z_c),$$

gdzie

$$z_c \equiv \frac{e^{kr_c\pi} - 1}{k}.$$

Po przepisaniu równania (3.23) otrzymujemy:

$$\left\{-\frac{1}{2}\partial_z^2 + \frac{15k^2}{8(k|z| + 1)^2} - \frac{3k}{2(k|z| + 1)}[\delta(z) - \delta(z - z_c)]\right\}\hat{\psi}(z) = \frac{1}{2}m^2\hat{\psi}(z). \tag{3.25}$$

Najpierw rozwiążmy to równanie dla $z \neq 0, z_c$:

$$\left\{-\frac{1}{2}\partial_z^2 + \frac{15k^2}{8(k|z| + 1)^2}\right\}\hat{\psi}(z) = \frac{1}{2}m^2\hat{\psi}(z).$$

Równanie to można sprowadzić do postaci równania Bessela, i ma następujące rozwiązania zachowujące symetrię orbifoldu:

$$\hat{\psi}_0(z) = A_0(k|z| + 1)^{-\frac{3}{2}} + B_0(k|z| + 1)^{\frac{5}{2}}, \quad dla \;\; m = 0, \tag{3.26}$$

$$\hat{\psi}_m(z) = A_m(|z| + \frac{1}{k})^{\frac{1}{2}}J_2(m(|z| + \frac{1}{k})) + B_m(|z| + \frac{1}{k})^{\frac{1}{2}}Y_2(m(|z| + \frac{1}{k})), \quad dla \;\; m \neq 0, \tag{3.27}$$

gdzie $J_2()$ i $Y_2()$ oznaczają odpowiednio funkcje Bessela i Neumanna drugiego rzędu.

3.4.2 Warunki brzegowe

Rozszerzymy teraz rozwiązania (3.26) i (3.27) na całą przestrzeń. Warunki brzegowe wynikające z równania (3.25) są następujące:

$$\partial_z \hat{\psi}(z)\Big|_{z=0} = -\frac{3k}{2}\hat{\psi}(0), \tag{3.28}$$

$$\partial_z \hat{\psi}(z)\Big|_{z=z_c} = -\frac{3k}{2(kz_c+1)}\hat{\psi}(z_c). \tag{3.29}$$

Mod zerowy: Łatwo sprawdzić, że pierwszy człon równania (3.26) spełnia oba te warunki tożsamościowo. Natomiast dla drugiego członu równania te są sprzeczne. Implikuje to $B_0 = 0$ i ostatecznie:

$$\hat{\psi}_0(z) = A_0(k|z|+1)^{-\frac{3}{2}}. \tag{3.30}$$

Mody masywne: Aby zbadać dokładnie warunek (3.28) Musimy prześledzić zachowanie się funkcji (3.27) w okolicach punktu $z = 0$. Ponieważ będą nas raczej interesowały lekkie mody Kaluzy-Kleina, uczynimy tu założanie, że $m \ll k$. Biorąc pod uwagę zachowanie się funkcji Bessela i Neumanna dla małych argumentów (A.3), otrzymujemy:

$$\hat{\psi}_m(z) \approx A_m \frac{m^2(|z|+1/k)^{\frac{5}{2}}}{8} + B_m\Big[-\frac{4}{\pi m^2(|z|+1/k)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\pi}(|z|+1/k)^{\frac{1}{2}}\Big].$$

Po podstawieniu do równania (3.28), otrzymujemy relacje:

$$B_m = \frac{\pi m^2}{4k^2}A_m,$$

i ostatecznie:

$$\hat{\psi}_m(z) = A_m(|z|+\frac{1}{k})^{\frac{1}{2}}\Big[J_2(m(|z|+\frac{1}{k})) + \frac{\pi m^2}{4k^2}Y_2(m(|z|+\frac{1}{k}))\Big]. \tag{3.31}$$

Przejdźmy teraz do warunku (3.29). Jak później zobaczymy, stosownie jest założyć, że $mz_c \gg 1$. W okolicy $z = z_c$ należy więc wziąć przybliżenie funcji Bessela i Neumanna dla dużych argumentów (A.4). Funkcja (3.31) przyjmuje wtedy postać:

$$\hat{\psi}_m(z) \approx A_m\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\cos(mz - \frac{5}{4}\pi), \tag{3.32}$$

i po podstawieniu do (3.29) mamy ostatecznie:

$$\tan(mz_c - \frac{5}{4}\pi) = \frac{3}{2z_c m} \quad\Longrightarrow\quad m \approx \left\{\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2z_c} & gdy \;\; n=0 \\ \frac{\pi}{z_c}(n+\frac{1}{4}) & gdy \;\; n>0 \end{array}\right., \qquad dla \;\; n \in \mathbf{N},$$

masy wzbudzeń Kaluzy-Kleina są więc skwantowane w jednostkach $1/z_c$. Widzimy więc, że nasze założenie $mz_c \gg 1$ jest prawdziwe dla wszystkich masywnych modów, z wyjątkiem pierwszego. Przeprowadzając bardziej szczegółową analizę, stwierdzamy, że to rozwiązanie należy odrzucić. Mamy więc ostateczne wyrażenie na masy modów K-K:

$$m \approx \frac{\pi}{z_c}(n+\frac{1}{4}), \qquad n \neq 0 \;\; i \;\; n \in \mathbf{N}. \tag{3.33}$$

Jeśli teraz zgodnie z rozdziałem (3.3) $kr_c \sim 12 \Rightarrow z_c \sim 1/TeV$ to widzimy, że najlżejsze mody K-K są rzędu $1TeV$. Będą więc mogły być ewentualnie zaobserwowane w planowanych obecnie eksperymentach.

3.4.3 Normalizacja

Funkcje falowe $\psi(\varphi)$ powinny być tak znormalizowane, aby po kompaktyfikacji, wyraz kinetyczny dla grawitonu był w postaci kanonicznej:

$$S_{eff} \supset -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}M_{Pl}^2\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\eta^{\gamma\delta}\partial_\mu\Phi_{\rho\gamma}\partial_\nu\Phi_{\sigma\delta}. \tag{3.34}$$

Część tensora Ricciego, zawierająca wyrazy kinetyczne dla $\Phi(x_\mu)$ wygląda, z dokładnością do wyrazów co najwyżej drugiego rzędu, następująco:

$$R_{\mu\nu} \supset -\frac{1}{2}e^{2kr_c|\varphi|}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}[\partial_\sigma h_{\rho\mu}\partial^\rho h^\sigma_\nu + \partial_\sigma h_{\rho\mu}\partial_\nu h^{\sigma\rho} - \partial_\sigma h_{\rho\mu}\partial^\sigma h^\rho_\nu + \partial_\mu h_{\rho\sigma}\partial^\rho h^\sigma_\nu$$
$$+\partial_\mu h_{\rho\sigma}\partial_\nu h^{\sigma\rho} - \partial_\mu h_{\rho\sigma}\partial^\sigma h^\rho_\nu - \partial_\rho h_{\mu\sigma}\partial^\rho h^\sigma_\nu - \partial_\rho h_{\mu\sigma}\partial_\nu h^{\sigma\rho} + \partial_\rho h_{\mu\sigma}\partial^\sigma h^\rho_\nu].$$

Wynikający z tego skalar krzywizny jest postaci:

$$R \supset -\frac{1}{4}e^{2kr_c|\varphi|}\eta^{\mu\nu}[\partial_\sigma h_{\rho\mu}\partial^\rho h^\sigma_\nu + \partial_\sigma h_{\rho\mu}\partial_\nu h^{\sigma\rho} - \partial_\rho h_{\sigma\mu}\partial^\rho h^\sigma_\nu] + \frac{1}{2}e^{2kr_c|\varphi|}h^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu}.$$

Po podstawieniu do działania (3.2), otrzymujemy:

$$S_5 \supset \int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\sqrt{-G}M^3e^{2kr_c|\varphi|}\{h^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu h_{\rho\sigma}\partial_\nu h^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\nu}\partial_\sigma h_{\rho\mu}\partial^\rho h^\sigma_\nu\}.$$

Ostatni człon znika, ponieważ korzystając z cechowania (3.17) można go przedstawić jako różniczkę zupełną pewnego czterowektora. Drugą pochodną w pierwszym członie zamieniamy na pierwszą, wykonując całkowanie przez części i ostatecznie mamy:

$$S_5 \supset -\frac{1}{2}\int d^4x\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\sqrt{-G}M^3e^{6kr_c|\varphi|}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\eta^{\gamma\delta}\partial_\mu h_{\rho\gamma}\partial_\nu h_{\sigma\delta},$$

gdzie dodatkowe potęgi $\exp(kr_c|\varphi|)$ biorą się z opuszczenia wskaźników w $h^{\mu\nu}$. Podstawiając (3.21) i (3.12) oraz porównując z (3.34), otrzymujemy warunek normalizacyjny dla $\psi(\varphi)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi e^{2kr_c|\varphi|}\psi^2(\varphi) = \frac{1}{kr_c}, \tag{3.35}$$

co przepisane w zmiennych z i $\hat{\psi}(z)$, przyjmuje postać:

$$\int_{-z_c}^{z_c}dz\hat{\psi}^2(z) = \frac{1}{k}. \tag{3.36}$$

Mod zerowy Podstawiamy (3.30) do warunku (3.36):

$$A_0^2\int_{-z_c}^{z_c}dz(k|z|+1)^3 = \frac{1}{k}.$$

Po wykonaniu tej całki otrzymujemy $A_0 = 1$, czyli:

$$\hat{\psi}_0(z) = (k|z|+1)^{-\frac{3}{2}} \implies \psi_0(\varphi) = e^{-2kr_c|\varphi|}, \tag{3.37}$$

mod zerowy wygląda więc tak samo jak metryka tła.

Mody masywne Ponieważ wkład do całki (3.36) będzie głównie pochodził z całkowania w zakresie $mz_c > 1$, możemy aproksymować masywne mody przez wyrażenie (3.32). W takim wypadku dostajemy:

$$A_m^2 \int_{-z_c}^{z_c} \frac{2}{\pi m} \cos^2(mz - \frac{5}{4}\pi) = \frac{1}{k}.$$

Co implikuje:

$$A_m = \sqrt{\frac{\pi m}{2kz_c}},$$

i ostatecznie:

$$\hat{\psi}_m(z) = \sqrt{\frac{\pi m}{2kz_c}}(|z| + \frac{1}{k})^{\frac{1}{2}}\left[J_2(m(|z| + \frac{1}{k})) + \frac{\pi m^2}{4k^2}Y_2(m(|z| + \frac{1}{k}))\right]. \tag{3.38}$$

Obliczmy teraz jak poszczególne mody sprzęgają się do obu bran.

Brana $z = 0$

$$\hat{\psi}_0(0) = 1, \quad \hat{\psi}_m(0) = -\sqrt{\frac{\pi m}{2k^2 z_c}}. \tag{3.39}$$

Widzimy więc, że do tej brany sprzęga się praktycznie tylko mod zerowy. Mody masywne są tłumione przez czynnik rzędu 10^{-16} (przy założeniach z rozdziału (3.3)). Obserwator żyjący na tej branie nie będzie praktycznie obserwował masywnych grawitonów.

Brana $z = z_c$

$$\hat{\psi}_0(z_c) = (kz_c)^{-\frac{3}{2}}, \quad \hat{\psi}_m(z_c) \approx \pm(kz_c)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.40}$$

Na tej branie sytuacja jest dokładnie odwrotna: mody masywne sprzęgają się o czynnik rzędu 10^{16} mocniej niż mod zerowy, czyli ze stałą sprzężenia ok $1/TeV$. Możliwe więc będzie zweryfikowanie takiego scenariusza w planowanych niedługo eksperymentach.

3.5 Efektywne prawo Newtona

W rozdziale tym będziemy chcieli zbadać wpływ masywnych grawitonów na nierelatywistyczną, efektywną grawitację, czyli będziemy szukali poprawek do czterowymiarowego prawa Newtona.

Rozważmy układ statyczny. W nierelatywistycznym przybliżeniu, tensor metryczny ma następującą postać [21]:

$$G_{MN} = \begin{bmatrix} -e^{-2kr_c|\varphi|} - 2V(x_i, \varphi) & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2kr_c|\varphi|}\eta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & r_c^2 \end{bmatrix},$$

gdzie $V(x_\mu, \varphi) \ll e^{-2kr_c|\varphi|}$ jest szukanym przez nas nierelatywistycznym potencjałem grawitacyjnym.

Dodatkowo w punkcie $(x_i = 0, \varphi = 0)$, umieszczamy punktową cząstkę o masie μ. Pociąga to za sobą pojawienie się dodatkowego członu w równaniach Einsteina, których (00) komponent przyjmuje postać:

$$\sqrt{-G}(R_{00} - \frac{1}{2}G_{00}R) = -\frac{1}{4M^3}[\Lambda\sqrt{-G}G_{00} + V_{vis}\sqrt{-g_{vis}}g_{00}^{vis}\delta(\varphi - \pi)$$

$$+V_{hid}\sqrt{-g_{hid}}g_{00}^{hid}\delta(\varphi) - 2\sqrt{-g_{hid}}g_{00}^{hid}\mu\delta^3(r)\delta(\varphi)],$$

gdzie przez **r** oznaczyliśmy trójwymiarową odległość przestrzenną od początku układu współrzędnych.

