

MECHANIKA KLASYCZNA ĆWICZENIA

5. RÓWNANIA NEWTONA W UKŁADACH NIEINERCJALNYCH

Przypomnienie:

Dwaj obserwatorzy z układów odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ charakteryzują zmienność w czasie wektorów $\mathbf{r}(t)$ i $\mathbf{r}'(t)$ położenia punktu P (zob. lewy rysunek 1). Wektory te spełniają oczywistą równość (którą, jak każdą równość wektorową, można rozpisać na składowe w dowolnym układzie odniesienia, czyli np. w $\mathcal{O}$ lub w $\mathcal{O}'$).

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t),$$

gdzie $\mathbf{r}_0(t)$ jest (zmieniającym się z czasem) wektorem łączącym początki układów $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. Ponieważ jest to równość dwóch wektorów, więc zachodzi także związek

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt}.$$

Oczywiście $d\mathbf{r}(t)/dt \equiv \mathbf{v}(t)$ jest wektorem prędkości punktu P mierzonej przez obserwatora w $\mathcal{O}$. Jeśli jednak widziany z $\mathcal{O}$ układ $\mathcal{O}'$ obraca się wokół osi przechodzącej przez jego początek z prędkością kątową ω , wektor $d\mathbf{r}'(t)/dt$ nie jest tożsamy z wektorem $\mathbf{v}'$ prędkości mierzonej w $\mathcal{O}'$. Aby to sobie uzmysłowić wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy punkt P pozostaje w ustalonym położeniu względem $\mathcal{O}'$: mimo iż wtedy $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, pochodna $d\mathbf{r}'(t)/dt \neq \mathbf{0}$, gdyż widziany z $\mathcal{O}$ wektor $\mathbf{r}'$ zmienia się wraz z obrotem całego układu $\mathcal{O}'$.

Rozpatrując infinytezymalne zmiany wektorów zachodzące w infinytezymalnym odcinku czasu dt możemy napisać równość:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d'\mathbf{r}' + (d\mathbf{r}')_{\text{rot}}.$$

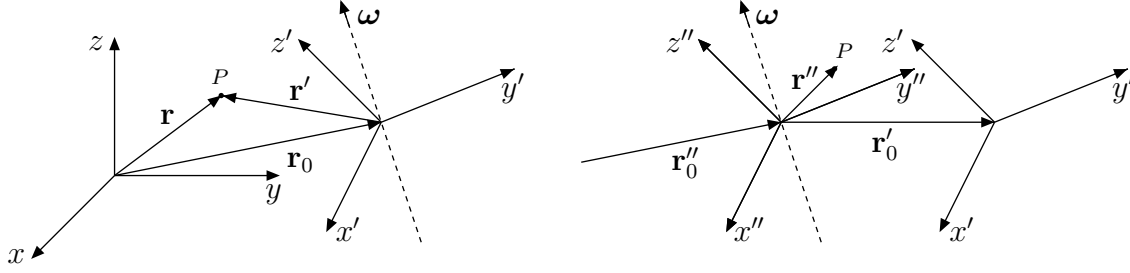
$d'\mathbf{r}'$ jest zmianą wektora $\mathbf{r}'$ widzianą przez obserwatora w $\mathcal{O}'$ (który uważa, że osie jego układu się nie zmieniają; wobec tego $d'\mathbf{r}' = \mathbf{0}$, wtedy gdy punkt P nie zmienia położenia względem $\mathcal{O}'$), wektor zaś $(d\mathbf{r}')_{\text{rot}}$ jest właśnie zmianą $\mathbf{r}'$ widzianą z $\mathcal{O}$, uwarunkowaną w całości obrotem $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$. Zmiana ta jest, jak łatwo zrozumieć, równa

$$(d\mathbf{r}')_{\text{rot}} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}',$$

gdzie $d\boldsymbol{\theta}$ jest wektorem reprezentującym infinytezymalny obrót o kąt $d\theta$ układu $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$ w przedziale czasu dt (zatem $d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}dt$). Wektor ten ma kierunek chwilowej osi obrotu. Otrzymujemy zatem wniosek, że gdy układ $\mathcal{O}'$ obraca się względem $\mathcal{O}$ wokół osi przechodzącej przez jego początek

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Powyższy wzór pozostaje prawdziwy, nawet jeśli oś wokół której obraca się układ $\mathcal{O}'$ nie przechodzi przez jego początek. Aby się o tym przekonać wprowadzamy pomocniczy



Rysunek 1: *Lewy rysunek:* Układy odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. Z punktu widzenia obserwatora w układzie $\mathcal{O}$ układ $\mathcal{O}'$ obraca się wokół osi (zaznaczonej linią przerywaną) z prędkością kątową ω . Obaj obserwatorzy: w $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ charakteryzują zmienność w czasie wektora położenia punktu P odpowiednio wektorami $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}/dt$, $d^2\mathbf{r}/dt^2$ oraz $\mathbf{r}'$, $d'\mathbf{r}'/dt$, $d'^2\mathbf{r}'/dt^2$. *Prawy rysunek:* Pomocniczy układ $\mathcal{O}''$ wprowadzany w sytuacji, gdy układ $\mathcal{O}'$ obraca się wokół osi nieprzechodzącej przez jego początek. (Dla przejrzystości, wektory $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$, takie same, jak na lewym rysunku, nie zostały tu uwidocznione).

układ $\mathcal{O}''$ o początku leżącym na osi, wokół której obraca się $\mathcal{O}'$ i osiach stale równoległych do odpowiadających im osi układu $\mathcal{O}'$ (zob. prawy rysunek 1). Mamy wtedy wektorowy związek

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0'' + \mathbf{r}'',$$

gdzie $\mathbf{r}''$ jest wektorem wodzącym punktu P w układzie $\mathcal{O}''$. Wobec tego, zgodnie z poprzednim rozumowaniem możemy napisać

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0'' + d''\mathbf{r}'' + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}''.$$

Wykorzystujemy następnie równość $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}_0' + \mathbf{r}'$:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0'' + d''(\mathbf{r}_0' + \mathbf{r}') + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0' + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'.$$

Ponieważ jednak układy $\mathcal{O}''$ i $\mathcal{O}'$ są ze sobą na sztywno związane, $d''\mathbf{r}_0' = \mathbf{0}$ (wektor $\mathbf{r}_0'$ widziany z układu $\mathcal{O}''$ nie zmienia się). Co więcej, $d''\mathbf{r}' = d'\mathbf{r}'$, gdyż osie $\mathcal{O}''$ i $\mathcal{O}'$ są nawzajem do siebie stale równoległe i zmiana wektora $\mathbf{r}'$ widziana z obu tych układów jest takim samym wektorem. Wreszcie, wyraz $d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0'$ po dodaniu do $d\mathbf{r}_0''$ daje po prostu przesunięcie względem $\mathcal{O}$ początku układu $\mathcal{O}'$, czyli $d\mathbf{r}_0$. Otrzymujemy zatem ponownie ten sam wzór, który można także zapisać jako ($\mathbf{V}_{tr}$ jest prędkością ruchu postępowego $\mathcal{O}'$ mierzoną w $\mathcal{O}$)

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_{tr} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Z tych rozważań wynika też następujący wniosek. Jeśli wektor $\mathbf{b}$ łączy punkt P_1 (o wektorach wodzących $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_1'$ względem odpowiednio $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$) z punktem P_2 (o wektorach

wodzących $\mathbf{r}_2$ i $\mathbf{r}'_2$), czyli jeśli $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$, to odejmując stronami wzory łączące ze sobą pochodne w obu układach otrzymamy ważny wzór (por. Zadanie 0.7)

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d'\mathbf{b}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

Wzór wiążący ze sobą przyspieszenia punktu P mierzone w obu układach dostajemy wykorzystując powyższy związek (wyrazy w nawiasach są pochodnymi d/dt):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d\mathbf{V}_{\text{tr}}}{dt} + \left(\frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) \\ &\equiv \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Zgodnie ze wzorem wiążącym pochodne dowolnego wektora $\mathbf{b}$ obliczane w układach obracających się jeden względem drugiego z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$, $d\boldsymbol{\omega}/dt = d'\boldsymbol{\omega}/dt$.

