

MECHANIKA KLASYCZNA ĆWICZENIA

Zadanie 7.x

Wyznaczyć kształt łańcucha (o bardzo krótkich ogniwach albo nierozciągliwej jednorodnej liny) o długości L i stałej gęstości ρ masy na jednostkę długości umocowanego swoimi końcami w dwóch różnych punktach A i B nad ziemią i swobodnie zwisającego (bez dotykania ziemi) w polu siły ciężkości $\mathbf{g}$.

Rozwiązanie

Wprowadźmy układ odniesienia o osi z skierowanej do góry i osi x skierowanej poziomo wzdłuż kierunku wyznaczanego przez punkty A i B zaczepienia końców łańcucha. W jednorodnym i stałym polu grawitacyjnym $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ łańcuch przybiera kształt minimalizujący jego energię potencjalną E (przyjmujemy, że łańcuch wisi już nieruchomo). Jest ona dana całką

$$E = \int_A^B ds \, g \rho z,$$

w której ds jest elementem długości, a z wysokością w stosunku do (dowolnie wybranego) poziomu, na której znajduje się infinitesimalny fragment łańcucha o długości ds . Jest więc to funkcjonal $E[\gamma]$ zależny od krzywej γ jaką tworzy łańcuch. Jeśli krzywą tę sparametryzujemy zmienną x , otrzymamy

$$E[\gamma] = g \rho \int_{x_A}^{x_B} dx \, z(x) \sqrt{1 + (z'(x))^2}.$$

Szukamy zatem krzywej będącej minimum tego funkcjonału, albo - bo stałe g i ρ nie mają wpływu na to, jaki kształt łańcucha jest optymalny - funkcjonału (również oznaczonego E)

$$E[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} dx \, z(x) \sqrt{1 + (z'(x))^2}.$$

Ponieważ jednak długość łańcucha jest niezmienna, minimum tego musimy szukać w klasie krzywych γ o ustalonej długości, czyli takich, że drugi funkcjonal $L[\gamma]$

$$L[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} dx \, \sqrt{1 + (z'(x))^2},$$

spełnia warunek¹ $L[\gamma] = L$.

W takiej sytuacji wprowadzamy (stały) mnożnik Lagrange'a λ i szukamy ekstremum pomocniczego funkcjonału $\tilde{E}[\gamma] = E[\gamma] - \lambda L[\gamma]$, czyli

$$\tilde{E}[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} dx \, z(x) \sqrt{1 + (z'(x))^2} \equiv \int_{x_A}^{x_B} dx \, \tilde{\mathcal{E}}(z, z').$$

¹Mamy nadzieję, że czytelnik zdoła odróżnić funkcjonal $L[\gamma]$ od konkretnej liczby L .

Ponieważ funkcja podcałkowa nie zależy jawnie od zmiennej x , całką pierwszą równania Eulera - Lagrange'a wyznaczającego krzywą będącą ekstremum $\tilde{E}[\gamma]$ jest "hamiltonian", tj. wielkość

$$z \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z'} - \tilde{\mathcal{E}}.$$

Zatem

$$-\frac{z - \lambda}{\sqrt{1 + (z')^2}} = -C,$$

gdzie C jest stałą. Wyviklując stąd z' otrzymujemy

$$\frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\left(\frac{z - \lambda}{C}\right)^2 - 1}.$$

(Znak $\pm$ jest znakiem pochodnej z' , który może zmieniać się wzdłuż krzywej odpowiadającej konkretnej stałej C . Jest mniej więcej jasne, że tak właśnie tu będzie - od punktu A łańcuch będzie najpierw opadać, a potem wznosić się do punktu B .) Rozdzielając zmienne, i dokonując podstawienia $u = (z - \lambda)/C$ sprowadzamy problem do całki

$$\int dx = \pm C \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

Standardowe podstawienie $u = \operatorname{ch} \theta$ daje jako wynik całki po prawej stronie archu i ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{z - \lambda}{C} = \operatorname{ch} \left(\frac{x - x_0}{C} \right), \quad \text{lub, inaczej,} \quad z(x) = \lambda + C \operatorname{ch} \left(\frac{x - x_0}{C} \right).$$

Ponieważ ch jest funkcją parzystą, znak $\pm$ znika.

W rozwiązaniu występują trzy stałe dowolne: x_0 , C oraz mnożnik Lagrange'a λ . Trzeba je dobrać tak, by krzywa dana powyższym równaniem przechodziła przez punkty A i B (dwa warunki) oraz by długość łańcucha była równa L (tzn. by odległość od punktu A do punktu B liczona wzdłuż otrzymanej krzywej była równa L). Ten ostatni warunek można teraz napisać jawnie, obliczając całkę:

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \left(\frac{x - x_0}{C} \right)} &= \int_{x_A}^{x_B} dx \operatorname{ch} \left(\frac{x - x_0}{C} \right) \\ &= C \left[\operatorname{sh} \left(\frac{x_A - x_0}{C} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{x_B - x_0}{C} \right) \right]. \end{aligned}$$

Jest od razu jasne (co od początku powinno być oczywiste, że aby problem miał rozwiązanie, długość L łańcucha musi być nie mniejsza niż $x_B - x_A$, bo wartość powyższej całki jest większa niż $x_B - x_A$ (funkcja ch jest zawsze większa niż 1). Przyjmując (bez straty

ogólności), że $x_A = -b$, a $x_B = b$ oraz, że $z(x_A) = h_A = 0$ (poziom zerowy wybieramy na wysokości zawieszenia jednego z końców łańcucha), a $z(x_B) = h_B$ możemy warunki, które trzeba spełnić zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\frac{-\lambda}{C} &= \operatorname{ch}\left(\frac{-b-x_0}{C}\right), \\ \frac{h_B-\lambda}{C} &= \operatorname{ch}\left(\frac{b-x_0}{C}\right), \\ \frac{L}{C} &= \operatorname{sh}\left(\frac{-b-x_0}{C}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{b-x_0}{C}\right).\end{aligned}$$

Fizycznie rzecz biorąc, jeśli tylko $L > (x_B - x_A) = 2b$, warunki te powinny mieć rozwiązanie. W ogólnym przypadku dowolnego h_B jest jednak niemożliwe ich spełnienie analityczne. Dlatego ograniczymy się do rozpatrzenia przypadku z $h_B = 0$ (oba końce łańcucha zaczepione na tej samej wysokości. Jest wtedy jasne, że stała $x_0 = 0$ i dwa pierwsze warunki redukują się do jednego, a w ostatnim warunku z uwagi na nieparzystość funkcji sh , dwa człony po prawej stronie są identyczne. Bez straty ogólności można też położyć $b = 1$ (tzn. przyjąć b za jednostkę długości). Wreszcie wygodnie będzie wprowadzić $\tilde{C} = 1/C$. Warunki, które trzeba spełnić przybiorą wówczas postać

$$\begin{aligned}-\lambda \tilde{C} &= \operatorname{ch} \tilde{C}, \\ L \tilde{C} &= 2 \operatorname{sh} \tilde{C}.\end{aligned}$$

Drugi z nich wyznacza stałą $\tilde{C}$ (czyli C), a następnie pierwszy wyznacza mnożnik λ . Wciąż są one trudne do analitycznego rozwiązania, ale łatwo je przeanalizować w dwóch skrajnych przypadkach: $L \gtrsim 2$ (tzn. $L \gtrsim 2b$) i $L \gg 2$ (tzn. $L \gg 2b$).

Rozwiązanie drugiego warunku sprowadza się do znalezienia odciętej (tak to się chyba za cara Mikołaja II - jednego z głępszych carów - nazywało) punktu przecięcia wykresu funkcji $2 \operatorname{sh} \tilde{C}$ z prostą $L \tilde{C}$ o nachyleniu L (ponieważ w $\tilde{C} = 0$ nachylenie funkcji $2 \operatorname{sh} \tilde{C}$ jest równe 2, te dwie krzywe przecinają się tylko, gdy $L > 2$, co już było przedyskutowane). Jest też jasne, że gdy $L \gtrsim 2$, krzywe te przecinają się blisko początku wykresu, tzn. $\tilde{C} \gtrsim 0$. Dokładniej, rozwijając funkcję sh otrzymujemy pierwszy warunek w postaci

$$L \tilde{C} \approx 2 \tilde{C} + \frac{1}{3} \tilde{C}^3 + \dots,$$

skąd $\tilde{C} \approx \sqrt{3(L-2)}$. Rozwiązaniem pierwszego warunku jest wtedy $\lambda \sim -1/\tilde{C}$, bo kosinus hiperboliczny jest niemal równy 1. Znów dokładniej, rozwijając funkcję ch

$$-\lambda \tilde{C} = 1 + \frac{1}{2} \tilde{C}^2 + \dots, \quad \text{czyli} \quad \lambda = -\frac{1}{\tilde{C}} - \frac{1}{2} \tilde{C} + \dots$$

Kształt łańcucha jest wtedy dany wzorem

$$z(x) \approx -\frac{1}{\tilde{C}} - \frac{1}{2} \tilde{C} + \frac{1}{\tilde{C}} \operatorname{ch}(\tilde{C}x) \approx -\frac{1}{2} \tilde{C} + \frac{1}{2} \tilde{C} x^2.$$

Zgodnie z oczekiwaniem, łańcuch tworzy między punktami A i B linię niemal prostą z małym tylko ugięciem pośrodku (tj. przy $x = 0$).