Po dokonaniu obliczeń analogicznych do tych z rozdziału (3.4.1), dostajemy równanie:

$$-\frac{1}{2}r_c^2 e^{2kr_c|\varphi|}\triangle V(r,\varphi) - \frac{1}{2}\partial_5^2 V(r,\varphi) + 2r_c^2k^2V(r,\varphi) - 2r_ck[\delta(\varphi)-\delta(\varphi-\pi)]V(r,\varphi)$$

$$= -\frac{\mu r_c}{4M^3}\delta^3(r)\delta(\varphi). \tag{3.41}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$D_5 = e^{-2kr_c|\varphi|}\left[-\frac{1}{r_c^2}\partial_5^2 + 4k^2 - \frac{4}{r_c}k[\delta(\varphi)-\delta(\varphi-\pi)]\right].$$

Równanie (3.41) przyjmuje wtedy postać:

$$(-\triangle + D_5)V(r,\varphi) = -\frac{\mu}{2M^3r_c}\delta^3(r)\delta(\varphi). \tag{3.42}$$

Będziemy szukali rozwiązania tego równania w postaci superpozycji funkcji własnych operatora D_5 [16]:

$$V(r,\varphi) = \sum_m \widetilde{V}_m(r)\psi_m(\varphi), \tag{3.43}$$

gdzie $\psi_m(\varphi)$ są w naszym przypadku modami K-K i zgodnie z (3.23) i (3.35) spełniają:

$$D_5\psi_m(\varphi) = m^2\psi_m(\varphi),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{2kr_c|\varphi|}\psi_m(\varphi)\psi_n(\varphi) = \frac{1}{kr_c}\delta_{mn}, \quad \delta(\varphi) = kr_c\sum_m \psi_m(\varphi)\psi_m(0). \tag{3.44}$$

Podstawmy teraz (3.43) i (3.44) do (3.42):

$$\sum_m(-\triangle + m^2)\widetilde{V}_m(r)\psi_m(\varphi) = -\frac{N}{2M^3}\mu k\delta^3(r)\sum_m \psi_m(\varphi)\psi_m(0).$$

Z faktu, że układ funkcji ψ_m jest liniowo niezależny wynika:

$$(-\triangle + m^2)\widetilde{V}_m(r) = -\frac{\mu k}{2M^3}\delta^3(r)\psi_m(0).$$

Rozwiązaniami tego równania są potencjał Newtona dla $m = 0$ i potencjał Yukawy dla $m \neq 0$:

$$\widetilde{V}_m(r) = -\frac{1}{r}\frac{\mu k}{8\pi M^3}\psi_m(0), \quad dla\ \ m = 0,$$

$$\widetilde{V}_m(r) = -\frac{e^{-mr}}{r}\frac{\mu k}{8\pi M^3}\psi_m(0), \quad dla\ \ m \neq 0.$$

Ostatecznie nasz potencjał przyjmuje formę:

$$V(r,\varphi) = -\frac{1}{r}\frac{\mu k}{8\pi M^3}\psi_0(0)\psi_0(\varphi) - \sum_{m\neq 0}\frac{e^{-mr}}{r}\frac{\mu k}{8\pi M^3}\psi_m(0)\psi_m(\varphi). \tag{3.45}$$

Interesować nas będzie potencjał obserwowany na branie $\varphi = 0$. Zgodnie z (3.39) mamy:

$$\psi_0(0) = \hat{\psi}_0(0) = 1, \quad \psi_m(0) = \hat{\psi}_m(0) = -\sqrt{\frac{\pi m}{2k^2 z_c}},$$

a nasz potencjał jest równy:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}\frac{\mu k}{8\pi M^3} - \sum_{m\neq 0} \frac{e^{-mr}}{r}\frac{\mu k}{8\pi M^3}\frac{\pi m}{2k^2 z_c}. \tag{3.46}$$

Ponieważ w czterowymiarowej teorii grawitacji wymiana bezmasowych grawitonów prowadzi do dobrze znanego prawa Newtona, w naszym pięciowymiarowym modelu powinniśmy dostać efektywnie to samo z zerowego modu K-K. Warunek ten pozwala nam obliczyć stałą grawitacyjną:

$$G_N = \frac{k}{8\pi M^3}.$$

Równanie (3.46) możemy przepisać:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}G_N\mu - \sum_{m\neq 0} \frac{e^{-mr}}{r} G_N \mu \frac{\pi m}{2k^2 z_c},$$

i po wykonaniu sumy, z uwzględnieniem (3.33), otrzymujemy:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}G_N\mu - G_N\mu\frac{\pi^2}{2k^2 z_c^2 r}e^{-\frac{\pi r}{4z_c}}\left[\frac{-1+5e^{\frac{\pi r}{z_c}}}{4(-1+e^{\frac{\pi r}{z_c}})^2}\right]. \tag{3.47}$$

Zbadajmy powyższe wyrażenie w następujących przypadkach:

Przybliżenie $r \gg z_c$ W tym zakresie wyrażenie (3.47) przyjmuje postać:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}G_N\mu - G_N\mu\frac{5\pi^2}{8k^2 z_c^2 r}e^{-\frac{5\pi r}{4z_c}}.$$

Widzimy, że poprawka do prawa Newtona jest tłumiona przez czynnik rzędu $\sim 1/(k^2 z_c^2)$ (który w modelu (3.3) wynosi 10^{-32}) i zanika eksponencjalnie z odległością.

Przybliżenie $r \ll z_c$ Rozwijając funkcję eksponens w okolicy zera, otrzymujemy:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}G_N\mu - G_N\mu\frac{1}{2k^2 r^3}. \tag{3.48}$$

Łatwo zauważyć, że i w tym przypadku poprawka jest mocno tłumiona, tym razem przez czynnik rzędu $1/(k^2 r^2)$ i ma znaczenie tylko na odległościach porównywalnych z odwrotnością masy Plancka.

Zbadajmy teraz potencjał Newtona na drugiej branie. Powtarzając całe rozumowanie dla pierwszej brany, otrzymujemy analog równania (3.45):

$$V(r,\pi) = -\frac{1}{r}\frac{k\mu}{8\pi M^3}(kz_r)^4\psi_0^2(\pi) - \sum_{m\neq 0}\frac{e^{-mr}}{r}\frac{k\mu}{8\pi M^3}(kz_r)^4\psi_m^2(\pi), \tag{3.49}$$

Związek (3.49) pozwoli nam obliczyć wartości funkcji $\psi(\pi)$:

$$\psi_0(\pi) = (kz_c)^{-1/2}\hat{\psi}_0(\pi) = (kz_c)^{-2}, \quad \psi_m(\pi) = (kz_c)^{-1/2}\hat{\psi}_m(\pi) = \pm(kz_c)^{-1},$$

a prawo Newtona przyjmuje postać:

$$V(r,\pi) = -\frac{1}{r}\frac{k\mu}{8\pi M^3} - \sum_{m\neq 0}\frac{e^{-mr}}{r}\frac{k\mu}{8\pi M^3}k\mu(kz_c)^2.$$

Porównując z klasycznym prawem Newtona, dostajemy:

$$G_N = \frac{k}{8\pi M^3}.$$

Widzimy więc, że stała grawitacyjna G_N, mierzona na obu branach jest taka sama i odpowiada wyrażeniu na masę Plancka (3.12). Potencjał przyjmuje więc ostateczną formę:

$$V(r,\pi) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \sum_{m\neq 0}\frac{e^{-mr}}{r}\mu G_N(kz_c)^2.$$

Po wykonaniu powyższej sumy otrzymujemy:

$$V(r,\pi) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r}\mu G_N(kz_c)^2\frac{e^{-\frac{\pi r}{4z_c}}}{e^{\frac{\pi r}{z_c}} - 1}. \tag{3.50}$$

Zbadajmy to wyrażenie w szczególnych przypadkach:

Przybliżenie $r \gg z_c$ Zachowując człony wiodące w $\exp(r/z_c)$, otrzymujemy:

$$V(r,\pi) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r}\mu G_N(kz_c)^2 e^{-\frac{5\pi r}{4z_c}}.$$

Tym razem poprawka do prawa Newtona jest proporcjonalna do czynnika $(k^2z_c^2)$ (który w modelu (3.3) wynosi 10^{32}) ale istnieje dodatkowe eksponencjalne tłumienie, dzięki ktęremu poprawka nie będzie obserwowana na odległościach $r \gg 47z_c \sim 47/TeV$. Jednak dla $r \sim z_c$ będzie diametralnie zmieniała prawo Newtona.

Przybliżenie $r \ll z_c$ Rozwijając funkcję eksponens w okolicy zera, otrzymujemy:

$$V(r,\pi) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r^2}\mu G_N\frac{k^2z_c^3}{\pi}. \tag{3.51}$$

W tym zakresie mamy więc bardzo dużą poprawkę, która z uwagi na kwadratowy charakter wzrasta wraz ze zmniejszaniem się odległości.

Reasumując, uzyskane w tym modelu prawo Newtona nie stoi w sprzeczności z dotychczasowymi eksperymentami, zarówno gdy naszą czterowymiarową teorię umieścimy na branie $\varphi = 0$, jak i na branie $\varphi = \pi$. Poprawki stają się kluczowe tylko dla tego drugiego przypadku, gdy $r \sim 1/TeV$.

3.6 Stabilizacja według Goldbergera i Wise'a

Dotychczas zakładaliśmy, że rozmiar piątego wymiaru jest stałym parametrem. W rzeczywistości, rozważając czterowymiarowe fluktuacje wokół metryki tła (3.10), należy także uwzględnić dynamikę pola skalarnego $T(x)$ (patrz (3.11)), którego próżniowa wartość oczekiwana powinna wynosić r_c. Przeanalizujmy mechanizm stabilizujący to pole, zaproponowany przez W.D.Goldbergera i M.B.Wise'a [22]. Rozważmy dodatkowe pole skalarne, egzystujące w całej przestrzeni. Dodajmy do działania (3.2) odpowiednie człony:

$$S \supset -\frac{1}{2}\int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sqrt{-G}\left(G^{MN}\partial_M\Phi\partial_N\Phi + M^2\Phi^2\right)$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g_{hid}}\lambda_{hid}\left(\Phi^2 - v_{hid}^2\right)^2 - \int d^4x\sqrt{-g_{vis}}\lambda_{vis}\left(\Phi^2 - v_{vis}^2\right)^2. \qquad (3.52)$$

3.6.1 Rozwiązanie próżniowe

Interesować nas będzie rozwiązanie próżniowe, pomińmy więc zależność od czterowymiarowych współrzędnych. Z wariacji działania po polu skalarnym otrzymujemy:

$$0 = \partial_5\left(e^{-4kr_c|\varphi|}\partial_5\Phi\right) - r_c^2M^2e^{-4kr_c|\varphi|}\Phi$$

$$-4r_ce^{-4kr_c|\varphi|}\lambda_{hid}\Phi\left(\Phi^2 - v_{hid}^2\right)\delta(\varphi) - 4r_ce^{-4kr_c|\varphi|}\lambda_{vis}\Phi\left(\Phi^2 - v_{vis}^2\right)\delta(\varphi-\pi). \qquad (3.53)$$

Ogólna postać rozwiązania tego równania w obszarze $\varphi \neq 0, \quad \varphi \neq \pi$, przedstawia się nstępująco:

$$\Phi(\varphi) = e^{2kr_c|\varphi|}\left[Ae^{\nu kr_c|\varphi|} + Be^{-\nu kr_c|\varphi|}\right], \qquad (3.54)$$

gdzie $\nu = \sqrt{4 + M^2/k^2}$, a A i B są stałymi całkowania. Podstawmy to rozwiązanie do równania (3.53), uwzględniając tym razem człony brzegowe. Implikuje to warunki na stałe całkowania:

$$ke^{2kr_c\pi}\left[(2+\nu)e^{\nu kr_c\pi}A + (2-\nu)e^{-\nu kr_c\pi}B\right] - 2\lambda_{vis}\Phi(\pi)\left[\Phi^2(\pi) - v_{vis}^2\right] = 0,$$

$$k\left[(2+\nu)A + (2-\nu)B\right] - 2\lambda_{hid}\Phi(0)\left[\Phi^2(0) - v_{hid}^2\right] = 0. \qquad (3.55)$$

Nie będziemy tego rozwiązywali w ogólnym przypadku, tylko zalożymy, że parametry λ_{hid} i λ_{vis} są duże. Po podstawieniu (3.54) do (3.55) mamy:

$$A = v_{vis}e^{-(2+\nu)kr_c\pi} - v_{hid}e^{-2\nu kr_c\pi},$$

$$B = -v_{vis}e^{-(2+\nu)kr_c\pi} + v_{hid}\left(1 + e^{-2\nu kr_c\pi}\right), \qquad (3.56)$$

gdzie zaniedbaliśmy człony wyższego rzędu w $\exp(-kr_c\pi)$.

3.6.2 Efektywny potencjał

Podstawmy nasze rozwiązanie na pole skalarne (3.54) do działania (3.52), a następnie wycałkujmy po piątej współrzędnej. W efekcie otrzymujemy potencjał zależny od r_c:

$$V(r_c) = k(\nu+2)A^2\left(e^{2\nu kr_c\pi} - 1\right) + k(\nu-2)B^2\left(1 - e^{-2\nu kr_c\pi}\right)$$

$$+\lambda_{vis}e^{-4kr_c\pi}\left(\Phi^2(\pi) - v_{vis}^2\right)^2 + \lambda_{hid}\left(\Phi^2(0) - v_{hid}^2\right)^2. \qquad (3.57)$$

Załóżmy, że $M \ll k$. Parametr ν możemy teraz zapisać jako:

$$\nu = 2 + \epsilon, \quad gdzie \ \epsilon \approx \frac{M^2}{4k^2}.$$

Dla dużych kr_c potencjał (3.57) możemy zapisać jako:

$$V(r_c) = k\epsilon v_{hid}^2 + ke^{-4kr_c\pi}\left(v_{vis} - v_{hid}e^{-\epsilon kr_c\pi}\right)^2(4+\epsilon)$$
$$-k\epsilon v_{hid}e^{-(4+\epsilon)kr_c\pi}\left(2v_{vis} - v_{hid}e^{-\epsilon kr_c\pi}\right), \quad (3.58)$$

gdzie zachowaliśmy człony co najwyżej liniowego rzędu w ϵ. Zaniedbując również człony proporcjonalne do ϵ, widzimy, że potencjał ma minimum w punkcie:

$$kr_c = \frac{1}{\epsilon\pi}\log\left(\frac{v_{hid}}{v_{vis}}\right),$$

co po jawnym podstawieniu ϵ daje nam:

$$kr_c = \frac{4k^2}{\pi M^2}\log\left(\frac{v_{hid}}{v_{vis}}\right). \quad (3.59)$$

Możemy teraz w prosty sposób wygenerować potrzebną nam do hierarchii mas wartość kr_c, zachowyjąc równocześnie wszystkie parametry pięciowymiarowej teorii na poziomie masy Plancka. Na przykład:

$$\frac{v_{hid}}{v_{vis}} = 1,5 \ , \ \frac{M}{k} = 0,2 \ , \quad (3.60)$$

co implikuje $kr_c \approx 12$.