Ważne jest także, by zdawać sobie sprawę z tego, że powyższe związki między pochodnymi wektorów są słuszne dla dowolnych dwu układów $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. W szczególności żaden z nich nie musi być układem inercyjnym. Jeśli jednak układ $\mathcal{O}$ *jest* układem inercyjnym, to zwykłe prawo Newtona (tj. równanie $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$) obowiązuje tylko w tym układzie. W układzie $\mathcal{O}'$, który jest wtedy (z konieczności, jeśli $\boldsymbol{\omega} \neq 0$) układem nieinercyjnym, można jednak stosować “prawo Newtona” zmodyfikowane o fikcyjne “siły bezwładności”:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \left(\mathbf{a}_{\text{tr}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right).$$

Zadanie 5.1

Dany jest zmieniający się z czasem wektor $\mathbf{b}(t)$. Powiązać jego pochodne obliczone w dwu różnych układach odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. Układy te mają wspólny początek i obracają się względem siebie wokół wspólnej osi $z = z'$. Kąt jaki tworzy oś x' układu $\mathcal{O}'$ z osią x układu $\mathcal{O}$ jest pewną funkcją czasu $\varphi(t)$.

Uwaga: Żaden z tych układów nie jest wyróżniony. W szczególności żaden z nich nie musi być układem inercjalnym.

Rozwiązanie

Jeśli dane są dwa różne układy odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$, to dowolny wektor $\mathbf{b}$ można rozpisać na wersory i jednego i drugiego układu:

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_x b_x + \mathbf{e}_y b_y + \mathbf{e}_z b_z = \mathbf{e}'_x b'_x + \mathbf{e}'_y b'_y + \mathbf{e}'_z b'_z.$$

Wiedząc, że wersory obu układów są ze sobą powiązane wzorami

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \mathbf{e}'_x \cos \varphi(t) - \mathbf{e}'_y \sin \varphi(t), \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}'_x \sin \varphi(t) + \mathbf{e}'_y \cos \varphi(t),\end{aligned}$$

i $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}'_z$ (wzory te łatwo sprawdzić robiąc odpowiedni rysunek i rozpatrując przypadki, gdy $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi/2$) można też napisać

$$\mathbf{b} = [b_x \cos \varphi(t) + b_y \sin \varphi(t)] \mathbf{e}'_x + [-b_x \sin \varphi(t) + b_y \cos \varphi(t)] \mathbf{e}'_y + b_z \mathbf{e}'_z.$$

Oznacza to po prostu, że $b'_x = b_x \cos \varphi(t) + b_y \sin \varphi(t)$, a $b'_y = -b_x \sin \varphi(t) + b_y \cos \varphi(t)$. Pochodną wektora $\mathbf{b}$ obliczoną w układzie $\mathcal{O}$

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{e}_x \dot{b}_x + \mathbf{e}_y \dot{b}_y + \mathbf{e}_z \dot{b}_z,$$

(obserwator w $\mathcal{O}$, różniczkując wektor, uważa, że osie $\mathbf{e}_i$ nie zmieniają się z czasem), która jest pewnym wektorem, również można rozpisać na wersory układu $\mathcal{O}'$, otrzymując

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = [\dot{b}_x \cos \varphi(t) + \dot{b}_y \sin \varphi(t)] \mathbf{e}'_x + [-\dot{b}_x \sin \varphi(t) + \dot{b}_y \cos \varphi(t)] \mathbf{e}'_y + \dot{b}_z \mathbf{e}'_z.$$

Jeśli jednak obliczymy pochodną wektora $\mathbf{b}$ w układzie $\mathcal{O}'$, to otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{d'\mathbf{b}}{dt} &= \mathbf{e}'_x \dot{b}'_x + \mathbf{e}'_y \dot{b}'_y + \mathbf{e}'_z \dot{b}'_z \\ &= \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \omega [-b_x \sin \varphi(t) + b_y \cos \varphi(t)] \mathbf{e}'_x + \omega [-b_x \cos \varphi(t) - b_y \sin \varphi(t)] \mathbf{e}'_y.\end{aligned}$$

Dodatkowe wyrazy proporcjonalne do $\omega \equiv \dot{\varphi}(t)$ biorą się stąd, że w układzie $\mathcal{O}'$, oprócz zmienności z czasem składowych wektora $\mathbf{b}$ w bazie $\mathbf{e}_i$, uwzględniona jest także zmiana wektora $\mathbf{b}$ spowodowana tym, że same wersory $\mathbf{e}_i$ obracają się względem układu $\mathcal{O}'$ (obserwator w $\mathcal{O}'$ uważa, że to jego osie $\mathbf{e}'_i$ są nieruchome!). Wprowadzając wektor prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z = \omega \mathbf{e}'_z$ można sprawdzić, że dodatkowe wyrazy dają się zapisać jako $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$. Stąd

$$\frac{d'\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} \quad \text{lub} \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d'\mathbf{b}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

Zadanie 5.2

Z wieży o wysokości $h = 125$ m stojącej na równiku spuszczone swobodnie kamień o masie m . Jak daleko upadnie on od podstawy wieży? Pominąć wszystkie możliwe siły oporu. Rozwiązać ten problem w układzie związanym z Ziemią oraz w układzie inercyjnym, w którym Ziemia (wraz z wieżą) się obraca.

Rozwiązanie

W układzie obracającym się wraz z Ziemią, którego początek umieszczamy u podstawy wieży, oś z kierujemy “w niebo”, a oś x na wschód, równanie “Newtona”, które trzeba rozwiązać z warunkiem początkowym $\mathbf{r}(0) = \mathbf{e}_z h$, $\dot{\mathbf{r}}(0) \equiv \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$, ma postać:¹

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

W przyjętym układzie odniesienia $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_y \omega$. Ponieważ czas t_{sp} spadku kamienia, czyli czas trwania ruchu, nie może się wiele różnić od danego “szkolnym wzorem” $t_{\text{sp}} = \sqrt{2h/g}$, więc w powyższym równaniu ostatni wyraz daje małe efekty (drugiego rzędu w małej wielkości $\omega t_{\text{sp}} \ll 1$) i można go pominąć. Rozwiązujemy zatem równanie

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

które rozpisane na składowe daje

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\omega \dot{z}, \\ \ddot{y} &= 0, \\ \ddot{z} &= 2\omega \dot{x} - g.\end{aligned}$$

Środkowe z tych równań jest trywialne i, uwzględniając warunki początkowe, daje $y(t) = 0$. Z kolei całkując stronami pierwsze z tych równań i dobierając stałą całkowania tak, by dla $t = 0$, tj. wtedy, gdy $z(0) = h$, było $\dot{x}(0) = 0$, znajdujemy

$$\dot{x} = 2\omega(h - z).$$

Wstawiając tak wyrażone $\dot{x}$ do trzeciego równania otrzymujemy

$$\ddot{z} = -g + 4\omega^2(h - z).$$

Ponieważ zdecydowaliśmy się pomijać wyrazy z ω^2 , rozwiązanie tego równania da $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$, jak w szkole. Stąd widzimy, że rzeczywiście z dokładnością do efektów liniowych w ω (a przy pominięciu efektów kwadratowych), czas spadku wyznaczony przez $z(t_{\text{sp}}) = 0$, jest równy $t_{\text{sp}} = \sqrt{2h/g}$. Wykorzystując znalezione $z(t)$ w równaniu na $x(t)$

$$\dot{x} = 2\omega(h - z) = \omega gt^2,$$

¹Oznaczenie wielkości w układzie nieinercyjnym symbolami z primem zostało tu zarzucone.

po scałkowaniu otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{3} g \omega t^3.$$

Odchylenie d kamienia od podstawy wieży wynosi zatem

$$d = x(t_{\text{sp}}) = \frac{1}{3} g \omega \frac{2h}{g} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,5 \text{ cm}.$$

Ponieważ $d > 0$, kamień odchyła się w kierunku wschodnim, a nie, jak by można oczekiwać na podstawie naiwnego rozumowania, że w trakcie lotu kamienia, to raczej Ziemia z wieżą na niej obróci się na Wschód.

