

CIECZ LEPKA

(33)

STARTUJEMY Z PRAWA ZACHOWANIA PĘDU

$$\frac{d}{dt} \rho v_i = - \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}$$

DLA CIECZY IDEALNEJ $\pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k$

CHCEMY UWZGLĘDNIĆ WEWNĘTRZNE TARCIE ("LEPKOŚĆ") I PRZEWODNICTWO CIEPLNE

LEPKOŚĆ - DODATKOWY PROCES PRZENOŚZENIA PĘDU Z MIEJSC O DUŻEJ PRĘDKOŚCI DO MATEJ.

ZMODYFIKUJMY WIFC:

$$\pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k$$

σ'_{ik} - lepli tensor naprężeń

$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ - tensor naprężeń

~~more~~ σ'_{ik} POWINIEN ZALEŻEĆ OD

ZMIAN (GRADIENTÓW) PRĘDKOŚCI. MATE

GRADIENTY - ZALEŻNOŚĆ TYLKO LINIOWA

σ'_{ik} ZNIKA DLA $\vec{v} = \text{const}$, A TAKŻE

GDY CIECZ JAKO CAŁOŚĆ WYKONUJE RUCH OBROTOWY

RUCH OBROTOWY $\Rightarrow \vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$

(35)

KOMBINACJE $(\vec{\Omega} \times \vec{r})_i$ - KTÓRE ZNIKAJĄ:

1) $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \sigma'_{ik}$ MUSI ZALEŻEĆ
OD TAKICH KOMBINACJI

2) $\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$
NADOGÓLNIEDZA POSTAĆ σ'_{ik}

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

η, ζ - WSP. LEPKOŚCI, NIE ZALEŻĄ OD $\vec{v}$

(ζ - "DRUGA LEPKOŚĆ")

$$\sum_i \sigma'_{ii} = 3 \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad \text{— WTRĄC W (...) ZNIKA}$$

POKAŻEMY POZNIŚC ŻE $\zeta > 0, \eta > 0$

RÓWNANIA RUCHU - UZUPŁENIAMY R. EULERA

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$



$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$$

$$= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right]$$

(35)

JEŻELI η, ρ SA, STATE WZDŁUŻ STRUMIENIA
CIECZ, TO MOŻNA JE WTLAĆ, GNAĆ SPOD
RÓŻNICZKOWANIA I NAMT:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \left(\eta + \frac{2}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$$

"RÓWNIANIE NAVIERA-STOKESA"
(1827) (1845)

CIECZ NIEŚCISLIWA $\rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ - "lepkość kinematyczna"

η - lepkość dynamiczna

$T = 20^\circ \text{C}$

	$\eta \left[\frac{\text{g}}{\text{s} \cdot \text{cm}} \right]$	$\nu \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right]$
woda	0.010	0.010
powietrze	$1.8 \cdot 10^{-4}$	0.150
spirytus	0.018	0.022
gliceryna	8.5	6.8
rtęć	0.0156	0.0012

PRZYKŁADADA, ROTACJE, DLA CIECZY
MIEŚCIŚLIWIE MAMY:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} = \text{rot} (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) + \nabla \Delta \text{rot } \vec{v}$$

ALBO
$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \text{rot } \vec{v} - (\text{rot } \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \Delta \text{rot } \vec{v}$$

ROZKŁAD CIŚNIENIA

$$\Delta p = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = - \frac{\partial^2 v_i v_k}{\partial x_i \partial x_k}$$

NO I WARUNKI BRZEGOWE!

NA STYKU Z POW. STAŁĄ $\vec{v} = 0$ (LUB
 $\vec{v} = \vec{v}_{\text{powierzchni}}$)

SILA DZIAŁAJĄCA NA POWIERZCHNIĘ

$$P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k$$



GRANICA Σ CIECZY $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ | $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$
 $n_i \sigma_{ik}^{(1)} = n_i \sigma_{ik}^{(2)}$

NA POW. SWOBODNEJ $\sigma_{ik} n_k = \sigma'_{ik} n_k - p n_i = 0$

DYSSIPACJA ENERGII (CIĘCZ NIEŚCISLIWA)

(37)

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \rho \int v^2 dV$$

OBLICZAMY

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho \vec{v}^2}{2} &= \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho v_i \left[-v_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \right] \\ &= -\rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{v} \cdot \nabla p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \\ &= -\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \text{div}(\vec{v} \sigma') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \\ (\vec{v} \sigma')_k &= v_i \sigma'_{ik} \end{aligned}$$

