

BRZĘTA SZTYWNA

77

Obszar wypełniony materią, punkty materialne sztywno związane.

RUCH: PRZESUNIĘCIE + OBRÓT

PRZESUNIĘCIE $\rightarrow$ MOŻNA REPREZENTOWAĆ PRZECZ
RUCH DOWOLNEGO PUNKTU - NADWIDUJEMY (12550)
- ŚRODEK MASY

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \rho(\vec{r}, t) \vec{r} d^3r$$

UKŁADY - TYPOWO INWARIANTY V , NIEINWARIANTY
ZWIAZANE Z BRZĘTĄ, V' - ZWIĄKI MIĘDZY
NIMI

$$\vec{J} = \int \vec{r} \times \rho \vec{v} d^3r$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\text{ALE } \vec{v}' = 0, \vec{a}' = 0$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{tr} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{J} = \int \rho \vec{r} \times \vec{v}_{tr} d^3r + \int (\vec{r}_0 + \vec{r}') \times \rho (\vec{\omega} \times \vec{r}') d^3r$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\int \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') d^3r = \int \rho [\vec{\omega} r'^2 - \vec{r}'(\vec{\omega} \cdot \vec{r}')] d^3r$$

~~ANALIZ~~

$$J_i = \left[\int \rho (r'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j) d^3r \right] \omega_j$$

$$\vec{J} = \hat{I} \vec{\omega}$$

$$\hat{I}_{ij} = \int \rho (r'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j) d^3r \quad - \text{TENSOR MOMENTU BEZWTAJNOŚCI BRYTY}$$

$$\vec{J} = M \vec{R} \times \vec{v}_{tr} + \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times M \vec{R}') + \hat{I} \vec{\omega}$$

JEŻELI $\vec{v}'$ TO UKŁAD ŚR. MASY, TO $\vec{R}' = 0$ I

$$\vec{J} = M \vec{R} \times \vec{v}_{tr} + \hat{I}^{(s)} \vec{\omega}$$

PODOBNIEM

$$E_{lc} = \int \frac{1}{2} \rho v^2 d^3r = \frac{1}{2} M \vec{v}_{tr}^2 + M \vec{v}_{tr} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \hat{I} \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} \cdot \hat{I} \vec{\omega} = \sum_{i,j} \hat{I}_{ij} \omega_i \omega_j$$

$$E_k = \frac{1}{2} M \vec{v}_{tr}^2 + \frac{1}{2} \omega \vec{I}^{(s)} \omega \rightarrow U'_{sr. m.}$$

(73)

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} \bar{I}_{x'x'} & \bar{I}_{x'y'} & \bar{I}_{x'z'} \\ \bar{I}_{x'y'} & \bar{I}_{y'y'} & \bar{I}_{y'z'} \\ \bar{I}_{x'z'} & \bar{I}_{y'z'} & \bar{I}_{z'z'} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{I}_{x'} & -D_{x'y'} & -D_{x'z'} \\ & \bar{I}_{y'} & -D_{y'z'} \\ \text{Sym} & & \bar{I}_{z'} \end{pmatrix}$$

1) - "MOMENTY DEWIACYJNE"

$$I_{x'x'} = \bar{I}_{x'} = \int \rho (y'^2 + z'^2) d^3 r'$$

$$\bar{I}_{x'y'} = -D_{x'y'} = - \int \rho x' y' d^3 r'$$

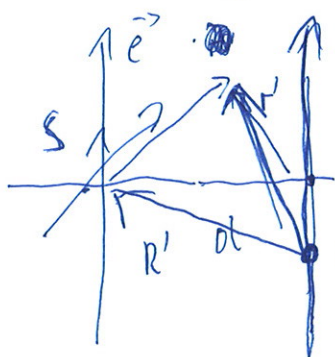
MOMENT BEZWŁADNOŚCI W OSI Z WEKTOREM $\vec{e}$

$$I_{\vec{e}} = \vec{e} \cdot \vec{I} \vec{e}$$

TV. STEINERA

ZAT: WIOSIE DANE WEKTOREM $\vec{e}$, 1 PRZECHODZI PRZECZ
SR. MASY, DRUGA W ODLEGŁOŚCI d POZIĄTEJ W O'

