

## Ćwiczenia 2

### Zadanie

Pocisk o masie  $m$  i skierowanej horyzontalnie (w stosunku do pola grawitacji  $\mathbf{g}$ ) prędkości  $\mathbf{v}_0$  wpada do akwarium wypełnionego gęstą materią, w której działa nań siła oporu  $\mathbf{F}_{\text{op}} = -\kappa \mathbf{v}$  ( $\kappa > 0$ ). Znaleźć położenie (głębokość) punktu, w którym uderzy on w przeciwległą ściankę odległą od punktu wlotu o  $d$ .

### Rozwiązanie

Wprowadźmy układ współrzędnych, którego początkiem jest punkt wlotu, oś  $z$  jest skierowana do góry, a oś  $x$  w kierunku  $\mathbf{v}_0$ . Równanie Newtona  $m\mathbf{a} \equiv m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{op}}$  rozpisane w tym układzie daje dwa równania (trzecie jest nieistotne)

$$\begin{aligned}\dot{v}_x(t) &= -\frac{\kappa}{m} v_x(t), \\ \dot{v}_z(t) &= -\frac{\kappa}{m} v_z(t) - g.\end{aligned}$$

Są one niezależne od siebie. Z pierwszego po rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\int_{v_0}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\kappa}{m} t.$$

Wybraliśmy czas wlotu  $t_0 = 0$  i wprowadziliśmy oznaczenie  $v_0 \equiv v_x(0) = |\mathbf{v}_0|$ . Scałkowanie daje

$$v_x(t) = v_0 e^{-(\kappa/m)t}.$$

Powtórne całkowanie da zależność od czasu współrzędnej  $x$ -owej położenia pocisku:

$$x(t) = \int_0^t dt' v_x(t') = v_0 \int_0^t dt' e^{-\frac{\kappa}{m}t'} = \frac{mv_0}{\kappa} (1 - e^{-(\kappa/m)t}).$$

Widać stąd, że zasięg ruchu wzdłuż osi  $x$  nie jest nieograniczony: przy ustalonych  $mv_0 \equiv p_0$  (czyli pędzie początkowym) i współczynniku  $\kappa$  siły oporu pocisk nie przekroczy  $x_{\text{max}} = mv_0/\kappa$  (a i osiągnięcie tej odległości zajmuje mu wieczność). Aby pocisk doleciał (w skończonym czasie) do przeciwległej ścianki musi być spełniony warunek

$$x_{\text{max}} > d, \quad \text{czyli} \quad \frac{\kappa d}{mv_0} < 1.$$

Scałkować drugie równanie (na  $v_z(t)$ ) można na różne sposoby. Najprościej jest znów rozdzielać zmienne.<sup>1</sup> Dostajemy wówczas

$$\int_0^{v_z(t)} \frac{dv_z}{1 + (\kappa/mg)v_z} = -gt,$$

---

<sup>1</sup>Inny sposób, o którym warto pamiętać, bo często jest użyteczny, polega na przepisaniu tego równania w zmiennej  $v'_z = v_z + \frac{mg}{\kappa}$ ; Ponieważ  $\dot{v}'_z = \dot{v}_z$ , równanie przejdzie w takie samo równanie, jak to wyznaczające  $v_x(t)$ .

co daje

$$\frac{mg}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{\kappa}{mg} v_z(t) \right) = -gt, \quad \text{czyli} \quad v_z(t) = -\frac{mg}{\kappa} (1 - e^{-(\kappa/m)t}).$$

Widzimy, że  $v_z(t) \rightarrow mg/\kappa$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ . Wartość ta jest bowiem *punktem stałym*, tj. punktem, w którym zeruje się prawa strona równania  $\dot{v}_z(t) = -(\kappa/m)v_z(t) - g$ : rozwiązanie stałe  $v_z(t) = mg/\kappa$  jest więc automatycznie rozwiązaniem tego równania.

Jeszcze jedno proste całkowanie daje

$$z(t) = \int_0^t dt' v_z(t') = -\frac{mg}{\kappa} \left[ t - \frac{m}{\kappa} (1 - e^{-(\kappa/m)t}) \right].$$

W odruchu samokontroli sprawdzamy granicę  $\kappa \rightarrow 0$  (ruch bez oporu): rozwijając eksponent w (zawsze zbieżny) szereg

$$z(t) = -\frac{mg}{\kappa} \left\{ t - \frac{m}{\kappa} \left[ 1 - 1 + \frac{\kappa}{m} t - \frac{1}{2!} \left( \frac{\kappa}{m} t \right)^2 + \dots \right] \right\},$$

widzimy, że wyrazy osobliwe, gdy  $\kappa \rightarrow 0$  się skracają i zostaje  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ , tak jak trzeba.

Aby znaleźć współrzędne punktu, w którym pocisk uderzy w przeciwległą ściankę wyznaczamy czas lotu do tej ścianki, czyli czas  $t_d$  taki, że  $x(t_d) = d$ :

$$t_d = -\frac{m}{\kappa} \ln \left( 1 - \frac{\kappa d}{mv_0} \right), \quad e^{-(\kappa/m)t_d} = 1 - \frac{\kappa d}{mv_0}.$$

Znajdujemy więc, że

$$z(t_d) = -\frac{m^2 g}{\kappa^2} \left[ -\ln \left( 1 - \frac{\kappa d}{mv_0} \right) - \frac{\kappa d}{mv_0} \right].$$

Oczywiście wynik ten ma sens tylko, gdy  $(\kappa d/mv_0) < 1$ , tj. gdy siła oporu, która działa na pocisk, nie wyzeruje całkiem  $x$ -owej składowej jego prędkości zanim dotrze on na odległość  $x = d$ . Ponieważ  $\xi + \ln(1 - \xi) < 0$ , gdy  $0 < \xi < 1$  (by to zobaczyć, wystarczy rozwinąć  $\ln(1 - \xi)$  w szereg Taylora), wyznaczona wartość  $z(t_d)$  jest ujemna, tak jak powinna być (przypomnijmy, że oś  $z$  skierowaliśmy do góry).

### Zadanie

Zbadać możliwe ruchy jednowymiarowego oscylatora harmonicznego z tłumieniem będące rozwiązaniami równania

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + kx = 0,$$

w którym  $\gamma > 0$ ,  $k > 0$  (czynniki 2 w drugim wyrazie został wprowadzony dla rachunkowej wygody). Rozpatrzyc wszystkie możliwe przypadki.

### Rozwiązanie

Równanie

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

gdzie  $\lambda \equiv \gamma/m$ ,  $\omega_0^2 \equiv k/m$  jest różniczkowym równaniem liniowym drugiego rzędu. Zgodnie z ogólnymi zasadami powinno ono mieć dwa liniowo niezależne rozwiązania, a najogólniejsze rozwiązanie jest kombinacją liniową tych dwu rozwiązań z dowolnymi współczynnikami. Występują w nim zatem dwie stałe dowolne. Zgodnie z tradycją fizyczną przekazaną nam w Wykładach Feynmana z Fizyki, rozwiązań szukamy w postaci

$$z(t) = e^{i\alpha t},$$

tj. szukamy funkcji spełniającej wypisane wyżej równanie ale przyjmującej wartości zespolone. Ponieważ równanie jest liniowe o rzeczywistych współczynnikach, spełniać je będzie osobno zarówno część rzeczywista jak i urojona zespolonego rozwiązania  $z(t)$  i którąkolwiek z nich można wziąć jako rozwiązanie wyjściowego rzeczywistego równania. Podstawiając ten tzw. Ansatz (liczba mnoga die Ansätze, gdyby ktoś nie wiedział) do rozwiązywanego równania otrzymujemy warunek na  $\alpha$  (czyli inaczej równanie charakterystyczne tego równania liniowego)

$$-\alpha^2 + 2i\lambda\alpha + \omega_0^2 = 0.$$

Rozwiązaniami tego warunku są

$$\alpha_{\pm} = i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

Zatem ogólnym zespolonym rozwiązaniem jest

$$z(t) = \mathbb{C}_1 e^{-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} + \mathbb{C}_2 e^{-\lambda t - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t}.$$

$\mathbb{C}_{1,2}$  są dwiema dowolnymi zespolonymi stałymi. Jeśli  $\omega_0^2 - \lambda^2 < 0$ , tj. jeśli wykładniki eksponensów są czysto rzeczywiste, wzięcie części rzeczywistej (lub urojonej)  $x(t)$  zespolonego rozwiązania  $z(t)$  sprowadza się po prostu do wzięcia  $\text{Re } \mathbb{C}_1$  i  $\text{Re } \mathbb{C}_2$  ( $\text{Im } \mathbb{C}_1$  i  $\text{Im } \mathbb{C}_2$ )

jako dwu stałych rzeczywistych. Gdy zaś  $\omega_0^2 - \lambda^2 > 0$ , aby wydzielić część rzeczywistą (lub urojoną) tego rozwiązania, wygodniej jest, przeddefiniowując stałe, przepisać je w postaci<sup>2</sup>

$$z(t) = \mathbb{C} e^{-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} + \mathbb{C}^* e^{-\lambda t - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} \\ + \mathbb{B} e^{-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} - \mathbb{B}^* e^{-\lambda t - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t}.$$

Pierwsza linia tak zapisanego zespolonego rozwiązania  $z(t)$  jest czysto rzeczywista, a druga czysto urojona. Zatem jako rozwiązanie rzeczywiste  $x(t)$  możemy wziąć np.  $\operatorname{Re}(z(t))$ , czyli

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left( \mathbb{C} e^{+i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} + \mathbb{C}^* e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} \right).$$

Powyższe rozwiązanie  $x(t)$  zależy, tak jak powinno, od dwóch stałych dowolnych, którymi są część rzeczywista i część urojona  $\mathbb{C}$ .