Ten na pierwszy rzut oka dziwny wynik można lepiej rozumieć rozpatrując ruch w układzie inercyjnym, w którym Ziemia z wieżą na niej się obraca. Ponieważ ruch zachodzi w płaszczyźnie równikowej, wygodnie jest wprowadzić w tej płaszczyźnie układ biegunowy (r, φ) tak, by w $t = 0$ wierzchołek wieży (czyli kamienia) miał współrzędne $r(0) = R + h$, gdzie R jest promieniem Ziemi (początek układu inercyjnego umieszczamy w środku Ziemi, aby jej ruch obrotowy miał prostą postać), $\varphi(0) = 0$. Równanie Newtona rozpisane w układzie biegunowym, $ma_r = F_r$, $ma_\varphi = F_\varphi$ to dwa równania:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= -mg, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

Drugie równanie, po pomnożeniu obu stron przez r , daje się zwinąć do²

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0, \quad \text{czyli} \quad mr^2\dot{\varphi} = L = \text{const.},$$

i wyraża, jak łatwo zrozumieć, zachowanie z -owej składowej momentu pędu (ponieważ jedyna działająca na kamień w układzie inercyjnym siła jest centralna, moment pędu

²Innym sposobem dojścia do tego samego jest zapisanie tego równania w postaci

$$-2 \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \equiv \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{dt},$$

i scałkowanie go stronami

$$-2 \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{dr}{r} = \int_{\dot{\varphi}(0)}^{\dot{\varphi}(t)} \frac{d(\dot{\varphi})}{\dot{\varphi}},$$

co daje

$$\ln[\dot{\varphi}(t)/\dot{\varphi}(0)] = -2 \ln[r(t)/r(0)],$$

czyli $mr^2(t)\dot{\varphi}(t) = mr^2(0)\dot{\varphi}(0)$.

kamienia jest stałą ruchu; w układzie biegunowym, jawnie widoczna jest jednak tylko stałość $L_z \equiv L$). Zatem z równania tego możemy wyznaczyć $\dot{\varphi}$ i wstawić do pierwszego:

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -mg,$$

Standardowym sposobem radzenia sobie z tym równaniem jest pomnożenie obu jego stron przez $\dot{r}$ i zwiniecie do

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + mgr \right) = 0,$$

czyli do równania wyrażającego stałość całkowitej energii kamienia. Równanie to będzie badane w zadaniach dotyczących ruchu w polu grawitacyjnym. Tu uprościmy sobie zadanie, przyjmując, co znajdzie swoje uzasadnienie niżej, że $L^2 \sim \omega^2$ i wobec tego, człon ten w równaniu na r można pominąć. Po szkolnym scałkowaniu daje ono wtedy

$$r(t) = r(0) + \dot{r}(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = (R+h) - \frac{1}{2}gt^2.$$

Stąd, czas spadku, wyznaczony równością $r(t_{\text{sp}}) = R$, jest równy, jak poprzednio $t_{\text{sp}} = \sqrt{2h/g}$.

Mając $r(t)$ można znaleźć $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{dt' L}{mr^2(t')} = \frac{L}{m} \int_0^t \frac{dt'}{[R+h - \frac{1}{2}gt'^2]^2}.$$

Całkę tę można wyliczyć ściśle, ale byłby to zbyteczny trud: ponieważ $R+h \gg gt_{\text{sp}}^2$, możemy rozwinąć funkcję podcałkową

$$\varphi(t) = \frac{L}{m(R+h)^2} \int_0^t dt' \left(1 + \frac{gt'^2}{R+h} + \dots \right) = \frac{L}{m(R+h)^2} t + \frac{1}{3} \frac{gL}{m(R+h)^3} t^3 + \dots$$

Aby wyznaczyć L , zauważamy, że w chwili początkowej kamień znajdujący się na wierzchołku wieży ma niezerową prędkość w kierunku $\mathbf{e}_\varphi$, równą $(R+h)\omega$. Zatem $L = mr^2(0)\omega = m(R+h)^2\omega$ i

$$\varphi(t) = \omega t + \frac{1}{3} \frac{\omega}{R+h} gt^3.$$

Trzeba jednak pamiętać, że w czasie, gdy kamień spadał z wieży, jej podstawa obróciła się z wraz Ziemią o kąt $\varphi_Z = \omega t_{\text{sp}}$. Biorąc to pod uwagę, odległość, w jakiej od wieży upadnie kamień wynosi

$$d = R(\varphi(t_{\text{sp}}) - \varphi_Z) = \frac{1}{3} \frac{R\omega}{R+h} gt_{\text{sp}}^3 \approx \frac{1}{3} g\omega t_{\text{sp}}^3.$$

Widać że przyczyną odchylenia kamienia na Wschód jest naprawdę to, że w układzie inercyjnym ma on w momencie rozpoczęcia spadania większą prędkość w tymże kierunku, niż podstawa wieży.

Zadanie 5.3

Stosując rachunek zaburzeń (albo inaczej, zasadę Banacha) podać rozwinięcie ogólnego rozwiązania $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ równania Newtona wyznaczającego ruch punktu materialnego w nieinercyjnym układzie odniesienia związanym z powierzchnią Ziemi słuszne w przypadku ruchów krótkotrwałych, w trakcie których małym pozostaje bezwymiarowy czynnik ωt (ω jest tu prędkością kątową obrotu Ziemi).

Rozwiązanie.

W przypadku ruchów krótkotrwałych, o małym zasięgu, w których $|\mathbf{r}'(t)| \ll R$ (R jest tu promieniem Ziemi), można ogólne równanie

$$m \mathbf{a}' = m \mathbf{g} - m \left(\mathbf{a}_{\text{tr}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right) + \mathbf{F}_{\text{inne}},$$

(słuszne w dowolnym układzie nieinercyjnym) uprościć do

$$m \mathbf{a}' = m \mathbf{g}_{\text{eff}} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{F}_{\text{inne}},$$

poprzez wciągnięcie w lokalne pole $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ efektów przyspieszenia $\mathbf{a}_{\text{tr}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ (w którym $\mathbf{R}$ jest wektorem łączącym środek Ziemi z początkiem układu nieinercyjnego na jej powierzchni) i pominięcie pozostałych efektów przyspieszenia odśrodkowego reprezentowanych przez wyraz $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$. Pominąć też można wyraz z pochodną $\boldsymbol{\omega}$ po czasie.