$$I_{\vec{e}} = \bar{I}_{\vec{e}}^{(s)} + M d^2$$



$$\vec{d} = \vec{r} - \vec{e} (\vec{e} \cdot \vec{r})$$

$$d^2 = \vec{r}^2 - (\vec{e} \cdot \vec{r})^2$$

$$(\vec{e} \cdot \vec{r}) \vec{e}$$

$$I_e = \bar{e} I \bar{e} = \int [\bar{r}^2 - (r e)^2] \rho d^3 r$$

(79)

$$= \int \rho [(\bar{r}^{(s)} + \bar{r}')^2 - (\bar{e} r^{(s)} + e \bar{r}')^2] d^3 r^{(s)}$$

$$= I_e^{(s)} + \int \rho [(\bar{r}^{(s)} \bar{r}' - (\bar{e} r^{(s)})(e \bar{r}'))] d^3 r^{(s)}$$

$$+ \int \rho [\bar{r}'^2 - (e \bar{r}')^2] d^3 r^{(s)}$$

$$= I_e^{(s)} + M d^2, \quad \text{bo } \bar{r}^{(s)} = 0$$

TENSOR I - MACIERZ SYMETRYCZNA PZECZYWISTA.

ISTNIEJE WIĘC OBRÓT ORTOGONALNY O T. ŻE

$$O^T I O = \vec{I}_{\text{gl\u00f3wne}} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} - \text{"OSIE G\u0141\u00d3WNE"}$$

WARTOŚCI WŁASNE $\det(I - \lambda \vec{1}) = 0$

$I_x \neq I_y \neq I_z$ - "OSIE G\u0141\u00d3WNE" WYZNACZONE JEDNOZNACZNIE,

(NACZED PEWNA POWOLNOŚĆ)

OSIE G\u0141\u00d3WNE CZĘSTO MOŻNA ZAPISAĆ - OSIE

SYMETRII BRZYT!

KOMENTARZ = SKŁADANIE RUCHÓW $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

$$V \xrightarrow{\vec{\omega}_1} V' \xrightarrow{\vec{\omega}_2} V''$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{b}}{dt} &= \frac{d'\vec{b}}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{b} \\ \frac{d'\vec{b}}{dt} &= \frac{d''\vec{b}}{dt} + \vec{\omega}_2 \times \vec{b} \end{aligned} \right\} = \frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d''\vec{b}}{dt} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{b}$$

$$J^{(3)} = \bar{e}_1' I_{x'}^{(3)} (\sin \psi \sin \theta \dot{\varphi} + \omega \psi \dot{\theta}) + \bar{e}_2' I_{y'}^{(3)} (\cos \psi \sin \theta \dot{\varphi} - \sin \psi \dot{\theta}) + \bar{e}_3' I_{z'}^{(3)} (\omega \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi})$$

TYPOWE MOMENTY γ ~~PROSTY~~ BIEŻĄCE I ADNUSI:

1) PRĘT π, L $I_{\perp} = \frac{1}{12} \pi l^2$

2) PROSTOKĄT a, b, m

$$I_{aa} = \frac{1}{12} m b^2 \quad I_{bb} = \frac{1}{12} m a^2 \quad I_{\perp} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

3) EKLIPSA, PÓŁOSIE a, b

$$I_a = \frac{1}{4} m b^2 \quad I_b = \frac{1}{4} m a^2 \quad (\text{KÓŁO } I = \frac{1}{4} \pi r^2) \\ I_{\perp} = \frac{1}{4} m (a^2 + b^2) \quad I_{\perp} = \frac{1}{2} \pi r^2$$

4) PROSTOKĄTÓŚCIAN a, b, c, m

$$I_a = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2) \dots$$

5) EKLIPSOIDALN PÓŁOSIE a, b, c

$$I = \frac{1}{5} m (b^2 + c^2) \quad (\text{KULE } \frac{2}{5} m r^2)$$

ДYNAMIKA БЫТЫ

(75)

БЫТА - УКАД ПУНКТОМ МАТЕРИАЛНЫМ, ЦЫЦ

$$\begin{cases} m \vec{r} = \vec{F} \\ \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{D} \end{cases}$$