Część tensora energii-pędu, implikowana przez pole skalarne ma postać:

$$T^{\mu\nu} \supset 2k^2 e^{2kr_c|\varphi|}\eta^{\mu\nu}\epsilon\left[(v_{vis} - v_{hid}e^{-\epsilon kr_c\pi})e^{-(4+\epsilon)kr_c(\pi-|\varphi|)} + v_{hid}e^{-\epsilon kr_c|\varphi|}\right]^2$$
$$-\frac{k^2}{2}e^{2kr_c|\varphi|}\eta^{\mu\nu}\left[(4+\epsilon)(v_{vis} - v_{hid}e^{-\epsilon kr_c\pi})e^{-(4+\epsilon)kr_c(\pi-|\varphi|)} - \epsilon v_{hid}e^{-\epsilon kr_c|\varphi|}\right]^2, \quad (3.61)$$

$$T^{55} \supset \frac{2k^2\epsilon}{r_c^2}\left[(v_{vis} - v_{hid}e^{-\epsilon kr_c\pi})e^{-(4+\epsilon)kr_c(\pi-|\varphi|)} + v_{hid}e^{-\epsilon kr_c|\varphi|}\right]^2$$
$$+\frac{k^2}{2r_c^2}\left[(4+\epsilon)(v_{vis} - v_{hid}e^{-\epsilon kr_c\pi})e^{-(4+\epsilon)kr_c(\pi-|\varphi|)} - \epsilon v_{hid}e^{-\epsilon kr_c|\varphi|}\right]^2. \quad (3.62)$$

Jak widać, jeśli tylko będzie spełniony warunek $v_{hid}^2/M^3 \ll 1$ i $v_{vis}^2/M^3 \ll 1$, to wkład ten jest mały w porównaniu ze stałą kosmologiczną. Nie musieliśmy więc tego uwzględniać przy wyznaczaniu potencjału $V(r_c)$.

3.6.3 Poprawki rzędu $1/\lambda$

W naszych dotychczasowych rozważaniach mogą trochę niepokoić nienaturalnie duże wartości λ_{vis} i λ_{hid}. Zbadajmy więc wiodące poprawki rzędu $1/\lambda$. Rozwińmy równania 3.55 wokół naszego rozwiązania. Otrzymujemy wtedy poprawki:

$$\delta\Phi(0) = \frac{k}{\lambda_{hid}v_{hid}^2}e^{-(4+\epsilon)kr_c\pi}\left(v_{vis} - v_{hid}e^{-\epsilon kr_c\pi}\right),$$

$$\delta\Phi(\pi) = -\frac{k}{\lambda_{vis} v_{vis}^2}\left(v_{vis} - v_{hid} e^{-\epsilon k r_c \pi}\right),$$

gdzie zachowaliśmy tylko wiodące wyrazy w $\exp(kr_c\pi)$ i zaniedbaliśmy wyrazy rzędu ϵ. Poprawki do stałych całkowania wynoszą:

$$\delta A = -\frac{k}{\lambda_{vis} v_{vis}^2} e^{-(4+\epsilon)kr_c\pi}\left(v_{vis} - v_{hid} e^{-\epsilon k r_c \pi}\right),$$

$$\delta B = e^{-(4+\epsilon)kr_c\pi}\left(v_{vis} - v_{hid} e^{-\epsilon k r_c \pi}\right)\left[\frac{k}{\lambda_{vis} v_{vis}^2} + \frac{k}{\lambda_{hid} v_{hid}^2}\right],$$

co implikuje ostatecznie:

$$\delta V(r_c) = -\frac{4k^2}{\lambda_{vis} v_{vis}^2} e^{-4kr_c\pi}\left(v_{vis} - v_{hid} e^{-\epsilon k r_c \pi}\right)^2. \tag{3.63}$$

Łatwo zauważyć, że ta poprawka nie zmienia położenia minimum potencjału $V(r_c)$.

3.7 Inne podejście do problemu stabilizacji piątego wymiaru

W rozdziale tym będziemy próbowali znaleźć warunki, jakie musi spełniać nasz układ, aby rozmiar piątego wymiaru nie ewoulował, przynajmniej na poziomie drzewowym. Wróćmy więc do metryki (3.11), biorąc wartości próżniowe wszystkich pól z wyjątkiem $T(x)$:

$$ds^2 = e^{-2kT(x)|\varphi|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + T^2(x)d\varphi^2.$$

Symbole Christoffela dla tej metryki przedstawiają się następująco:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = -k|\varphi|\left(\delta^\rho_\mu\partial_\nu T + \delta^\rho_\nu\partial_\mu T - \eta_{\mu\nu}\partial^\rho T\right), \qquad \Gamma^5_{55} = 0,$$

$$\Gamma^5_{5\mu} = \Gamma^5_{\mu 5} = \frac{\partial_\mu T}{T}, \qquad \Gamma^\mu_{55} = -e^{2kT|\varphi|}T\partial^\mu T,$$

$$\Gamma^5_{\mu\nu} = \frac{\epsilon(\varphi)k}{T}e^{-2kT|\varphi|}\eta_{\mu\nu}, \qquad \Gamma^\nu_{\mu 5} = \Gamma^\nu_{5\mu} = -\epsilon(\varphi)kT\delta^\nu_\mu.$$

Skalar krzywizny obliczamy ze wzorów (A.6):

$$R = 16\frac{k}{T}(\delta(\varphi) - \delta(\varphi-\pi)) - 20k^2$$
$$+e^{2kT|\varphi|}\left[6k|\varphi|\partial_\mu\partial^\mu T - 6k^2\varphi^2\partial_\mu T\partial^\mu T + 4k|\varphi|\frac{\partial_\mu T\partial^\mu T}{T} - 2\frac{\partial_\mu\partial^\mu T}{T}\right]. \tag{3.64}$$

Teraz możemy to podstawić do działania (3.2):

$$S = 2M^3\int d^4x\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-2kT|\varphi|}\left[6kT|\varphi|\partial_\mu\partial^\mu T - 6k^2\varphi^2 T\partial_\mu T\partial^\mu T + 4k|\varphi|\partial_\mu T\partial^\mu T - 2\partial_\mu\partial^\mu T\right]$$
$$+2M^3\int d^4x\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-4kT|\varphi|}\left[4k(\delta(\varphi) - \delta(\varphi-\pi)) - 8k^2 T\right].$$

Całkując przez części upraszczamy to wyrażenie:

$$S = 2M^3 \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-2kT|\varphi|} \left[6k^2\varphi^2 T\partial_\mu T\partial^\mu T - 6k|\varphi|\partial_\mu T\partial^\mu T\right]$$

$$+2M^3 \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-4kT|\varphi|} \left[4k(\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)) - 8k^2 T\right]. \qquad (3.65)$$

Pierwsza część tego działania zawiera człony kinetyczne. Zasada najmniejszego działania prowadzi do równań ruchu dla pola $T(x)$ z potencjałem określonym przez drugą część:

$$\delta S = 2M^3 \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-2kT|\varphi|} \Big[- 18k^2\varphi^2\partial_\mu T\partial^\mu T + 12k^3|\varphi|^3 T\partial_\mu T\partial^\mu T$$

$$-12k^2\varphi^2 T\partial_\mu\partial^\mu T + 12k|\varphi|\partial_\mu\partial^\mu T\Big]\delta T$$

$$+2M^3 \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-4kT|\varphi|} \left[-16k^2|\varphi|(\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)) + 32k^3|\varphi|T - 8k^2\right]\delta T. \qquad (3.66)$$

Zażądamy teraz, aby w równaniu ruchu dla pola $T(x)$ występowały tylko człony kinetyczne. Oznaczać to będzie, że przy zadanej początkowej wartości r_c, pole to nie będzie ewoluowało w czasie, przynajmniej w przybliżeniu klasycznym. Warunek ten prowadzi do:

$$2M^3 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-4kT|\varphi|} \left[-16k^2|\varphi|(\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)) + 32k^3|\varphi|T - 8k^2\right] = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że w naszym przypadku jest on spełniony.

Rozdział 4

Model Kachru, Schulza i Silverstein (grawitacja z polem dylatonu)

4.1 Ogólne rozważania

Zbadajmy model składający sie z pięciowymiarowej czasoprzestrzeni, jednej brany umieszczonej w punkcie $x_5 = 0$, grawitacji i pola skalarnego (dylatonu). Układ ten można opisać następującym działaniem [12]:

$$S = 2M^3 \int d^4x \int_{-\pi r_c}^{\pi r_c} dy \sqrt{-G} \left[R - \Lambda e^{a\Phi} - \frac{4}{3} \partial_M \Phi \partial^M \Phi \right] - \int d^4x \sqrt{-g} V e^{b\Phi} \Big|_{y=0}, \tag{4.1}$$

gdzie:

$$g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu},$$

a V, Λ, a i b są parametrami modelu. Równania ruchu wyprowadzamy, korzystając z zasady wariacyjnej. Wariacja po polu dylatonu prowadzi do:

$$\frac{8}{3} \partial_M \sqrt{-G} G^{MN} \partial_N \Phi - \sqrt{-G} a \Lambda e^{a\Phi} - bV \delta(y) e^{b\Phi} \sqrt{-g} = 0. \tag{4.2}$$

Wariacja po tensorze metrycznym daje nam równania Einsteina:

$$\sqrt{-G}(R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R) + \frac{1}{2} \left[\Lambda e^{a\Phi} \sqrt{-G} G_{MN} + V e^{b\Phi} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta^\mu_M \delta^\nu_N \delta(y) \right]$$

$$- \frac{4}{3} \sqrt{-G} \left[\partial_M \Phi \partial_N \Phi - \frac{1}{2} G_{MN} \partial_P \Phi \partial^P \Phi \right] = 0. \tag{4.3}$$

Będziemy szukali rozwiązania próżniowego, zachowującego czterowymiarową niezmienniczość Poincare w kierunku prostopadłym do piątego wymiaru, w postaci:

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \tag{4.4}$$

Podstawiając to do równań ruchu (4.2), (4.3) i zaniedbując zależność od współrzędnych czterowymiarowych, otrzymujemy:

$$\frac{8}{3} \Phi'' + \frac{32}{3} A' \Phi' - a \Lambda e^{a\Phi} - bV \delta(y) e^{b\Phi} = 0, \tag{4.5}$$

$$6(A')^2 - \frac{2}{3}(\Phi')^2 + \frac{1}{2}\Lambda e^{a\Phi} = 0, \tag{4.6}$$

$$3A'' + \frac{4}{3}(\Phi')^2 + \frac{1}{2}V\delta(y)e^{b\Phi} = 0, \tag{4.7}$$

gdzie "prim" oznacza różniczkowanie po y. Pierwsze równanie bierze się z równania (4.2), drugie z komponenetu (55) równania (4.3), a ostatnie jest superpozycją komponenetów (55) i ($\mu\nu$) równania (4.3).

Rozważmy przypadek $\Lambda = 0$. Zastosujemy następujące podstawienie:

$$A' = \alpha\Phi'. \tag{4.8}$$

Najpierw rozwiążmy równania ruchu dla $y \neq 0$. Równanie (4.6) przyjmuje postać:

$$6\alpha^2(\Phi')^2 = \frac{2}{3}(\Phi')^2,$$

co implikuje:

$$\alpha = \pm\frac{1}{3}. \tag{4.9}$$

Podstawmy (4.8) i (4.9) do (4.5) i (4.7). Oba te równania są identyczne i można je zapisać jako:

$$\Phi'' \pm \frac{4}{3}(\Phi')^2 = 0.$$

Co prowadzi do ogólnego rozwiązania:

$$\Phi = \pm\frac{3}{4}\log|\frac{4}{3}y + c| + d, \tag{4.10}$$

gdzie c i d są stałymi całkowania. Zauważmy, że mamy osobliwość w punkcie

$$y = -\frac{3}{4}c.$$

4.2 Przypadek z dodatkowymi branami w osobliwościach

Weźmy rozwiązanie z $\alpha = +\frac{1}{3}$ i $c < 0$ dla $y > 0$ oraz $\alpha = -\frac{1}{3}$ i $c > 0$ dla $y < 0$ [13]. Mamy wtedy:

$$\Phi(y) = \begin{cases} +\frac{3}{4}\log(c_1 + \frac{4}{3}y) + d_1 & dla \quad y < 0 \\ -\frac{3}{4}\log(c_2 - \frac{4}{3}y) + d_2 & dla \quad y > 0 \end{cases}, \tag{4.11}$$

gdzie $c_1 \neq c_2$ są stałymi dodatnimi. Dodatkowo ograniczmy piąty wymiar do obszaru między osobliwościami w punktach $y = y_- \equiv -\frac{3}{4}c_1$ i $y = y_+ \equiv \frac{3}{4}c_2$, w których dodatkowo umieszczamy dwie brany:

$$S \supset -M^3\int d^4x\sqrt{-g}V_+e^{b_+\Phi}\Big|_{y=y_+} - M^3\int d^4x\sqrt{-g}V_-e^{b_-\Phi}\Big|_{y=y_-}. \tag{4.12}$$

Równania ruchu zawierające człony brzegowe (4.5), (4.7) przyjmują postać:

$$\frac{8}{3}\Phi'' + \frac{32}{3}A'\Phi' - a\Lambda e^{a\Phi} - bV\delta(y)e^{b\Phi} - b_+V_+\delta(y-y_+)e^{b_+\Phi} - b_-V_-\delta(y-y_-)e^{b_-\Phi} = 0,$$

$$3A'' + \frac{4}{3}(\Phi')^2 + \frac{1}{2}V\delta(y)e^{b\Phi} + \frac{1}{2}V_+\delta(y-y_+)e^{b_+\Phi} + \frac{1}{2}V_-\delta(y-y_-)e^{b_-\Phi} = 0. \tag{4.13}$$

4.2.1 Warunki brzegowe

Zobaczmy, jak warunki brzegowe w zerze i w osobliwościach, wpłyną na nasze rozwiązanie (4.11).