Gdy $L \gg 2$ (tzn. $L \gg 2b$), rozwiązaniem drugiego warunku jest $\tilde{C} \gg 1$. Wtedy jednak $\text{sh } \tilde{C} \approx \text{ch } \tilde{C}$ więc, wykorzystując drugi warunek w pierwszym, znajdujemy że $\lambda \approx -L/2$ i kształt łańcucha zadaje wzór

$$z(x) \approx -\frac{L}{2} + \frac{1}{\tilde{C}} \text{ch } \tilde{C}x = -\frac{L}{2} \left(1 - \frac{\text{ch } \tilde{C}x}{\text{ch } \tilde{C}} \right),$$

(druga postać wzoru wynika natychmiast z warunku $z(1) = 0$). Ponieważ $\text{ch } \tilde{C} \gg 1$, przy $x = 0$ łańcuch schodzi, zgodnie z oczekiwaniem, niemal do $z = -L/2$.

5. SIŁY REAKCJI

Zadanie 6.2

Na płaskiej powierzchni stołu leży klin o masie M , kącie nachylenia α i wysokości górnej krawędzi h . Po klinie, wskutek działania skierowanego pionowo w dół pola grawitacyjnego $\mathbf{g}$, może zsuwać się klocek o masie m . Pomiedzy klockiem a klinem występuje siła tarcia dynamicznego równa co do wartości sile nacisku klocka na na klin razy współczynnik μ_1 . Podobna siła tarcia, o współczynniku μ_2 występuje pomiedzy klinem a stołem. Posługując się równaniami Newtona z więzami znaleźć siły reakcji pomiedzy klinem a klockiem oraz pomiedzy klinem a stołem w sytuacji, gdy klocek zaczyna zsuwać się z klina. Znaleźć jawne wzory na siły reakcji i przyspieszenia, gdy $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Rozwiązanie

Jeśli oś z jest skierowana do góry, oś x w prawo, a górna krawędź klina jest na prawo od jego najniższego punktu to oznaczając współrzędne klina (X, Z) , a te klocka (x, z) (zob. rysunek 1), to otrzymujemy następujące dwa równania więzów:²

$$\begin{aligned} f_1(X, Z, x, z) &\equiv z + (X - x) \operatorname{tg} \alpha - Z - h = 0, \\ f_2(X, Z, x, z) &\equiv Z = 0. \end{aligned}$$

Pierwsze wyraża fakt, że klocek leży na powierzchni klina, a drugie, fakt, że klin leży na stole. Równaniami Lagrange'a I-go rodzaju (czyli po prostu równaniami Newtona z uwzględnionymi siłami reakcji i równaniami więzów) są

$$\begin{aligned} M\ddot{X} &= \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha - s_1 \mu_1 \lambda_1 & - s_2 \mu_2 \lambda_2, \\ M\ddot{Z} &= -Mg - \lambda_1 & - s_1 \mu_1 \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha + \lambda_2, \\ m\ddot{x} &= & - \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha + s_1 \mu_1 \lambda_1, \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda_1 & + s_1 \mu_1 \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

uzupełnione o równania $f_1(x, z, X, Z) = 0$ i $f_2(x, z, X, Z) = 0$. Aby napisać siły tarcia, napisaliśmy tu po prostu wektory prostopadłe do wektorów sił reakcji stosując zwykły trick polegający na zamianie miejscami składowych wektora siły reakcji i zmianie znaku jednej z nich. s_1 i s_2 są znakami związanymi z kierunkami prędkości. Siły tarcia zostały zapisane tak, że $s_1 = s_2 = +1$, gdy klocek zsuwa się z klina (klocek jedzie w lewo, a klin w prawo). W ogólności jednak, w chwili $t = 0$ klin może mieć (gdy warunki początkowe są odpowiednio dobrane) prędkość V (o dowolnym znaku) względem stołu, a klocek też może mieć dowolną prędkość v względem klina (o znaku siły tarcia decyduje względna prędkość stykających się powierzchni klina i klocka). Dalej przyjmujemy, że ruch jest taki, iż $s_1 = s_2 = +1$.

Aby rozwiązać te równania (znaleźć siły reakcji) wyznaczamy z drugiego równania λ_2 algebraicznie (bo z $f_2 \equiv Z = 0$ wynika też, że $\ddot{Z} = 0$) i wstawiamy do pierwszego.

²Pierwsze z nich otrzymujemy następująco: współrzędne klocka (x, z) muszą spełniać równanie prostej którą stanowi powierzchnia klina; zatem $z = x \operatorname{tg} \alpha + C$; stałą C ustalamy żądając, by punkt $(X, Z + h)$ (tj. najwyższy punkt klina) też leżał na tej tej prostej.

Następnie dwakroć różniczkujemy po czasie $f_1 = 0$ uzyskując związek

$$\ddot{z} = (\ddot{x} - \ddot{X}) \operatorname{tg} \alpha,$$

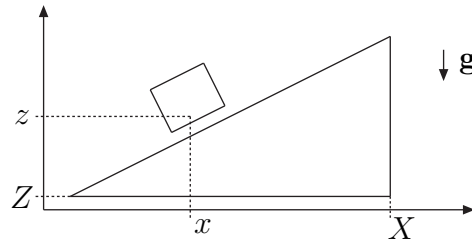
do którego podstawiamy następnie drugie pochodne z , x i X z wypisanych wyżej równań Newtona. Daje to równanie

$$-g + \frac{\lambda_1}{m} = \left[-\frac{\lambda_1}{m} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\lambda_1}{M} (\operatorname{tg} \alpha - \mu_1) + \mu_2 g + \frac{\lambda_1}{M} (1 + \mu_1 \operatorname{tg} \alpha) \mu_2 \right] \operatorname{tg} \alpha,$$

z którego można wyznaczyć λ_1 . Mając λ_1 obliczamy λ_2 i mając już jawne prawe strony równań Newtona całkujemy je, by znaleźć $X(t)$, $x(t)$ i $z(t)$.

Ponieważ w ogólnym przypadku $\mu_1 \neq 0$ i $\mu_2 \neq 0$ wzory są mało przejrzyste, podamy wzór na λ_1 i przyspieszenia, w sytuacji, gdy $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Mnożniki λ_1 i λ_2 (siły reakcji) nie zależą wtedy od kierunku ruchu klocka i klina:

$$\lambda_1 = \frac{mg}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \lambda_2 = Mg - \lambda_1.$$



Rysunek 1: Kłócek zsuwający się z szorstkiego klina, który może przesuwac się po szorstkim podłożu. Definicje zmiennych.

Wstawienie λ_1 do wzoru na $\ddot{X}$ daje

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M} \ddot{x} = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{M + (M + m) \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Widać, że $\ddot{X} = 0$, gdy $\alpha = 0$ (kłócek leży na płaskiej powierzchni) lub, gdy $\alpha = \pi/2$ (kłócek spada po pionowej ścianie). Poza tym, $\ddot{X} \rightarrow 0$, gdy $m/M \rightarrow 0$ (pchła zjeżdżająca na nartach po zadzie słonia, nie powoduje zauważalnego przemieszczenia Trąbalskiego, nawet gdyby stał on na lodzie na łyżwach). Wreszcie³

$$\ddot{z} = -g - \frac{\lambda_1}{m} = -\frac{g(m + M) \sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Należy tu zauważyć, że wyprowadzając ogólne równania (uwzględniające siły tarcia) *najpierw* obliczyliśmy gradienty równań więzów, a dopiero *potem* wykorzystywaliśmy te

³Dobrze jest sprawdzić, że ten jest to to samo, co $(\ddot{x} - \ddot{X}) \operatorname{tg} \alpha$.

równania. Powstaje więc pytanie, co by było, gdyby przed obliczaniem gradientów wziąć zamiast podanych równań więzów ich kombinacje liniowe? Np. można by było dodać drugie równanie do pierwszego, skutkiem czego w pierwszym nie występowałaby zmienna Z . Można łatwo sprawdzić, że przy niewystępowaniu sił tarcia końcowe wzory na $\ddot{x}$, $\ddot{z}$ i $\ddot{X}$ byłyby niezmiennione (choć zmieniłyby się końcowe wyrażenia na λ_1 i λ_2). Jednak po takiej zmianie równań więzów nie otrzymalibyśmy w pierwotnym równaniu na $\ddot{Z}$ wyrazów proporcjonalnych do λ_1 , a zatem nie moglibyśmy uwzględnić wpływu tarcia między klinem i klockiem na ruch klina. Gdy występują siły tarcia wybór równań więzów musi być więc zgodny z fizycznymi oczekiwaniami, co do sił reakcji (brzmi to enigmatycznie, ale nie wiem, czy można to jakoś ściślej ująć).

Zadanie 6.3

Punkt materialny o masie m może poruszać się po wewnętrznej stronie ustawionej pionowo (tj. tak, że jedna z jej średnic jest równoległa do ziemskiego pola grawitacyjnego $\mathbf{g}$) nieruchomej obręczy o promieniu R (zob. rysunek 2). Pomijając tarcie napisać równania ruchu uwzględniające siłę reakcji więzów. Traktując te więzy jak jednostronne, znaleźć zależność siły ich reakcji od położenia punktu na obręczy, jeśli w najniższym położeniu punkt miał liniową prędkość v_0 . Jaka musi być minimalna prędkość v_0 aby punkt nigdy nie oderwał się od toru? Znaleźć ruch i jego częstość w przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi. W przypadku, gdy całkowita energia jest akurat wystarczająca do osiągnięcia przez masę m najwyższego punktu toru, znaleźć zależność jej położenia na obręczy od czasu. (Czy jednostronne więzy pozwolą mu osiągnąć ten punkt?) Rozpatrzeć także przypadek, gdy masa m porusza się bez tarcia po zewnętrznej stronie obręczy i znaleźć punkt, w którym puszczone swobodnie (z zerową prędkością) z najwyższego punktu obręczy oderwie się ona od niej.