Jeśli siły inne niż grawitacyjne nie występują (tj. jeśli $\mathbf{F}_{\text{inne}} = \mathbf{0}$) i jeśli przyjmiemy, że w obszarze, w którym zachodzi ruch $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ jest stałym wektorem, do scałkowania jest równanie (pomijamy odtąd primy)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{g}_{\text{eff}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},$$

z warunkami początkowymi $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, które raz całkuje się natychmiast dając

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}} t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0).$$

Jest to zwykle liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu z niejednorodnością, przy czym jednorodna jego część jest postaci

$$\frac{d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{dt} = A \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

(A jest tu macierzą liniowego odwzorowania wektora w jego iloczyn wektorowy z wektorem $-2\boldsymbol{\omega}$). Można byłoby je scałkować ściśle, rozwiązując najpierw równanie jednorodne i potem uzmienniając stałą. Otrzymane rozwiązanie byłoby jednak dość skomplikowane i uwzględniałoby także wyrazy rzędu $\omega^2 t^2$, $\omega^3 t^3$, które, wobec pominięcia wyżej członu odśrodkowego $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ są bez znaczenia (pominięte w równaniu wyrazy powodują efekty tego samego rzędu). Zamiast tego najwygodniej jest zastosować rachunek zaburzeń. Numerujemy więc rozwiązania według rzędów oznaczając rozwiązanie n -tego rzędu $\mathbf{r}^{(n)}(t)$,

i przyjmując, że $\mathbf{r}^{(0)}(t) = \mathbf{r}_0$ (pierwszym przybliżeniem ruchu jest oczywiście bezruch!). Rozwiązanie $(n+1)$ -go rzędu znajdujemy rozwiązując równanie

$$\frac{d\mathbf{r}^{(n+1)}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}^{(n)}(t) - \mathbf{r}_0),$$

którego prawa strona jest już jawną funkcją t , co umożliwia łatwe rozwiązanie go. Ponieważ $\mathbf{r}^{(0)}(t) = \mathbf{r}_0$, na $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ otrzymujemy równanie

$$\frac{d\mathbf{r}^{(1)}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t,$$

które oczywiście daje

$$\mathbf{r}^{(1)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2.$$

Z kolei użycie $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ prowadzi do równania na $\mathbf{r}^{(2)}(t)$ postaci

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}^{(2)}(t)}{dt} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}^{(1)}(t) - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0t - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_{\text{eff}}t^2. \end{aligned}$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\mathbf{r}^{(2)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2 - \boldsymbol{\omega}t \times (\mathbf{v}_0t + \frac{1}{3}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2).$$

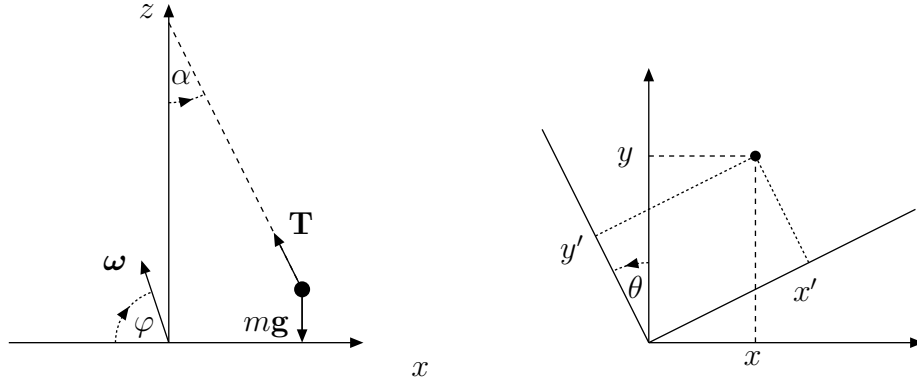
Przybliżenie $\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}^{(2)}(t)$ jest już wystarczająco dokładne. Aby to zobaczyć, znajdziemy jeszcze $\mathbf{r}^{(3)}(t)$ całkując równanie:

$$\frac{d\mathbf{r}^{(3)}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0t - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_{\text{eff}}t^2 + 2\boldsymbol{\omega}t \times \left(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_0t + \frac{1}{3}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2) \right).$$

Otrzymujemy z niego

$$\mathbf{r}^{(3)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2 - \boldsymbol{\omega}t \times (\mathbf{v}_0t + \frac{1}{3}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2) + 2\boldsymbol{\omega}t \times \left(\boldsymbol{\omega} \times (\frac{1}{3}\mathbf{v}_0t + \frac{1}{12}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2) \right).$$

Widać więc, że w wyrazach pojawiających się w rozwiązaniach kolejnych rzędów występują coraz wyższe potęgi bezwymiarowego czynnika ωt . Rachunek zaburzeń daje więc rozwiązanie pełnego rozwiązania, które można by było uzyskać sposobem podanym wyżej) według potęg ωt . Ponieważ w $\mathbf{r}^{(3)}(t)$ występują wyrazy z $(\omega t)^2$, a w samym rozwiązywanym równaniu pominięty został człon z przyspieszeniem odśrodkowym będący tego właśnie rzędu, jest jasne, że należy się ograniczyć do rozwiązania $\mathbf{r}^{(2)}(t)$.



Rysunek 2: Po lewej: Wahadło Foucault zawieszone nad obracającą się powierzchnią Ziemi i wychylone w kierunku osi x . φ jest kątem szerokości geograficznej (zdefiniowanej normalnie). Po prawej: Obrót układu współrzędnych o kąt θ .

Zadanie 5.7 (wahadło Foucault, takie jak u U. Eco)

Znaleźć w przybliżeniu małych wychyleń od położenia równowagi ruch wahadła (tj. ciężarka) o masie m zawieszonego na (w przybliżeniu) nieważkiej i nierozciągliwej linie o długości ℓ nad punktem na powierzchni Ziemi znajdującym się na szerokości geograficznej φ .

Rozwiązanie

Ponieważ ruch wahadła może trwać dowolnie długo i bezwymiarowy czynnik ωt nie musi być mały, nie można tu korzystać z wyprowadzonego w Zadaniu 5.3 rozwinięcia rozwiązania według potęg tego czynnika. Trzeba inaczej rozwiązać równanie ruchu wahadła, które w nieinercyjnym układzie związanym z obracającą się Ziemią ma postać³

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} + \mathbf{T} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

$\mathbf{r}$ jest tu wektorem położenia ciężarka (względem układu związanego z powierzchnią Ziemi; wyraz $-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ jest włączony do $\mathbf{g}$), a $\mathbf{T}$ jest siłą nań działającą ze strony linki. Ostatni człon po prawej stronie jak zwykle pominiemy, bo jest on proporcjonalny do ω^2 . Wybierając układ o początku w punkcie na Ziemi, nad którym zawieszono wahadło i kierując jego oś z w górę, a oś x na południe możemy jawnie rozpisać siły. W obranym układzie

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \omega \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x v_y \omega \sin \varphi + \mathbf{e}_y \omega (v_x \sin \varphi + v_z \cos \varphi) - \mathbf{e}_z v_y \omega \cos \varphi.$$

W przybliżeniu małych odchyłeń od pionu, czyli od położenia równowagi, ruch można przybliżyć przez ruch płaski, tj. przyjąć, że $z \approx \text{const}$ i $v_z \approx 0$. Bilans sił w sytuacji, w której $y = 0$, a $x \neq 0$ (wahadło wychylone dokładnie w kierunku na południe) wygląda

³Wszystkie wielkości są obliczane w układzie nieinercyjnym więc primy pomijamy.

wtedy tak (zob. lewy Rysunek 2):

$$\begin{aligned} F_x^{\text{sum}} &= 2mv_y\omega_z - T \sin \alpha, \\ F_z^{\text{sum}} &= 2mv_y\omega \cos \varphi - mg + T \cos \alpha. \end{aligned}$$