Brana $y = 0$

Żądanie ciągłości funkcji pozwala nam wyeliminować stałą d_2, a warunek na pierwszą pochodną prowadzi do:

$$\frac{2}{c_2} = \left[\frac{3b}{8} + \frac{1}{2}\right] V e^{bd_1} c_1^{\frac{3}{4}b},$$

$$\frac{2}{c_1} = \left[-\frac{3b}{8} + \frac{1}{2}\right] V e^{bd_1} c_1^{\frac{3}{4}b}. \tag{4.14}$$

Brany $y = y_\pm$

Znikanie funkcji Φ na brzegach jest spełnione automatycznie, a warunek dla pierwszej pochodnej daje nam:

$$\mp\frac{8}{3}\Phi'(y_\pm \mp 0) = b_\pm V_\pm e^{b_\pm \Phi(y_\pm)},$$

$$3\Phi'(y_\pm \mp 0) = -\frac{1}{2} V_\pm e^{b_\pm \Phi(y_\pm)},$$

co determinuje parametry sprzężeń na branach:

$$b_\pm = \pm\frac{4}{3},$$

$$V_- e^{-\frac{4}{3}d_1} = V_+ e^{\frac{4}{3}d_2} = -2. \tag{4.15}$$

4.2.2 Tensor metryczny

Teraz możemy już skonstruować tensor metryczny. Zgodnie z (4.8), (4.9) i (4.11) mamy:

$$A(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\log(\frac{4}{3}y + c_1) + d_{A1} & dla \quad y < 0 \\ \frac{1}{4}\log(\frac{4}{3}y - c_2) + d_{A2} & dla \quad y > 0 \end{cases},$$

gdzie d_{A1} i d_{A2} są stałymi całkowania. Po podstawieniu do (4.4) i zażądaniu ciągłości w zerze, otrzymujemy:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c_1}}(c_1 + \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} & dla \quad y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c_2}}(c_2 - \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} & dla \quad y > 0 \end{cases}, \tag{4.16}$$

gdzie skorzystaliśmy dodatkowo ze swobody przeskalowania współrzędnych czterowymiarowych x_μ.

4.2.3 Efektywna masa Plancka

Rozważmy efektywną, czterowymiarową teorię grawitacji, będącą fluktuacją wokół metryki (4.16):

$$ds^2 = e^{A(y)}\overline{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + dy^2, \tag{4.17}$$

gdzie:

$$\overline{g}_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \overline{h}_{\mu\nu}(x).$$

W naszym przypadku $\overline{h}_{\mu\nu}(x)$ jest małą fluktuacją wokół metryki Minkowskiego.

Część skalara krzywizny, zawierająca naszą fluktuację, przedstawia się następująco:

$$R \supset e^{-2A(y)}\overline{R},$$

gdzie przez "bar" będziemy oznaczać wielkości utworzone z metryki $\overline{g}_{\mu\nu}(x)$. Teraz już możemy zidentyfikować człon kinetyczny dla pola $\overline{g}_{\mu\nu}$ w działaniu (4.1):

$$S_{eff} \supset \int d^4x \int_{-\frac{3}{4}c_1}^{\frac{3}{4}c_2} dy\sqrt{-\overline{g}}M^3 e^{2A(y)}\overline{R}.$$

Efektywna, czterowymiarowa stała Plancka przyjmuje więc postać:

$$M_{Pl}^2 = M^3 \int_{-\frac{3}{4}c_1}^{\frac{3}{4}c_2} e^{2A(y)}dy$$

$$= M^3 \int_{-\frac{3}{4}c_1}^{0} \frac{1}{\sqrt{c_1}}(c_1 + \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}}dy + M^3 \int_{0}^{\frac{3}{4}c_2} \frac{1}{\sqrt{c_2}}(c_2 - \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}}dy.$$

Po wykonaniu tych całek otrzymujemy relację:

$$M_{Pl}^2 = \frac{1}{2}M^3(c_1 + c_2). \tag{4.18}$$

4.2.4 Mody Kaluzy-Kleina

Będziemy poszukiwać małych fluktuacji wokół metryki tła (4.16):

$$G_{MN} = \begin{bmatrix} e^{2A}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

gdzie $h_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}$. Symbole Christoffela, z dokładnością do liniowego rzędu, wyrażają się następująco:

$$\Gamma^5_{55} = \Gamma^5_{5\mu} = \Gamma^5_{\mu 5} = \Gamma^\mu_{55} = 0,$$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}e^{-2A}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\nu h_{\sigma\mu} + \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}),$$

$$\Gamma^5_{\mu\nu} = -A' e^{2A}\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h'_{\mu\nu},$$

$$\Gamma^\mu_{5\nu} = \Gamma^\mu_{\nu 5} = A'\delta^\mu_\nu + \frac{1}{2}h'^\mu_\nu - A' h^\mu_\nu. \tag{4.20}$$

Tensor Ricciego i skalar krzywizny otrzymujemy po podstawieniu (4.20) do wzorów (A.6):

$$R_{\mu\nu} = e^{2A}[-A'' - 4A'^2]\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h''_{\mu\nu} - 2A'^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}e^{-2A}\Box h_{\mu\nu},$$

$$R_{55} = -4A'' - 4A'^2,$$

$$R = G^{MN}R_{MN} = -8A'' - 20A'^2, \tag{4.21}$$

gdzie ponownie zachowaliśmy wyrazy co najwyżej liniowego rzędu w $h_{\mu\nu}$.

Teraz możemy podstawić (4.21) do równań ruchu (4.2) i (4.3). Komponent (55) równań Einsteina i równanie (4.2) są spełnione tożsamościowo, a pozostałe równania dają nam z uwzględnieniem (4.12) i założenia $\Lambda = 0$:

$$e^{-2A}\Box h_{\mu\nu} + h''_{\mu\nu} + 4A'^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left[Ve^{b\Phi}\delta(y) + V_+e^{b_+\Phi}\delta(y-y_+) + V_-e^{b_-\Phi}\delta(y-y_-)\right]h_{\mu\nu} = 0.$$

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach, możemy rozseparować zmienne:

$$h(x_\mu, y) = \Phi(x_\mu)\cdot\psi(y),$$

$$\Box\Phi(x_\mu) = m^2, \tag{4.22}$$

$$e^{-2A}m^2\psi + \psi'' + 4A'^2\psi + \frac{1}{3}\left[Ve^{b\Phi}\delta(y) + V_+e^{b_+\Phi}\delta(y-y_+) + V_-e^{b_-\Phi}\delta(y-y_-)\right]\psi = 0, \tag{4.23}$$

gdzie dla uproszczenia pominęliśmy wskaźniki $\mu\nu$.

Rozwiązaniem równania (4.22) są fale płaskie:

$$\Phi = e^{ipx}, \quad gdzie\ \ p^2 = -m^2,$$

które możemy interpretować w czterowymiarowej teorii efektywnej jako grawitony o masie **m**.

Spróbujmy znaleźć rozwiązanie równania (4.23) w obszarze $y > 0$. Po podstawieniu jawnej postaci funkcji $A(y)$ otrzymujemy:

$$m^2\psi + \frac{1}{\sqrt{c_2}}(c_2 - \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}}\left[\psi'' + \frac{4}{9}\left(c_2 - \frac{4}{3}y\right)^{-2}\psi\right] = 0. \tag{4.24}$$

Zastosujemy teraz następujące podstawienie:

$$z = c_2^{\frac{1}{4}}\left(c_2 - \frac{4}{3}y\right)^{\frac{3}{4}},$$

$$\partial_y = -c_2^{\frac{1}{4}}\left(c_2 - \frac{4}{3}y\right)^{-\frac{1}{4}}\partial_z,$$

$$\partial_y^2 = c_2^{\frac{1}{2}}\left(c_2 - \frac{4}{3}y\right)^{-\frac{1}{2}}\partial_z^2 - \frac{1}{3}c_2^{\frac{1}{4}}\left(c_2 - \frac{4}{3}y\right)^{-\frac{5}{4}}\partial_z. \tag{4.25}$$

Równanie (4.24) w nowych zmiennych przyjmuje prostą formę:

$$\left[m^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{3z}\partial_z + \frac{4}{9z^2}\right]\psi = 0, \tag{4.26}$$

którego rozwiązaniem są liniowe kombinacje funkcji Bessela i Neumanna zerowego rzędu:

$$\psi_0(z) = z^{\frac{2}{3}} \left(N_0 + N_0' \log(z) \right), \quad dla \;\; m = 0,$$

$$\psi_m(z) = z^{\frac{2}{3}} \left(N_m J_0(mz) + N_m' Y_0(mz) \right), \quad dla \;\; m \neq 0,$$

gdzie N_0, N_0', N_m, N_m' są stałymi.

W analogiczny sposób możemy znaleźć rozwiązanie dla $y < 0$. Musimy wprowadzić tylko inną zmienną:

$$z' = c_1^{\frac{1}{4}} \left(c_1 + \frac{4}{3} y \right)^{\frac{3}{4}}.$$

Ostatecznie możemy zapisać ogólną postać modów K-K jako:

$$\psi_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c_1}} (c_1 + \frac{4}{3} y)^{\frac{1}{2}} \left[A_0 + B_0 \log(c_1^{1/4} (c_1 + \frac{4}{3} y)^{3/4}) \right] & dla \quad y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c_2}} (c_2 - \frac{4}{3} y)^{\frac{1}{2}} \left[C_0 + D_0 \log(c_2^{1/4} (c_2 - \frac{4}{3} y)^{3/4}) \right] & dla \quad y > 0 \end{cases}, \tag{4.27}$$

$$\psi_m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c_1}} (c_1 + \frac{4}{3} y)^{\frac{1}{2}} \left[A_m J_0(m c_1^{1/4} (c_1 + \frac{4}{3} y)^{3/4}) + B_m Y_0(m c_1^{1/4} (c_1 + \frac{4}{3} y)^{3/4}) \right] & dla \quad y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c_2}} (c_2 - \frac{4}{3} y)^{\frac{1}{2}} \left[C_m J_0(m c_2^{1/4} (c_2 - \frac{4}{3} y)^{3/4}) + D_m Y_0(m c_2^{1/4} (c_2 - \frac{4}{3} y)^{3/4}) \right] & dla \quad y > 0 \end{cases}. \tag{4.28}$$

Warunki brzegowe

Rozszerzmy nasze rozwiązanie na całą przestrzeń $y_- \leq y \leq y_+$. Przeprowadzimy osobną analizę dla modu zerowego i dla modów masywnych.

Mod zerowy: Znikanie funkcji w punktach $y = y_-$ i $y = y_+$ jest spełnione automatycznie. Warunki na pierwszą pochodną, zgodnie z (4.23), mają postać:

$$\psi_0'(0^+) - \psi_0'(0^-) = -\frac{1}{3} V e^{b\Phi(0)} \psi_0(0),$$

$$\psi_0'(y_- + 0) = -\frac{1}{3} V_- e^{b_- \Phi(y_-)} \psi_0(y_- + 0),$$

$$\psi_0'(y_+ - 0) = \frac{1}{3} V_+ e^{b_+ \Phi(y_+)} \psi_0(y_+ - 0).$$

Po jawnym podstawieniu pola Φ i współczynników b, $b_\pm$, V i $V_\pm$ dostajemy:

$$\psi_0'(0_+) - \psi_0'(0_-) = -\frac{1}{3} V e^{b d_1} c_1^{\frac{3}{4} b} \psi_0(0), \tag{4.29}$$

$$\psi_0'(y_- + 0) = \frac{2}{3} (c_2 + \frac{4}{3} y)^{-1} \psi_0(y_- + 0), \tag{4.30}$$

$$\psi_0'(y_+ - 0) = -\frac{2}{3} (c_1 - \frac{4}{3} y)^{-1} \psi_0(y_+ - 0), \tag{4.31}$$

co implikuje:

$$B_0 = D_0 = 0. \tag{4.32}$$

Z ciągłości funkcji ψ w zerze otrzymujemy:

$$A_0 = C_0. \tag{4.33}$$

Podstawiając warunki (4.32) i (4.33) do równania (4.27), zapisujemy mod zerowy jako:

$$\psi_0 = A_0 \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{c_1}}(c_1 + \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} & dla \quad y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c_2}}(c_2 - \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} & dla \quad y > 0 \end{array} \right. . \tag{4.34}$$

Mody masywne Podobnie jak dla modu zerowego, znikanie funkcji na brzegach jest spełnione tożsamościowo, a warunki na pierwszą pochodną przyjmują, zgodnie z (4.29), (4.30) i (4.31), postać:

$$\psi'_m(0_+) - \psi'_m(0_-) = -\frac{1}{3} V e^{bd_1} c_1^{\frac{3}{4}b} \psi_m(0), \tag{4.35}$$

$$\psi'_m(y_- + 0) = \frac{2}{3}(c_2 + \frac{4}{3}y)^{-1} \psi_m(y_- + 0), \tag{4.36}$$

$$\psi'_m(y_+ - 0) = -\frac{2}{3}(c_1 - \frac{4}{3}y)^{-1} \psi_m(y_+ - 0). \tag{4.37}$$

Po podstawieniu przybliżeń funkcji Bessela i Neumanna z (A.1) do (4.36) i (4.37), otrzymujemy:

$$B_m = D_m = 0. \tag{4.38}$$

Ciągłość w zerze implikuje warunek:

$$C_m = \frac{J_0(mc_1)}{J_0(mc_2)} A_m. \tag{4.39}$$

Załóżmy teraz, że $c_1 m, c_2 m \gg 1$. Zobaczymy, że otrzymane rozwiązanie będzie konsystentne z tym założeniem. Relacja (4.39), zgodnie z aproksymacją (A.4), przyjmuje postać:

$$C_m = \frac{\sqrt{c_2}\cos(mc_1 - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{c_1}\cos(mc_2 - \frac{\pi}{4})} A_m, \tag{4.40}$$

a równanie (4.35) implikuje warunek kwantyzacji **m**:

$$\tan(mc_1 - \frac{\pi}{4}) = -\tan(mc_2 - \frac{\pi}{4}),$$

co prowadzi ostatecznie do:

$$m = \frac{\pi(n + \frac{1}{2})}{c_1 + c_2}, \qquad dla \;\; n \in \mathbf{N}, \tag{4.41}$$

i jest konsystentne z założeniem $c_1 m, c_2 m \gg 1$.