Tak więc, w zależności od wzajemnego stosunku  $\omega_0^2$  i  $\lambda^2$ , możliwe są trzy przypadki

- Gdy  $\omega_0^2 > \lambda^2$ , rozwiązanie można zapisać w postaci

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

gdzie  $A = \mathbb{C} + \mathbb{C}^* = 2\operatorname{Re} \mathbb{C}$ ,  $B = i(\mathbb{C} - \mathbb{C}^*) = -2\operatorname{Im} \mathbb{C}$ , a  $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ .

- Gdy  $\omega_0^2 < \lambda^2$ , piszemy  $\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -i\kappa$  oraz (w pierwotnej formie rozwiązania z  $\mathbb{C}_1$  i  $\mathbb{C}_2$ )  $\operatorname{Re} \mathbb{C}_1 = \frac{1}{2}(A + B)$ ,  $\operatorname{Re} \mathbb{C}_2 = \frac{1}{2}(A - B)$ , co sprowadza część rzeczywistą  $\operatorname{Re}(z(t))$  rozwiązania do postaci

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A \operatorname{ch} \kappa t + B \operatorname{sh} \kappa t).$$

- Gdy  $\omega_0^2 = \lambda^2$ , dwa znalezione rozwiązania stają się wzajemnie proporcjonalne czyli liniowo zależne i trzeba znaleźć jeszcze jedno liniowo niezależne rozwiązanie, gdyż inaczej ogólne rozwiązania zależałoby od jednej tylko (rzeczywistej) stałej dowolnej, co nie pozwalałoby spełnić warunków początkowych (z ogólnej teorii równań różniczkowych wiadomo, że najogólniejsze rozwiązanie musi mieć dwie stałe dowolne). Okazuje się, że ogólnym rozwiązaniem jest wtedy

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A + B t).$$

Że jest to istotnie rozwiązanie, można sprawdzić wstawiając je do wyjściowego równania (w którym należy położyć  $\omega_0^2 = \lambda^2$ ).<sup>3</sup> Wynik ten, jak zobaczymy niżej, można też otrzymać dokonując odpowiedniego przejścia granicznego.

---

<sup>2</sup>Choć nie jest to do niczego potrzebne, zanotujmy, że  $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C} + \mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}^* - \mathbb{B}^*$  czyli  $\mathbb{C} = \frac{1}{2}(\mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2)$ , a  $\mathbb{B} = \frac{1}{2}(\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2)$ .

<sup>3</sup>Istotnie:  $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \lambda^2 x = e^{-\lambda t}(\lambda^2 A - 2\lambda B + \lambda^2 B t) + 2\lambda e^{-\lambda t}(-\lambda A + B - \lambda B t) + \lambda^2 e^{-\lambda t}(A + B t) = 0$ .

Dowolne stałe rzeczywiste  $A$  i  $B$  w powyższych ogólnych rozwiązaniach są wyznaczone przez zadane warunki początkowe. Jeśli są nimi

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

to, jak łatwo sprawdzić,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda t} \left[ x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega t \right], \\ x(t) &= e^{-\lambda t} [x_0 + (v_0 + \lambda x_0) t], \\ x(t) &= e^{-\lambda t} \left[ x_0 \operatorname{ch} \kappa t + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa t \right], \end{aligned}$$

gdy, odpowiednio,  $\omega_0^2 > \lambda^2$ ,  $\omega_0^2 = \lambda^2$  i  $\omega_0^2 < \lambda^2$ .

Mając rozwiązania dla dwóch skrajnych przypadków zależne od warunków początkowych łatwo zobaczyć, że rozwiązanie w przypadku  $\omega_0^2 = \lambda^2$  można otrzymać przez przejście graniczne. Np. biorąc w pierwszym rozwiązaniu granicę  $\omega \rightarrow 0$  (czyli  $\omega_0^2 \rightarrow \lambda^2$ ) widzimy, że  $\cos \omega t \rightarrow 1$ , a drugi wyraz w tej granicy daje

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{v_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega t = (v_0 + \lambda x_0) t,$$

i otrzymujemy rozwiązanie dla przypadku  $\omega_0^2 = \lambda^2$ . W podobny sposób można to rozwiązanie otrzymać w granicy  $\kappa \rightarrow 0$  z trzeciego rozwiązania. Przejścia granicznego można dokonać dopiero po wyrażeniu stałych dowolnych przez warunki początkowe, gdyż, jak widać, współczynniki tych liniowo niezależnych rozwiązań nie pozostają stałe przy zmianie  $\omega$  lub  $\kappa$ .

Tylko w przypadku, gdy  $\omega_0^2 > \lambda^2$ , tj. gdy siła oporu nie jest zbyt duża, ruch wykazuje charakter quasi-periodyczny: kolejne zera funkcji  $x(t)$  (przechodzenie oscylatora przez położenie równowagi) występują regularnie, w odstępach czasu  $\Delta t = \frac{1}{2}T$ , gdzie  $T = 2\pi/\omega$ . Kolejne maksima funkcji  $|x(t)|$  występują zaś, gdy  $\dot{x}(t) = 0$  i są nieco przesunięte w stosunku do położenia, jakie miałyby przy niewystępowaniu siły oporu. Np. jeśli (dla prostoty)  $x_0 = 0$  i  $x(t) = (v_0/\omega)e^{-\lambda t} \sin \omega t$ , maksymalne wychylenia, tj. maksymalne wartości  $|x(t)|$  przypadają w tych momentach, w których znika  $\dot{x}(t)$ , czyli gdy

$$e^{-\lambda t}(\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t) = 0,$$

tj., w których  $\operatorname{tg} \omega t = \omega/\lambda$ ; jeśli siła oporu jest słaba,  $\lambda \ll \omega$ , przypadają one niemal dokładnie wtedy, kiedy  $\omega t = \pi/2 + n\pi$ ; jeśli zaś  $\lambda \sim \omega$  lub  $\lambda > \omega$ , chwile te są nieco wcześniejsze (co zrozumiałe, bo siła oporu powoduje wcześniejsze wytracenie prędkości).

W przypadku, gdy  $\omega_0^2 < \lambda^2$  (a  $x_0 = 0$ ) wychylenie oscylatora  $x(t)$  jest tylko jednego znaku (zależnego od znaku prędkości początkowej  $v_0$ ) i  $|x(t)|$  ma tylko jedno maksimum występujące w chwili, gdy  $\dot{x}(t) = 0$ , czyli gdy

$$\operatorname{th}(\kappa t) = \frac{\kappa}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 1.$$

Jest bowiem jasne, iż równanie to ma tylko jedno rozwiązanie.

### Zadanie

Znaleźć ruch jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie  $m$ , stałej sprężystości  $k = m\omega_0^2$  i współczynniku siły tłumiącej  $2\gamma = 2m\lambda$  pobudzanego siłą zewnętrzną o harmoniczej zależności od czasu

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \delta).$$

Przedyskutować zależność amplitudy wychyleń oscylatora od częstości  $\Omega$  siły wymuszającej oraz korelację maksimów wychyleń oscylatora z maksimami siły. Zakładając, że  $\lambda \neq 0$  i że ruch trwa już dostatecznie długo, by zależność ruchu od warunków początkowych stała się nieistotna (tj. że  $t \gg 1/\lambda$ ) obliczyć uśrednioną po okresie siły wymuszającej moc przekazywaną przez nią oscylatorowi i zbadać jej zależność od częstości  $\Omega$ . Co się dzieje z tą pobieraną przez oscylator energią?