Wprowadziliśmy tu ułatwiające zapis oznaczenie

$$\omega_z \equiv \omega \sin \varphi.$$

Ponieważ zakładamy, że $z \approx \text{const}$, więc składowa z -owa F_z^{sum} sumarycznej siły musi zniknąć. Stad,

$$T = \frac{mg - 2mv_y\omega \cos \varphi}{\cos \alpha},$$

a zatem

$$F_x^{\text{sum}} = 2mv_y\omega_z - mg \operatorname{tg} \alpha + 2mv_y\omega \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha.$$

Trzeci wyraz w F_x^{sum} można pominąć, gdyż, będąc (w przyjętym przybliżeniu małych wychyleń) proporcjonalnym i do ω i do $\operatorname{tg} \alpha \ll 1$ jest on tu małą wielkością drugiego rzędu. Ponadto w przybliżeniu małych wychyleń, $|\alpha| \ll 1$,

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha = \frac{x}{\ell}.$$

Uogólniając te rozważania do sytuacji, gdy zarówno x , jak i y są niezerowe możemy wypisać równania wyznaczające ruch ciężarka w płaszczyźnie xy :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 2\omega_z \dot{y}, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= -2\omega_z \dot{x}. \end{aligned}$$

Oznaczyliśmy tu $\omega_0^2 \equiv g/\ell$. Najprościej rozwiązuje się te równania przechodząc do zespolonej zmiennej $\xi \equiv x + iy$. W tej zmiennej stają się one jednym jednorodnym równaniem liniowym drugiego rzędu

$$\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi + 2i\omega_z \dot{\xi} = 0.$$

Szukamy rozwiązania w postaci $\xi(t) = \mathbb{A}e^{i\lambda t}$, co daje równanie charakterystyczne na λ

$$-\lambda^2 - 2\omega_z \lambda + \omega_0^2 = 0,$$

którego pierwiastkami są $\lambda_{\pm} = -\omega_z \pm \Omega$, gdzie $\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2}$. Najogólniejsze rozwiązanie ma zatem postać

$$\xi(t) \equiv x(t) + iy(t) = e^{-i\omega_z t} (\mathbb{A}_+ e^{i\Omega t} + \mathbb{A}_- e^{-i\Omega t}).$$

Zanim obliczymy części rzeczywistą i urojoną prawej strony, dobrze jest się zastanowić nad czynnikiem $e^{-i\omega_z t}$. Jeśli $\xi = x + iy$ jest (zespolonym) położeniem punktu w układzie

xy , to, jak łatwo zobaczyć (zob. Rysunek 2), w układzie $x'y'$ obróconym względem xy przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara o kąt θ , zespolonym położeniem tego punktu jest $\xi = e^{i\theta}\xi'$. Zatem w układzie, który obracałby się w kierunku (na półkuli północnej, gdzie $\sin \varphi > 0$, czyli $\omega_z > 0$) *zgodnym* z kierunkiem obrotu wskazówek zegara ruch rzutu wahadła na płaszczyznę byłby dany przez

$$\xi'(t) \equiv x'(t) + iy'(t) = \mathbb{A}_+ e^{i\Omega t} + \mathbb{A}_- e^{-i\Omega t}.$$

Wiadomo, że torem w układzie tym jest w ogólności elipsa (zob. Zadanie 0.6), której kształt zależy od stałych $\mathbb{A}_\pm = A_\pm + iB_\pm$ (skrajnymi przypadkami jest prosta i okrąg). W układzie xy zatem tor ten jako całość obraca się z prędkością kątową $\omega_z = \omega \sin \varphi$ - maksymalną na biegunie i znikającą na równiku.

Zadanie 7.1

Znaleźć leżący całkowicie w płaszczyźnie xy tor promienia światła wpadającego (od strony ujemnych x -ów) w punkcie $(x, y) = (0, 0)$ pod kątem α_0 w stosunku do osi x do ośrodka, w którym współczynnik załamania zależy od głębokości x jak $n(x) = \sqrt{1 + ax}$. Oprzeć się raz na prawie Snella, a drugi raz na zasadzie Fermata orzekającej, że promień światła między dwoma punktami biegnie po takiej drodze, że czas przelotu jest minimalny.

Przypomnienie: W ośrodku o współczynniku załamania n prędkość światła (lokalna) jest równa c/n .

Rozwiązanie

Prawo Snella mówi, że przechodząc z ośrodka 1 o (stałym) n_1 do drugiego ośrodka 2 o n_2 (również stałym) promień światła załamuje się w taki sposób, że

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

gdzie α_1 i α_2 są kątami, jaki promień tworzy po dwu stronach z normalną do granicy ośrodków. Aby to prawo zastosować do ośrodka, w którym n się zmienia z x , trzeba posłużyć się rozumowaniem granicznym i podzielić półpłaszczyznę $x > 0$ na pasy o stałych współczynnikach $n_0 = 1$ (dla $x < 0$), n_1 , n_2 , n_3 , itd. Do każdej z powstałych w ten sposób granic dwu ośrodków stosujemy prawo Snella: $n_1 \sin \alpha_1 = n_0 \sin \alpha_0 = \sin \alpha_0$, $n_2 \sin \alpha_2 = n_1 \sin \alpha_1 = n_0 \sin \alpha_0$, $n_3 \sin \alpha_3 = n_0 \sin \alpha_0$, itd. Widać, że w takim przypadku po przejściu do granicy nieskończenie gęstego podziału półpłaszczyzny $x > 0$ na pasy otrzymamy

$$\sin \alpha(x) = \frac{n_0 \sin \alpha_0}{n(x)} = \frac{\sin \alpha_0}{n(x)}.$$

Przerobienie sinusa $\alpha(x)$ na tangens da więc równanie toru w postaci

$$\frac{dy(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha(x) = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha(x)}{1 - \sin^2 \alpha(x)}} = \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{n^2(x) - \sin^2 \alpha_0}},$$

bo $\alpha(x)$ jest dokładnie kątem nachylenia krzywej $y(x)$ po jakiej biegnie promień.

To samo równanie toru promienia można także uzyskać z zasady Fermata, która jest ogólniejsza.⁴ Niech A (punkt wlotu promienia do ośrodka o zmiennym n) ma współrzędne $(0, 0)$, a jakiś inny punkt B ma współrzędne (x_1, y_1) . Czas przelotu od A do B po drodze γ dany wzorem

$$T[\gamma] = \int_A^B \frac{dl}{v},$$

jest wtedy funkcjonalem, który według zasady Fermata przyjmuje wartość najmniejszą na rzeczywistej drodze promienia świetlnego od A do B . Aby mu nadać jawną postać przyjmijmy, że drogi od A do B parametryzujemy x -em, czyli piszemy w postaci $y = y(x)$. Wtedy $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + (y')^2}$ i

$$T[\gamma] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{c} n(x) \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Mamy tu przypadek, gdy funkcja podcałkowa w funkcjonale nie zależy od samej wariowanej funkcji, a tylko od jej pochodnej. Wobec tego równanie Eulera-Lagrange'a można od razu raz scałkować, co daje

$$\frac{n(x) y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = D = \text{const.}$$

Po odwikłaniu względem y' dostajemy stąd równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D}{\sqrt{n^2(x) - D^2}},$$

które daje po scałkowaniu funkcję $y(x)$ zależną od dwu stałych dowolnych. Stałe te powinny być wyznaczone z warunku przebiegania otrzymanej krzywej przez punkty $A = (0, 0)$ i $B = (x_1, y_1)$, tak jak tego w zasadzie wymaga zasada Fermata. Nic nie zabrania jednak, gdy już równanie różniczkowe na tor zostało wyprowadzone, zastąpić drugi warunek żądaniem, by kąt wpadania promienia do ośrodka o zmiennym n w punkcie A był równy α_0 . Oznacza to, że stałą D trzeba wybrać równą $\sin \alpha_0$, bo wtedy nachylenie krzywej w $x = 0$ będzie takie jak trzeba (tzn. pochodna $(dy/dx)_{x=0}$ będzie równa $\tan \alpha_0$, bo $n(0) = n_0 = 1$). Z takim warunkiem brzegowym otrzymujemy zatem to samo równanie, co z prawa Snella.