Ostatecznie masywne mody K-K możemy zapisać, po uwzględnieniu (4.38), (4.40) i (4.41), jako:

$$\psi_m = A_m \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{c_1}}(c_1 + \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} J_0(mc_1^{1/4}(c_1 + \frac{4}{3}y)^{3/4}) & dla \quad y < 0 \\ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{c_1}}(c_2 - \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} J_0(mc_2^{1/4}(c_2 - \frac{4}{3}y)^{3/4}) & dla \quad y > 0 \end{array} \right. , \tag{4.42}$$

gdzie n numeruje kolejne mody K-K.

Normalizacja

Będziemy normalizować mody K-K tak, aby człon kinetyczny dla grawitonu w efektywnym działaniu był w postaci kanonicznej. Przeprowadzając rozumowanie analogicznie do tego z rozdziału (3.4.3), dostajemy:

$$\int_{-\frac{3}{4}c_1}^{\frac{3}{4}c_2} dye^{-2A(y)}\psi^2(y) = \frac{M_{Pl}^2}{M^3},$$

co po skorzystaniu z (4.18) przechodzi w:

$$\int_{-\frac{3}{4}c_1}^{\frac{3}{4}c_2} dye^{-2A(y)}\psi^2(y) = \frac{1}{2}(c_1 + c_2). \tag{4.43}$$

Mod zerowy Wstawiając (4.34) do (4.43) dostajemy:

$$A_0^2 \int_{-\frac{3}{4}c_1}^{0} \frac{1}{\sqrt{c_1}}(c_1 + \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} dy + A_0^2 \int_0^{\frac{3}{4}c_2} \frac{1}{\sqrt{c_2}}(c_2 - \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2}(c_1 + c_2).$$

Po wykonaniu całek otrzymujemy:

$$A_0 = 1,$$

czyli:

$$\psi_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c_1}}(c_1 + \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} & dla \quad y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c_2}}(c_2 - \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} & dla \quad y > 0 \end{cases}. \tag{4.44}$$

Widzimy, że mod zerowy ma taką samą postać jak metryka tła (4.16).

Mody masywne Podstawmy (4.42) do warunku normalizacji (4.43):

$$A_m^2 \int_{-\frac{3}{4}c_1}^{0} \frac{1}{\sqrt{c_1}}(c_1 + \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} J_0^2(mc_1^{1/4}(c_1 + \frac{4}{3}y)^{3/4})dy$$

$$+A_m^2 \int_0^{\frac{3}{4}c_2} \frac{1}{\sqrt{c_1}}(c_2 - \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} J_0^2(mc_2^{1/4}(c_2 - \frac{4}{3}y)^{3/4})dy = \frac{1}{2}(c_1 + c_2). \tag{4.45}$$

Wykonajmy zamianę zmiennych:

$$z = \begin{cases} c_1^{\frac{1}{4}} \left(c_1 + \frac{4}{3}y\right)^{\frac{3}{4}} & dla \quad y < 0 \\ c_2^{\frac{1}{4}} \left(c_2 - \frac{4}{3}y\right)^{\frac{3}{4}} & dla \quad y > 0 \end{cases}.$$

Równanie (4.45) przyjmuje postać:

$$A_m^2 \int_0^{c_1} \frac{1}{c_1} z J_0^2(mz)dz + A_m^2 \int_0^{c_2} \frac{1}{c_1} z J_0^2(mz)dz = \frac{1}{2}(c_1 + c_2). \tag{4.46}$$

Ponieważ wkład do całek w (4.46) będzie pochodził głównie z całkowania po obszarze $z \gg 1/m$, więc możemy zastosować przybliżenie asymptotyczne funkcji Bessela (A.4). Po podstawieniu do (4.46), otrzymujemy:

$$\frac{2}{c_1 \pi m} A_m^2 \int_0^{c_1} \cos^2(mz - \frac{\pi}{4})dz + A_m^2 \frac{2}{c_1 \pi m} \int_0^{c_2} \cos^2(mz - \frac{\pi}{4})dz = \frac{1}{2}(c_1 + c_2).$$

Po wykonaniu tej całki mamy:

$$A_m = \sqrt{\frac{c_1 \pi m}{2}},$$

i ostatecznie:

$$\psi_m = \sqrt{\frac{\pi m}{2}} \begin{cases} (c_1 + \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} J_0(m c_1^{1/4} (c_1 + \frac{4}{3}y)^{3/4}) & dla \quad y < 0 \\ (-1)^n (c_2 - \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}} J_0(m c_2^{1/4} (c_2 - \frac{4}{3}y)^{3/4}) & dla \quad y > 0 \end{cases} . \tag{4.47}$$

4.2.5 Efektywne prawo Newtona

W tym rozdziale będziemy chcieli znaleźć poprawki do czterowymiarowego prawa Newtona, pochodzące od masywnych modów K-K. Interesować nas będzie potencjał generowany przez punktową masę μ, leżącą na branie $y = 0$. Przeprowadzając analogiczny rachunek do tego z rozdziału (3.5), dostajemy:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r} \frac{\mu}{4\pi M^3 (c_1 + c_2)} \psi_0^2(0) - \sum_{m \neq 0} \frac{e^{-mr}}{r} \frac{\mu}{4\pi M^3 (c_1 + c_2)} \psi_m^2(0),$$

Podstawiając jawnie postać funkcji ψ (4.44) i (4.47), otrzymujemy:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r} \frac{\mu}{4\pi M^3 (c_1 + c_2)} - \sum_{m \neq 0} \frac{e^{-mr}}{r} \frac{\mu}{4\pi M^3 (c_1 + c_2)} \cos^2(m c_1). \tag{4.48}$$

Ponieważ w czterowymiarowej teorii efektywnej obecność bezmasowych grawitonów prowadzi do dobrze znanego potencjału grawitacyjnego, to w naszym modelu, zerowy mod K-K powinien dawać to samo prawo. Mamy więc:

$$G_N = \frac{1}{4\pi M^3 (c_1 + c_2)},$$

gdzie G_N jest czterowymiarową stałą grawitacyjną. Możemy przepisać (4.48) jako:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r} \mu G_N - \sum_{m \neq 0} \frac{e^{-mr}}{r} \mu G_N \cos^2(m c_1).$$

Po wykonaniu powyższej sumy otrzymujemy ostatecznie:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r} \mu G_N - \frac{1}{r} \mu G_N \frac{e^{\frac{\pi r}{2(c_1+c_2)}} [1 + K(c_1, c_2; r)]}{2 \left(e^{\frac{\pi r}{c_1+c_2}} - 1 \right)}, \tag{4.49}$$

gdzie

$$K(c_1, c_2; r) = \frac{\sin(\frac{\pi c_1}{c_1+c_2}) \left(e^{\frac{2\pi r}{c_1+c_2}} - 1 \right)}{4 \sin^2(\frac{\pi c_1}{c_1+c_2}) e^{\frac{\pi r}{c_1+c_2}} + \left(e^{\frac{\pi r}{c_1+c_2}} - 1 \right)^2}. \tag{4.50}$$

Zbadajmy powyższe wyrażenie w następujących granicznych przypadkach:

Przybliżenie $r \gg (c_1 + c_2)$ Nasz potencjał przyjmuje postać:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r}\mu G_N \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi r}{2(c_1+c_2)}} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi c_1}{c_1 + c_2}\right)\right]. \tag{4.51}$$

Widzimy, że poprawka do prawa Newtona, pochodząca od masywnych modów K-K, jest tłumiona eksponencjalnie dla dużych odległości.

Przybliżenie $r \ll (c_1 + c_2)$ Po rozwinięciu funkcji eksponens w okolicach zera, możemy przepisać (4.49) jako:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r^2}\mu G_N \frac{c_1 + c_2}{2\pi}. \tag{4.52}$$

W tym przypadku poprawka jest znacząca i rośnie ze zmniajszaniem się odległości, na której testujemy prawo Newtona. Oznacza to także, że modele ze stosunkowo dużym rozmiarem piątego wymiaru ($c_1 + c_2 > 1mm$) stają się nierealistyczne.

4.3 Rozwiązania na orbifoldzie

Nałóżmy na ogólną postać rozważanego modelu (4.1) warunki orbifoldu. Dodajmy więc drugą branę w punkcie $y = \pi r_c$ i rozważmy przestrzeń $-\pi r_c \leq y \leq \pi r_c$ z identyfikacją $(x_\mu, y) = (x_\mu, -y)$. Implikuje to pojawienie się dodatkowego członu w działaniu (4.1):

$$S \supset -M^3 \int d^4x \sqrt{-g} V_\pi e^{b_\pi \Phi}\Big|_{y=\pi r_c}. \tag{4.53}$$

Weźmy rozwiązanie (4.10) z $\alpha = +\frac{1}{3}$ i $c > 0$, spełniające powyższe warunki:

$$\Phi = \frac{3}{4}\log(\frac{4}{3}|y| + c) + d. \tag{4.54}$$

4.3.1 Warunki brzegowe

Rozszerzmy rozwiązanie (4.54) na całą przestrzeń. Równania ruchu zawierające człony brzegowe mają postać:

$$\frac{8}{3}\Phi'' + \frac{32}{3}A'\Phi' - a\Lambda e^{a\Phi} - bV\delta(y)e^{b\Phi} - b_\pi V_\pi \delta(y - \pi r_c)e^{b_\pi \Phi} = 0,$$

$$3A'' + \frac{4}{3}(\Phi')^2 + \frac{1}{2}V\delta(y)e^{b\Phi} + \frac{1}{2}V_\pi\delta(y - \pi r_c)e^{b_\pi\Phi} = 0. \tag{4.55}$$

Funkcja (4.54) jest ciągła w punktach $y = 0$ i $y = \pi r_c$ na mocy symetrii orbifoldu, a warunki na pierwszą pochodną dostajemy z równań (4.55):

$$\frac{16}{3}\Phi'(0^+) = bVe^{b\Phi(0)}, \quad \frac{16}{3}\Phi'(\pi r_c - 0) = -b_\pi V_\pi e^{b_\pi \Phi(\pi)},$$

$$4\Phi'(0^+) = -Ve^{b\Phi(0)}, \quad 4\Phi'(\pi r_c - 0) = V_\pi e^{b_\pi\Phi(\pi)}. \tag{4.56}$$

Po podstawieniu jawnej postaci pola Φ (4.54) otrzymujemy parametry sprzężeń na branach:

$$b = -\frac{4}{3}, \quad Ve^{bd} = -4,$$

$$b_\pi = -\frac{4}{3}, \quad V_\pi e^{b_\pi d} = 4. \tag{4.57}$$

4.3.2 Tensor metryczny i efektywna masa Plancka

Przejdźmy teraz do tensora metrycznego. Zgodnie z (4.8), (4.9) i (4.54) mamy:

$$A(y) = \frac{1}{4}\log(\frac{4}{3}|y| + c) + d_A,$$

gdzie d_A jest stałą całkowania. Po podstawieniu do (4.4) i skorzystaniu ze swobody w przeskalowaniu współrzędnych czterowymiarowych x_μ otrzymujemy:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{c}}(c + \frac{4}{3}|y|)^{\frac{1}{2}}\eta_{\mu\nu}. \tag{4.58}$$

Analogicznie do rozdziału (4.2.3) dostajemy:

$$M_{Pl}^2 = M^3 \int_{-\pi r_c}^{\pi r_c} e^{2A(y)}dy = 2M^3 \int_0^{\pi r_c} \frac{1}{\sqrt{c}}(c + \frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}}dy.$$

Po wykonaniu tych całek dostajemy relację:

$$M_{Pl}^2 = \frac{M^3}{\sqrt{c}}[(c + \frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2} - c^{3/2}]. \tag{4.59}$$

Będziemy teraz rozważać przypadek $r_c \gg c$. Relacja (4.59) przyjmuje postać:

$$M_{Pl}^2 = \frac{M^3}{\sqrt{c}}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2}. \tag{4.60}$$

4.3.3 Mody Kaluzy-Kleina

Analogicznie do rozdziału (4.2), będziemy poszukiwać pięciowymiarowych fluktuacji metryki (4.58) w postaci:

$$G_{MN} = \begin{bmatrix} e^{2A}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $h_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}$. Równanie na mody K-K przyjmuje postać:

$$e^{-2A}\Box h_{\mu\nu} + h''_{\mu\nu} + 4A'^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\left[Ve^{b\Phi}\delta(y) + V_\pi e^{b_\pi\Phi}\delta(y - \pi r_c)\right] h_{\mu\nu} = 0.$$

Ponownie rozseparujmy zmienne:

$$h(x_\mu, y) = \Phi(x_\mu) \cdot \psi(y),$$

$$\Box\Phi(x_\mu) = m^2, \tag{4.61}$$

$$e^{-2A}m^2\psi + \psi'' + 4A'^2\psi + \frac{1}{3}\left[Ve^{b\Phi}\delta(y) + V_\pi e^{b_\pi\Phi}\delta(y - \pi r_c)\right]\psi = 0, \tag{4.62}$$

gdzie dla uproszczenia pominęliśmy wskaźniki $\mu\nu$.