### Rozwiązanie

Równanie Newtona, wyznaczające ruch oscylatora ma postać

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t + \delta).$$

Jego najogólniejsze rozwiązanie jest sumą najogólniejszego rozwiązania równania jednorodnego (tj. powyższego równania z siłą  $F(t)$  równą zero) oraz jakiegokolwiek rozwiązania (tzw. rozwiązania szczególnego) powyższego równania z siłą  $F(t)$ . Najogólniejsze rozwiązania (w zależności od wzajemnego stosunku  $\lambda$  do  $\omega_0$ ) równania jednorodnego zostały znalezione we wcześniejszym zadaniu. Znaleźć rozwiązanie szczególne jest najprościej przepisując powyższe równania w zmiennej zespolonej  $z(t)$  i modyfikując jego prawą stronę:

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i(\Omega t + \delta)}.$$

Ponieważ równanie to jest liniowe, a współczynniki prawej jego strony są rzeczywiste, część rzeczywista  $z(t)$  będzie spełniać właśnie to równanie, które chcemy rozwiązać (część urojona  $z(t)$  będzie zaś spełniać równanie z siłą  $F(t) = F_0 \sin(\Omega t + \delta)$ ). Podstawiamy następnie do tego równania

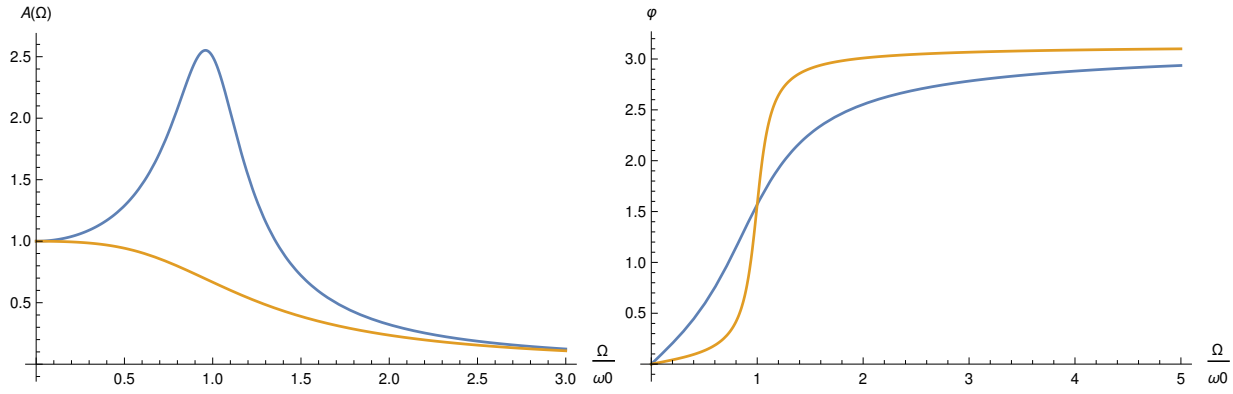
$$z(t) = \mathbb{A} e^{i\Omega t},$$

z amplitudą  $\mathbb{A}$  będącą liczbą zespoloną i widzimy, że jest ono spełnione, jeśli

$$\mathbb{A} = \frac{F_0}{m} \frac{e^{i\delta}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega}.$$

Szczególne (niezależne od żadnych stałych dowolnych) rozwiązanie wyjściowego równania ma zatem postać

$$x_{sz}(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{F_0}{m} \frac{e^{i(\Omega t + \delta)}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega} \right) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \delta - \varphi).$$



Rysunek 1: Po lewej: wykres amplitudy wychyleń oscylatora (w jednostkach  $F_0/m\omega_0^2$ ) w funkcji częstości  $\Omega$  siły wymuszającej dla  $\lambda/\omega_0 = 0.2$  (krzywa niebieska z wyraźnym maksimum) i 0.75 (krzywa czerwona). Po prawej: wykres fazy  $\varphi$  w funkcji  $\Omega/\omega_0$  oscylatora dla  $\lambda/\omega_0 = 0.5$  (krzywa niebieska) i 0.1 (czerwona).

$\varphi$  jest fazą mianownika  $\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} e^{i\varphi}$  zespolonej amplitudy. Jest ona dana wzorem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2},$$

albo, co wygodniejsze, bo nie wymaga zmieniania gałęzi arcusa tangensa przy przechodzeniu przez  $\Omega^2 = \omega_0^2$ , wzorami

$$\cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{2\lambda\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.$$

Alternatywną (ale równoważną) postać rozwiązania szczególnego uzyskujemy pisząc

$$\begin{aligned} x_{sz}(t) &= \operatorname{Re} \left( \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} e^{i(\Omega t + \delta)} \right) \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} [(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \delta) + 2\lambda\Omega \sin(\Omega t + \delta)]. \end{aligned}$$

Wprawdzie pełne rozwiązanie równania ruchu wymaga dodania do znalezionej tu rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego jeszcze ogólnego rozwiązania równania jednorodnego zależnego od dwóch dowolnych stałych (dopiero wtedy można narzucić na rozwiązanie warunki początkowe - zobacz niżej), to, jeśli tylko siła oporu (współczynnik  $\lambda$ ) nie zanika, efekty tego ogólnego rozwiązania, a z nim zależność ruchu od warunków początkowych, będą z czasem maleć do dowolnie małej wielkości. Rozpatrując ruch oscylatora w chwilach  $t \gg \lambda^{-1}$ , można się ograniczyć wtedy do badania samego szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego, gdyż  $x(t) \approx x_{szcz}(t)$ .

Zatem gdy  $t \gg \lambda^{-1}$ , amplituda  $A$  drgań oscylatora (czyli maksymalne wychylenie) jest równa

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.$$

Gdy siła oporu nie jest zbyt duża, amplituda ma maksimum w punkcie, w którym mianownik ma minimum, a jeszcze lepiej, tam, gdzie minimum ma wyrażenie pod pierwiastkiem czyli tam, gdzie znika pochodna po  $x$  funkcji  $f(x) = (x - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2x$ , tj. przy częstości  $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ , zwanej *częstością rezonansową*. Częstość ta, jak widać, jest niższa niż częstość własna  $\omega_0$  oscylatora. Oczywiście, gdy  $\omega_0^2 \leq 2\lambda^2$ , amplituda  $A(\Omega)$  jest monotonicznie malejącą funkcją częstości  $\Omega$ . Wykres amplitudy wychyleń oscylatora jako funkcji częstości siły wymuszającej jest pokazany na lewym panelu rysunku 1. W obu przypadkach, zarówno, gdy  $\omega_0^2 \leq 2\lambda^2$ , jak i gdy  $\omega_0^2 > 2\lambda^2$ , amplituda spada do zera, gdy  $\Omega \rightarrow \infty$ : oscylator mający bezwładność ( $m \neq 0$ ) nie zdąża reagować znaczącym wychyleniem na następujące niemal natychmiast po sobie pochodzące od siły pchnięcia w przeciwnych kierunkach. Gdy  $\Omega = 0$ , rozwiązanie  $x_{szcz}(t)$  redukuje się do stałej  $x_{szcz} = (F_0/m\omega_0^2) \cos \delta$ , co odpowiada spoczynkowi oscylatora w punkcie przesunętym w stosunku do centrum siły sprężyste; siła sprężysta  $F_{spr} = -m\omega_0^2 x_{szcz}$  jest w tym położeniu równoważona przez siłę zewnętrzną  $F_0 \cos \delta$ .

Faza  $\varphi$  zadaje opóźnienie maksymalnych wychyleń oscylatora w stosunku do maksymalnych wartości siły pobudzającej (jeśli siła ta ma maksimum w chwili  $t_F$ , to wychylenie maksymalne występuje w chwili  $t_F + \varphi/\Omega$ ). Faza ta, jak wynika z podanego wzoru, jest bardzo mała, gdy częstość  $\Omega$  siły pobudzającej jest mała (w stosunku do  $\lambda$ ) - oscylator mimo siły oporu, "nadaża" za siłą pobudzającą. Przy  $\Omega = \omega_0$  faza  $\varphi$  jest równa  $\pi/2$  (w chwilach, gdy siła jest maksymalna, wychylenie oscylatora zeruje się) i dąży do  $\pi$ , gdy  $\Omega \rightarrow \infty$  (oscylator jest wtedy z siłą w przeciwfazie). Zależność fazy  $\varphi$  od tłumienia  $\lambda$  ilustruje prawy panel rysunku 1. Przy  $\lambda = 0$  zależność fazy  $\varphi$  od częstości  $\Omega$  siły degeneruje się do  $\varphi = 0$ , gdy  $\Omega < \omega_0$  i do  $\varphi = \pi$ , jeśli  $\Omega > \omega_0$ . Rozwiązanie  $x_{szcz}(t)$  pozostaje jednak ciągłą funkcją  $\Omega$  (co widać z przytoczonej wyżej alternatywnej formy rozwiązania) i przybiera wtedy postać

$$x_{sz}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{|\omega_0^2 - \Omega^2|} \lim_{\tan \varphi \rightarrow 0} \cos(\Omega t + \delta) \cos \varphi = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \delta).$$

Trzeba jednak pamiętać, że gdy  $\lambda = 0$ , rozpatrywanie samego tylko rozwiązania szczególniego traci sens, bo zależna od stałych dowolnych (czyli od warunków początkowych) część pełnego rozwiązania nie zanika z czasem.