⁴Prawo Snella wynika z niej niemal natychmiast: wystarczy wyobrazić sobie dwa punkty A i B jeden nad granicą dwu ośrodków, w obszarze o stałym n_1 i drugi pod nią, w obszarze o stałym n_2 ; w obszarach o stałym n promień biegnie po prostej (co też wynika z zasady Fermata, gdyż jest to droga najkrótsza i wobec stałości n odpowiada ona najkrótszemu czasowi przebiegu światła między dwoma punktami) więc wystarczy obliczyć czas $T(y)$ jego przebiegu od A do B jako funkcję współrzędnej y na osi będącej granicą ośrodków punktu, w którym promień przechodzi z jednego ośrodka do drugiego; warunek minimalnego czasu przelotu (tj. warunek by funkcja $T(y)$ miała w punkcie y minimum - do którego wypisania wystarcza zwykły rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej) przyjmuje dokładnie postać prawa Snella.

Warto jeszcze zobaczyć, co by było, gdyby drogę γ sparametryzować nie x -em, a y -kiem. W takim przypadku funkcjonał miałby postać

$$T[\gamma] = \int_0^{x_1} \frac{dy}{c} n(x) \sqrt{1 + (x')^2},$$

gdzie $x' \equiv (dx/dy)$. Funkcja podcałkowa $\mathcal{J}$ w funkcjonale byłaby niezależna od zmiennej całkowania i całką pierwszą równania Eulera-Lagrange'a, sprowadzającą je do równanie pierwszego rzędu byłby "hamiltonian" tj.

$$x' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x'} - \mathcal{J} = x' \frac{n(x) x'}{\sqrt{1 + (x')^2}} - \frac{n(x) (1 + (x')^2)}{\sqrt{1 + (x')^2}} \equiv \frac{-n(x)}{\sqrt{1 + (x')^2}} = h = \text{const.}$$

Po rozwikłaniu tego równania względem $x' \equiv dx/dy$ i narzuceniu, jak poprzednio warunku $(dx/dy)_{x=0} = \text{ctg } \alpha_0$ (który wymaga, by $h^2 = \sin^2 \alpha_0$) dostaje się stąd to samo równanie, co poprzednio.

Jeśli $n^2(x) = 1 + ax$, proste scałkowanie prowadzi (przy wyżej narzuconych na rozwiązanie warunkach) do równania toru

$$y(x) = \frac{2}{a} \sin \alpha_0 \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + ax} - \frac{\sin 2\alpha_0}{a}.$$

Stała całkowania jest ustalona z warunku, by $y(0) = 0$. Gdy $a > 0$, wzór ten daje tor, na którym y asymptotycznie, dla dużych x , rośnie proporcjonalnie do $\sqrt{x}$. Jeśli $a < 0$, otrzymany wzór może obowiązywać tylko dla $x < (1/|a|) \cos^2 \alpha_0$. Przyczynę tego łatwo zobaczyć, jeśli się pamięta, że równanie różniczkowe typu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

właściwie należy zapisywać w postaci

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0,$$

(gdzie X i Y są takie, że⁵ $-X/Y = f(x, y)$), która nie wyróżnia ani x ani y ; równanie takie definiuje (przy ustalonych warunkach początkowych) krzywą na płaszczyźnie, którą czasem da się zapisać jako $y = y(x)$, czasem jako $x = x(y)$, a czasem tylko parametrycznie. Oczywiście mając rozwiązanie takiego równania w postaci $y = y(x)$ możemy je "odkręcić"

⁵Przy danej funkcji $f(x, y)$ funkcje $X(x, y)$ i $Y(x, y)$ nie są określone jednoznacznie: funkcje $g(x, y)X(x, y)$ i $g(x, y)Y(x, y)$ dają tę samą funkcję $f(x, y)$. Niejednoznaczność ta (poza ewentualnie punktami, w których funkcja $g(x, y)$ znika) nie ma wpływu na krzywe całkowe - krzywe te są bowiem określone warunkiem - patrząc na to geometrycznie - znikania jedno-formy różniczkowej $\hat{\omega} = X(x, y) dx + Y(x, y) dy$ na wektorach do nich stycznych; jeśli więc zero daje na nich forma $\hat{\omega}$, to również zero daje forma $\hat{\eta} = g(x, y) \hat{\omega}$. Odpowiednim doбором funkcji $g(x, y)$ można sprawić, że $\hat{\omega} = d\phi(x, y)$, co - jeśli jest możliwe, a jest zawsze możliwe w $\mathbb{R}^2$, ale już niekoniecznie w $\mathbb{R}^D$ o $D > 2$ - pozwala krzywe całkowe przedstawić w postaci $\phi(x, y) = \text{const}$. Forma $\hat{\omega}$ ma wtedy *czynniki całkujące*, czyli, zgodnie z pierwszym twierdzeniem Carathéodory'ego, jest całkowalna.

i dostać $x = x(y)$. W badanym tu przypadku toru promienia świetlnego, po takim odkręceniu, dostaniemy

$$x(y) = \frac{a}{4 \sin^2 \alpha_0} \left(y + \frac{\sin 2\alpha_0}{a} \right)^2 - \frac{\cos^2 \alpha_0}{a}.$$

Z postaci tej od razu widać, co się dzieje, gdy $a < 0$: promień świetlny wchodzi do ośrodka, lecz stale zakręca w lewo i po osiągnięciu głębokości $x = (1/|a|) \cos^2 \alpha_0$ zaczyna zawracać spowrotem w kierunku osi y , czyli ku granicy ośrodków.

Wy tłumaczenie zakręcania toru promienia świetlnego odwołujące się do falowej natury światła jest proste: przy $a < 0$ prędkość światła w ośrodku równa $c/n(x)$ wzrasta wraz z głębokością (ze wzrostem x); znaczy to że prawa strona frontu fali (jego “prawa noga”) porusza się szybciej niż lewa; jest jasne że musi to powodować zakręcanie frontu fali w lewo.

Zadanie 7.4

Jaki jest kształt mającej minimalne pole powierzchni obrotowej rozpiętej na dwóch równoległych do siebie nawzajem kołach o promieniach R_1 i R_2 , których środki leżą na tej samej prostej i są oddalone od siebie o $2L$?