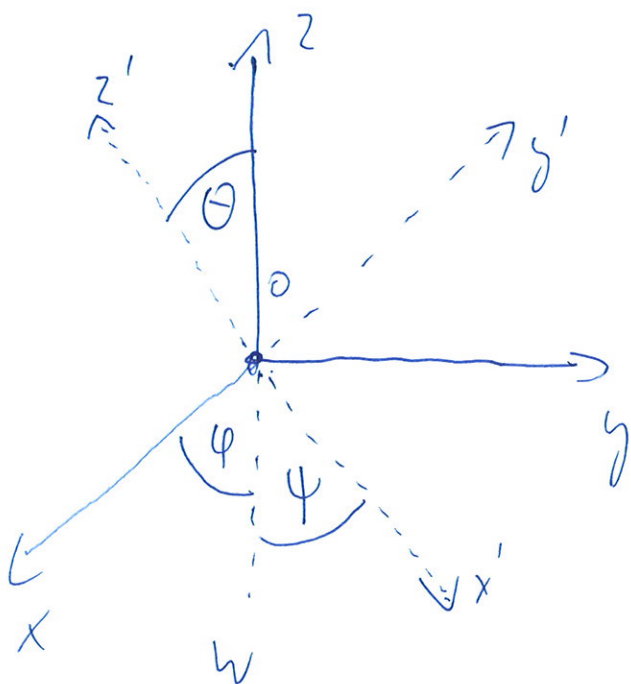
УКАД ИНЕРЦИАЛНЫ V

W УКАДЗІЕ СР. МАСЫ (НАВЕТ НЕИНЕРЦИАЛНЫМ!)

$$\vec{r}^{(s)} = 0$$

$$\frac{d\vec{J}^{(s)}}{dt} = \vec{D}^{(s)} = \frac{d}{dt} I^{(s)} \vec{\omega}$$

КАТЫ ЕВЛЕРА



$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$0 \leq \psi < 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

O_W - ЛИНИЯ ПРЗЕЦИСІА Oxy і $Ox'y'$

ОБРОТ: φ вості осі z , θ вості осі O_W , ψ вості осі z'

$$\vec{\omega} = \vec{e}_3 \dot{\varphi} + \vec{e}_1 \dot{\theta} + \vec{e}_3' \dot{\psi}$$

ОТНАСЕНИЯ $d_{ij} = \bar{e}_i \bar{e}_j'$

(77)

$$\bar{e}_i' = \sum_j (\bar{e}_j \bar{e}_i') \bar{e}_j' = d_{ji} \bar{e}_j'$$

$$\bar{e}_j' = \sum_i (\bar{e}_i \bar{e}_j') \bar{e}_i' = d_{ij} \bar{e}_i'$$

$$\vec{r} = r_i \bar{e}_i = r_i d_{ij} \bar{e}_j' \equiv r_j' \bar{e}_j'$$

$$r_j' = d_{ij} r_i$$

$$\vec{r} = r_i' \bar{e}_i' = r_i' d_{ji} \bar{e}_j'$$

$$r_j' = d_{ji} r_i \Rightarrow \boxed{r_i = d_{ij} r_j'}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{J} = \begin{bmatrix} \omega \psi \cos \psi - \sin \psi \sin \psi \cos \theta & -\omega \psi \sin \psi - \cos \theta \cos \psi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \omega \psi \sin \psi + \cos \theta \omega \psi \sin \psi & -\sin \psi \sin \psi + \cos \theta \omega \psi \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

WYRAZAMY $\vec{\omega}$ PRZEZ KĄTY EULERA

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_x &\equiv \vec{\omega} \bar{e}_x' = \sin \theta \sin \psi \dot{\varphi} + \omega \psi \dot{\theta} \\ \omega_y &= \sin \theta \cos \psi \dot{\varphi} - \sin \theta \dot{\theta} \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \cos \theta \dot{\varphi} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{d\vec{J}^{(s)}}{dt} = \vec{D}^{(s)}$$

$$\vec{J}^{(s)} = \vec{I}^{(s)} \vec{\omega}$$

JEZELI OSIE PORUSZAJĄ SIĘ W CIELE, $\vec{I}^{(s)}$ ZALĘŻY OD t !