Ponieważ w stanie ustalonym (gdy zanikła już pamięć układu o warunkach początkowych) ruch układu jest okresowy, można obliczyć średnią (po okresie  $T = 2\pi/\Omega$ ) moc pobieraną przezeń od siły wymuszającej  $F(t)$ . Chwilowa jej moc jest równa  $P_F(t) = F(t)\dot{x}(t)$ , a uśredniona jest dana całką

$$\overline{P}_F = \frac{1}{T} \int_0^T dt F(t)\dot{x}(t).$$

Bez straty ogólności przyjmijmy tu  $\delta = 0$ . Wówczas

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad \dot{x}(t) = -\frac{F_0}{m} \frac{\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t - \varphi).$$

Potrzebną całkę oblicza się najszybciej, gdy funkcje trygonometryczne zostaną zapisane przez eksponensy:

$$\begin{aligned} \overline{P}_F &= -\frac{F_0^2}{Tm} \frac{\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \int_0^T dt \sin(\Omega t - \varphi) \cos \Omega t \\ &= -\frac{F_0^2}{Tm} \frac{\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \frac{1}{4i} \int_0^T dt [e^{i\Omega t - i\varphi} - e^{-i\Omega t + i\varphi}] [e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}] \\ &= -\frac{F_0^2}{Tm} \frac{\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \frac{T}{4i} (e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) = \frac{F_0^2}{2m} \frac{\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Po podstawieniu tu wzoru na fazę

$$\sin \varphi = \frac{2\lambda\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}},$$

otrzymujemy

$$\overline{P} = \frac{F_0^2}{m} \frac{\lambda\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}.$$

Moc pobierana (średnio w okresie) przez oscylator jest mała przy małych częstościach  $\Omega$  siły wymuszającej i spada również do zera, gdy częstość ta staje się bardzo duża (w porównaniu z częstością własną  $\omega_0$  oscylatora). Maksimum osiąga, jak łatwo sprawdzić szukając maksimum funkcji

$$f(x) = \frac{x}{(x - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2 x},$$

przy  $\Omega = \omega_0$  (a nie przy częstości rezonansowej, jak można by sądzić) i jest tam równa  $\overline{P}_F^{\max} = F_0^2/4m\lambda$ . Oczywiście, ponieważ ruch oscylatora jest stanem ustalonym, pobierana przezeń od siły wymuszającej moc musi w całości być tracona wskutek działania siły oporu. Istotnie, chwilowa moc tej siły, dana wzorem  $P_\lambda(t) = -2\lambda m \dot{x}^2(t)$  (jak widać jest ona zawsze ujemna - siła oporu w każdej chwili, a nie tylko w średniej, powoduje stratę energii oscylatora), po uśrednieniu po okresie

$$\overline{P}_\lambda = -\frac{2\lambda m}{T} \int_0^T dt \dot{x}^2(t) = -\frac{2\lambda m}{T} \frac{F_0^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2} \int_0^T dt \sin^2(\Omega t - \varphi),$$

ponieważ średnia po okresie funkcji  $\sin^2$  jest równa  $\frac{1}{2}$  (reguła, którą warto pamiętać), jest dokładnie równa wziętej z przeciwnym znakiem uśrednionej mocy  $\overline{P}_F$ .

### Zadanie

Dokonując odpowiednich przybliżeń w ścisłym wzorze na zależność od czasu położenia rozpatrywanego w poprzednim zadaniu oscylatora (przyjmując, że faza  $\delta$  siły wymuszającej jest równa zero) przedyskutować jakościowo charakter jego ruchu w różnych reżimach (tj. dla różnych stosunków wielkości  $\omega_0$ ,  $\Omega$  i  $\lambda$ ), jeśli w chwili  $t = 0$  oscylator spoczywał w swoim położeniu równowagi ( $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ). W szczególności rozpatrzyć przypadek bez tłumienia ( $\lambda = 0$ ), oraz przypadki  $0 < \lambda \ll |\omega_0 - \Omega|$  i  $|\omega_0 - \Omega| \ll \lambda$ .

### Rozwiązanie

Aby zbadać zachowanie się oscylatora w różnych reżimach trzeba najpierw wypisać kompletne rozwiązanie uwzględniające warunki początkowe  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , które są takie, że w chwili  $t = 0$ , gdy siła pobudzająca jest maksymalna, oscylator znajduje się więc w spoczynku w położeniu równowagi. Przyjmijmy też, że  $\omega_0^2 > \lambda^2$ , czyli że tłumienie oscylatora jest słabe. Ogólna postać zależnego od dwu stałych dowolnych rozwiązania jest następująca (przypomnijmy, że  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ ):

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} [(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\lambda\Omega \sin \Omega t].$$

Przyjęte warunki początkowe,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  prowadzą do równań

$$A + \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} = 0, \\ -\lambda A + \omega B + \frac{F_0}{m} \frac{2\lambda\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} = 0,$$

Ich rozwiązaniami są

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}, \quad B = -\frac{F_0}{m\omega} \frac{\lambda(\Omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}.$$

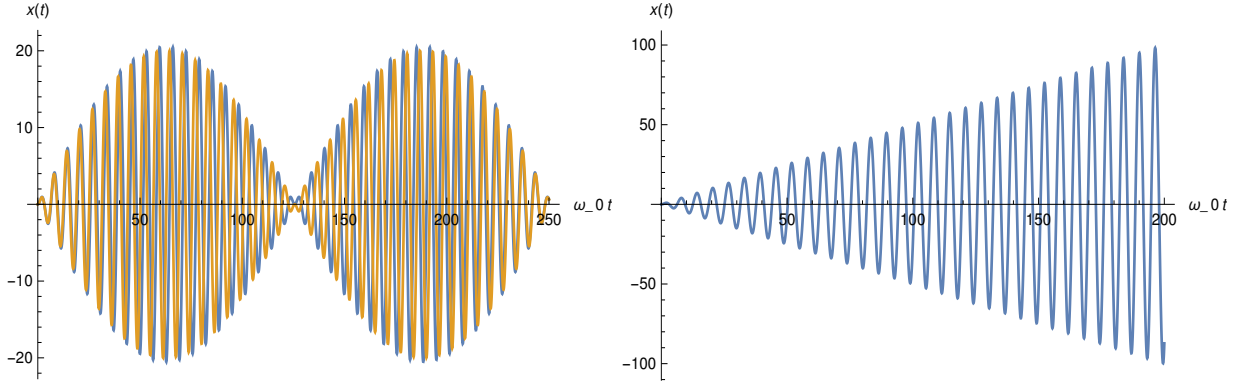
Pełne rozwiązanie z przyjętymi warunkami początkowymi ma więc postać:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} \left\{ (\omega_0^2 - \Omega^2) (\cos \Omega t - e^{-\lambda t} \cos \omega t) + 2\lambda\Omega \left( \sin \Omega t - \frac{\Omega^2 + \omega_0^2}{2\Omega\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t \right) \right\}.$$

Można teraz zbadać różne przypadki.

1) Zbadajmy najpierw ruch w przypadku, gdy tłumienie nie występuje, tj., gdy  $\lambda = 0$  (wtedy  $\omega = \omega_0$ ). Wypisane wyżej rozwiązanie redukuje się wtedy do

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t).$$



Rysunek 2: Wychylenia (w jednostkach  $F_0/m\omega_0^2$ ) oscylatora bez tłumienia ( $\lambda = 0$ ) pobudzanego siłą harmoniczną  $F(t) = F_0 \cos((\omega_0 + \varepsilon)t)$  w funkcji  $\omega_0 t$ . Po lewej:  $\varepsilon/\omega_0 = -0.05$ ; ścisły wzór - linia niebieska; wzór przybliżony - linia czerwona. Po prawej w przypadku ścisłego rezonansu  $\Omega = \omega_0$ .

Szczególnie interesujący jest przypadek ruchu wymuszanego przez siłę o częstotliwości  $\Omega$  bliskiej częstotliwości własnej  $\omega_0$  oscylatora. W przekształconej postaci powyższego wzoru<sup>4</sup>

$$x(t) = -\frac{2F_0/m}{(\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega)} \sin\left(\frac{\Omega - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\Omega + \omega_0}{2}t\right),$$

można, gdy  $\Omega = \omega_0 + \varepsilon \approx \omega_0$ , zastąpić  $\omega_0 + \Omega$  przez  $2\omega_0$ . Daje to

$$x(t) \approx \frac{F_0}{m\omega_0\varepsilon} \sin\omega_0 t \sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right).$$

Wychylenie oscylatora zmienia się wtedy niemal periodycznie, jak  $\sin\omega_0 t$ , ale amplituda jest modulowana przez wolnozmienny czynnik  $\sin(\frac{1}{2}\varepsilon t)$ . Zachowanie to ilustruje lewy panel rysunku 2. W granicy ścisłego rezonansu, gdy  $\Omega = \omega_0$  otrzymuje się

$$x(t) \approx \frac{F_0}{2m\omega_0^2} \omega_0 t \sin\omega_0 t.$$

Amplituda wychyleń narasta wtedy z czasem liniowo (zob. prawy panel rysunku 2).

2) Drugi przypadek to sytuacja, gdy  $\lambda \ll |\Omega - \omega_0| \ll \omega_0$ . Tłumienie jest słabe, ale niezerowe, a odchylenie częstotliwości siły wymuszającej od częstotliwości własnej oscylatora jest

<sup>4</sup>Alternatywnie można by próbować od razu położyć  $\Omega = \omega_0 + \varepsilon$  i napisać

$$\cos((\omega_0 + \varepsilon)t) - \cos\omega_0 t = \cos\omega_0 t \cos\varepsilon t - \sin\omega_0 t \sin\varepsilon t - \cos\omega_0 t,$$

tak, jak to zrobiłem na zajęciach, i użyć argumentu, że  $\cos\varepsilon t \approx 1$ , dzięki czemu pierwszy i ostatni człon się zredukują i zostanie tylko  $-\sin\omega_0 t \sin\varepsilon t$ . Takie przybliżenie jest jednak słuszne tylko dla czasów  $t$  takich, że  $|\varepsilon t| \ll 1$  i dość szybko się załamuje. W rezultacie otrzymany w ten sposób wzór daje mniej więcej dwukrotnie za krótki okres modulacji ( $T_{\text{mod}} = 2\pi/\varepsilon$  zamiast  $T_{\text{mod}} = 4\pi/\varepsilon$ ).

zawsze większe niż parametr  $\lambda$  (granicy  $|\Omega - \omega_0| \rightarrow 0$  w tym reżimie nie można zatem osiągnąć).