Rozwiązanie

Wybermy układ biegunowy tak, by kąt $\varphi = 0$ odpowiadał najniższemu położeniu punktu na obręczy, tj. tak, że oś x jest skierowana w dół, a oś y w prawo (zob. rysunek 2). Kąt φ rośnie wtedy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Pola ciężenia rozpisane na wersory $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_\varphi$ ma wtedy postać

$$\mathbf{g} = \mathbf{e}_r g \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi g \sin \varphi.$$

W układzie biegunowym równanie więzów ma trywialną postać

$$f(r, \varphi) = r - R = 0.$$

Zatem równania Newtona uwzględniające siłę reakcji mają postać

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= m g \cos \varphi + \lambda, \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) &= -m g \sin \varphi. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu więzów upraszczają się one do

$$\begin{aligned} -m R \dot{\varphi}^2 &= m g \cos \varphi + \lambda, \\ m R \ddot{\varphi} &= -m g \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ponieważ równanie więzów zostało już w nich uwzględnione, stanowią one kompletny układ równań wyznaczających ruch masy m i czynnik λ (i tym samym siłę reakcji). W przypadku, gdy nie występuje tarcie, można skorzystać z zachowania energii mechanicznej (siła reakcji będąc stale prostopadła do przesunięcia masy m , nie wykonuje pracy). Przyjmując, że energia potencjalna równa się zeru w najniższym punkcie obręczy, mamy⁴

$$\frac{1}{2} m (R \dot{\varphi})^2 + m g R (1 - \cos \varphi) = E.$$

⁴To samo można oczywiście otrzymać z drugiego równania Newtona mnożąc je obustronnie przez $R\dot{\varphi}$ i zwińając do pełnej pochodnej każdą z jego stron.

Stąd

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E - 2mgR(1 - \cos \varphi)}{mR^2}.$$

Wstawiając to do radialnego równania Newtona znajdujemy, że

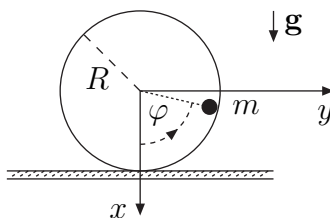
$$\lambda = -\frac{2E}{R} + 2mg - 3mg \cos \varphi.$$

Jeśli w najniższym punkcie obręczy masa m ma prędkość v_0 , czyli, gdy $E = \frac{1}{2}mv_0^2$,

$$\lambda = -\frac{mv_0^2}{R} + 2mg - 3mg \cos \varphi.$$

W najniższym punkcie obręczy ($\varphi = 0$) siła reakcji (jest ona równa po prostu λ) jest ujemna i równa co do wartości ciężarowi masy m zwiększonemu o siłę odśrodkową:

$$\lambda = -\frac{mv_0^2}{R} - mg.$$



Rysunek 2: Masa m ślizgająca się po wewnętrznej powierzchni gładkiej obręczy.

Aby masa m się nie oderwała, λ nie może zmienić znaku (punkt oderwania jest tam, gdzie $\lambda = 0$, tj. tam, gdzie znika siła reakcji) dla żadnego kąta φ . Nakłada to warunek

$$-\frac{mv_0^2}{R} + 2mg - 3mg \cos \varphi < 0,$$

co dla wszystkich kątów φ zachodzi, jeśli

$$v_0^2 > 5gR.$$

Ten sam wynik można także dostać z założenia, by w najwyższym punkcie toru ($\varphi = \pi$) siła odśrodkowa była wciąż większa niż siła ciężenia, tj. żądając, by

$$\frac{mv^2(\varphi = \pi)}{R} > mg.$$

Istotnie: z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2}mv^2(\varphi = \pi) + 2mgR = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

znajdujemy, że $mv^2(\varphi = \pi) = mv_0^2 - 4mgR$, a stąd nierówność

$$mv_0^2 - 4mgR > mgR,$$

proceedzi to do tego samego warunku na v_0 , co uzyskany poprzednio.

Zależność od czasu kąta φ można otrzymać z zachowania energii. Po rozdzielaniu zmiennych daje ono związek

$$\sqrt{\frac{2}{mR^2}} \int_0^t dt = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{E - mgR(1 - \cos \varphi)}}.$$

Jeśli wychylenia masy m z położenia $\varphi = 0$ są niewielkie, można w funkcji podcałkowej po prawej rozwinąć cosinus:

$$\sqrt{\frac{2}{mR^2}} (t - t_0) = \pm \frac{1}{\sqrt{E}} \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\varphi \sqrt{mgR/2E}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2}{mgR}} \arccos\left(\sqrt{\frac{mgR}{2E}} \varphi\right).$$

czyli

$$\sqrt{\frac{mgR}{2E}} \varphi(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}} (t - t_0)\right).$$

Daje to ruch harmoniczny o częstości $\omega^2 = g/R$ i amplitudzie $A = \sqrt{2E/mgR} = \sqrt{2E/mgR\omega^2}$, jak należało się spodziewać.

Z kolei, gdy masa m ma w najniższym punkcie obręczy energię akurat równą $E = 2mgR$, zależność położenia od czasu daje się otrzymać z całki (zakładamy, że masa m przemieszcza się po obręczy w prawo, czyli że $\dot{\varphi} > 0$, oraz że $\varphi(0) = 0$)

$$\sqrt{\frac{2}{mR^2}} \int_0^t dt = \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{mgR(1 + \cos \varphi)}} = \sqrt{\frac{2}{mgR}} \int_0^{\frac{1}{2}\varphi(t)} \frac{d(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)}.$$

Całka jest wykonalna i daje

$$\sqrt{\frac{g}{R}} t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin(\varphi/2)}{1 - \sin(\varphi/2)}\right),$$

co po rozwikłaniu względem φ prowadzi do wzoru

$$\varphi(t) = 2 \arcsin(\operatorname{th} \omega t).$$

Ze wzoru widać, że gdyby więzy były dwustronne (masa m nie mogła oderwać się od obręczy), najwyższy punkt obręczy, $\varphi = \pi$, byłby osiąganym po nieskończonym czasie. Jeśli jednak więzy są jednostronne masa m oderwie się od obręczy wcześniej, gdyż wartość

$v_0^2 = 4gR$ jest mniejsza od znalezionej wcześniej najmniejszej prędkości umożliwiającej osiągnięcie najwyższego punktu obręczy przy więzach jednostronnych.

W przypadku, gdy punkt zsuwa się po zewnętrznej stronie obręczy z jej najwyższego punktu bez prędkości początkowej, pełna energia E ruchu jest równa $E = 2mgR$ i zależność λ (siły reakcji) od kąta φ jest dana wzorem

$$\lambda = -2mg - 3mg \cos \varphi .$$

Oderwanie się masy m nastąpi wtedy, gdy $\cos \varphi = -2/3$.

5. RÓWNANIA NEWTONA W UKŁADACH NIEINERCJALNYCH

Przypomnienie:

Dwaj obserwatorzy z układów odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ charakteryzują zmienność w czasie wektorów $\mathbf{r}(t)$ i $\mathbf{r}'(t)$ położenia punktu P (zob. lewy rysunek 3). Wektory te spełniają oczywistą równość (którą, jak każdą równość wektorową, można rozpisać na składowe w dowolnym układzie odniesienia, czyli np. w $\mathcal{O}$ lub w $\mathcal{O}'$).

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t),$$

gdzie $\mathbf{r}_0(t)$ jest (zmieniającym się z czasem) wektorem łączącym początki układów $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. Ponieważ jest to równość dwóch wektorów, więc zachodzi także związek

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt}.$$

Oczywiście $d\mathbf{r}(t)/dt \equiv \mathbf{v}(t)$ jest wektorem prędkości punktu P mierzonej przez obserwatora w $\mathcal{O}$. Jeśli jednak widziany z $\mathcal{O}$ układ $\mathcal{O}'$ obraca się wokół osi przechodzącej przez jego początek z prędkością kątową ω , wektor $d\mathbf{r}'(t)/dt$ nie jest tożsamy z wektorem $\mathbf{v}'$ prędkości mierzonej w $\mathcal{O}'$. Aby to sobie uzmysłować wystarczy rozpatrzyć przypadek, gdy punkt P pozostaje w ustalonym położeniu względem $\mathcal{O}'$: mimo iż wtedy $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, pochodna $d\mathbf{r}'(t)/dt \neq \mathbf{0}$, gdyż widziany z $\mathcal{O}$ wektor $\mathbf{r}'$ zmienia się wraz z obrotem całego układu $\mathcal{O}'$.