Rozwiązaniem równania (4.22) są fale płaskie:

$$\Phi = e^{ipx}, \quad gdzie \;\; p^2 = -m^2,$$

które możemy interpretować w czterowymiarowej teorii efektywnej jako grawitony o masie **m**.

Rozwiązanie równania (4.62) w obszarze $y \neq 0$ i $y \neq \pi r_c$ znajdujemy w analogiczny sposób jak dla przypadku (4.2):

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{c}}(c+\frac{4}{3}|y|)^{\frac{1}{2}}\left[A_0 + B_0\log(c^{1/4}(c+\frac{4}{3}|y|)^{3/4})\right] \quad dla \;\; m=0, \tag{4.63}$$

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{c}}(c+\frac{4}{3}|y|)^{\frac{1}{2}}\left[A_m J_0(mc^{1/4}(c+\frac{4}{3}|y|)^{3/4}) + B_m Y_0(mc^{1/4}(c+\frac{4}{3}|y|)^{3/4})\right] \quad dla \;\; m\neq 0. \tag{4.64}$$

Warunki brzegowe

Uwzględniając warunki brzegowe, będziemy się starali rozszerzyć nasze rozwiązanie na całą przestrzeń $-\pi r_c \leq y \leq \pi r_c$. Na mocy symetrii orbifoldu funkcje (4.63) i (4.64) są ciągłe w punktach $y=0$ i $y=\pi r_c$. Warunek na pierwszą pochodną rozpatrzmy osobno dla modów masywnych i dla modu zerowego.

Mod zerowy: Zgodnie z (4.62) otrzymujemy:

$$2\psi_0'(0^+) = -\frac{1}{3}Ve^{b\Phi(0^+)}\psi_0(0^+),$$

$$2\psi_0'(\pi r_c^-) = \frac{1}{3}V_\pi e^{b_\pi\Phi(\pi r_c^-)}\psi_0(\pi r_c^-).$$

Korzystając z warunków (4.57) i podstawiając jawną postać funkcji ψ_0 (4.63), łatwo sprawdzić, że:

$$B_0 = 0. \tag{4.65}$$

Mody masywne: Analogicznie do poprzedniego paragrafu mamy warunki brzegowe dla modów masywnych:

$$\psi_m'(0^+) = \frac{2}{3c}\psi_m(0^+), \tag{4.66}$$

$$\psi_m'(\pi r_c^-) = \frac{1}{2\pi r_c}\psi_m(\pi r_c^-), \tag{4.67}$$

gdzie tym razem podstawiliśmy jawne wartości z (4.57).

Ponieważ będą nas interesowały przede wszystkim lekkie mody, możemy założyć, że $cm \ll 1$. Podstawiając do warunku (4.66) jawną postać modów K-K (4.64) w przybliżeniu (A.1), otrzymujemy relację pomiędzy współczynnikami A_m i B_m:

$$B_m = -\frac{\pi}{4}m^2c^2A_m. \tag{4.68}$$

Przejdźmy teraz do warunku (4.67). Założymy teraz, że $r_c m \gg 1$. Zobaczymy, że otrzymane rozwiązanie będzie konsystentne z tym założeniem. Mody masywne przyjmują w takim przybliżeniu (A.4) i z uwzględnieniem (4.68), postać:

$$\psi_m \approx A_m(1+\frac{4}{3c}|y|)^{1/8}\sqrt{\frac{2}{\pi mc}}\cos\left(mc^{1/4}(c+\frac{4}{3}|y|)^{3/4} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{4.69}$$

Po podstawieniu do (4.67) otrzymujemy:

$$\tan\left(mc^{1/4}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/4}-\frac{\pi}{4}\right)=-(\frac{4}{3}\pi r_c)^{-3/4}c^{-1/4}\frac{1}{2m},$$

co po rozwiązaniu daje nam kwantyzację mas:

$$m=c^{-1/4}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{-3/4}\pi(n+\frac{1}{4}),\quad gdzie\ \ n\neq 0\ \ i\ \ n\in\mathbf{N}, \tag{4.70}$$

co jest zgodne z założeniem $r_c m \gg 1$.

Normalizacja

Warunek normalizacji modów K-K wyprowadzamy analogicznie do rozdziału (3.4.3). W naszym przypadku przyjmuje on postać:

$$\int_{-\pi r_c}^{\pi r_c} dy e^{-2A(y)}\psi^2(y)=\frac{M_{Pl}^2}{M^3},$$

co po skorzystaniu z (4.60) przechodzi w:

$$\int_{-\pi r_c}^{\pi r_c} dy e^{-2A(y)}\psi^2(y)=\frac{1}{\sqrt{c}}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2}. \tag{4.71}$$

Mod zerowy: Po podstawieniu (4.63) do (4.71) i uwzględniając (4.65) otrzymujemy:

$$2A_0^2\int_0^{\pi r_c}\frac{1}{\sqrt{c}}(c+\frac{4}{3}y)^{\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{c}}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2},$$

co po scałkowaniu implikuje:

$$A_0=1.$$

Ostatecznie mod zerowy przyjmuje postać:

$$\psi_0=\frac{1}{\sqrt{c}}(c+\frac{4}{3}|y|)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.72}$$

co dokładnie przypomina metrykę tła.

Mody masywne: Teraz bedziemy normalizować masywne mody K-K. Ponieważ wkład do całki normalizacyjnej będzie pochodził przede wszystkim od całkowania po dużych argumentach funkcji Bessela, możemy zastosować przybliżenie (A.4). Warunek (4.71) po podstawieniu (4.69) przyjmuje postać:

$$2A_m^2\int_0^{\pi r_c}\frac{2}{\pi mc}(1+\frac{4}{3c}y)^{-\frac{1}{4}}\cos^2\left(mc^{1/4}(c+\frac{4}{3}y)^{3/4}-\frac{\pi}{4}\right)dy=\frac{1}{\sqrt{c}}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2}. \tag{4.73}$$

Wprowadźmy nowe zmienne:

$$z=c^{1/4}(c+\frac{4}{3}y)^{3/4},$$

$$dz=c^{1/4}(c+\frac{4}{3}y)^{-1/4}dy.$$

Równanie (4.73) przechodzi w:

$$\frac{4A^2}{\pi mc}\int_c^{c^{1/4}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/4}} \cos^2(mz-\frac{\pi}{4})dz = \frac{1}{\sqrt{c}}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2}.$$

Po wykonaniu powyższej całki otrzymujemy:

$$A = \sqrt{\frac{\pi mc^{1/4}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/4}}{2}}.$$

Mody masywne przyjmują więc ostateczną postać:

$$\psi_m = \sqrt{\frac{\pi m(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/4}}{2c^{3/4}}}(c+\frac{4}{3}|y|)^{\frac{1}{2}}\left[J_0(mc^{1/4}(c+\frac{4}{3}|y|)^{3/4}) - \frac{\pi}{4}m^2c^2Y_0(mc^{1/4}(c+\frac{4}{3}|y|)^{3/4})\right]. \tag{4.74}$$

4.3.4 Efektywne prawo Newtona

Teraz możemy już wyznaczyć poprawki do czterowymiarowego prawa Newtona, pochodzące od masywnych modów K-K. Interesować nas będzie potencjał generowany przez punktową masę μ, leżącą na branie $y=0$. Podobnie jak w rozdziale (3.5), dostajemy:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}\frac{\mu\sqrt{c}}{8\pi M^3(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2}}\psi_0^2(0) - \sum_{m\neq 0}\frac{e^{-mr}}{r}\frac{\mu\sqrt{c}}{8\pi M^3(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2}}\psi_m^2(0),$$

Podstawiając jawnie postać funkcji ψ (4.72) i (4.74) i stosując dla modów masywnych przybliżenie (A.1), otrzymujemy:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}\frac{\mu\sqrt{c}}{8\pi M^3(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2}} - \sum_{m\neq 0}\frac{e^{-mr}}{r}\frac{\mu mc^{3/4}}{16M^3(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/4}}. \tag{4.75}$$

W efektywnej czterowymiarowej teorii wymiana bezmasowych grawitonów implikuje dobrze znany potencjał grawitacyjny. W naszym modelu, zerowy mod K-K powinien dawać to samo prawo. Mamy więc:

$$G_N = \frac{\sqrt{c}}{8\pi M^3(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2}},$$

gdzie G_N jest czterowymiarową stałą grawitacyjną. Możemy przepisać (4.75) jako:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \sum_{m\neq 0}\frac{e^{-mr}}{r}\mu G_N\frac{\pi mc^{1/4}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/4}}{2}.$$

Po wykonaniu powyższej sumy otrzymujemy ostatecznie:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r}\mu G_N\frac{\pi^2}{8}e^{-\frac{\pi r}{4w}}\frac{5e^{\frac{\pi r}{w}}-1}{\left(e^{\frac{\pi r}{w}}-1\right)^2}, \tag{4.76}$$

gdzie:

$$w = c^{1/4}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/4}.$$

Zbadajmy powyższe wyrażenie w następujących granicznych przypadkach:

Przybliżenie $r \gg w$ Zachowując wyrazy wiodące w $\exp(\frac{\pi r}{w})$, dostajemy:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r}\mu G_N \frac{5\pi^2}{8} e^{-\frac{5\pi r}{4w}}. \tag{4.77}$$

Widzimy, że poprawka do prawa Newtona, pochodząca od masywnych modów K-K, jest tłumiona eksponencjalnie dla dużych odległości.

Przybliżenie $r \ll w$ Po rozwinięciu funkcji eksponens w okolicach zera, możemy przepisać (4.76) jako:

$$V(r,0) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r^3}\mu G_N \frac{w^2}{2}. \tag{4.78}$$

Tym razem poprawka jest znacząca i rośnie ze zmniejszaniem się odległości, na której testujemy prawo Newtona. Dyskwalifikuje to także modele ze stosunkowo dużym rozmiarem piątego wymiaru ($w > 1mm$).

Zobaczmy jak wygląda potecjał Newtona na drugiej branie. Podobnie jak w poprzednim przypadku mamy:

$$V(r,\pi r_c) = -\frac{1}{r}\frac{\mu\sqrt{c}}{8\pi M^3(\frac{4}{3}\pi r_c)^{5/2}}\psi_0^2(\pi r_c) - \sum_{m\neq 0}\frac{e^{-mr}}{r}\frac{\mu\sqrt{c}}{8\pi M^3(\frac{4}{3}\pi r_c)^{5/2}}\psi_m^2(\pi r_c).$$

Ponownie podstawiamy (4.72) i (4.74), tym razem stosując dla modów masywnych przybliżenie (A.4):

$$V(r,\pi r_c) = -\frac{1}{r}\frac{\mu\sqrt{c}}{8\pi M^3(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2}} - \sum_{m\neq 0}\frac{e^{-mr}}{r}\frac{\mu}{8\pi M^3(\frac{4}{3}\pi r_c)^{7/4}c^{1/4}}\cos^2(mc^{1/4}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/4} - \frac{\pi}{4}). \tag{4.79}$$

Stałą G_N wyznaczamy z żądania zgodności naszego modelu z czterowymiarową grawitacją:

$$G_N = \frac{\sqrt{c}}{8\pi M^3(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/2}}.$$

Potencjał (4.79) przyjmuje więc formę:

$$V(r,\pi r_c) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \sum_{m\neq 0}\frac{e^{-mr}}{r}\mu G_N \frac{c^{1/4}}{(\frac{4}{3}\pi r_c)^{1/4}}\cos^2(mc^{1/4}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{3/4} - \frac{\pi}{4}),$$

i po wykonaniu sumy mamy:

$$V(r,\pi r_c) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r}\mu G_N \frac{c^{1/4}e^{-\frac{\pi r}{4w}}}{(\frac{4}{3}\pi r_c)^{1/4}\left(e^{\frac{\pi r}{w}} - 1\right)}. \tag{4.80}$$

Ponownie przeprowadzimy analizę dla skrajnych przypadków:

Przybliżenie $r \gg w$ W tym obszerze nasz potencjał przyjmuje postać:

$$V(r,\pi r_c) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r}\mu G_N \frac{c^{1/4}}{(\frac{4}{3}\pi r_c)^{1/4}} e^{-\frac{5\pi r}{4w}}. \tag{4.81}$$

Poprawka do prawa Newtona jest więc tłumiona eksponencjalnie dla dużych odległości.

Przybliżenie $r \ll w$ Po rozwinięciu funkcji eksponens w okolicach zera, możemy przepisać (4.80) jako:

$$V(r, \pi r_c) = -\frac{1}{r}\mu G_N - \frac{1}{r^2}\mu G_N \frac{c^{1/2}(\frac{4}{3}\pi r_c)^{1/2}}{\pi}. \tag{4.82}$$

Poprawka ta jest znacząca dla $(r < c)$. W pozostałych przypadkach zależy od przyjętych konkretnych warotści parametrów modelu (c i r_c).