W tym przypadku w pełnym rozwiązaniu można opuścić człony z sinusami (bo są proporcjonalne do parametru  $\lambda$ , który może być dowolnie mały) i zastąpić  $\omega$  przez  $\omega_0$ :

$$x(t) \approx \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} (\omega_0^2 - \Omega^2) (\cos \Omega t - e^{-\lambda t} \cos \omega_0 t).$$

Ponadto można pominąć czynnik  $\lambda^2\Omega^2$  w mianowniku i, wprowadzając  $\varepsilon = \Omega - \omega_0$ , sprowadzić powyższy wzór do

$$x(t) \approx -\frac{F_0/m}{2\omega_0\varepsilon} (\cos \omega_0 t \cos \varepsilon t - \sin \omega_0 t \sin \varepsilon t - e^{-\lambda t} \cos \omega_0 t).$$

Żeby łatwiej dostrzec jakościowy charakter ruchu dobrze jest wyrażenie w nawiasie przedstawić w postaci  $A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ , tj. w postaci ruchu harmonicznego z (wolno) zmienną z czasem amplitudą i (wolno) zmienną z czasem fazą. Przypuszczamy bowiem, że po dostatecznie długim czasie ruch oscylatora powinien się jakoś ustabilizować. Trzeba zatem tak dobrać  $A(t)$  i  $\varphi(t)$ , by

$$\begin{aligned} A(t) \cos \varphi(t) &= \cos \varepsilon t - e^{-\lambda t}, \\ A(t) \sin \varphi(t) &= \sin \varepsilon t. \end{aligned}$$

Łatwo zobaczyć, że rozwiązaniem tego problemu są

$$A(t) = \sqrt{1 - 2e^{-\lambda t} \cos \varepsilon t + e^{-2\lambda t}}, \quad \text{tg} \varphi(t) = \frac{\sin \varepsilon t}{\cos \varepsilon t - e^{-\lambda t}}.$$

Zatem

$$x(t) \approx -\frac{F_0/m}{2\omega_0\varepsilon} \sqrt{1 - 2e^{-\lambda t} \cos \varepsilon t + e^{-2\lambda t}} \cos(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

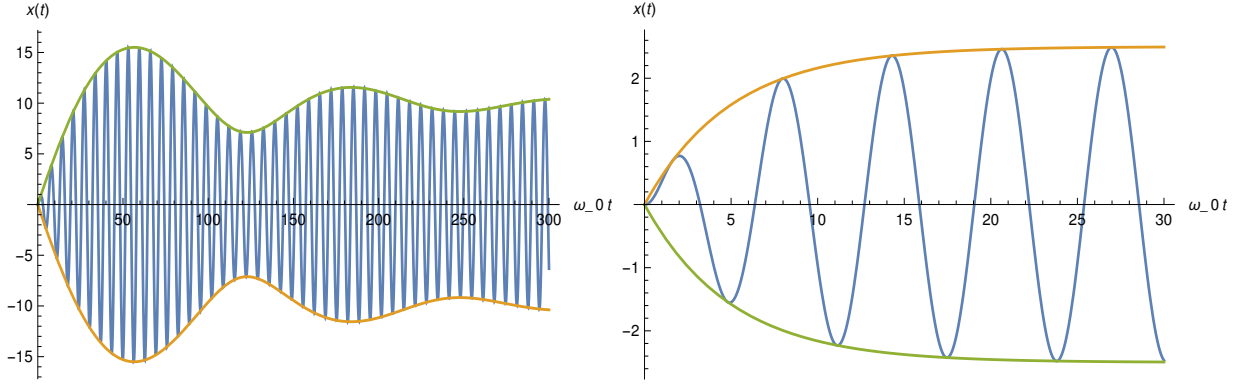
Amplituda wychylenia dąży, gdy  $t \rightarrow \infty$  do  $F_0/2m\omega_0\varepsilon$ , ale “po drodze” wykazuje lokalne maksima i minima wypadające, gdy

$$\cos \varepsilon t + \frac{\varepsilon}{\lambda} \sin \varepsilon t = e^{-\lambda t}.$$

Maksima te, z których najwyższe jest pierwsze mogą, jeśli  $|\varepsilon/\lambda| \gg 1$ , znacznie przekraczać asymptotyczną wartość amplitudy, co widać, gdy się ją zapisze eliminując z niej czynnik  $e^{-\lambda t}$  z pomocą wypisanego wyżej warunku na ekstremum:

$$A_{\text{max/min}} = \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} \sin^2 \varepsilon t}.$$

Typową zależność od czasu wychylenia oscylatora w tym reżimie pokazuje lewy panel rysunku 3.



Rysunek 3: Wychylenia (w jednostkach  $F_0/m\omega_0^2$ ) oscylatora z tłumieniem pobudzanego siłą harmoniczną  $F(t) = F_0 \cos((\omega_0 + \varepsilon)t)$  w funkcji  $\omega_0 t$ . Po lewej:  $\varepsilon/\omega_0 = -0.05$ ,  $\lambda/\omega_0 = 0.01$ ; linie czerwona i zielona pokazują przebieg modulującego czynnika  $A(t)/2|\varepsilon|$ . Po prawej:  $\varepsilon/\omega_0 = -0.01$ ,  $\lambda/\omega_0 = 0.2$ ; linie czerwona i zielona pokazują przebieg modulującego czynnika  $A(t)/2\lambda$ . Wykresy zostały otrzymane z przybliżonych wzorów podanych w tekście; optycznie nie różnią się jednak od otrzymywanych ze ścisłego rozwiązania.

3) Trzeci przypadek zachodzi, gdy  $|\omega_0 - \Omega| \ll \lambda \ll \omega_0$ , co oznacza, że tłumiony oscylator jest bardzo blisko rezonansu (i granicę ścisłego rezonansu można osiągnąć). W tym przypadku w pełnym rozwiązaniu można pominąć człony z kosinusami (bo są mnożone przez  $\omega_0^2 - \Omega^2$ , a zostawić należy te z sinusami. Ponadto, w mianowniku na przedzie można po prostu położyć  $\omega_0^2 = \Omega^2$  i przybliżyć przez 1 czynnik  $(\Omega^2 + \omega_0^2)/2\Omega\omega$ . Po położeniu  $\Omega = \omega_0 + \varepsilon$  otrzymuje się wtedy

$$x(t) \approx \frac{F_0/m}{2\lambda\omega_0} (\sin \omega_0 t \cos \varepsilon t + \cos \omega_0 t \sin \varepsilon t - e^{-\lambda t} \sin \omega t) .$$

Jeśli jeszcze w ostatnim sinusie przybliżyć  $\omega$  przez  $\omega_0$ , to można z pomocą takiej samej sztuczki, jak w poprzednim przypadku przedstawić przybliżone rozwiązanie w postaci

$$x(t) \approx \frac{F_0/m}{2\lambda\omega_0} A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) ,$$

w której  $A(t)$  i  $\varphi(t)$  są dane tymi samymi wzorami, co w poprzednim przypadku (można tu jednak pod pierwiastkiem położyć  $\varepsilon = 0$ , co sprowadzi cały czynnik modulujący  $A(t)$  do  $1 - e^{-\lambda t}$ ). Typową zależność od czasu wychylenia oscylatora w tym reżimie pokazuje prawy panel rysunku 3.

W sytuacji, gdy  $\lambda \sim |\Omega - \omega_0|$  trudno jest napisać jakieś przybliżenie ścisłego rozwiązania, które by czyniło charakter ruchu łatwo widocznym. Niemniej porównując oba panele rysunku 3 można oczekiwać, że przy przechodzeniu od  $\lambda \ll |\Omega - \omega_0|$  do  $|\Omega - \omega_0| \ll \lambda$  przez reżim, w którym  $\lambda \sim |\Omega - \omega_0|$ , "fallowania" obwiedni (krzywych czerwonej i zielonej) powinny po prostu maleć.

### Zadanie

Podać ogólne rozwiązanie równania ruchu jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie  $m$ , częstości  $\omega_0$  i współczynnika tłumienia  $2\gamma = 2m\lambda$  pobudzanego siłą  $F(t)$  o dowolnej zależności od czasu.