Rozpatrując infinitesimalne zmiany wektorów zachodzące w infinitesimalnym odcinku czasu dt możemy napisać równość:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d'\mathbf{r}' + (d\mathbf{r}')_{\text{rot}}.$$

$d'\mathbf{r}'$ jest zmianą wektora $\mathbf{r}'$ widzianą przez obserwatora w $\mathcal{O}'$ (który uważa, że osie jego układu się nie zmieniają; wobec tego $d'\mathbf{r}' = \mathbf{0}$, wtedy gdy punkt P nie zmienia położenia względem $\mathcal{O}'$), wektor zaś $(d\mathbf{r}')_{\text{rot}}$ jest właśnie zmianą $\mathbf{r}'$ widzianą z $\mathcal{O}$, uwarunkowaną w całości obrotem $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$. Zmiana ta jest, jak łatwo zrozumieć, równa

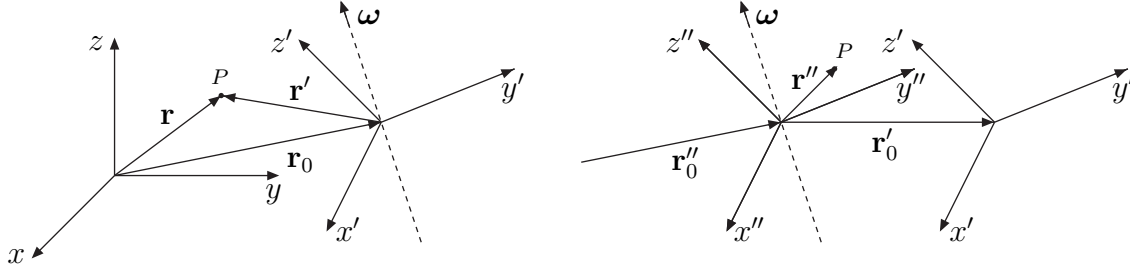
$$(d\mathbf{r}')_{\text{rot}} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}',$$

gdzie $d\boldsymbol{\theta}$ jest wektorem reprezentującym infinitesimalny obrót o kąt $d\theta$ układu $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$ w przedziale czasu dt (zatem $d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}dt$). Wektor ten ma kierunek chwilowej osi obrotu. Otrzymujemy zatem wniosek, że gdy układ $\mathcal{O}'$ obraca się względem $\mathcal{O}$ wokół osi przechodzącej przez jego początek

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Powyższy wzór pozostaje prawdziwy, nawet jeśli oś wokół której obraca się układ $\mathcal{O}'$ nie przechodzi przez jego początek. Aby się o tym przekonać wprowadzamy pomocniczy układ $\mathcal{O}''$ o początku leżącym na osi, wokół której obraca się $\mathcal{O}'$ i osiach stale równoległych do odpowiadających im osi układu $\mathcal{O}'$ (zob. prawy rysunek 3). Mamy wtedy wektorowy związek

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0'' + \mathbf{r}'',$$



Rysunek 3: *Lewy rysunek:* Układy odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. Z punktu widzenia obserwatora w układzie $\mathcal{O}$ układ $\mathcal{O}'$ obraca się wokół osi (zaznaczonej linią przerywaną) z prędkością kątową ω . Oba obserwatorzy: w $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ charakteryzują zmienność w czasie wektora położenia punktu P odpowiednio wektorami $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}/dt$, $d^2\mathbf{r}/dt^2$ oraz $\mathbf{r}'$, $d'\mathbf{r}'/dt$, $d'^2\mathbf{r}'/dt^2$. *Prawy rysunek:* Pomocniczy układ $\mathcal{O}''$ wprowadzany w sytuacji, gdy układ $\mathcal{O}'$ obraca się wokół osi nieprzechodzącej przez jego początek. (Dla przejrzystości, wektory $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$, takie same, jak na lewym rysunku, nie zostały tu uwidocznione).

gdzie $\mathbf{r}''$ jest wektorem wodzącym punktu P w układzie $\mathcal{O}''$. Wobec tego, zgodnie z poprzednim rozumowaniem możemy napisać

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0'' + d''\mathbf{r}'' + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}''.$$

Wykorzystujemy następnie równość $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}_0' + \mathbf{r}'$:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0'' + d''(\mathbf{r}_0' + \mathbf{r}') + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0' + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'.$$

Ponieważ jednak układy $\mathcal{O}''$ i $\mathcal{O}'$ są ze sobą na sztywno związane, $d''\mathbf{r}_0' = \mathbf{0}$ (wektor $\mathbf{r}_0'$ widziany z układu $\mathcal{O}''$ nie zmienia się). Co więcej, $d''\mathbf{r}' = d'\mathbf{r}'$, gdyż osie $\mathcal{O}''$ i $\mathcal{O}'$ są nawzajem do siebie stale równoległe i zmiana wektora $\mathbf{r}'$ widziana z obu tych układów jest takim samym wektorem. Wreszcie, wyraz $d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0'$ po dodaniu do $d\mathbf{r}_0''$ daje po prostu przesunięcie względem $\mathcal{O}$ początku układu $\mathcal{O}'$, czyli $d\mathbf{r}_0$. Otrzymujemy zatem ponownie ten sam wzór, który można także zapisać jako ($\mathbf{V}_{tr}$ jest prędkością ruchu postępowego $\mathcal{O}'$ mierzoną w $\mathcal{O}$)

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_{tr} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Z tych rozważań wynika też następujący wniosek. Jeśli wektor $\mathbf{b}$ łączy punkt P_1 (o wektorach wodzących $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_1'$ względem odpowiednio $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$) z punktem P_2 (o wektorach wodzących $\mathbf{r}_2$ i $\mathbf{r}_2'$), czyli jeśli $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1'$, to odejmując stronami wzory łączące ze sobą pochodne w obu układach otrzymamy ważny wzór (por. Zadanie 0.7)

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d'\mathbf{b}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

Wzór wiążący ze sobą przyspieszenia punktu P mierzone w obu układach dostajemy wykorzystując powyższy związek (wyrazy w nawiasach są pochodnymi d/dt):

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_{tr}}{dt} + \left(\frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right)$$

$$\equiv \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}').$$

Zgodnie ze wzorem wiążącym pochodne dowolnego wektora $\mathbf{b}$ obliczane w układach obracających się jeden względem drugiego z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$, $d\boldsymbol{\omega}/dt = d'\boldsymbol{\omega}/dt$.

Ważne jest także, by zdawać sobie sprawę z tego, że powyższe związki między pochodnymi wektorów są słuszne dla dowolnych dwu układów $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. W szczególności żaden z nich nie musi być układem inercyjnym. Jeśli jednak układ $\mathcal{O}$ *jest* układem inercyjnym, to zwykłe prawo Newtona (tj. równanie $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$) obowiązuje tylko w tym układzie. W układzie $\mathcal{O}'$, który jest wtedy (z konieczności, jeśli $\boldsymbol{\omega} \neq 0$) układem nieinercyjnym, można jednak stosować “prawo Newtona” zmodyfikowane o fikcyjne “siły bezwładności”:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \left(\mathbf{a}_{\text{tr}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right).$$

Zadanie 5.1

Dany jest zmieniający się z czasem wektor $\mathbf{b}(t)$. Powiązać jego pochodne obliczone w dwu różnych układach odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. Układy te mają wspólny początek i obracają się względem siebie wokół wspólnej osi $z = z'$. Kąt jaki tworzy oś x' układu $\mathcal{O}'$ z osią x układu $\mathcal{O}$ jest pewną funkcją czasu $\varphi(t)$.

Uwaga: Żaden z tych układów nie jest wyróżniony. W szczególności żaden z nich nie musi być układem inercyjnym.

Rozwiązanie

Jeśli dane są dwa różne układy odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$, to dowolny wektor $\mathbf{b}$ można rozpisać na wersory i jednego i drugiego układu:

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_x b_x + \mathbf{e}_y b_y + \mathbf{e}_z b_z = \mathbf{e}'_x b'_x + \mathbf{e}'_y b'_y + \mathbf{e}'_z b'_z.$$

Wiedząc, że wersory obu układów są ze sobą powiązane wzorami

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \mathbf{e}'_x \cos \varphi(t) - \mathbf{e}'_y \sin \varphi(t), \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}'_x \sin \varphi(t) + \mathbf{e}'_y \cos \varphi(t),\end{aligned}$$

i $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}'_z$ (wzory te łatwo sprawdzić robiąc odpowiedni rysunek i rozpatrując przypadki, gdy $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi/2$) można też napisać

$$\mathbf{b} = [b_x \cos \varphi(t) + b_y \sin \varphi(t)] \mathbf{e}'_x + [-b_x \sin \varphi(t) + b_y \cos \varphi(t)] \mathbf{e}'_y + b_z \mathbf{e}'_z.$$

Oznacza to po prostu, że $b'_x = b_x \cos \varphi(t) + b_y \sin \varphi(t)$, a $b'_y = -b_x \sin \varphi(t) + b_y \cos \varphi(t)$. Pochodną wektora $\mathbf{b}$ obliczoną w układzie $\mathcal{O}$

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{e}_x \dot{b}_x + \mathbf{e}_y \dot{b}_y + \mathbf{e}_z \dot{b}_z,$$

(obserwator w $\mathcal{O}$, różniczkując wektor, uważa, że osie $\mathbf{e}_i$ nie zmieniają się z czasem), która jest pewnym wektorem, również można rozpisać na wersory układu $\mathcal{O}'$, otrzymując

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = [\dot{b}_x \cos \varphi(t) + \dot{b}_y \sin \varphi(t)] \mathbf{e}'_x + [-\dot{b}_x \sin \varphi(t) + \dot{b}_y \cos \varphi(t)] \mathbf{e}'_y + \dot{b}_z \mathbf{e}'_z.$$

Jeśli jednak obliczymy pochodną wektora $\mathbf{b}$ w układzie $\mathcal{O}'$, to otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{d'\mathbf{b}}{dt} &= \mathbf{e}'_x \dot{b}'_x + \mathbf{e}'_y \dot{b}'_y + \mathbf{e}'_z \dot{b}'_z \\ &= \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \omega [-b_x \sin \varphi(t) + b_y \cos \varphi(t)] \mathbf{e}'_x + \omega [-b_x \cos \varphi(t) - b_y \sin \varphi(t)] \mathbf{e}'_y.\end{aligned}$$

Dodatkowe wyrazy proporcjonalne do $\omega \equiv \dot{\varphi}(t)$ biorą się stąd, że w układzie $\mathcal{O}'$, oprócz zmienności z czasem składowych wektora $\mathbf{b}$ w bazie $\mathbf{e}_i$, uwzględniona jest także zmiana wektora $\mathbf{b}$ spowodowana tym, że same wersory $\mathbf{e}_i$ obracają się względem układu $\mathcal{O}'$ (obserwator w $\mathcal{O}'$ uważa, że to jego osie $\mathbf{e}'_i$ są nieruchome!). Wprowadzając wektor prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z = \omega \mathbf{e}'_z$ można sprawdzić, że dodatkowe wyrazy dają się zapisać jako $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$. Stąd

$$\frac{d'\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} \quad \text{lub} \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d'\mathbf{b}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

Zadanie 5.2

Z wieży o wysokości $h = 125$ m stojącej na równiku spuszczone swobodnie kamień o masie m . Jak daleko upadnie on od podstawy wieży? Pominąć wszystkie możliwe siły oporu. Rozwiązać ten problem w układzie związanym z Ziemią oraz w układzie inercjalnym, w którym Ziemia (wraz z wieżą) się obraca.