Rozwiązanie

Pole powierzchni powstałej przez obrót wokół osi x krzywej $y(x)$, takiej, że $y(-L) = R_1$, a $y(L) = R_2$ jest dane wzorem⁶

$$P[y] = \int_{-L}^L dx \mathcal{P}(y, y') = \int_{-L}^L dx 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa $\mathcal{P}$ nie zależy od x , całką pierwszą odpowiedniego równania Eulera-Lagrange'a jest "hamiltonian" (czynniki 2π można spokojnie opuścić):

$$y' \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y'} - \mathcal{P} \equiv \frac{-y}{\sqrt{1 + y'^2}} = -C = \text{const.}$$

Rozvikując względem y' znajdujemy związek

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \pm \frac{1}{C} \int dx.$$

Znak $\pm$ jest znakiem pochodnej dy/dx , która, nawet przy ustalonym znaku stałej C , może być na jednym odcinku ujemna, a na innym dodatnia; dlatego trzeba go tu w zasadzie uwzględniać jawnie. Podstawiając w całce po lewej $y = C \operatorname{ch} \theta$ znajdujemy

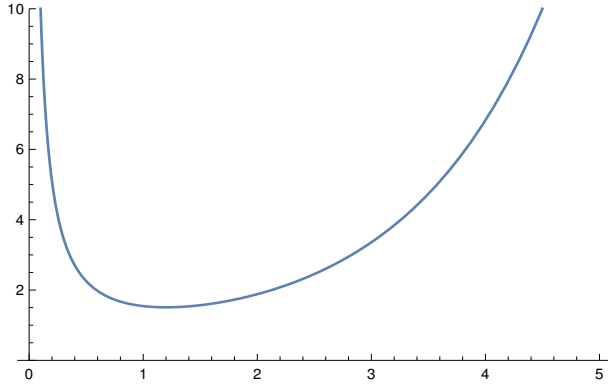
$$y(x) = C \operatorname{ch} \left(\frac{x + D}{C} \right),$$

gdzie D jest drugą stałą dowolną. Stałe C i D wyznaczamy z warunków $y(-L) = R_1$, $y(L) = R_2$. Może istnieć jedno rozwiązanie, albo dwa albo może nie być żadnego. Najłatwiej zobaczyć to na przypadku $R_1 = R_2 \equiv R$. Bez straty ogólności można też przyjąć $L = 1$ (promień R mierzymy w jednostkach L - charakter rozwiązania zależy tylko od stosunku R/L) Wtedy z symetrii wynika, że $D = 0$ i dwa równania stają się jednym i tym samym warunkiem na $\tilde{C} \equiv 1/C$

$$R = \frac{\operatorname{ch}(\tilde{C})}{\tilde{C}}.$$

Graficznie, na płaszczyźnie $(\tilde{C}, z)$, rozwiązanie jest rzędną (a może odciętą? kto pamięta te dziwne nazwy!? ale chyba jednak odciętą) punktu, w którym krzywa $z = \tilde{C}^{-1} \operatorname{ch}(\tilde{C})$ pokazana na rysunku 3 przecina się z poziomą prostą $z = R$. Jest więc jasne, że gdy R jest

⁶Uzasadnienie wzoru: jest to suma pól powierzchni prostokątnych pasków, na jakie dzieli tę powierzchnię płaszczyzny prostopadłe do osi x odległe od siebie o dx : długością paska jest $2\pi y$, a wysokością $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.



Rysunek 3: Wykres funkcji $\tilde{C}^{-1}\text{ch}\tilde{C}$.

mniejsze od pewnej krytycznej wartości, nie ma żadnych punktów przecięcia i rozwiązanie nie istnieje. Oznacza to, że minimalne pole ma w takiej sytuacji powierzchnia, która “przykleja” się do kół, na których jest rozpięta i redukuje się do prostej łączącej ich środki; pole takiej “powierzchni” jest równe $\pi(R_1^2 + R_2^2)$ (w rozpatrywanym tu przypadku $2\pi R^2$), a krzywa $y(x)$ jest nieróżniczkowalna; rozpatrywany funkcjonal nie ma ekstremali (minimum) w klasie powierzchni zadanych krzywymi różniczkowalnymi. Jednoznaczne rozwiązanie jest tylko wtedy, gdy R przyjmuje pewną szczególną wartość (przy jednej szczególnej wartości stosunku R/L). Dla R większych są zawsze dwa rozwiązania $\tilde{C}_1$ i $\tilde{C}_2$. Najłatwiej się zorientować jak one wyglądają, gdy $R \gg 1$ ($R \gg L$). Jednym rozwiązaniem równania $R = \tilde{C}^{-1}\text{ch}\tilde{C}$ jest wtedy $\tilde{C} \approx 1/R$ i odpowiadająca mu ekstremala funkcjonału, którą można zapisać w postaci

$$y(x) = R \frac{\text{ch}\tilde{C}x}{\text{ch}\tilde{C}} \approx R \frac{\text{ch}(x/R)}{\text{ch}(1/R)}$$

schodzi tylko nieznacznie, ponieważ $\text{ch}(x/R) \lesssim 1$, w dół, poniżej wartości $y = R$. Rozwiązanie to jest oczywiste fizycznie i rzeczywiście odpowiada najmniejszej powierzchni. Drugim rozwiązaniem równania $R = \tilde{C}^{-1}\text{ch}\tilde{C}$, gdy $R \gg 1$, jest $\tilde{C} \gg 1$. Odpowiadającym mu punktem stacjonarnym funkcjonału jest wtedy funkcja (jej formalna postać jest taka sama jak pierwsze, ścisła postać wypisana wyżej), która przy $x \sim 0$, gdzie $\text{ch}(\tilde{C}x) \approx 1$ wyraźnie “siada”. Przypuszczalnie nie jest to maksimum (lokalne) funkcjonału, bo jest oczywiste, że każdą powierzchnię obrotową można nieco “pomarszczyć” zwiększając dowolnie jej pole; trudno też sobie wyobrazić, by rozwiązaniu temu odpowiadało (lokalne) minimum; przypuszczalnie jest to punkt siodłowy - ale dar “widzenia” takich rzeczy w przestrzeniach funkcji jest dany tylko nielicznym, zaprawionym w analizie funkcjonalnej.

Zadanie 7.6 (Szkoleniowe, bo odpowiedź jest oczywista)

Znaleźć wariacyjnie najkrótszą drogę łączącą na płaszczyźnie xy dwa ustalone punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$. Rozwiązać problem w zmiennych biegunowych. Rozwiązać ten sam problem w przestrzeni o D wymiarach.

Rozwiązanie

W dwóch wymiarach zadanie jest banalne: długość krzywej γ łączącej punkty A i B jest dana funkcjonalem

$$J[\gamma] = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + y'^2},$$

który prowadzi, ponieważ funkcja podcałkowa nie zależy ani od x ani od y , do oczywistego równania

$$\frac{dy}{dx} = C = \text{const},$$

skąd, jak należało się spodziewać, $y(x) = Cx + D$.

Wartość funkcjonału $J[\gamma]$ obliczona na danej drodze γ nie zależy od wyboru zmiennych. W zmiennych walcowych np.

$$J[\gamma] = \int d(r \cos \varphi) \sqrt{1 + \left[\frac{d(r \sin \varphi)}{d(r \cos \varphi)} \right]^2} = \int \sqrt{[d(r \cos \varphi)]^2 + [d(r \sin \varphi)]^2},$$

czyli, parametryzując krzywą γ kątem φ ,

$$J[\gamma] = \int d\varphi \mathcal{J}(r, r') = \int d\varphi \sqrt{r'^2 + r^2}.$$

Odpowiadające tej postaci funkcjonału równanie Eulera-Lagrange'a ma nieciekawą postać

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + r^2}} = \frac{r}{\sqrt{r'^2 + r^2}}.$$

Na szczęście funkcja podcałkowa $J[\gamma]$ nie zależy od zmiennej całkowania φ , więc stałą jest “hamiltonian”

$$r' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r'} - \mathcal{J} = -\frac{r^2}{\sqrt{r'^2 + r^2}} = -C = \text{const}.$$

Po wywikłaniu względem r' i rozdzieleniu zmiennych dostajemy stąd ($\pm$ jest znakiem pochodnej $dr/d\varphi$, który a priori mógłby się zmieniać na krzywej przy ustalonym C)

$$\pm \int d\varphi = C \int \frac{dr}{r \sqrt{r^2 - C^2}} = C \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2}}}.$$

Standardowym chwytem jest tu podstawienie $u = C/r$, które daje

$$\pm(\varphi + \varphi_0) = - \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos u.$$

Zatem $u \equiv C/r = \cos(\varphi + \varphi_0)$, czyli

$$C = r \cos \varphi \cos \varphi_0 - r \sin \varphi \sin \varphi_0 \equiv x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0,$$

co oczywiście jest równaniem prostej $y = Ax + B$ z $A = \operatorname{ctg} \varphi_0$ i $B = -C/\sin \varphi_0$.