~~WŁAŚNY UKŁAD OSI GŁÓWNYCH ZWIĄZ. Z BIAŁĄ, $\vec{I}^{(s)} = \text{const}$~~

RUCH PŁASKI

(78)

KAŻDY PUNKT BIAŁY PORUSZA SIĘ W STANIE
PŁASZCZYNNIK (WSTYŚKIE PŁ II)

CHWILOWA OŚ OBROTU NA STADY KIERUNKU

MOMENT BEZUŁ WZGLĘDNIE JED OŚ

$$I_{\omega} = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \hat{I} \vec{\omega}) = \text{CONST}$$

$$\omega = \dot{\alpha}, \quad \vec{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \dot{\alpha} \quad \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \text{CONST}$$

$$\frac{d\vec{j}^{(s)}}{dt} = \vec{j}^{(s)}$$

$$\vec{j}^{(s)} = \sqrt{\vec{j}^{(s)}} \vec{\omega}$$

$$\frac{\vec{\omega}}{\omega} \frac{d}{dt} \left(\vec{I}^{(s)} \frac{\vec{\omega}}{\omega} \dot{\alpha} \right) = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \vec{j}^{(s)}$$

$$I_{\omega} \ddot{\alpha} = D_{\omega}^{(s)}$$

RUCH OBROTNY -

$$+ \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$$

I OPCJA $T = \frac{1}{2} \omega \hat{I} \omega, \quad L = T - V$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} \left[I_{x'} (\sin \psi \sin \theta \dot{\varphi} + \omega \dot{\theta})^2 + \right. \\ \left. + I_{y'} (\omega \dot{\psi} \sin \theta \dot{\varphi} - \sin \psi \dot{\theta})^2 + I_{z'} (\omega \dot{\theta} \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 \right]$$

NIE ZAWSZE WYGODNE, BARŹO NIELINIOWE...

CZĘSTO LEPIEJ - R. EULERA.

PRZECHODZIMY DO UKŁADU BIEŻĄCY $\vec{v}'$, SZYBKIMU ZWIĄ-
ZANY Z BIEŻĄCĄ $\Rightarrow \vec{I}^{(s)} = \text{const}$, $\vec{j}^{(s)} = \vec{I}^{(s)} \vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{j}^{(s)}}{dt} = \frac{d'\vec{j}^{(s)}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{j}^{(s)} = \vec{D}^{(s)}$$

$$\vec{I}^{(s)} \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{I}^{(s)} \vec{\omega} = \vec{D}^{(s)}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$$

(ZTŁ) $\vec{I}^{(s)} \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{I}^{(s)} \vec{\omega} = \vec{D}^{(s)}$

UKŁAD OSI STÓWNIANY - RÓWNANIA EULERA:

$$\begin{cases} I_{x'} \dot{\omega}_{x'} = (I_{y'} - I_{z'}) \omega_{y'} \omega_{z'} + D_{x'} \\ I_{y'} \dot{\omega}_{y'} = (I_{z'} - I_{x'}) \omega_{z'} \omega_{x'} + D_{y'} \\ I_{z'} \dot{\omega}_{z'} = (I_{x'} - I_{y'}) \omega_{x'} \omega_{y'} + D_{z'} \end{cases}$$

STĄD $\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$ I DALEJ

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \dot{\psi} + \sin\theta \dot{\varphi} + \cos\theta \dot{\Theta} \\ \omega_{y'} = \dot{\psi} + \sin\theta \dot{\varphi} - \sin\theta \dot{\Theta} \\ \omega_{z'} = \cos\theta \dot{\varphi} + \dot{\Theta} \end{cases}$$

TEORIA BAZKA, PRZYKŁADY

(PD)

ROZWIĄZY W AUF

1) BAZKA SWOBODNA

2) BAZKA SYMETRYCZNY CIĘŻKI

3) BAZKA KONTAKTOWSKIES

AD 1) - dowolny rozkład masy, $\vec{D} = 0$

(śr. obrotu spoczywa lub jest śr. masy)

Obrot wokół śr. masy w polu $\vec{g}$

$$D^{(s)} = \int (\vec{r}^{(s)} \times g \vec{g}) d^3r = \vec{R}^{(s)} \times g M = 0$$

AD 2) ELIPSOIDA OBROTOWA DLA TENSORA I , śr. m na osi sym
moment siły od pola $\vec{g}$, ale obrot wokół punktu $\neq$ śr. m

AD 3) $I \rightarrow$ ELIPSOIDA OBROTOWA, $I_x = I_y = 1/2 I_z$ - - - , pole $\vec{g}$
ITP - małe znaczenie praktyczne, śr. masy poza
osią, sym.