Rozwiązanie

W układzie obracającym się wraz z Ziemią, którego początek umieszczamy u podstawy wieży, oś z kierujemy “w niebo”, a oś x na wschód, równanie “Newtona”, które trzeba rozwiązać z warunkiem początkowym $\mathbf{r}(0) = \mathbf{e}_z h$, $\dot{\mathbf{r}}(0) \equiv \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$, ma postać:⁵

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

W przyjętym układzie odniesienia $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_y \omega$. Ponieważ czas t_{sp} spadku kamienia, czyli czas trwania ruchu, nie może się wiele różnić od danego “szkolnym wzorem” $t_{\text{sp}} = \sqrt{2h/g}$, więc w powyższym równaniu ostatni wyraz daje małe efekty (drugiego rzędu w małej wielkości $\omega t_{\text{sp}} \ll 1$) i można go pominąć. Rozwiązujemy zatem równanie

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

które rozpisane na składowe daje

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\omega \dot{z}, \\ \ddot{y} &= 0, \\ \ddot{z} &= 2\omega \dot{x} - g.\end{aligned}$$

Środkowe z tych równań jest trywialne i, uwzględniając warunki początkowe, daje $y(t) = 0$. Z kolei całkując stronami pierwsze z tych równań i dobierając stałą całkowania tak, by dla $t = 0$, tj. wtedy, gdy $z(0) = h$, było $\dot{x}(0) = 0$, znajdujemy

$$\dot{x} = 2\omega(h - z).$$

Wstawiając tak wyrażone $\dot{x}$ do trzeciego równania otrzymujemy

$$\ddot{z} = -g + 4\omega^2(h - z).$$

Ponieważ zdecydowaliśmy się pomijać wyrazy z ω^2 , rozwiązanie tego równania da $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$, jak w szkole. Stąd widzimy, że rzeczywiście z dokładnością do efektów liniowych w ω (a przy pominięciu efektów kwadratowych), czas spadku wyznaczony przez $z(t_{\text{sp}}) = 0$, jest równy $t_{\text{sp}} = \sqrt{2h/g}$. Wykorzystując znalezione $z(t)$ w równaniu na $x(t)$

$$\dot{x} = 2\omega(h - z) = \omega gt^2,$$

⁵Oznaczanie wielkości w układzie nieinercjalnym symbolami z primem zostało tu zarzucone.

po scałkowaniu otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{3} g \omega t^3.$$

Odchylenie d kamienia od podstawy wieży wynosi zatem

$$d = x(t_{\text{sp}}) = \frac{1}{3} g \omega \frac{2h}{g} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,5 \text{ cm}.$$

Ponieważ $d > 0$, kamień odchyła się w kierunku wschodnim, a nie, jak by można oczekiwać na podstawie naiwnego rozumowania, że w trakcie lotu kamienia, to raczej Ziemia z wieżą na niej obróci się na Wschód.

Ten na pierwszy rzut oka dziwny wynik można lepiej rozumieć rozpatrując ruch w układzie inercyjnym, w którym Ziemia z wieżą na niej się obraca. Ponieważ ruch zachodzi w płaszczyźnie równikowej, wygodnie jest wprowadzić w tej płaszczyźnie układ biegunowy (r, φ) tak, by w $t = 0$ wierzchołek wieży (czyli kamienia) miał współrzędne $r(0) = R + h$, gdzie R jest promieniem Ziemi (początek układu inercyjnego umieszczamy w środku Ziemi, aby jej ruch obrotowy miał prostą postać), $\varphi(0) = 0$. Równanie Newtona rozpisane w układzie biegunowym, $ma_r = F_r$, $ma_\varphi = F_\varphi$ to dwa równania:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= -mg, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

Drugie równanie, po pomnożeniu obu stron przez r , daje się zwinąć do⁶

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0, \quad \text{czyli} \quad mr^2\dot{\varphi} = L = \text{const.},$$

i wyraża, jak łatwo zrozumieć, zachowanie z -owej składowej momentu pędu (ponieważ jedyna działająca na kamień w układzie inercyjnym siła jest centralna, moment pędu

⁶Innym sposobem dojścia do tego samego jest zapisanie tego równania w postaci

$$-2 \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \equiv \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{dt},$$

i scałkowanie go stronami

$$-2 \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{dr}{r} = \int_{\dot{\varphi}(0)}^{\dot{\varphi}(t)} \frac{d(\dot{\varphi})}{\dot{\varphi}},$$

co daje

$$\ln[\dot{\varphi}(t)/\dot{\varphi}(0)] = -2 \ln[r(t)/r(0)],$$

czyli $mr^2(t)\dot{\varphi}(t) = mr^2(0)\dot{\varphi}(0)$.

kamienia jest stałą ruchu; w układzie biegunowym, jawnie widoczna jest jednak tylko stałość $L_z \equiv L$). Zatem z równania tego możemy wyznaczyć $\dot{\varphi}$ i wstawić do pierwszego:

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -mg,$$

Standardowym sposobem radzenia sobie z tym równaniem jest pomnożenie obu jego stron przez $\dot{r}$ i zwiniecie do

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + mgr \right) = 0,$$

czyli do równania wyrażającego stałość całkowitej energii kamienia. Równanie to będzie badane w zadaniach dotyczących ruchu w polu grawitacyjnym. Tu uprościmy sobie zadanie, przyjmując, co znajdzie swoje uzasadnienie niżej, że $L^2 \sim \omega^2$ i wobec tego, człon ten w równaniu na r można pominąć. Po szkolnym scałkowaniu daje ono wtedy

$$r(t) = r(0) + \dot{r}(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = (R+h) - \frac{1}{2}gt^2.$$

Stąd, czas spadku, wyznaczony równością $r(t_{\text{sp}}) = R$, jest równy, jak poprzednio $t_{\text{sp}} = \sqrt{2h/g}$.

Mając $r(t)$ można znaleźć $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{dt' L}{mr^2(t')} = \frac{L}{m} \int_0^t \frac{dt'}{[R+h - \frac{1}{2}gt'^2]^2}.$$

Całkę tę można wyliczyć ściśle, ale byłby to zbyteczny trud: ponieważ $R+h \gg gt_{\text{sp}}^2$, możemy rozwinąć funkcję podcałkową

$$\varphi(t) = \frac{L}{m(R+h)^2} \int_0^t dt' \left(1 + \frac{gt'^2}{R+h} + \dots \right) = \frac{L}{m(R+h)^2} t + \frac{1}{3} \frac{gL}{m(R+h)^3} t^3 + \dots$$

Aby wyznaczyć L , zauważamy, że w chwili początkowej kamień znajdujący się na wierzchołku wieży ma niezerową prędkość w kierunku $\mathbf{e}_\varphi$, równą $(R+h)\omega$. Zatem $L = mr^2(0)\omega = m(R+h)^2\omega$ i

$$\varphi(t) = \omega t + \frac{1}{3} \frac{\omega}{R+h} gt^3.$$

Trzeba jednak pamiętać, że w czasie, gdy kamień spadał z wieży, jej podstawa obróciła się z wraz Ziemią o kąt $\varphi_Z = \omega t_{\text{sp}}$. Biorąc to pod uwagę, odległość, w jakiej od wieży upadnie kamień wynosi

$$d = R(\varphi(t_{\text{sp}}) - \varphi_Z) = \frac{1}{3} \frac{R\omega}{R+h} gt_{\text{sp}}^3 \approx \frac{1}{3} g\omega t_{\text{sp}}^3.$$

Widać że przyczyną odchylenia kamienia na Wschód jest naprawdę to, że w układzie inercyjnym ma on w momencie rozpoczęcia spadania większą prędkość w tymże kierunku, niż podstawa wieży.

Zadanie 5.3

Stosując rachunek zaburzeń (albo inaczej, zasadę Banacha) podać rozwinięcie ogólnego rozwiązania $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ równania Newtona wyznaczającego ruch punktu materialnego w nieinercyjnym układzie odniesienia związanym z powierzchnią Ziemi słuszne w przypadku ruchów krótkotrwałych, w trakcie których małym pozostaje bezwymiarowy czynnik ωt (ω jest tu prędkością kątową obrotu Ziemi).

Rozwiązanie.

W przypadku ruchów krótkotrwałych, o małym zasięgu, w których $|\mathbf{r}'(t)| \ll R$ (R jest tu promieniem Ziemi), można ogólne równanie

$$m \mathbf{a}' = m \mathbf{g} - m \left(\mathbf{a}_{\text{tr}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right) + \mathbf{F}_{\text{inne}},$$

(słuszne w dowolnym układzie nieinercyjnym) uprościć do

$$m \mathbf{a}' = m \mathbf{g}_{\text{eff}} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{F}_{\text{inne}},$$

poprzez wciągnięcie w lokalne pole $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ efektów przyspieszenia $\mathbf{a}_{\text{tr}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ (w którym $\mathbf{R}$ jest wektorem łączącym środek Ziemi z początkiem układu nieinercyjnego na jej powierzchni) i pominięcie pozostałych efektów przyspieszenia odśrodkowego reprezentowanych przez wyraz $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$. Pominąć też można wyraz z pochodną $\boldsymbol{\omega}$ po czasie.