### Rozwiązanie

Najogólniejsze rozwiązanie równania

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t),$$

gdzie  $f(t) = F(t)/m$ , ma postać sumy z dowolnymi współczynnikami dwu liniowo niezależnych rozwiązań  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  równania jednorodnego (z  $f(t) = 0$ ) i jakiegokolwiek (tzw. szczególnego) rozwiązania równania niejednorodnego. Gdyby to było równanie pierwszego rzędu, szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego można by było znaleźć metodą uzmiennienia stałej w rozwiązaniu równania jednorodnego. Tu jednak mamy do czynienia z równaniem drugiego rzędu i jeśli przyjmiemy, że

$$x_{szcz}(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t),$$

to po wstawieniu tego  $x_{sz}(t)$  do wyjściowego równania otrzymamy

$$\begin{aligned} \ddot{C}_1 x_1 + 2\dot{C}_1 \dot{x}_1 + C_1 \ddot{x}_1 + 2\lambda(\dot{C}_1 x_1 + C_1 \dot{x}_1) + \omega_0^2 C_1 x_1 + \\ \ddot{C}_2 x_2 + 2\dot{C}_2 \dot{x}_2 + C_2 \ddot{x}_2 + 2\lambda(\dot{C}_2 x_2 + C_2 \dot{x}_2) + \omega_0^2 C_2 x_2 = f(t). \end{aligned}$$

Nawet po wykorzystaniu tego, że  $x_1$  i  $x_2$  spełniają równanie jednorodne pozostaje jedno różniczkowe równanie na dwie nieznane funkcje ( $C_1$  i  $C_2$ ), i to równanie drugiego rzędu z zależnymi od czasu współczynnikami:

$$\begin{aligned} \ddot{C}_1 x_1 + 2\dot{C}_1 \dot{x}_1 + 2\lambda\dot{C}_1 x_1 + \\ \ddot{C}_2 x_2 + 2\dot{C}_2 \dot{x}_2 + 2\lambda\dot{C}_2 x_2 = f(t). \end{aligned}$$

Z kłopotu wybawia nas to, że wystarczy znaleźć jedno *jakiegokolwiek* rozwiązanie równania niejednorodnego. Możemy więc narzucić na  $C_1$  i  $C_2$  jakieś dodatkowe warunki pozwalające uprościć powyższe równanie. Okazuje się, że właściwą sztuczką jest zażądanie, by  $C_1$  i  $C_2$  nie były od siebie niezależne, lecz by spełniały związek

$$\dot{C}_1 x_1 + \dot{C}_2 x_2 = 0.$$

Związek taki oznacza, że także

$$\dot{C}_1 x_1 + \dot{C}_1 \dot{x}_1 + \dot{C}_2 x_2 + \dot{C}_2 \dot{x}_2 = 0.$$

Wykorzystanie narzuconego warunku upraszcza równanie do równania pierwszego rzędu:

$$\dot{C}_1 \dot{x}_1 + \dot{C}_2 \dot{x}_2 = f(t).$$

Narzucony związek pozwala ponadto uzyskać zamknięte równania na  $C_1$  i  $C_2$ : podstawiając do powyższego równania

$$\dot{C}_2 = -\frac{x_1}{x_2} \dot{C}_1, \quad \text{lub} \quad \dot{C}_1 = -\frac{x_2}{x_1} \dot{C}_2,$$

otrzymujemy dwa równania

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= \frac{x_2}{\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2} f(t), \\ \dot{C}_2 &= \frac{x_1}{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1} f(t), \end{aligned}$$

które już łatwo scałkować.<sup>5</sup>

W przypadku rozpatrywanego równania, dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego są<sup>6</sup>

$$x_1(t) = e^{-\lambda t} \cos \omega t, \quad x_2(t) = e^{-\lambda t} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2},$$

i łatwo znaleźć, że  $\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = -\omega e^{-2\lambda t}$ . Po wstawieniu tych rozwiązań do powyższych wzorów znajdujemy, że

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{\omega} \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \sin \omega \tau, \\ C_2 &= \frac{1}{\omega} \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \cos \omega \tau, \end{aligned}$$

Zatem szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego ma postać

$$\begin{aligned} x_{szcz}(t) &= -\frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \cos \omega t \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \sin \omega \tau \\ &\quad + \frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \cos \omega \tau. \end{aligned}$$

Dolne granice całek są tu dowolne - różne ich wybory dają funkcje  $C_1(t)$  i  $C_2(t)$  różniące się o stałe, co daje rozwiązania  $x_{szcz}(t)$  różniące się od siebie o pewną kombinację liniową rozwiązań  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  równania jednorodnego. Ponieważ pełne (najogólniejsze) rozwiązanie wyjściowego równania ma postać

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{-\lambda t} \cos \omega t + A_2 e^{-\lambda t} \sin \omega t - \frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \cos \omega t \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \sin \omega \tau \\ &\quad + \frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \cos \omega \tau \\ &= A_1 e^{-\lambda t} \cos \omega t + A_2 e^{-\lambda t} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{-\lambda(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)], \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Przy okazji: wspólny mianownik tych wyrażeń nazywa się *wrońskianem* od Józefa Marii Hoene Wrońskiego - polskiego fizyka, matematyka i filozofa, jednego z przedstawicieli polskiego mesjanizmu. (Pamiętamy: Mickiewicz, Towiański i te sprawy.)

<sup>6</sup>Ograniczamy się tu do przypadku  $\omega_0^2 > \lambda^2$

więc wybór dolnych granic całek (czy też jednej całki, w ostatnim wariancie wzoru, który zakłada, że dolne granice obu całek są takie same) sprowadza się do przeddefiniowania dowolnych stałych  $A_1$  i  $A_2$ , które wyznacza się z warunków początkowych. Jeśli warunki początkowe są zadane np. w  $t = 0$ , to wygodnym wyborem dolnych granic całek jest zero, gdyż wówczas<sup>7</sup>  $x(0) = A$  i  $\dot{x}(0) = \omega B - \lambda A$ .

Innym sposobem uzyskania tego rozwiązania jest sprowadzenie wyjściowego równania różniczkowego drugiego rzędu (z niejednorodnością) do układu dwu równań liniowych pierwszego rzędu z niejednorodnością. Do znalezienia rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego można wtedy zastosować zwykłą metodę (już nie wymagającą sztuczek z wrońskianami) uzmienniania stałej, której rolę gra wtedy dwuwymiarowy wektor. (Sposób ten jest przedstawiony w moim skrypcie do analizy).

---

<sup>7</sup>Różniczkowanie  $x_{szcz}(t)$  po  $t$  daje dwa wyrazy, ale oba one przy takim wyborze dolnej granicy całki znikają w  $t = 0$ : jeden bierze się z różniczkowania po  $t$  funkcji podcałkowej - wyraz ten znika ponieważ górną granicę całki kładziemy potem równą zero - a drugi z różniczkowania po  $t$  w górnej granicy całki; w wyniku tej operacji dostajemy funkcję podcałkową wziętą w punkcie, który był górną granicą całki, a to znów da zero, bo  $\sin \omega(t - t) = 0$ .

## Ćwiczenia 3

## Zadanie

**Przypomnienie:** Równanie ruchu ciała (traktowanego jak punkt materialny), którego masa  $m = m(t)$  zmienia się z czasem według zadanego z góry prawa można otrzymać na podstawie następującego prostego rozumowania. Niech w chwili  $t$  ciało ma masę  $m$  i prędkość  $\mathbf{v}$ , a dodatkowy, infinitezymalny kawałek masy  $dm$  prędkość  $\mathbf{u}$  (obie te prędkości są mierzone w pewnym układzie inercyjnym). Po upływie czasu  $dt$  kawałek masy  $dm$  zlepia się<sup>8</sup> z ciałem, które ma teraz masę  $m + dm$  i prędkość  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Zmiana całkowitego pędu tego układu (którym jest ciało oraz kawałek masy) jest więc równa

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - m\mathbf{v} - dm\mathbf{u} \\ &= m d\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dm + \mathcal{O}(dm d\mathbf{v}) \\ &\equiv m d\mathbf{v} - \mathbf{w} dm, \end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  jest prędkością kawałka masy  $dm$  w układzie spoczynkowym ciała. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, obliczona wyżej zmiana pędu układu musi być spowodowana popędem  $\mathbf{F} dt$  zewnętrznej siły działającej na rozpatrywany układ (ciało plus kawałek masy). Zatem, po podzieleniu związku wyrażającego tę równość stronami przez  $dt$  otrzymuje się

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v} - \frac{dm}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{F},$$

czyli

$$\frac{d}{dt} (m(t) \mathbf{v}(t)) = \mathbf{F} + \frac{dm(t)}{dt} \mathbf{u},$$

lub, w drugim wariancie,

$$m(t) \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \mathbf{F} + \frac{dm(t)}{dt} \mathbf{w}.$$

Oba te wzory są poprawne. Zależnie od tego, czy prędkość mas dołączających się do ciała jest podana (musi być to określone z góry) względem układu inercyjnego, czy względem samego ciała, bardziej użyteczny jest jeden bądź drugi wzór.

---

<sup>8</sup>Jeśli masa ciała maleje z czasem, to  $dm < 0$ .

### Zadanie

Rakieta wznosi się pionowo z Ziemi wyrzucając gaz ze stałą prędkością  $w$  do tyłu względem siebie samej. Masa rakiety zmienia się wskutek tego zgodnie ze wzorem  $m(t) = m_0 - \kappa t$ . Znaleźć zależność położenia rakiety od czasu, jeśli jej prędkość początkowa, w chwili  $t = 0$ , była równa  $v_0$ .