DLA CIĘCZY NIEŚCISLIWEJ $\text{div } \vec{v} = 0$, SIAŁO

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho \vec{v}^2}{2} = - \underbrace{\text{div} \left[\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right]}_{\text{TRANSPORT MASY}} - \underbrace{\left(\vec{v} \sigma' \right)}_{\text{PRACIA WLEWNIĘZINE}} - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

CATKUJEMY

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho \vec{v}^2}{2} dV &= - \oint \left[\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - (\vec{v} \sigma') \right] d\vec{s} \\ &\quad - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV \end{aligned}$$

CIĘCZ W ∞ SPOCZYWA - ZEFERUJEMY CATKUJEMY PO

CATKIE NUTERZ OBIEKTU, TO $\oint (...) d\vec{s} \rightarrow 0$

$$E_{kin} = - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV = - \frac{1}{2} \int \sigma'_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) dV$$

ALE $\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$ przy $\text{div } \vec{v} = 0$ (3P)

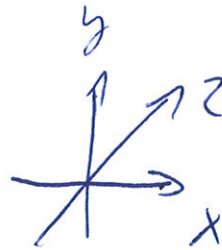
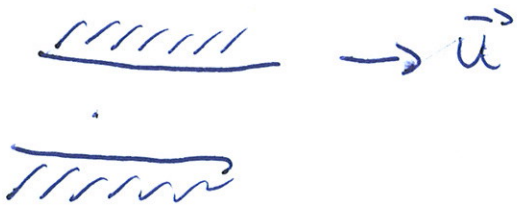
STAD

$$\dot{E}_{\text{kin}} = -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV$$

z tego wynika że $\eta > 0$!

PROSTE PRZEPŁY WŁ LAMINARNE USTALOWE

1)



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

$$p = p(y)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(y) \quad \vec{v} = (v, 0, 0)$$

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dy^2} = 0 \quad \frac{dp}{dy} = 0}$$

$$p = \text{const} \quad v = ay + b$$

$$\left. \begin{array}{l} v(0) = 0 \\ v(h) = u \end{array} \right\} v = \frac{yu}{h}$$

Stąd $p_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k = p n_i - \eta n_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$

$$p_{\perp} = p$$

$$p_{11}(0) = +\sigma_{xy} = +\eta \frac{dv}{dy} = +\frac{\eta u}{h}$$

$$p_{11}(y) = -p_{11}(0)$$

2) WALEC Z GRADIENTEM CIŚNIENIA

(39)

PRZĘKROŚ WALCA DOWOLNY, OŚ X WZDŁUŻ
WALCA - WTEPI

$$\vec{v} = (v(y, z), 0, 0)$$

SKŁADOWE y, z RÓWNIANIA N-S:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0 \Rightarrow p = p(x)$$

SKŁADOWA x

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx}$$

STAD $\frac{dp}{dx} = \text{const} = \frac{\Delta p}{L}$

CZLI $\Delta v = \text{const} = \frac{\Delta p}{4\eta L}$ Z WAR. BRZEGOWYM

$v = 0$ NA ŚCIANCE (KONTURZE PRZĘKROŚU)

WALEC KOŁOWY: $v = v(r)$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{4\eta L}$$

STAD

$$v = - \frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + a \ln r + b$$

$v(0)$ skończona $\Rightarrow a = 0$

$$v(r=R)=0 \Rightarrow v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

40



PRZEPŁYW NA DEDN. CZASU:

$$Q = \int_0^R v \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r v dr = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l}$$

"PRAWO POISEUILLE'A"

DOŚW. 1839 HAGEN, 1870 POISEUILLE

TEORIA 1845 STOKES

WSZYSTKIE PRZEPŁYTY TEGO TYPU: $(\nabla \cdot \nabla) \vec{v}$
 ZNIKA $\rightarrow$ RÓWNANIA LINIOWE, DUŻO ŁATWIEJSZE.

O BÓLNE RÓWNANIA $\rightarrow$ B. TRUDNE.

PRAWO PODOBIENSTWA

(51)

ITP RUCHU - NP. RUCH CIAŁA O USTALONYM Kształcie, uwzględniając jego orientację, kształt ścian itp.

Ciała jednakowego kształtu → przekształcone względem siebie

przy znanym kształcie wystarczy podać jeden rozmiar.

