

Seria 1

Zadanie 1.1

Dane są cztery wektory $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{D}$. Wyrazić wielkość

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$$

przez same iloczyny skalarne tych wektorów. Przedstawić wektor

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$$

w postaci kombinacji liniowej wyrażeń, z których występuje tylko po jednym iloczynie wektorowym dwu wektorów.

Zadanie 1.2

Wyprowadzić wzory wyrażające współczynniki rozkładu wektora prędkości $\mathbf{v}$, wektora przyspieszenia $\mathbf{a}$ oraz pochodnej po czasie $\dot{\mathbf{a}}$ wektora przyspieszenia na trzy ortonormalne wektory

$$\mathbf{t} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dl}, \quad \mathbf{n} \equiv \rho \frac{d\mathbf{t}}{dl}, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{b} \equiv \mathbf{t} \times \mathbf{n},$$

(dl jest tu różniczką długości toru), przez pochodne po czasie szybkości $v = |\mathbf{v}|$, promień krzywizny toru ρ i skręcenie (torsję) τ . Promień ρ i skręcenie τ są zdefiniowane związkami

$$\frac{d\mathbf{t}}{dl} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dl} = \alpha \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

Współczynnik α w drugim związku nie jest niezależny od v i ρ i trzeba go znaleźć.

Zadanie 1.3

Płaska kolistą tarcza obraca się wokół prostopadłej do niej osi ze stałą prędkością kątową ω . Od środka tarczy i podąża ku jej brzegowi ze stałą prędkością v_0 skierowaną wzdłuż promienia. Jak wygląda ruch żuczka w nieruchomym kartezjańskim układzie (którego początek pokrywa się ze środkiem tarczy)? Znaleźć następnie w tym nieruchomym układzie:

- wzory zadające ruch we współrzędnych biegunowych (r, φ),
- równanie toru, po którym porusza się punkt (zarówno we współrzędnych biegunowych jak i kartezjańskich),
- składowe radialną i transwersalną wektorów prędkości ($\mathbf{v}$) i przyspieszenia ($\mathbf{a}$), tzn. rzuty tych wektorów na wersory $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_\varphi$ układu biegunowego,
- $|\mathbf{v}|$ oraz $|\mathbf{a}|$,
- wektory styczny $\mathbf{t}$ i normalny $\mathbf{n}$ do toru ruchu w każdym jego punkcie (zob. Zadanie 1.2), oraz składowe $a_t \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{t}$ i $a_n \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ wektora przyspieszenia $\mathbf{a}$,
- zależność promienia krzywizny toru ρ od czasu (i sprawdzić tym samym związek $a_n = v^2/\rho$),
- długość toru zakreślanego przez żuczka w nieruchomym układzie w funkcji czasu t .