### Rozwiązanie

Wyberzmy układ odniesienia o osi  $z$  skierowanej w górę. Problem sprowadza się wtedy do rozwiązania równania różniczkowego (ponieważ  $w$  jest prędkością gazów względem rakiety, a nie względem układu inercjalnego, zależna od czasu masa stoi przed pochodną po czasie prędkości, czyli przed  $\ddot{z}$ ):

$$m(t)\ddot{z} = -m(t)g - w \frac{dm(t)}{dt}.$$

czyli, po wykorzystaniu podanego prawa zmiany masy,

$$\ddot{z} = -g + \frac{w\kappa}{m_0 - \kappa t}.$$

Proste scałkowanie stronami tego równania daje

$$\dot{z} = A - gt - w \ln(m_0 - \kappa t).$$

Z warunku początkowego  $\dot{z}(0) = v_0$  znajdujemy stałą całkowania:  $A = v_0 + w \ln m_0$ . Zatem

$$v(t) = \dot{z}(t) = v_0 - gt - w \ln\left(1 - \frac{\kappa}{m_0} t\right).$$

Przy  $t$  bliskim zeru, gdy  $v_0 = 0$  (rakieta startuje),  $v(t) \approx (w\kappa/m_0 - g)t$ . Warunkiem startu, jest więc, by  $w > m_0 g/\kappa$ .

Kolejne całkowanie daje

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 - w \int_0^t dt' \ln\left(1 - \frac{\kappa}{m_0} t'\right),$$

czyli<sup>9</sup>

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + w \frac{m_0}{\kappa} \left\{ \left(1 - \frac{\kappa}{m_0} t\right) \ln\left(1 - \frac{\kappa}{m_0} t\right) + \frac{\kappa}{m_0} t \right\}.$$

Oczywiście wzór jest słuszny, dopóki  $m(t) = m_0 - \kappa t > 0$ . W przypadku prawdziwej rakiety, zanim  $m(t)$  zmaleje znacząco, przestaje obowiązywać przybliżenie siły grawitacyjnego przyciągania przez Ziemię wzorem  $F_{\text{graw}} = -mg$ .

Wzór na prędkość rakiety, gdy porusza się ona poza zasięgiem pól przyciągania i rozpędza wskutek odrzutu gazów od prędkości zero

$$\dot{z}(t) \equiv v(t) = -w \ln\left(1 - \frac{\kappa}{m_0} t\right) = -w \ln \frac{m(t)}{m_0},$$

jest znany jako wzór Ciołkowskiego - zapoznanego rosyjskiego prekursora astronautyki.

---

<sup>9</sup>  $\int d\xi \ln \xi = \xi(-1 + \ln \xi) + \text{const.}$

### Zadanie

Wyprowadzić wzór Ciołkowskiego  $v(t) = -w \ln(M(t)/M(0))$  wyrażający zależność prędkości rakiety rozpędzającej się w próżni (z dala od wszelkich sił zewnętrznych) wskutek odrzutu gazu od stanu spoczynku od jej (zmieniającej się z czasem) masy, przyjmując, że gazy są wyrzucane impulsami, a z każdym impulsem rakietę traci  $1/(n+1)$  część swojej aktualnej masy. Przyjąć, że gaz jest odrzucany z prędkością  $w$  względem rakiety skierowaną przeciwnie do prędkości rakiety.

### Rozwiązanie

Rozpatrzmy rakietę mającą w danej chwili masę  $(n+1)\Delta m$  w chwilowym układzie odniesienia z nią związanym. W układzie tym jej pęd jest równy zeru i zeru musi też być równy sumaryczny pęd rakiety o masie  $n\Delta m$ , która uzyskała prędkość  $\Delta v_r$  po wyrzuceniu masy  $\Delta m$  z prędkością  $\Delta v_g$ . Zatem

$$\begin{aligned} n \Delta m \Delta v_r - \Delta m \Delta v_g &= 0, \\ \Delta v_r + \Delta v_g &= w. \end{aligned}$$

Drugie równanie wyraża to, że wyrzucony gaz ma względem rakiety prędkość  $w$ . Z tych dwóch równań otrzymujemy wniosek, że

$$\Delta v_r = \frac{w}{n+1}.$$

Możemy teraz rozpatrzeć kolejne etapy tracenia masy przez rakietę mającą początkowo masę  $M_0$ . Po pierwszym impulsie ma ona masę  $M_1$  i w układzie inercyjnym (w którym początkowo spoczywała) prędkość  $v_1$ :

$$M_1 = \frac{n}{n+1} M_0, \quad v_1 = 1 \cdot \frac{w}{n+1}.$$

Po drugim, ma masę  $M_2$  i w *układzie inercyjnym* prędkość  $v_2$ :

$$M_2 = \frac{n}{n+1} M_1 = \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 M_0, \quad v_2 = 2 \cdot \frac{w}{n+1}.$$

Po  $k$ -tym etapie:

$$M_k = \left( \frac{n}{n+1} \right)^k M_0, \quad v_k = k \cdot \frac{w}{n+1}.$$

Zatem  $k = (n+1)v_k/w$  i możemy napisać

$$M_k = \left[ \left( \frac{n}{n+1} \right)^{(n+1)} \right]^{v_k/w} M_0 \equiv \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-v_k/w} M_0.$$

Przechodząc do granicy  $n \rightarrow \infty$  otrzymujemy stąd

$$M_k = M_0 e^{-v_k/w}, \quad \text{czyli} \quad v(M) = -w \ln \frac{M}{M_0},$$

czyli wzór Ciołkowskiego. Wzór ten wyprowadzić też można przez całkowanie równania Newtona przy założeniu pewnej konkretnej zależności  $M(t)$  masy rakiety od czasu. Ponieważ w podanym tu rozumowaniu czas nie odgrywa żadnej roli (impulsy gazu mogą następować w dowolnych momentach), wyprowadzenie to pokazuje, że wzór Ciołkowskiego nie zależy od konkretnej postaci zależności  $M(t)$ . Wniosek ten można oczywiście otrzymać także z równania Newtona

$$M(t) \frac{dv(t)}{dt} = -w \frac{dM(t)}{dt},$$

przepisując je w formie

$$M(t) \frac{dv(t)}{dt} \frac{dt}{dM(t)} \equiv M \frac{dv}{dM} = -w,$$

i całkując je z warunkiem początkowym  $v(M_0) = 0$ .

## Zadanie

Wyprowadzić i przedyskutować wzór na zależność od czasu prędkości kropli spadającej w ziemskim polu grawitacyjnym  $\mathbf{g}$ . Kropla spadając albo paruje (jeśli spada w próżni) albo para wodna z otoczenia kondensuje na niej. Przyjąć, że szybkość zmiany z czasem masy kropli jest proporcjonalna do jej aktualnego promienia<sup>10</sup> (traktujemy kroplę jak kulkę i zakładamy stałość gęstości wody ją tworzącej), a także iż działa na nią siła oporu (gdy spada w powietrzu) proporcjonalna do jej szybkości i do aktualnego promienia. Przyjąć też, że tracona lub zyskiwana przez kroplę woda ma zerową prędkość względem ośrodka, w którym kropla spada.

## Rozwiązanie

Ponieważ zakładamy, że szybkość zmiany masy jest proporcjonalna do promienia  $r$  kropli, a przy stałej gęstości wody, masa kropli jest proporcjonalna do  $r^3$ , przeto jawny wzór wyrażający masę kropli w funkcji czasu jest rozwiązaniem równania

$$\frac{dm}{dt} = \alpha m^{1/3},$$

przy czym współczynnik  $\alpha$  może być dodatni (gdy para z powietrza kondensuje na kropli) lub ujemny (gdy kropla paruje i masa jej maleje). Rozwiązaniem jest

$$m(t) = \left( m_0^{2/3} + \frac{2}{3} \alpha t \right)^{3/2}.$$

Ponieważ przyjmujemy że prędkość traconej przez kroplę (przyłączanej do niej) materii ma zerową prędkość względem ośrodka i ponieważ przyjmujemy, iż siła oporu jest proporcjonalna do prędkości i promienia, czyli do  $m^{1/3}$ , do rozwiązania jest równanie (kierujemy oś  $z$  w dół, tak iż  $\mathbf{g} = \mathbf{e}_z g$ )

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg - \gamma m^{1/3} v,$$

które zapiszemy w postaci

$$\dot{v} + \left( \frac{\dot{m}}{m} + \gamma m^{-2/3} \right) v \equiv \dot{v} + v f(t) = g.$$

Funkcja  $f(t)$  jest jawnie dana wzorem:

$$f(t) = \frac{\gamma + \alpha}{m_0^{2/3} + \frac{2}{3} \alpha t}.$$

---

<sup>10</sup>W istocie, gdy kropla spada w próżni, szybkość zmiany jej masy jest proporcjonalna do pola jej powierzchni, czyli do  $r^2$ ; gdy zaś para z otoczenia kondensuje na niej, szybkość zmiany masy jest mniej więcej  $\propto r^{3/2}$ , gdy prędkość kropli jest niewielka i mniej więcej  $\propto r^{1/2}$  przy większych prędkościach.