Różnicami ustalony opływ ciała przez ciecz nieściśliwą,

parametry: rozmiar l , lepkość kinematyczna

$\nu = \eta / \rho$, prędkość napływu, tego strumienia w

nieznane: $\vec{v}$, ρ / η

bezwymiarowa kombinacja parametrów

$$R = \frac{ul}{\nu} = \frac{\rho ul}{\eta}$$

"LICZBA REYNOLDSA"

ROZWIĄZANIE MUSI MIEĆ POSTAĆ:

(52)

$$\vec{v} = u \vec{f}\left(\frac{\vec{F}}{L}, R\right)$$

(BO ~~u~~ ~~nie~~ jest. BEZWYMiarowym $\frac{\vec{v}}{u} = \vec{f}\left(\frac{\vec{F}}{L}, R\right)$)

PRZESKALOWUJEMY PRZEPYV $L \rightarrow L'$ T. ŻEBY
 $u \rightarrow u'$

$$R = R'$$

WTEBY $\frac{\vec{v}}{u} = \vec{f}\left(\frac{\vec{F}}{L}, R\right) \rightarrow$ TZW. PRZEPYVY
PODOBNE

PRAWO PODOBIENSTWA, O. REYNOLDS 1883

INNE WIELKOŚCI:

$$p = \rho u^2 f\left(\frac{\vec{F}}{L}, R\right)$$

SILA OPORU $F = \rho u^2 L^2 f(R)$ ITP.

ŻEŁECI GRAWITACJA JEST ISTOTNA:

$$f\left(\frac{\vec{F}}{L}, R\right) \rightarrow f\left(\frac{\vec{F}}{L}, R, F\right)$$

BOŻE $F = \frac{u^2}{L_y}$ JEST "LICZBA FROUDE'A"

PRZEPŁYWI DLA MATECH R

(43)

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \sim \frac{u^2}{L}$$

$$\frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \sim \frac{\eta u}{\rho L^2}$$

$$\frac{\| (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \|}{\| \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \|} \sim \frac{\frac{u^2}{L}}{\frac{\eta u}{\rho L^2}} = R$$

JEŻELI $R \ll 1$, TO MOŻEMY DOMINAĆ WYRAZ $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$!

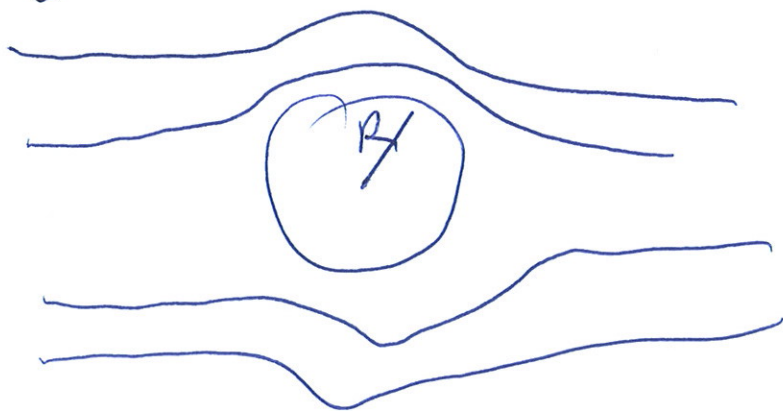
WTEPI

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \eta \Delta \vec{v} = \nabla p \quad (\rightarrow \Delta \operatorname{rot} \vec{v} = 0) \end{cases}$$

ROZWIĄZKI WALNIE PRZYKŁAD - STACJONARNY
NY OPŁYW KULI (STOKES 1851)



54



$$\operatorname{div}(\vec{v} - \vec{u}) = \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} - \vec{u} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\text{DLA } |\vec{r}| \rightarrow \infty \quad |\operatorname{rot} \vec{A}| = |\vec{v} - \vec{u}| \rightarrow 0$$

$\vec{A}$ musí být pseudovektorem, aby $\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$ byla vektorem.

$\vec{A}$ může záviset tylko od $\vec{u}$, i to lineárně.