PRZYKŁAD I

$$\vec{I} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{I} \vec{\omega} = 0$$

(87)

BAŁK SWOBODNY SYMETRYCZNY

$$I_{x'} = I_{y'} = A \quad I_{z'} = B$$

$$B \cancel{A} \frac{d\omega_{\cancel{x}}}{dt} \neq 0$$

$$\omega_{z'} = \alpha = \text{const}$$

$$\begin{cases} A \dot{\omega}_{x'} + \alpha (B - A) \omega_{y'} = 0 \\ A \dot{\omega}_{y'} + \alpha (A - B) \omega_{x'} = 0 \end{cases}$$

$$\zeta = \omega_{x'} + i \omega_{y'}$$

$$A \dot{\zeta} + \alpha (B - A) (\omega_{y'} - i \omega_{x'}) = 0$$

$$\dot{\zeta} + i \frac{\alpha (A - B)}{A} \zeta = 0$$

$$\chi = \frac{\alpha (A - B)}{A}$$

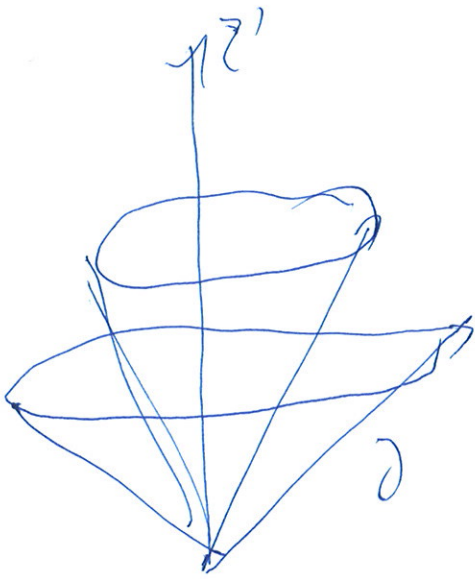
$$\zeta = \beta e^{-i \chi t}$$

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \beta \cos \chi t \\ \omega_{y'} = -\beta \sin \chi t \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{I} \vec{\omega}$$

$$\begin{cases} \gamma_{x'} = A \beta \cos \chi t \\ \gamma_{y'} = -A \beta \sin \chi t \\ \gamma_{z'} = B \alpha \end{cases}$$

$\vec{\gamma}, \vec{\omega}$ w u' zataczają stożki, osie
jest Oz' (oś symetrii), $\vec{\gamma}$ i $\vec{\omega}$ są zwrócone
w tej samej płaszczyźnie



→ POLHODIA = OKRĄG.

POLHODIA – KRZYWA ZADANĄ PRZEZ CŁUBEK

$\vec{\omega}$ w U' (WIERPOLHODIA – w U)

A TAK W U ?

$$\vec{\omega} = \text{CONST}, \quad \text{BO} \quad \vec{\omega} = 0$$

WYBIERZMY Oś $Oz \parallel \vec{\omega}$

WIEMY ŻE ŻE $\angle(Oz', \vec{\omega}) = \theta = \text{const}$

$$\begin{cases} \omega_{x'} = \sin \theta \sin \psi \dot{\varphi} + \omega \psi \dot{\theta} = \sin \theta \sin \psi \dot{\varphi} = p \cos \chi t \\ \omega_{y'} = \sin \theta \cos \psi \dot{\varphi} - \sin \psi \dot{\theta} = \sin \theta \cos \psi \dot{\varphi} = -p \sin \chi t \\ \omega_{z'} = \omega = \dot{\psi} + \omega \theta \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\tan \psi = -\tan \chi t$$

$$= +\tan \left(\chi t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\psi = +\chi t + \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

$$\dot{\psi} = +\chi$$

$$L = tX + \omega \Theta \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L - tX}{\omega \Theta}$$