Jeśli siły inne niż grawitacyjne nie występują (tj. jeśli $\mathbf{F}_{\text{inne}} = \mathbf{0}$) i jeśli przyjmiemy, że w obszarze, w którym zachodzi ruch $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ jest stałym wektorem, do scałkowania jest równanie (pomijamy odtąd primy)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{g}_{\text{eff}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},$$

z warunkami początkowymi $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, które raz całkuje się natychmiast dając

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}} t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0).$$

Jest to zwykłe liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu z niejednorodnością, przy czym jednorodna jego część jest postaci

$$\frac{d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{dt} = A \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

(A jest tu macierzą liniowego odwzorowania wektora w jego iloczyn wektorowy z wektorem $-2\boldsymbol{\omega}$). Można byłoby je scałkować ściśle, rozwiązując najpierw równanie jednorodne i potem uzmienniając stałą. Otrzymane rozwiązanie byłoby jednak dość skomplikowane i uwzględniałoby także wyrazy rzędu $\omega^2 t^2$, $\omega^3 t^3$, które, wobec pominięcia wyżej członu odśrodkowego $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ są bez znaczenia (pominięte w równaniu wyrazy powodują efekty tego samego rzędu). Zamiast tego najwygodniej jest zastosować rachunek zaburzeń. Numerujemy więc rozwiązania według rzędów oznaczając rozwiązanie n -tego rzędu $\mathbf{r}^{(n)}(t)$,

i przyjmując, że $\mathbf{r}^{(0)}(t) = \mathbf{r}_0$ (pierwszym przybliżeniem ruchu jest oczywiście bezruch!). Rozwiązanie $(n+1)$ -go rzędu znajdujemy rozwiązując równanie

$$\frac{d\mathbf{r}^{(n+1)}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}^{(n)}(t) - \mathbf{r}_0),$$

którego prawa strona jest już jawną funkcją t , co umożliwia łatwe rozwiązanie go. Ponieważ $\mathbf{r}^{(0)}(t) = \mathbf{r}_0$, na $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ otrzymujemy równanie

$$\frac{d\mathbf{r}^{(1)}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t,$$

które oczywiście daje

$$\mathbf{r}^{(1)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2.$$

Z kolei użycie $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ prowadzi do równania na $\mathbf{r}^{(2)}(t)$ postaci

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}^{(2)}(t)}{dt} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}^{(1)}(t) - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0t - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_{\text{eff}}t^2. \end{aligned}$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\mathbf{r}^{(2)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2 - \boldsymbol{\omega}t \times (\mathbf{v}_0t + \frac{1}{3}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2).$$

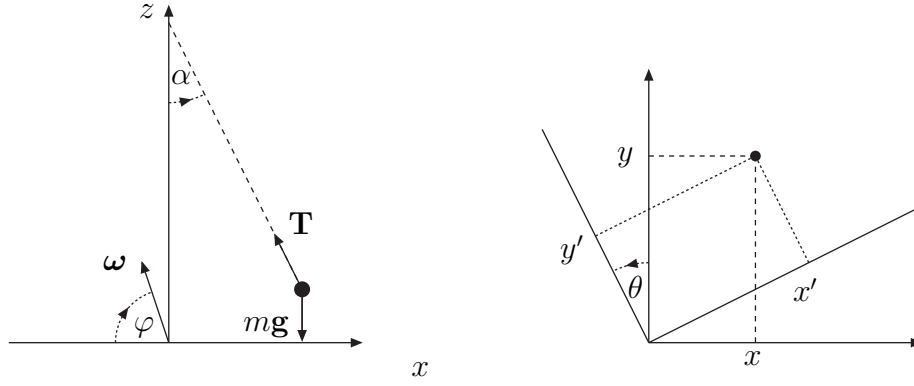
Przybliżenie $\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}^{(2)}(t)$ jest już wystarczająco dokładne. Aby to zobaczyć, znajdziemy jeszcze $\mathbf{r}^{(3)}(t)$ całkując równanie:

$$\frac{d\mathbf{r}^{(3)}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0t - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_{\text{eff}}t^2 + 2\boldsymbol{\omega}t \times \left(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_0t + \frac{1}{3}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2) \right).$$

Otrzymujemy z niego

$$\mathbf{r}^{(3)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2 - \boldsymbol{\omega}t \times (\mathbf{v}_0t + \frac{1}{3}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2) + 2\boldsymbol{\omega}t \times \left(\boldsymbol{\omega} \times (\frac{1}{3}\mathbf{v}_0t + \frac{1}{12}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2) \right).$$

Widać więc, że w wyrazach pojawiających się w rozwiązaniach kolejnych rzędów występują coraz wyższe potęgi bezwymiarowego czynnika $\boldsymbol{\omega}t$. Rachunek zaburzeń daje więc rozwinięcie pełnego rozwiązania, które można by było uzyskać sposobem podanym wyżej) według potęg $\boldsymbol{\omega}t$. Ponieważ w $\mathbf{r}^{(3)}(t)$ występują wyrazy z $(\boldsymbol{\omega}t)^2$, a w samym rozwiązywanym równaniu pominięty został człon z przyspieszeniem odśrodkowym będący tego właśnie rzędu, jest jasne, że należy się ograniczyć do rozwiązania $\mathbf{r}^{(2)}(t)$.



Rysunek 4: Po lewej: Wahadło Foucault zawieszone nad obracającą się powierzchnią Ziemi i wychylone w kierunku osi x . φ jest kątem szerokości geograficznej (zdefiniowanej normalnie). Po prawej: Obrót układu współrzędnych o kąt θ .

Zadanie 5.7 (wahadło Foucault, takie jak u U. Eco)

Znaleźć w przybliżeniu małych wychyleń od położenia równowagi ruch wahadła (tj. ciężarka) o masie m zawieszonego na (w przybliżeniu) nieważkiej i nierozciągliwej lince o długości ℓ nad punktem na powierzchni Ziemi znajdującym się na szerokości geograficznej φ .

Rozwiązanie

Ponieważ ruch wahadła może trwać dowolnie długo i bezwymiarowy czynnik ωt nie musi być mały, nie można tu korzystać z wyprowadzonego w Zadaniu 5.3 rozwinięcia rozwiązania według potęg tego czynnika. Trzeba inaczej rozwiązać równanie ruchu wahadła, które w nieinercyjnym układzie związanym z obracającą się Ziemią ma postać⁷

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} + \mathbf{T} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

$\mathbf{r}$ jest tu wektorem położenia ciężarka (względem układu związanego z powierzchnią Ziemi; wyraz $-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ jest włączony do $\mathbf{g}$), a $\mathbf{T}$ jest siłą nań działającą ze strony linki. Ostatni człon po prawej stronie jak zwykle pominiemy, bo jest on proporcjonalny do ω^2 . Wybierając układ o początku w punkcie na Ziemi, nad którym zawieszono wahadło i kierując jego oś z w górę, a oś x na południe możemy jawnie rozpisać siły. W obranym układzie

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \omega \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x v_y \omega \sin \varphi + \mathbf{e}_y \omega (v_x \sin \varphi + v_z \cos \varphi) - \mathbf{e}_z v_x \omega \cos \varphi.$$

W przybliżeniu małych odchyłeń od pionu, czyli od położenia równowagi, ruch można przybliżyć przez ruch płaski, tj. przyjąć, że $z \approx \text{const}$ i $v_z \approx 0$. Bilans sił w sytuacji, w której $y = 0$, a $x \neq 0$ (wahadło wychylone dokładnie w kierunku na południe) wygląda

⁷Wszystkie wielkości są obliczane w układzie nieinercyjnym więc primy pomijamy.

wtedy tak (zob. lewy Rysunek 4):

$$\begin{aligned} F_x^{\text{sum}} &= 2mv_y\omega_z - T \sin \alpha, \\ F_z^{\text{sum}} &= 2mv_y\omega \cos \varphi - mg + T \cos \alpha. \end{aligned}$$

Wprowadziliśmy tu ułatwiające zapis oznaczenie

$$\omega_z \equiv \omega \sin \varphi.$$

Ponieważ zakładamy, że $z \approx \text{const}$, więc składowa z -owa F_z^{sum} sumarycznej siły musi znikać. Stad,

$$T = \frac{mg - 2mv_y\omega \cos \varphi}{\cos \alpha},$$

a zatem

$$F_x^{\text{sum}} = 2mv_y\omega_z - mg \operatorname{tg} \alpha + 2mv_y\omega \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha.$$

Trzeci wyraz w F_x^{sum} można pominąć, gdyż, będąc (w przyjętym przybliżeniu małych wychyleń) proporcjonalnym i do ω i do $\operatorname{tg} \alpha \ll 1$ jest on tu małą wielkością drugiego rzędu. Ponadto w przybliżeniu małych wychyleń, $|\alpha| \ll 1$,

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha = \frac{x}{\ell}.$$

Uogólniając te rozważania do sytuacji, gdy zarówno x , jak i y są niezerowe możemy wypisać równania wyznaczające ruch ciężarka w płaszczyźnie xy :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 2\omega_z \dot{y}, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= -2\omega_z \dot{x}. \end{aligned}$$

Oznaczyliśmy tu $\omega_0^2 \equiv g/\ell$. Najprościej rozwiązuje się te równania przechodząc do zespolonej zmiennej $\xi \equiv x + iy$. W tej zmiennej stają się one jednym jednorodnym równaniem liniowym drugiego rzędu

$$\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi + 2i\omega_z \dot{\xi} = 0.$$