Rozdział 5

Model Lukasa, Ovruta i Waldrama

5.1 Założenia i rozwiązania na metrykę tła

Zastąpmy w modelu Randall-Sundrum (3) stałe kosmologiczne przez potencjał zależny od piątej współrzędnej. Klasyczne działanie opisujące taki układ przedstawia się następująco [14]:

$$
\begin{aligned}
S &= S_5 + S_{vis} + S_{hid}, \\
S_5 &= M^3 \int d^4x \int_{-\pi r_c}^{\pi r_c} dy \sqrt{-G} \left[2R - \frac{1}{V^2} \partial_5 V \partial^5 V - \frac{2}{3V^2} \alpha_0^2 \right], \\
S_{vis} &= M^3 \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} 2\sqrt{2} \alpha_0 \frac{1}{V} \Big|_{y=\pi r_c}, \\
S_{hid} &= -M^3 \int d^4x \sqrt{-g_{hid}} 2\sqrt{2} \alpha_0 \frac{1}{V} \Big|_{y=0},
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

gdzie wprowadziliśmy nowe współrzędne $y \equiv \varphi r_c$. $V \equiv V(y)$ jest próżniową wartością oczekiwaną pewnego pola skalarnego a α_0 pewną stałą.

Z zasady wariacyjnej otrzymujemy równania ruchu:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-G}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} R) = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} \Big[& \sqrt{-G} \frac{1}{V^2} \partial_5 V \partial^5 V + \sqrt{-G} \frac{2}{3V^2} \alpha_0^2 \\
& - 4\sqrt{2} \sqrt{-g_{vis}} \alpha_0 \frac{1}{V} \delta(y - \pi r_c) + 4\sqrt{2} \sqrt{-g_{hid}} \alpha_0 \frac{1}{V} \delta(y) \Big],
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

$$
\sqrt{-G}(R_{55} - \frac{1}{2} G_{55} R) = -\frac{1}{4} \sqrt{-G} G_{55} \Big[- \frac{1}{V^2} \partial_5 V \partial^5 V + \frac{2}{3V^2} \alpha_0^2 \Big]. \tag{5.3}
$$

Podobnie jak w rozdziale (3) będziemy szukali rozwiązania zachowującego czterowymiarową niezmienniczość Poincare w kierunku prostopadłym do piątego wymiaru. Zastosujemy następujące podstawienie na metrykę, spełniające powyższe założenie:

$$
ds^2 = a^2(y) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + b^2(y) dy^2. \tag{5.4}
$$

Symbole Christoffela dla tej metryki są postaci:

$$
\Gamma^5_{5\mu} = \Gamma^5_{\mu 5} = \Gamma^\mu_{55} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0,
$$

$$
\Gamma^5_{55} = \frac{b'}{b},
$$

$$\Gamma^5_{\mu\nu} = -\frac{aa'}{b^2}\eta_{\mu\nu},$$

$$\Gamma^\nu_{\mu 5} = \Gamma^\nu_{5\mu} = \frac{a'}{a}\delta^\nu_\mu, \tag{5.5}$$

gdzie "prim" tym razem oznacza różniczkowanie po y. Po podstawieniu do wzorów (A.6) otrzymujemy tensor Ricciego i skalar krzywizny:

$$R_{\mu 5} = R_{5\mu} = 0,$$

$$R_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\left[\frac{b'a'a}{b^3} - 3\frac{a'^2}{b^2} - \frac{a''a}{b^2}\right],$$

$$R_{55} = 4\left[-\frac{a''}{a} + \frac{b'a'}{ba}\right],$$

$$R = 4\left[-2\frac{a''}{b^2 a} + 2\frac{b'a'}{b^3 a} - 3\frac{a'^2}{b^2 a^2}\right]. \tag{5.6}$$

Rozwiązania będziemy poszukiwali w postaci:

$$a(y) = a_0 H^{1/2}(y), \quad b(y) = b_0 H^2(y),$$

$$V(y) = b_0 H^3.$$

Równania (5.6) przyjmują wtedy postać:

$$R_{\mu 5} = R_{5\mu} = 0,$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{a_0^2}{H^5 b_0^2}\eta_{\mu\nu}\left(H'^2 - H''H\right),$$

$$R_{55} = -2\frac{H''}{H} + 5\frac{H'^2}{H^2},$$

$$R = \frac{1}{H^4 b_0^2}\left(-4\frac{H''}{H} + 7\frac{H'^2}{H^2}\right). \tag{5.7}$$

Po podstawieniu do równania (5.3) otrzymujemy rozwiązanie zachowujące symetrię orbifoldu :

$$H = \frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0, \tag{5.8}$$

gdzie c_0 jest stałą całkowania.

Pamiętając o warunkach brzegowych, możemy obliczyć:

$$H'' = 2\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0[\delta(y) - \delta(y - \pi r_c)].$$

Podstawiając to do równania (5.2) widzimy, że jest ono spełnione tożsamościowo, czyli równania ruchu są konsystentne. Nasza metryka przyjmuje więc ostateczną postać:

$$ds^2 = a_0^2\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0\Big)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + b_0^2\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0\Big)^4 dy^2. \tag{5.9}$$

Analogicznie do rozdziału (3) wyprowadzamy wzór na efektywną stałą Plancka:

$$M_{Pl}^2 = M^3 \int_{-\pi r_c}^{\pi r_c} a_0^2 b_0 \Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0 |y| + c_0\Big)^3 dy = M^3 a_0^2 b_0 \frac{3}{2\sqrt{2}\alpha_0}\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0 \pi r_c + c_0\Big)^4.$$

Uczynimy teraz założenie, które będziemy stosowali do końca tego rozdziału, że $c_0 \ll r_c$. Mamy wtedy:

$$M_{Pl}^2 = M^3 a_0^2 b_0 \frac{3}{2\sqrt{2}\alpha_0}\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0 \pi r_c\Big)^4. \tag{5.10}$$

5.2 Mody Kaluzy-Kleina

5.2.1 Ogólne rozwiązania

Podobnie jak w rozdziale (3) spróbujemy znaleźć spektrum liniowych fluktuacji wokół metryki (5.9):

$$G_{MN} = \begin{bmatrix} a_0^2 H \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & b_0^2 H^4 \end{bmatrix}, \tag{5.11}$$

gdzie $h_{\mu\nu} \ll a_0^2 H$ jest szukaną przez nas fluktuacją. Tensor odwrotny do G_{MN} ma postać:

$$G^{MN} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_0^2 H}\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_0^2 H^4} \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

Wybieramy cechowanie dla pola $h_{\mu\nu}$:

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0. \tag{5.13}$$

Symbole Christoffela dla metryki (5.11),(5.12) z dokładnością do pierwszego rzędu w $h_{\mu\nu}$ wynoszą:

$$\begin{aligned}
\Gamma^5_{5\mu} = \Gamma^5_{\mu 5} = \Gamma^\mu_{55} &= 0, \\
\Gamma^\rho_{\mu\nu} &= \frac{1}{2a_0^2 H}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\nu h_{\sigma\mu} + \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}), \\
\Gamma^5_{55} &= 2\frac{H'}{H}, \\
\Gamma^5_{\mu\nu} &= \frac{1}{2b_0^2 H^4}(-H' a_0^2 \eta_{\mu\nu} - \partial_5 h_{\mu\nu}), \\
\Gamma^\mu_{5\nu} = \Gamma^\mu_{\nu 5} &= \frac{1}{2}\frac{H'}{H}\delta^\mu_\nu + \frac{1}{2}\partial_5 h^\mu_\nu - \frac{1}{2}h^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu} a_0^2 H'.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Po podstawieniu do wzorów (A.6), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\frac{a_0^2}{H^5 b_0^2}\eta_{\mu\nu}\left(H'^2 - H'' H\right) - \frac{1}{2a_0^2 H}\Box h_{\mu\nu} + \frac{1}{b_0^2 H^4}\left[\frac{H'}{H}\partial_5 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_5^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\frac{H'^2}{H^2}h_{\mu\nu}\right], \\
R_{55} &= -2\frac{H''}{H} + 5\frac{H'^2}{H^2}, \\
R &= \frac{1}{H^4 b_0^2}\left(-4\frac{H''}{H} + 7\frac{H'^2}{H^2}\right),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

gdzie ponownie ograniczyliśmy się do liniowego przybliżenia. Podstawmy to teraz do równań ruchu. Równanie (5.3) jest spełnione tożsamościowo a z (5.2) dostajemy następujące równanie na $h_{\mu\nu}$:

$$-\frac{b_0^2 H^3}{2a_0^2}\Box h_{\mu\nu} + \frac{H'}{H}\partial_5 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_5^2 h_{\mu\nu} - \frac{H'^2}{H^2}h_{\mu\nu} + \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\alpha_0}{H}[\delta(y) - \delta(y-\pi r_c)]h_{\mu\nu} = 0.$$

Możemy teraz rozseparować zmienne:

$$h(x_\mu, y) = \Phi(x_\mu)\cdot\psi(y),$$

$$\Box\Phi(x_\mu) = m^2, \tag{5.16}$$

$$-\frac{b_0^2 H^3}{2a_0^2}m^2\psi(y) + \frac{H'}{H}\partial_5\psi(y) - \frac{1}{2}\partial_5^2\psi(y) - \frac{H'^2}{H^2}\psi(y) + \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\alpha_0}{H}[\delta(y) - \delta(y-\pi r_c)]\psi(y) = 0, \tag{5.17}$$

gdzie dla uproszczenia pominęliśmy wskaźniki $\mu\nu$.

Rozwiązaniem równania (5.16) są fale płaskie:

$$\Phi = e^{ipx}, \quad gdzie \;\; p^2 = -m^2,$$

które możemy interpretować w czterowymiarowej teorii efektywnej jako masywne grawitony.

Po podstawieniu do (5.17) wyrażenia na $\mathbf{H}$ (5.8) otrzymujemy pełne równanie na mody K-K:

$$-\frac{b_0^2(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y|+c_0)^3}{2a_0^2}m^2\psi + \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0\epsilon(y)}{(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y|+c_0)}\partial_5\psi - \frac{1}{2}\partial_5^2\psi - \frac{\frac{2}{9}\alpha_0^2}{(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y|+c_0)^2}\psi$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\alpha_0}{(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y|+c_0)}[\delta(y) - \delta(y-\pi r_c)]\psi = 0. \tag{5.18}$$

Rozwiążmy najpierw to równanie dla $0 < y < \pi r_c$. W tym celu wprowadźmy nowe zmienne:

$$z = \frac{3b_0}{2\sqrt{2}a_0^2\alpha_0}(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0 y + c_0)^2. \tag{5.19}$$

Pierwsze i drugie pochodne wyrażają się przez:

$$\partial_y = \frac{b_0}{a_0^2}\sqrt{\frac{2\sqrt{2}a_0^2\alpha_0}{3b_0}}\sqrt{z}\partial_z,$$

$$\partial_y^2 = \frac{\sqrt{2}b_0\alpha_0}{3a_0^2}\partial_z + \frac{2\sqrt{2}b_0\alpha_0}{3a_0^2}z\partial_z^2,$$

i równanie (5.18) przyjmuje dla $0 < y < \pi r_c$ formę:

$$\frac{\sqrt{2}b_0\alpha_0}{3}m^2\sqrt{z}\psi - \sqrt{\frac{b_0^3\alpha_0}{12\sqrt{2}a_0^6}}\frac{1}{z}\psi' + \sqrt{\frac{b_0^3\alpha_0}{3\sqrt{2}a_0^6}}\psi'' + \sqrt{\frac{b_0^3\alpha_0}{12\sqrt{2}a_0^6}}\frac{1}{z^2}\psi = 0, \tag{5.20}$$

gdzie "prim" oznacza różniczkowanie po z. Równanie to można sprowadzić do postaci równania Bessela, i ma następujące rozwiązania:

$$\psi_0(z) = C_0\sqrt{z} + D_0 z, \quad dla \;\; m = 0, \tag{5.21}$$

$$\psi_m(z) = C_m z^{\frac{3}{4}} J_{-\frac{1}{5}}(mkz^{\frac{5}{4}}) + D_m z^{\frac{3}{4}} J_{\frac{1}{5}}(mkz^{\frac{5}{4}}), \quad dla \;\; m \neq 0, \tag{5.22}$$

gdzie $J_{-1/5}()$ i $J_{1/5}()$ oznaczają funkcje Bessela odpowiedniego rzędu, a **k** jest stałą równą:

$$k = \frac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{2\sqrt{2}a_0^6\alpha_0}{3b_0}}.$$

Po powrocie do współrzędnych y, rozwiązanie zachowujące symetrię orbifoldu przedstawia się następująco:

$$\psi_0(z) = A_0(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0) + B_0(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0)^2, \quad dla \;\; m = 0, \tag{5.23}$$

$$\psi_m(z) = A_m(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0)^{\frac{3}{2}} J_{-\frac{1}{5}}\left(Km(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0)^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+B_m(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0)^{\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{5}}\left(Km(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0)^{\frac{5}{2}}\right), \quad dla \;\; m \neq 0, \tag{5.24}$$

gdzie

$$K = \frac{6b_0}{5\sqrt{2}a_0\alpha_0}.$$

5.2.2 Warunki brzegowe

Będziemy się teraz starali rozszerzyć nasze rozwiązania (5.23) i (5.24) na całą przestrzeń. Waruki brzegowe odczytujemy z równania (5.18):

$$\partial_y\psi(y)\Big|_{y=0} = \frac{\sqrt{2}\alpha_0}{3c_0}\psi(0), \tag{5.25}$$

$$\partial_y\psi(y)\Big|_{y=\pi r_c} = \frac{\sqrt{2}\alpha_0}{\sqrt{2}\alpha_0\pi r_c + 3c_0}\psi(\pi r_c). \tag{5.26}$$