NÁŠ OBOJNÍK

$$\vec{A} = f(r) (\vec{n} \times \vec{u}) = \nabla f(r) \times \vec{u}$$

$$\text{STA}_D \quad \vec{v} = \vec{u} + \operatorname{rot}(\nabla f \times \vec{u}) = \vec{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(f \vec{u})$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot}(f \vec{u}) = (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta) \operatorname{rot} f \vec{u} = -\Delta \operatorname{rot} f \vec{u}$$

$$\Delta \operatorname{rot} \vec{v} = 0 \Rightarrow \Delta^2 \operatorname{rot} f \vec{u} = 0 = \Delta^2 (\nabla f \times \vec{u}) = 0$$

$$\text{STA}_D \quad (\Delta^2 \nabla f) \times \vec{u} = 0$$

$$\Delta^2 \nabla f = 0 \Rightarrow \Delta^2 f = \text{const}$$

(45)

$\vec{v} - \vec{u} \sim r^1$ ZNIKA DLA $r \rightarrow \infty$, WIEC

$\Delta^2 \psi \sim \psi''' \rightarrow 0$ DLA $r \rightarrow \infty$, STAD $\text{CONST} = 0$

$$\boxed{\Delta^2 \psi = 0}$$

FUNKCJA BIHARMONICZNA

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}$$

CATKUJĄC PO KOLEI POSTĄŻE SIĘ

$$\psi = ar + \frac{b}{r}$$

CZUŁI $\vec{v} = \vec{u} - a \frac{\vec{u} + \vec{n}(\vec{u}\vec{n})}{r} + b \frac{3\vec{n}(\vec{u}\vec{n}) - \vec{u}}{r^3}$

DLA $r=R$ MUSI BYĆ $v=0$, CZUŁI

$$\vec{u} \left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} \right) + \vec{n}(\vec{u}\vec{n}) \left(-\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} \right) = 0$$

STAD $a = \frac{3}{4}R$, $b = \frac{7}{4}R^3$

$$\vec{v} = \vec{u} - \frac{3R}{4} \frac{\vec{u} + \vec{n}(\vec{u}\vec{n})}{r} - \frac{R^3}{4} \frac{\vec{u} - 3\vec{n}(\vec{u}\vec{n})}{r^3}$$

DALSZE RACHUNKI

$$p = \eta \vec{u} \cdot \text{grad} \Delta \psi + p_0 = p_0 - \frac{3\eta}{2} \frac{\vec{u}\vec{n}}{r^2} R = p_0 - \frac{3\eta R}{2r} \cos \theta$$

STAD OPÓR, CATKA I O POWIERZCHNI

$$F = 6\pi\eta R u \quad \text{— WZÓR STOKESA}$$

$$(\bar{u} \nabla) \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \bar{u}$$

ROZWIĄZANIE PASKUDNE, WYNIK

$$F = 6\pi \eta u R \left(1 + \frac{3\eta u R}{8\eta}\right) = 6\pi \eta u R \left(1 + \frac{3}{8} R\right)$$

LICZBA REYNOLDSA $\bar{R} = \frac{u R \rho}{\eta}$

1TD...

DUŻE LICZBY REYNOLDSA $\rightarrow$ TURBULENCE!

BARDOZO TRUDNY PROBLEM

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u}, \quad \text{div } \vec{u} = 0 \quad (*)$$

NIESTABILNOŚĆ $\rightarrow$ DO ROZW STACJONARNEGO
RUCHU, CZYLI ZABURZENIE:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1, \quad p = p_0 + p_1$$

u_0, p_0 ZNANE, SPECJALNIE, (*)

NA $\vec{u}_1, p_1$ MAMY R. LINIOWE:

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + (\vec{u}_0 \nabla) \vec{u}_1 + (\vec{u}_1 \nabla) \vec{u}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u}_1$$

$$\text{div } \vec{u}_1 = 0$$

RÓWNAŃ LINIOWE $\rightarrow$ ROZW. JEST

SUPERPOZYCJA:

$$\vec{v}_1 \sim \sum_{\gamma} e^{\gamma t} \vec{v}_{\gamma}(\vec{r})$$

$\operatorname{Re} \gamma > 0$ — NIESTABILNOŚĆ SZYBKO NARASTA,

RUCH STACJONARNY NIEMOŻLIWY!

$\operatorname{Re} \gamma > 0$ DLA PEWNEJ WARTOŚCI $R = R_{\text{KRIT}}$,

TYPOWO $R_{\text{KRIT}} \sim$ KILKADZIESIĄT

MAŁA BARDZO TRUDNEJ MATEMATYKI,

TEORIA RÓWNAŃ CZĄSTKOWYCH, TEORIA

CHAOSU — OBROT PRACY I TYLKO BARDZO

UMIARKOWANE SUKCESY...

1 TO BY BYŁO NA TYTULE...

(DEŻEL, CIOPKI O CIECIE = -)