Szukamy rozwiązania w postaci $\xi(t) = \mathbb{A}e^{i\lambda t}$, co daje równanie charakterystyczne na λ

$$-\lambda^2 - 2\omega_z \lambda + \omega_0^2 = 0,$$

którego pierwiastkami są $\lambda_{\pm} = -\omega_z \pm \Omega$, gdzie $\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2}$. Najogólniejsze rozwiązanie ma zatem postać

$$\xi(t) \equiv x(t) + iy(t) = e^{-i\omega_z t} (\mathbb{A}_+ e^{i\Omega t} + \mathbb{A}_- e^{-i\Omega t}).$$

Zanim obliczymy części rzeczywistą i urojoną prawej strony, dobrze jest się zastanowić nad czynnikiem $e^{-i\omega_z t}$. Jeśli $\xi = x + iy$ jest (zespolonym) położeniem punktu w układzie

xy , to, jak łatwo zobaczyć (zob. Rysunek 4), w układzie $x'y'$ obróconym względem xy przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara o kąt θ , zespolonym położeniem tego punktu jest $\xi = e^{i\theta}\xi'$. Zatem w układzie, który obracałby się w kierunku (na półkuli północnej, gdzie $\sin \varphi > 0$, czyli $\omega_z > 0$) *zgodnym* z kierunkiem obrotu wskazówek zegara ruch rzutu wahadła na płaszczyznę byłby dany przez

$$\xi'(t) \equiv x'(t) + iy'(t) = \mathbb{A}_+ e^{i\Omega t} + \mathbb{A}_- e^{-i\Omega t}.$$

Wiadomo, że torem w układzie tym jest w ogólności elipsa (zob. Zadanie 0.6), której kształt zależy od stałych $\mathbb{A}_\pm = A_\pm + iB_\pm$ (skrajnymi przypadkami jest prosta i okrąg). W układzie xy zatem tor ten jako całość obraca się z prędkością kątową $\omega_z = \omega \sin \varphi$ - maksymalną na biegunie i znikającą na równiku.

Zadanie 7.1

Znaleźć leżący całkowicie w płaszczyźnie xy tor promienia światła wpadającego (od strony ujemnych x -ów) w punkcie $(x, y) = (0, 0)$ pod kątem α_0 w stosunku do osi x do ośrodka, w którym współczynnik załamania zależy od głębokości x jak $n(x) = \sqrt{1 + ax}$. Oprzeć się raz na prawie Snella, a drugi raz na zasadzie Fermata orzekającej, że promień światła między dwoma punktami biegnie po takiej drodze, że czas przelotu jest minimalny.

Przypomnienie: W ośrodku o współczynniku załamania n prędkość światła (lokalna) jest równa c/n .

Rozwiązanie

Prawo Snella mówi, że przechodząc z ośrodka 1 o (stałym) n_1 do drugiego ośrodka 2 o n_2 (również stałym) promień światła załamuje się w taki sposób, że

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

gdzie α_1 i α_2 są kątami, jaki promień tworzy po dwu stronach z normalną do granicy ośrodków. Aby to prawo zastosować do ośrodka, w którym n się zmienia z x , trzeba posłużyć się rozumowaniem granicznym i podzielić półpłaszczyznę $x > 0$ na pasy o stałych współczynnikach $n_0 = 1$ (dla $x < 0$), n_1, n_2, n_3 , itd. Do każdej z powstałych w ten sposób granic dwu ośrodków stosujemy prawo Snella: $n_1 \sin \alpha_1 = n_0 \sin \alpha_0 = \sin \alpha_0$, $n_2 \sin \alpha_2 = n_1 \sin \alpha_1 = n_0 \sin \alpha_0$, $n_3 \sin \alpha_3 = n_0 \sin \alpha_0$, itd. Widać, że w takim przypadku po przejściu do granicy nieskończenie gęstego podziału półpłaszczyzny $x > 0$ na pasy otrzymamy

$$\sin \alpha(x) = \frac{n_0 \sin \alpha_0}{n(x)} = \frac{\sin \alpha_0}{n(x)}.$$

Przerobienie sinusa $\alpha(x)$ na tangens da więc równanie toru w postaci

$$\frac{dy(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha(x) = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha(x)}{1 - \sin^2 \alpha(x)}} = \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{n^2(x) - \sin^2 \alpha_0}},$$

bo $\alpha(x)$ jest dokładnie kątem nachylenia krzywej $y(x)$ po jakiej biegnie promień.

To samo równanie toru promienia można także uzyskać z zasady Fermata, która jest ogólniejsza.⁸ Niech A (punkt wlotu promienia do ośrodka o zmiennym n) ma współrzędne $(0, 0)$, a jakiś inny punkt B ma współrzędne (x_1, y_1) . Czas przelotu od A do B po drodze γ dany wzorem

$$T[\gamma] = \int_A^B \frac{dl}{v},$$

jest wtedy funkcjonalem, który według zasady Fermata przyjmuje wartość najmniejszą na rzeczywistej drodze promienia świetlnego od A do B . Aby mu nadać jawną postać przyjmijmy, że drogi od A do B parametryzujemy x -em, czyli piszemy w postaci $y = y(x)$. Wtedy $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + (y')^2}$ i

$$T[\gamma] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{c} n(x) \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Mamy tu przypadek, gdy funkcja podcałkowa w funkcjonale nie zależy od samej wariowanej funkcji, a tylko od jej pochodnej. Wobec tego równanie Eulera-Lagrange'a można od razu raz scałkować, co daje

$$\frac{n(x) y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = D = \text{const.}$$

Po odwikłaniu względem y' dostajemy stąd równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D}{\sqrt{n^2(x) - D^2}},$$

które daje po scałkowaniu funkcję $y(x)$ zależną od dwu stałych dowolnych. Stałe te powinny być wyznaczone z warunku przebiegania otrzymanej krzywej przez punkty $A = (0, 0)$ i $B = (x_1, y_1)$, tak jak tego w zasadzie wymaga zasada Fermata. Nic nie zabrania jednak, gdy już równanie różniczkowe na tor zostało wyprowadzone, zastąpić drugi warunek żądaniem, by kąt wpadania promienia do ośrodka o zmiennym n w punkcie A był równy α_0 . Oznacza to, że stałą D trzeba wybrać równą $\sin \alpha_0$, bo wtedy nachylenie krzywej w $x = 0$ będzie takie jak trzeba (tzn. pochodna $(dy/dx)_{x=0}$ będzie równa $\tan \alpha_0$, bo $n(0) = n_0 = 1$). Z takim warunkiem brzegowym otrzymujemy zatem to samo równanie, co z prawa Snella.

⁸Prawo Snella wynika z niej niemal natychmiast: wystarczy wyobrazić sobie dwa punkty A i B jeden nad granicą dwu ośrodków, w obszarze o stałym n_1 i drugi pod nią, w obszarze o stałym n_2 ; w obszarach o stałym n promień biegnie po prostej (co też wynika z zasady Fermata, gdyż jest to droga najkrótsza i wobec stałości n odpowiada ona najkrótszemu czasowi przebiegu światła między dwoma punktami) więc wystarczy obliczyć czas $T(y)$ jego przebiegu od A do B jako funkcję współrzędnej y na osi będącej granicą ośrodków punktu, w którym promień przechodzi z jednego ośrodka do drugiego; warunek minimalnego czasu przelotu (tj. warunek by funkcja $T(y)$ miała w punkcie y minimum - do którego wypisania wystarcza zwykły rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej) przyjmuje dokładnie postać prawa Snella.

Warto jeszcze zobaczyć, co by było, gdyby drogę γ sparametryzować nie x -em, a y -kiem. W takim przypadku funkcjonał miałby postać

$$T[\gamma] = \int_0^{x_1} \frac{dy}{c} n(x) \sqrt{1 + (x')^2},$$

gdzie $x' \equiv (dx/dy)$. Funkcja podcałkowa $\mathcal{J}$ w funkcjonale byłaby niezależna od zmiennej całkowania i całką pierwszą równania Eulera-Lagrange'a, sprowadzającą je do równanie pierwszego rzędu byłby "hamiltonian" tj.

$$x' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x'} - \mathcal{J} = x' \frac{n(x) x'}{\sqrt{1 + (x')^2}} - \frac{n(x) (1 + (x')^2)}{\sqrt{1 + (x')^2}} \equiv \frac{-n(x)}{\sqrt{1 + (x')^2}} = h = \text{const.}$$

Po rozwikłaniu tego równania względem $x' \equiv dx/dy$ i narzuceniu, jak poprzednio warunku $(dx/dy)_{x=0} = \text{ctg } \alpha_0$ (który wymaga, by $h^2 = \sin^2 \alpha_0$) dostaje się stąd to samo równanie, co poprzednio.