Mod zerowy Podstawmy do tych warunków rozwiązanie na mod zerowy (5.23). Pierwszy człon spełnia tożsamościowo oba równania (5.25) i (5.26), a drugi prowadzi do sprzeczności, co implikuje:

$$B_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \psi_0(z) = A_0(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0). \tag{5.27}$$

Mody masywne Ponieważ interesować nas będą raczej lekkie mody K-K, możemy założyć, że $Kmc_0^{5/2} \ll 1$. Podstawiając (5.24) do warunku (5.25) i rozwijając funkcje Bessela w okolicy zera (A.2), dostajemy:

$$B_m = (Km)^{\frac{8}{5}} 2^{\frac{2}{5}} c_0^4 \frac{5\Gamma(\frac{6}{5})}{4\Gamma(\frac{9}{5})} A_m \tag{5.28}$$

Równanie (5.26) pozwoli nam znaleźć wyrażenie na masy modów K-K. Poszukajmy rozwiązań dla $Km\pi r_c\alpha_0\sqrt{2}/3 \gg 1$. Aproksymujemy funkcje Bessela przybliżeniem dla dużych argumentów (A.4) i mamy:

$$\tan\left(Km(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0\pi r_c)^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{10}\pi\right) = -\frac{3}{10}\frac{1}{Km(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0\pi r_c)^{\frac{5}{2}}}, \tag{5.29}$$

co prowadzi do wyrażenia na masy modów K-K:

$$m \approx (n + \frac{3}{10})\frac{\pi}{K(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0 \pi r_c)^{\frac{5}{2}}}, \quad dla \;\; n \in \mathbf{N} \;\; i \;\; n \neq 0.$$

5.2.3 Normalizacja

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak w rozdziale (3), dostajemy warunek normalizacji dla modów K-K:

$$\int_{-\pi r_c}^{\pi r_c} \Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0\Big)\psi^2(y)dy = \frac{3a_0^4}{2\sqrt{2}\alpha_0}\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0 \pi r_c\Big)^4. \tag{5.30}$$

Podstawiając wyrażenie na mod zerowy (5.27) otrzymujemy:

$$A_0 = a_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \psi_0(z) = a_0^2(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0). \tag{5.31}$$

Jak można się było spodziewać, mod zerowy jest taki sam jak metryka tła.

Znormalizujmy teraz mody masywne. W tym celu podstawiamy (5.24) do warunku (5.30). Ponieważ wkład do całki będzie pochodził przede wszystkim od dużych argumentów funkcji Bessela, przybliżymy je wyrażeniem (A.4):

$$A_m^2 \frac{2}{\pi K m}\int_{-\pi r_c}^{\pi r_c} \Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0\Big)^{\frac{3}{2}} \cos^2\Big(Km(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0)^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{20}\pi\Big)dy = \frac{3a_0^4}{2\sqrt{2}\alpha_0}\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0 \pi r_c\Big)^4.$$

Po wykonaniu tej całki otrzymujemy:

$$A_m = a_0^2\sqrt{\frac{3Km\pi}{4\sqrt{2}\alpha_0}}\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0 \pi r_c\Big)^{\frac{3}{4}},$$

i ostatecznie:

$$\psi_m(z) = a_0^2\sqrt{\frac{3Km\pi}{4\sqrt{2}\alpha_0}}\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0 \pi r_c\Big)^{\frac{3}{4}}(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0)^{\frac{3}{2}}J_{-\frac{1}{5}}\left(Km(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0)^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+a_0^2\sqrt{\frac{3Km\pi}{4\sqrt{2}\alpha_0}}\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0 \pi r_c\Big)^{\frac{3}{4}}(Km)^{\frac{8}{5}}2^{\frac{2}{5}}c_0^4\frac{5\Gamma(\frac{6}{5})}{4\Gamma(\frac{9}{5})}(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0)^{\frac{3}{2}}J_{\frac{1}{5}}\left(Km(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_0|y| + c_0)^{\frac{5}{2}}\right). \tag{5.32}$$

Nie będziemy teraz przeprowadzali analizy poprawek do prawa Newtona. Ponieważ zależność "warp-factora" od piątej współrzędnej jest znacznie słabsza, niż zależność eksponencjalna, możemy, na podstawie wyników uzyskanych w poprzednim rozdziale, spodziewać się, że poprawki te staną się istotne na odległościach mniejszych od rozmiaru piętego wymiaru. Porównując to z ograniczeniami doświadczalnymi dostajemy górne ograniczenie na rozmiar piętego wymiaru $r_c < 1mm$.

Rozdział 6

Podsumowanie

W efektywnych modelach wynikających z teorii superstrun w sposób naturalny pojawiają się brany, to znaczy podprzestrzenie o niższej niz czasoprzestrzeń tła liczbie wymiarów. Do podprzestrzeni tych ograniczona jest fizyka oddziaływań z cechowaniem, podczas gdy oddziaływania grawitacyjne, naogół uzupełnione o dodatkowy sektor złożony z pól skalarnych, propagują się w pełnej czasoprzestrzeni. Różne brany, a zatem różne sektory oddziaływań z cechowaniem, mogą być rozdzielone przestrzennie. Ze względu na tę dodatkową czasoprzestrzenną strukturę oddzialywań, w modelach z branami można podjąć na nowo próby rozwiązania wielu klasycznych problemów współczesnej fizyki oddziaływań fundamentalnych. W zwiazku z tym w ostatnich latach zainteresowanie tą tematyką wśród fizyków cząstek elementarnych stale rośnie. W przedstawionej pracy dokonaliśmy przeglądu i dość szczegółowej analizy nowych propozycji rozwiązania problemu hierarchii i problemu energii prożni w ramach prostych pięciowymiarowych modeli inspirowanych przez teorie strun.

W rozdziale (3) pokazaliśmy jak, opierając się na bardzo prostych założeniach, stworzyć model pięciowymiarowej grawitacji z dwoma czterowymiarowymi branami, w którym problem hierarchii jest w naturalny sposób zamieniony na równoważny geometryczny problem wyznaczania objętości (długości) dodatkowych wymiarów. Wyznaczyliśmy także mody Kaluzy-Klaina i pokazaliśmy, że masywne grawitony sprzęgają się do widzialnej brany z siłą $1/TeV$ oraz, że najlżejsze mody mają masy rzędu $1TeV$. Oznacza to, że weryfikacja eksperymentalna tego modelu może zostać przeprowadzona w ciągu kilku najbliższych lat w nowopowstających akceleratorach, w których będą zderzane cząstki przy takich skalach energetycznych. Następnie wyznaczyliśmy poprawki do efektywnego prawa Newtona na obu branach. Okazało się, że są one nie istotne na odległościach, przy których jest to prawo obecnie mierzone. Na koniec rozdziału pokazaliśmy w jaki sposób można ustabilizować rozmiar piątego wymiaru.

W rozdziale (4) zaprezentowaliśmy dwa modele oparte na pięciowymiarowej grawitacji z dodatkowym polem skalarnym wypełniającym całą przestrzeń (dylatonem). Obecność dylatonu jest naturalną cechą teorii superstrun. Oba te modele oparte były na takich samych założeniach i różniły się warunkami brzegowymi. Następnie znaleźliśmy postać modów K-K i obliczyliśmy porawki do prawa Newtona. W obu przypadkach stawały się one istotne dla odległości mniejszych od rozmiaru piątego wymiaru.

Na koniec w rozdziale (5) badaliśmy pięciowymiarowy model wynikający z M-teorii. Ograniczyliśmy się w nim do jawnego znalezienia modów K-K i nie przeprowadzaliśmy dokładnej analizy poprawek do prawa Newtona. Jednakże, na podstawie wyników otrzymanych w poprzednim rozdziale, wnosić można że i w tym przypadku, w którym zależność "warp-factora" od piątej współrzędnej jest znacznie słabsza, niż zależność eksponencjalna, poprawki do prawa

Newtona będą zachowywać się tak jak w przypadku grawitacji z dylatonem, zaś analiza ich zgodności z doświadczeniem doprowadzi do górnego ograniczenia $\sim 1\ mm$ na rozmiar piątego wymiaru.

Tematy poruszone w tej pracy otwierają interesujący teren badań i w najbliższych latach, tak jak obecnie, stanowić będą pole szerokiej aktywności fizyków. Pozwalają one spojrzeć z innego punktu widzenia na stare i fundamentalne problemy, często rozwiązując je w sposób elegancki i prosty. Z pewnością warto w tym kierunku prowadzić dalszą intensywną działalność badawczą.

Dodatek A

Konwencje i wzory matematyczne

A.1 Konwencje

W powyższej pracy stosowałem następujące oznaczenia:

- Czterowymiarowe wskaźniki lorentzowskie oznaczałem małymi greckimi literami począwszy od μ:
$$x_\mu, \; g_{\mu\nu}, \quad gdzie \;\; \mu, \; \nu = 0, 1, 2, 3.$$
- Trójwymiarowe wskaźniki przestrzenne oznaczałem małymi łacińskimi literami zaczynającymi się od **i**:
$$x_i, \; x_j, \quad gdzie \;\; i, \; j = 1, 2, 3.$$
- Wskaźniki odpowiadające przestrzeni o wiekszej liczbie wymiarów (n) oznaczałem dużymi łacińskimi literami począwszy od **M**:
$$x_M, \; G_{MN}, \quad gdzie \;\; M, \; N = 0, 1, 2, 3, 5.., n.$$
- W modelach pięciowymiarowych pierwsze cztery współrzędne oznaczałem przez x_μ, a dla piątego wymiaru używałem wymiennie x_5 lub $y = r_c\varphi$.

Płaski tensor metryczny zdefiniowałem następująco:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A.2 Rozwinięcia funkcji Bessela i Neumanna

Dla $x \ll 1$ mamy:

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4}, \quad Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi}[log(\frac{1}{2}x) + \gamma]. \tag{A.1}$$

$$J_{\frac{1}{5}}(x) \approx x^{\frac{1}{5}} \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}\Gamma(\frac{6}{5})} - x^{\frac{11}{5}} \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}4\Gamma(\frac{11}{5})}, \quad J_{-\frac{1}{5}}(x) \approx x^{-\frac{1}{5}} \frac{2^{\frac{1}{5}}}{\Gamma(\frac{4}{5})} - x^{\frac{9}{5}} \frac{2^{\frac{1}{5}}}{4\Gamma(\frac{9}{5})}. \tag{A.2}$$

$$J_2(x) \approx \frac{x^2}{8}, \quad Y_2(x) \approx -\frac{4}{\pi x^2} - \frac{1}{\pi}. \tag{A.3}$$

Dla $x \gg 1$ mamy:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi), \quad Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi). \tag{A.4}$$

A.3 Podstawowe wzory OTW

Symbole Christoffela wyrażają się poprzez tensor metryczny:

$$\Gamma^M_{NR} = \frac{1}{2} G^{MS} \left(\partial_R G_{SN} + \partial_N G_{SR} - \partial_S G_{NR} \right). \tag{A.5}$$

Tensor Ricciego i skalar krzywizny otrzymujemy ze wzorów:

$$\begin{aligned} R_{MN} &= \partial_P \Gamma^P_{MN} - \partial_N \Gamma^P_{MP} + \Gamma^P_{MN} \Gamma^R_{PR} - \Gamma^R_{MP} \Gamma^P_{NR}, \\ R &= G^{MN} R_{MN}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Bibliografia

[1] S. Pokorski, *Gauge Field Theories* , Cambridge Univ Press, 1987.

[2] S. Coleman i J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys.Rev.159:1251-1256, 1967.

[3] M. F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Physics Reports, 1985.

[4] Y .Tanii, *Introduction to Supergravities in Diverse Dimensions*, hep-th/9802138.

[5] P .West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific Publishing, 1986.

[6] J. G. Polchinski, *String Theory*, Cambridge Univ Press, 1998.

[7] L. E. Ibanez, *Recent Developments in Physics Far Beyond the Standard Model*, hep-ph/9901292.

[8] M. Green i J. Schwarz, Phys.Lett.B109 (1982) 444.

[9] L. E. Ibanez, *On Realistic Brane Worlds From Type I Strings*, hep-ph/0005033.

[10] L. Randall i R. Sundrum, *A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, hep-th/9905221.

[11] L. Randall i R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, hep-th/9906064.

[12] S. Kachru, M. Schulz i E. Silverstein, *Bounds on Curved Domain Walls in 5d Gravity*, hep-th/0002121.

[13] S. Förste, Z. Lalak, S. Lavignac i H. P. Nilles, *A Comment on Self-Tuning and Vanishing Cosmological Constant in the Brane World*, hep-th/0002164.

[14] A. Lukas, B. A. Ovrut i D. Waldram, *Cosmology and Heterotic M-Theory in Five-Dimensions*, hep-th/9812052.

[15] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Milimeter*, hep-ph/9803315.

[16] A. Kehagias i K. Sfetsos, *Deviations from the* $1/r^2$ *Newton Law due to Extra Dimensions*, hep-ph/9905417.

[17] D. E. Krause i E. Fischbach, *Searching for Extra Dimensions and New String-Inspired Forces in the Casimir Regime*, hep-ph/9912276.

[18] J. C. Long, H. W. Chan i J. C. Price, Nucl. Phys. B 539, 23.

[19] S. K. Lamoreaux, *Experimental Verifications of the Casimir Attractive Force between Solid Bodies*, quant-ph/9907076.

[20] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton Univ Press, 1993.

[21] L. D. Landau, E. M. Lifszyc, *Teoria Pola*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1980.

[22] W. D. Goldberger i M. B. Wise, *Modulus Stabilization with Bulk Fields*, hep-ph/9907447.