$$\varphi = \frac{L - tX}{\omega \Theta} t + \varphi_0$$

$$\Psi = -Xt + \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$$

$$\Theta = \omega \omega t$$

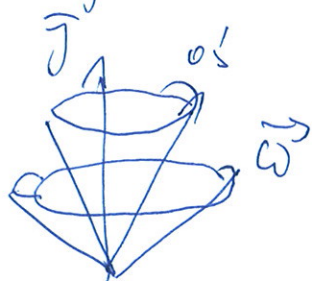
OBROT O KĄT φ - WZGLĘDNIE OSI OZ
O KĄT ψ - OSI OZ'

ZŁOŻENIE Z OBROTÓW, 1 WZGLĘDNIE KIERUNKU STAŁEGO
w UKŁ. INERCJALNYM, 2 W KIERUNKU
CIĄGŁYM - "PRECESSJA REGULARNA"

w U

OŚ SYMETRII ZATAČA SŁOŻEK WOKÓŁ $\vec{J}$

$\vec{J}, \vec{\omega}, \vec{J}'$ w tej samej pł. - herpolhodia to ten okrąg!



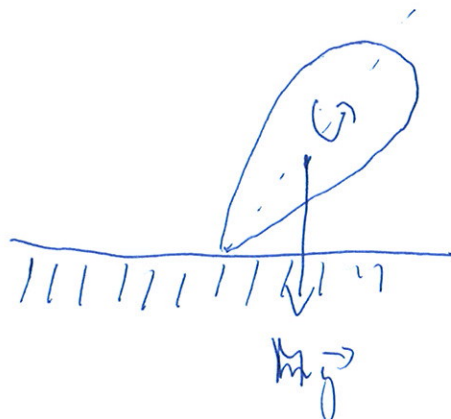
RUCH OŚCIEŻY - TRUDNIEJSZY
p. BIAŁKOWSKI LUB
RUBINOWICZ

BAŁK SYMETRYCZNY CIĘŻKI

(8)

$$\vec{F} = -mg \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} F_{x'} = -mg \sin \theta \sin \varphi \\ F_{y'} = -mg \sin \theta \cos \varphi \\ F_{z'} = -mg \cos \theta \end{cases}$$



ŚR. MASY W UKŁ. U' (NA OSI SYMETRII): $(0, 0, z=g)$

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\begin{cases} D_{x'} = mg \frac{l}{3} \sin \theta \cos \varphi \\ D_{y'} = -mg \frac{l}{3} \sin \theta \sin \varphi \\ D_{z'} = 0 \end{cases}$$

$$E_k = \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 + M \vec{v}_{cm} (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \frac{1}{2} \vec{\omega} I \vec{\omega}$$

$\vec{v}_{cm} = 0$, I WZGLĘDEM
PUNKTU OBRÓTU

PONOWNIE $I_{x'} = I_{y'} = A$, $I_{z'} = B$

$$\begin{cases} A \dot{\omega}_{x'} + \omega_{y'} \omega_{z'} (B-A) = mg \frac{l}{3} \sin \theta \cos \varphi \\ A \dot{\omega}_{y'} + \omega_{x'} \omega_{z'} (A-B) = -mg \frac{l}{3} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{\omega}_{z'} = 0 \end{cases}$$

$$\omega_{z'} = \omega_{z'0} = \text{const}$$

$$\vec{F} \parallel \vec{e}_z \Rightarrow D_z = 0 \Rightarrow J_z = C = \text{const}$$

$$J_i = J_i' \alpha_{ij}$$

$$\vec{J}_i' = I_{x_i'} \omega_i'$$

(8)

$$C = A(\omega_{x'} \sin \Theta \sin \Psi + \omega_{y'} \sin \Theta \cos \Psi) + B \omega_{z'} \cos \Theta$$

CAŁKA ENERGII:

$$E = E_k + Mgy_z = \frac{1}{2} [A(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + B \omega_{z'}^2] + Mgy_z \cos \Theta$$

WSTAWIAJĄC $\omega_{x'}$ W KĄTACH EULERA:

$$C = A \sin^2 \Theta \dot{\varphi} + B \cos \Theta \omega_{z'0}$$

$$E = \frac{1}{2} [A(\dot{\Theta}^2 + \sin^2 \Theta \dot{\varphi}^2) + B \omega_{z'0}^2] + Mgy_z \cos \Theta$$