W przestrzeni D wymiarowej, aby traktować symetrycznie wszystkie współrzędne x_i najwygodniej jest przyjąć opis parametryczny $x_i = x_i(\xi)$ krzywej γ , w którym parametr $\xi \in [0, \xi_k]$ tak, że $x_i(0) = x_i^A$, $x_i(\xi_k) = x_i^B$. Długość drogi jest wtedy dana funkcjonałem (kropki oznaczają pochodne po ξ)

$$J[\gamma] = \int_0^{\xi_k} d\xi \mathcal{J}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_D) = \int_0^{\xi_k} d\xi \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_D^2}.$$

Funkcjonał $J[\gamma]$ jest niezmienniczy względem reparametryzacji krzywej (czyli mówiąc górnolotnie - prof. Meissner to uwielbia - względem działania grupy dyffeomorfizmów), tj. jeśli $\xi = \xi(\tau)$, to

$$x'_i \equiv \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{d\xi} \frac{d\xi}{d\tau} \equiv \dot{x}_i \frac{d\xi}{d\tau},$$

i, ponieważ $d\xi = d\tau(d\xi/d\tau)$,

$$J[\gamma] = \int_0^{\xi_k} d\xi \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_D^2} = \int_{\tau_i}^{\tau_k} d\tau \sqrt{x_1'^2 + \dots + x_D'^2},$$

z $0 = \xi(\tau_i)$, $\xi_k = \xi(\tau_k)$. Ma więc on tę samą postać⁷ (jeśli nie liczyć innych oznaczeń pochodnych po ξ i po τ), niezależnie od wyboru parametryzacji krzywej.

Ponieważ $\mathcal{J}$ nie zależy od x_i wszystkie równania Eulera-Lagrange'a dają się raz scałkować prowadząc do układu D równań:

$$\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_D^2}} = C_i, \quad i = 1, \dots, D.$$

Wynika z nich, że

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{C_i}{C_j} \equiv C_{ij} = \text{const},$$

⁷Należy to porównać z zamianą zmiennych z kartezjańskich do walcowych, rozpatrywaną wyżej: tam *wartość* funkcjonału nie zależała od wyboru zmiennych, ale sama *postać* funkcji podcałkowej była inna. Nie była więc to niezmienniczość (czyli symetria).

dla każdej pary indeksów i oraz j , czyli że dowolna współrzędna x_i wyraża się przez dowolną inną współrzędną x_j funkcją liniową (w sensie szkolnym, a nie w ścisłym sensie algebraicznym). Rozwiązaniem są więc związki $x_i(\xi) = \beta_i h(\xi) + \alpha_i$, w których $h(\xi)$ jest dowolną funkcją, co odpowiada dowolności parametryzacji krzywej (prostej). Stałe całkowania C_i są wtedy równe $C_i = \beta_i / \sqrt{\beta_1^2 + \dots + \beta_D^2}$. Związki te, to oczywiście parametryczny opis prostej.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na “hamiltonian”, który, ponieważ funkcja podcałkowa $\mathcal{J}$ w funkcjonale $J[\gamma]$ nie zależy od ξ , powinien być stałą. Znajdujemy jednak, że

$$\sum_{i=1}^D \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{x}_i} - \mathcal{J} \equiv 0.$$

Hamiltonian tożsamościowo znika! Odpowiedzialny jest za to fakt, że funkcja podcałkowa jest funkcją jednorodną rzędu pierwszego prędkości $\dot{x}_i$, tzn, ma własność (w rozpatrywanym wyżej zagadnieniu funkcja $\mathcal{J}$ nie zależy od x_i)

$$\mathcal{J}(x_1, \dots, x_D, \lambda \dot{x}_1, \dots, \lambda \dot{x}_D) = \lambda \mathcal{J}(x_1, \dots, x_D, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_D).$$

Jeśli równość tę zróżniczkujemy się po λ i położymy $\lambda = 1$, otrzymamy związek oznaczający znikanie “hamiltonianu” (jest to tzw. twierdzenie Eulera o funkcjach jednorodnych - w termodynamice prowadzi ono do tzw. równania Gibbsa-Duhema). Jest to typowa sytuacja, gdy funkcjonal jest niezmienniczy, tak jak tutaj, względem reparametryzacji, bo wymaga ona właśnie, by funkcja podcałkowa była funkcją jednorodną rzędu pierwszego prędkości.

Zadanie 7.9

Wykazać, że geodetyką (tj. najkrótszą krzywą) na sferze (o promieniu R) łączącą dwa zadane punkty sfery jest wycinek koła wielkiego (tj. krzywej powstałej z przecięcia sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej środek) przechodzącego przez te dwa punkty.

Rozwiązanie

Szukamy leżącej na sferze drogi γ , na której funkcjonal

$$L[\gamma] = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

osiąga ekstremum. Warunkiem zapewniającym, że droga γ przebiega po sferze jest $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

W tym przypadku od razu przechodzimy do zmiennych zgodnych z więzami $x(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi$, $y(\theta, \varphi) = R \sin \theta \sin \varphi$, $z(\theta, \varphi) = R \cos \theta$, w których $L[\gamma]$, po sparametryzowaniu drogi kątem θ (szukamy więc funkcji $\varphi = \varphi(\theta)$) ma postać

$$L[\gamma] = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta \sqrt{1 + \varphi'^2 \sin^2 \theta},$$

w której $\varphi' = d\varphi/d\theta$. Funkcja podcałkowa nie zależy tu od samej szukanej funkcji $\varphi(\theta)$, więc równanie Eulera-Lagrange'a sprowadza się do

$$\frac{\varphi' \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \varphi'^2 \sin^2 \theta}} = H = \text{const.}$$

Stąd, rozwikłując względem $d\varphi/d\theta$ i całkując przez rozdzielanie zmiennych otrzymujemy

$$\varphi - \varphi_0 = \pm H \int \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - H^2}} = \pm H \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - H^2/\sin^2 \theta}},$$

Podstawiamy $u = \text{ctg} \theta$ (czyli $1/\sin^2 \theta = 1 + u^2$), $du = -d\theta/\sin^2 \theta$, co daje

$$\varphi - \varphi_0 = \mp H \int \frac{du}{\sqrt{1 - (1 + u^2)H^2}} = \mp H \int \frac{du}{\sqrt{1 - H^2 - u^2 H^2}} = \mp \int \frac{dw}{\sqrt{1 - H^2 - w^2}}.$$

Stąd $\varphi - \varphi_0 = \mp \arcsin(Hu/\sqrt{1 - H^2})$, albo

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \mp \frac{H}{\sqrt{1 - H^2}} \text{ctg} \theta.$$

Po zapisaniu tego wyniku w postaci

$$\sqrt{1 - H^2} \sin \varphi_0 \sin \theta \cos \varphi - \sqrt{1 - H^2} \cos \varphi_0 \sin \theta \sin \varphi - H \cos \theta = 0,$$

widać (bo $x = R \sin \theta \cos \varphi$ itd.), że punkty leżące na ekstremali spełniają równanie

$$x \sqrt{1 - H^2} \sin \varphi_0 - y \sqrt{1 - H^2} \cos \varphi_0 - z H = 0.$$

Jest to właśnie równanie płaszczyzny przechodzącej przez środek sfery. Stałe φ_0 i H trzeba tak dobrać, by ekstremala przechodziła przez dwa zadane punkty.