Równanie jest liniowe z niejednorodnością, można więc doń zastosować standardową technikę uzmienniania stałej. Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne, które po rozdzielaniu zmiennych daje

$$\frac{dv}{v} = -f(t) dt,$$

i ma jako rozwiązanie

$$v_{og}(t) = v_0 \exp\left(-\int dt f(t)\right).$$

Zastępując stałą całkowania  $v_0$  nieznaną funkcją  $a(t)$  i wstawiając tak uzyskaną funkcję  $v_{szcz}(t)$  do wyjściowego równania niejednorodnego, dostajemy na  $a(t)$  równanie

$$\dot{a} = g \exp\left(\int dt f(t)\right).$$

Stąd, po scałkowaniu, znajdujemy  $a(t)$  i dostajemy najogólniejsze rozwiązanie równania niejednorodnego w postaci

$$v(t) = e^{-\int_0^t d\tau f(\tau)} \left[ v_0 + g \int_0^t d\tau e^{\int_0^\tau d\xi f(\xi)} \right].$$

Granice całek zostały tak wybrane, że stała  $v_0$  ma sens prędkości początkowej (w chwili  $t = 0$ ) kropli. Wygląda to skomplikowanie, ale można z tym powalczyć.

$$\int_0^t d\tau f(\tau) = (\gamma + \alpha) \int_0^t \frac{d\tau}{m_0^{2/3} + \frac{2}{3} \alpha \tau} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \ln\left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha t}{m_0^{2/3}}\right).$$

Zatem

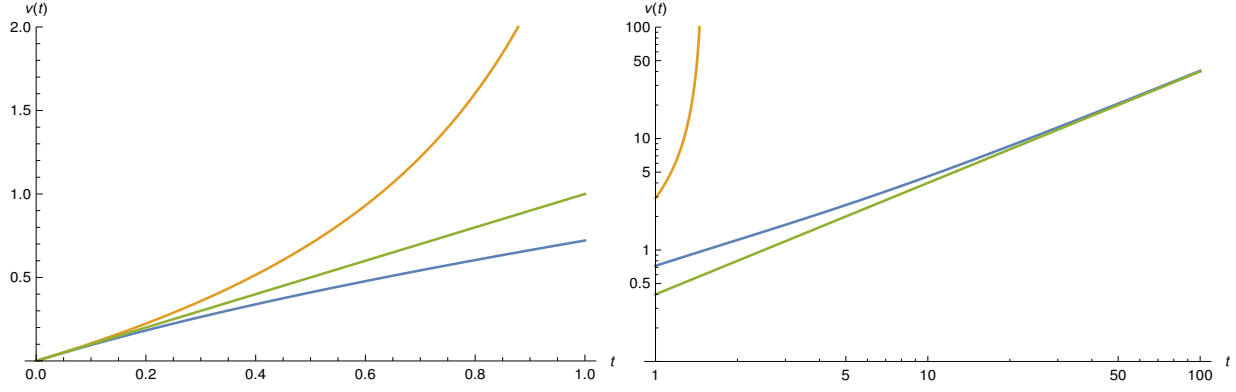
$$\exp\left(\int_0^\tau d\xi f(\xi)\right) = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha \tau}{m_0^{2/3}}\right)^{\frac{3}{2}(1+\frac{\gamma}{\alpha})} \equiv (1 + a\tau)^b.$$

Idąc dalej,

$$\int_0^t d\tau e^{\int_0^\tau d\xi f(\xi)} = \int_0^t d\tau (1 + a\tau)^b = \frac{1}{a(1+b)} [(1 + a\tau)^{b+1} - 1].$$

Łącząc wszystko razem i zakładając, że prędkość początkowa znika, tj. kładąc  $v_0 = 0$ , otrzymujemy

$$v(t) = \frac{g}{a(1+b)} \frac{1}{(1+at)^b} \{(1+at)^{b+1} - 1\} = \frac{g}{a(1+b)} \left\{1 + at - \frac{1}{(1+at)^b}\right\},$$



Rysunek 4: Prędkość w (jednostkach  $gm_0^{2/3}/|\alpha|$ ) spadającej i parującej kropli (krzywa czerwona) i spadającej kropli, na której zachodzi kondensacja (krzywa niebieska) w funkcji czasu (w jednostkach  $|\alpha|/m_0^{2/3}$ ) bez siły oporu ( $\gamma/|\alpha| = 0$ ). Po lewej:  $t \ll 1$  - krzywa zielona pokazuje prędkość spadku bez parowania i kondensacji. Po prawej:  $t \gg 1$  - krzywa zielona pokazuje zależność asymptotyczną.

czyli ostatecznie

$$v(t) = \frac{3g}{5\alpha + 3\gamma} \left\{ m_0^{2/3} + \frac{2}{3} \alpha t - m_0^{2/3} \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha t}{m_0^{2/3}} \right]^{-\frac{3}{2}(1+\frac{\gamma}{\alpha})} \right\}.$$

Zbadajmy najpierw zachowanie prędkości tuż po starcie. Rozwijamy w tym celu powyższy wzór w szereg względem  $t$

$$(1 + at)^{-b} = \exp[-b \ln(1 + at)] = 1 - bat + \frac{1}{2}b(b+1)a^2t^2 + \dots$$

Współczynniki są równe

$$ba = m_0^{-2/3}(\alpha + \gamma),$$

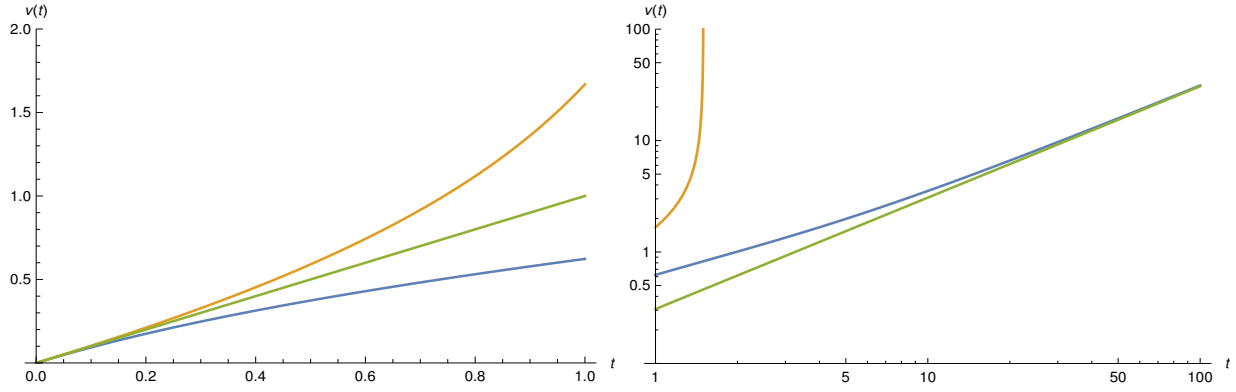
$$b(b+1)a^2 = \frac{1}{3}m_0^{-4/3}(\alpha + \gamma)(5\alpha + 3\gamma).$$

Wstawiając to rozwinięcie do uzyskanego wyżej wzoru, otrzymujemy

$$v(t) = \frac{3g}{5\alpha + 3\gamma} \left\{ m_0^{2/3} + \frac{2}{3} \alpha t - m_0^{2/3} \left[ 1 - m_0^{-2/3}(\alpha + \gamma)t + \frac{1}{6} m_0^{-4/3}(\alpha + \gamma)(5\alpha + 3\gamma)t^2 + \dots \right] \right\},$$

czyli, po uproszczeniach

$$v(t) \approx gt - \frac{g}{2m_0^{2/3}}(\alpha + \gamma)t^2.$$



Rysunek 5: Prędkość w (jednostkach  $gm_0^{2/3}/|\alpha|$ ) spadającej i parującej kropli (krzywa czerwona) i spadającej kropli, na której zachodzi kondensacja (krzywa niebieska) w funkcji czasu (w jednostkach  $|\alpha|/m_0^{2/3}$ ), gdy występuje siła oporu ( $\gamma/|\alpha| = 0.5$ ). Po lewej:  $t \ll 1$  - krzywa zielona pokazuje prędkość spadku bez parowania i kondensacji. Po prawej:  $t \gg 1$  - krzywa zielona pokazuje zależność asymptotyczną.

Widać stąd, że jeśli  $\alpha + \gamma > 0$ , szybkość kropli najpierw rośnie liniowo z czasem (tak jak gdyby jej masa nie zmieniała się, a siły oporu nie było) a następnie spada.

Z pełnego wzoru widać też, że przy braku siły oporu ( $\gamma = 0$ ) i kondensacji ( $\alpha > 0$ ) prędkość kropli asymptotycznie rośnie jak  $\frac{2}{5}gt$ . Siła oporu modyfikuje ten asymptotyczny wzrost prędkości do  $2gt/(5 + 3\gamma/\alpha)$ .

Przy parowaniu zaś ( $\alpha = -|\alpha| < 0$ ) i braku oporu wzór przybiera postać

$$v(t) = \frac{3g}{5|\alpha|} m_0^{2/3} \left\{ \frac{2|\alpha|}{3m_0^{2/3}} t + \left( 1 - \frac{2|\alpha|t}{3m_0^{2/3}} \right)^{-3/2} - 1 \right\}.$$

Widać z niej, że kropla w skończonym czasie całkowicie wyparowuje, osiągając w tym samym momencie nieskończoną prędkość. Jest to oczywiście nierealistyczne. Z kolei jeśli siła oporu jest znaczna, tak iż  $3\gamma > 5|\alpha|$ , prędkość kropli w momencie wyparowania jest równa zero. Zależność prędkości kropli w różnych sytuacjach pokazują wykresy 4 i 5.

Jeśli  $\alpha = 0$  (masa kropli nie zmienia się) otrzymane wzory przechodzą w te uzyskane w zadaniu 2.4 dla tamtejszego parametru  $\alpha = 1$  przy utożsamieniu  $\gamma m_0^{1/3}$  ze współczynnikiem  $\kappa$ , a  $m_0$  z  $m$ .