OZNACZMY $X = \cos \Theta$, $\bar{X} = -\sin \Theta \dot{\Theta}$, $\dot{\Theta} = \frac{-\dot{X}}{\sqrt{1-X^2}}$

$$\dot{\varphi} = \frac{C - B X \omega_{z'0}}{A(1-X^2)}$$

STAD

$$E = \frac{1}{2} \left[A \dot{\Theta}^2 + \frac{(C - B \omega_{z'0} \cos \Theta)^2}{A \sin^2 \Theta} + B \omega_{z'0}^2 \right] + Mgy_z \cos \Theta$$

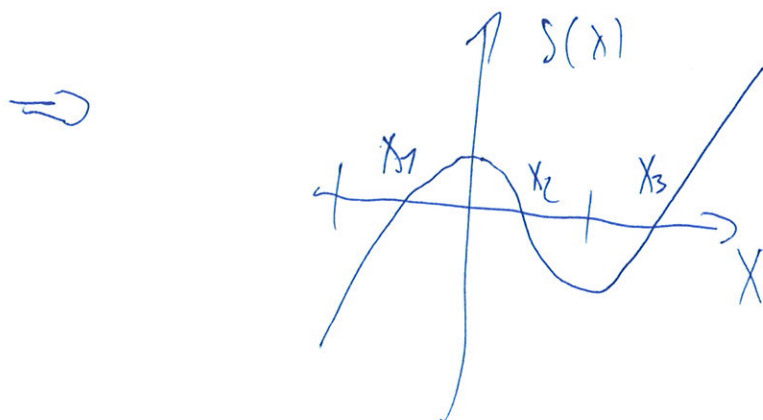
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}^2 = \frac{1}{A} \left[2(E - Mgy_z X) - B \omega_{z'0}^2 \right] (1-X^2) - \left[\frac{1}{A} (C - B X \omega_{z'0}) \right]^2 \\ \equiv S(X) \\ \dot{\varphi} = \frac{C - B \omega_{z'0} X}{A(1-X^2)} \\ \dot{\Psi} = \omega_{z'0} - \frac{X(C - B \omega_{z'0} X)}{A(1-X^2)} \end{array} \right. \leftarrow 2 \omega_{z'0} = \dot{\Psi} + \dot{\varphi} \cos \Theta$$

ANALIZA, WĘZŁY $\gamma > 0$

(86)

$$S(x) \xrightarrow{\pm\infty} \pm\infty$$

$$S(\pm 1) = -\frac{1}{A^2} (C \mp B w_{2,0})^2 < 0, \quad |S(x)| > 0 \text{ dla } x \in [-1, 1]$$



$$S(x) = 0 \Rightarrow x = x_1, x_2, x_3$$

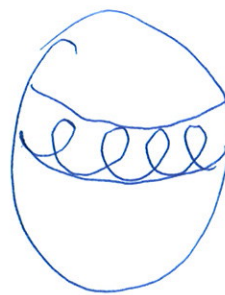
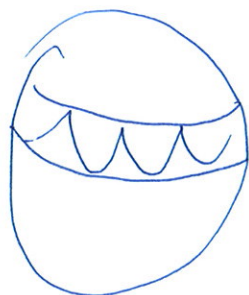
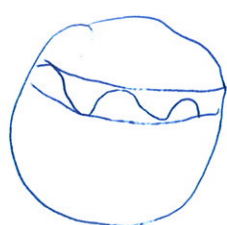
$$\text{WĘZŁY } x = x_1 + (x_2 - x_1) \sin^2 \sigma$$

$$\gamma \equiv \sqrt{\frac{1}{2A} [\gamma_3 (x_3 - x_1)]}$$

$$k^2 = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} < 1$$

$$\gamma dt = \pm \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \sigma}} \rightarrow \text{orbita eliptyczna}$$

JAKOŚCIOWO - RUCH LIBRACYJNY, "NO TACSE" OSI SYMERYCJI



$\uparrow$ DATE $\rightarrow$ "PRECESSJA
PSEUDOREGULARNA"