Jeśli $n^2(x) = 1 + ax$, proste scałkowanie prowadzi (przy wyżej narzuconych na rozwiązanie warunkach) do równania toru

$$y(x) = \frac{2}{a} \sin \alpha_0 \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + ax} - \frac{\sin 2\alpha_0}{a}.$$

Stała całkowania jest ustalona z warunku, by $y(0) = 0$. Gdy $a > 0$, wzór ten daje tor, na którym y asymptotycznie, dla dużych x , rośnie proporcjonalnie do $\sqrt{x}$. Jeśli $a < 0$, otrzymany wzór może obowiązywać tylko dla $x < (1/|a|) \cos^2 \alpha_0$. Przyczynę tego łatwo zobaczyć, jeśli się pamięta, że równanie różniczkowe typu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

właściwie należy zapisywać w postaci

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0,$$

(gdzie X i Y są takie, że⁹ $-X/Y = f(x, y)$), która nie wyróżnia ani x ani y ; równanie takie definiuje (przy ustalonych warunkach początkowych) krzywą na płaszczyźnie, którą czasem da się zapisać jako $y = y(x)$, czasem jako $x = x(y)$, a czasem tylko parametrycznie. Oczywiście mając rozwiązanie takiego równania w postaci $y = y(x)$ możemy je

⁹Przy danej funkcji $f(x, y)$ funkcje $X(x, y)$ i $Y(x, y)$ nie są określone jednoznacznie: funkcje $g(x, y)X(x, y)$ i $g(x, y)Y(x, y)$ dają tę samą funkcję $f(x, y)$. Niejednoznaczność ta (poza ewentualnie punktami, w których funkcja $g(x, y)$ znika) nie ma wpływu na krzywe całkowite - krzywe te są bowiem określone warunkiem - patrząc na to geometrycznie - znikania jedno-formy różniczkowej $\hat{\omega} = X(x, y) dx + Y(x, y) dy$ na wektorach do nich stycznych; jeśli więc zero daje na nich forma $\hat{\omega}$, to również zero daje forma $\hat{\eta} = g(x, y) \hat{\omega}$. Odpowiednim doborem funkcji $g(x, y)$ można sprawić, że $\hat{\omega} = d\phi(x, y)$, co - jeśli jest możliwe, a jest zawsze możliwe w $\mathbb{R}^2$, ale już niekoniecznie w $\mathbb{R}^D$ o $D > 2$ - pozwala krzywe całkowite przedstawić w postaci $\phi(x, y) = \text{const}$. Forma $\hat{\omega}$ ma wtedy *czynnik całkujący*, czyli, zgodnie z pierwszym twierdzeniem Carathéodory'ego, jest całkowalna.

“odkręcić” i dostać $x = x(y)$. W badanym tu przypadku toru promienia świetlnego, po takim odkręceniu, dostaniemy

$$x(y) = \frac{a}{4 \sin^2 \alpha_0} \left(y + \frac{\sin 2\alpha_0}{a} \right)^2 - \frac{\cos^2 \alpha_0}{a}.$$

Z postaci tej od razu widać, co się dzieje, gdy $a < 0$: promień świetlny wchodzi do ośrodka, lecz stale zakręca w lewo i po osiągnięciu głębokości $x = (1/|a|) \cos^2 \alpha_0$ zaczyna zawracać spowrotem w kierunku osi y , czyli ku granicy ośrodków.

Wytlumaczenie zakręcania toru promienia świetlnego odwołujące się do falowej natury światła jest proste: przy $a < 0$ prędkość światła w ośrodku równa $c/n(x)$ wzrasta wraz z głębokością (ze wzrostem x); znaczy to że prawa strona frontu fali (jego “prawa noga”) porusza się szybciej niż lewa; jest jasne że musi to powodować zakręcanie frontu fali w lewo.

Zadanie 7.4

Jaki jest kształt mającej minimalne pole powierzchni obrotowej rozpiętej na dwóch równoległych do siebie nawzajem kołach o promieniach R_1 i R_2 , których środki leżą na tej samej prostej i są oddalone od siebie o $2L$?

Rozwiązanie

Pole powierzchni powstałej przez obrót wokół osi x krzywej $y(x)$, takiej, że $y(-L) = R_1$, a $y(L) = R_2$ jest dane wzorem¹⁰

$$P[y] = \int_{-L}^L dx \mathcal{P}(y, y') = \int_{-L}^L dx 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa $\mathcal{P}$ nie zależy od x , całką pierwszą odpowiedniego równania Eulera-Lagrange'a jest "hamiltonian" (czynniki 2π można spokojnie opuścić):

$$y' \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y'} - \mathcal{P} \equiv \frac{-y}{\sqrt{1 + y'^2}} = -C = \text{const.}$$

Rozviklując względem y' znajdujemy związek

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \pm \frac{1}{C} \int dx.$$

Znak $\pm$ jest znakiem pochodnej dy/dx , która, nawet przy ustalonym znaku stałej C , może być na jednym odcinku ujemna, a na innym dodatnia; dlatego trzeba go tu w zasadzie uwzględnić jawnie. Podstawiając w całce po lewej $y = C \operatorname{ch} \theta$ znajdujemy

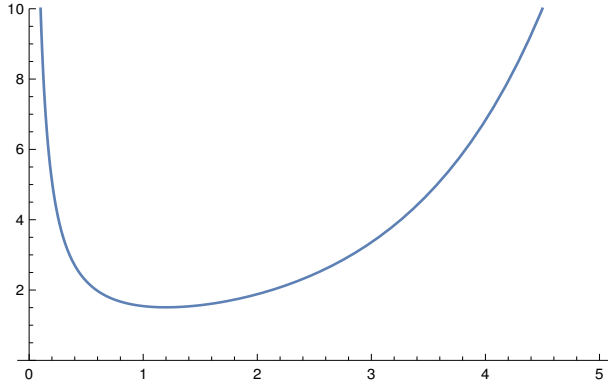
$$y(x) = C \operatorname{ch} \left(\frac{x + D}{C} \right),$$

gdzie D jest drugą stałą dowolną. Stałe C i D wyznaczamy z warunków $y(-L) = R_1$, $y(L) = R_2$. Może istnieć jedno rozwiązanie, albo dwa albo może nie być żadnego. Najłatwiej zobaczyć to na przypadku $R_1 = R_2 \equiv R$. Bez straty ogólności można też przyjąć $L = 1$ (promień R mierzymy w jednostkach L - charakter rozwiązania zależy tylko od stosunku R/L). Wtedy z symetrii wynika, że $D = 0$ i dwa równania stają się jednym i tym samym warunkiem na $\tilde{C} \equiv 1/C$

$$R = \frac{\operatorname{ch}(\tilde{C})}{\tilde{C}}.$$

Graficznie, na płaszczyźnie $(\tilde{C}, z)$, rozwiązanie jest rzędną (a może odciętą? kto pamięta te dziwne nazwy!? ale chyba jednak odciętą) punktu, w którym krzywa $z = \tilde{C}^{-1} \operatorname{ch}(\tilde{C})$ pokazana na rysunku 5 przecina się z poziomą prostą $z = R$. Jest więc jasne, że gdy R jest

¹⁰Uzasadnienie wzoru: jest to suma pól powierzchni prostokątnych pasków, na jakie dzielą tę powierzchnię płaszczyzny prostopadle do osi x odległe od siebie o dx : długością paska jest $2\pi y$, a wysokością $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.



Rysunek 5: Wykres funkcji $\tilde{C}^{-1}\text{ch}\tilde{C}$.

mniejsze od pewnej krytycznej wartości, nie ma żadnych punktów przecięcia i rozwiązanie nie istnieje. Oznacza to, że minimalne pole ma w takiej sytuacji powierzchnia, która “przykleja” się do kół, na których jest rozpięta i redukuje się do prostej łączącej ich środki; pole takiej “powierzchni” jest równe $\pi(R_1^2 + R_2^2)$ (w rozpatrywanym tu przypadku $2\pi R^2$), a krzywa $y(x)$ jest nieróżniczkowalna; rozpatrywany funkcjonal nie ma ekstremali (minimum) w klasie powierzchni zadanych krzywymi różniczkowalnymi. Jednoznaczne rozwiązanie jest tylko wtedy, gdy R przyjmuje pewną szczególną wartość (przy jednej szczególnej wartości stosunku R/L). Dla R większych są zawsze dwa rozwiązania $\tilde{C}_1$ i $\tilde{C}_2$. Najłatwiej się zorientować jak one wyglądają, gdy $R \gg 1$ ($R \gg L$). Jednym rozwiązaniem równania $R = \tilde{C}^{-1}\text{ch}\tilde{C}$ jest wtedy $\tilde{C} \approx 1/R$ i odpowiadająca mu ekstremala funkcjonału, którą można zapisać w postaci

$$y(x) = R \frac{\text{ch}\tilde{C}x}{\text{ch}\tilde{C}} \approx R \frac{\text{ch}(x/R)}{\text{ch}(1/R)}$$

schodzi tylko nieznacznie, ponieważ $\text{ch}(x/R) \lesssim 1$, w dół, poniżej wartości $y = R$. Rozwiązanie to jest oczywiste fizycznie i rzeczywiście odpowiada najmniejszej powierzchni. Drugim rozwiązaniem równania $R = \tilde{C}^{-1}\text{ch}\tilde{C}$, gdy $R \gg 1$, jest $\tilde{C} \gg 1$. Odpowiadającym mu punktem stacjonarnym funkcjonału jest wtedy funkcja (jej formalna postać jest taka sama jak pierwsze, ścisła postać wypisana wyżej), która przy $x \sim 0$, gdzie $\text{ch}(\tilde{C}x) \approx 1$ wyraźnie “siada”. Przypuszczalnie nie jest to maksimum (lokalne) funkcjonału, bo jest oczywiste, że każdą powierzchnię obrotową można nieco “pomarszczyć” zwiększając dowolnie jej pole; trudno też sobie wyobrazić, by rozwiązaniu temu odpowiadało (lokalne) minimum; przypuszczalnie jest to punkt siodłowy - ale dar “widzenia” takich rzeczy w przestrzeniach funkcji jest dany tylko nielicznym, zaprawionym w analizie funkcjonalnej.

Zadanie 7.6 (Szkoleniowe, bo odpowiedź jest oczywista)

Znaleźć wariacyjnie najkrótszą drogę łączącą na płaszczyźnie xy dwa ustalone punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$. Rozwiązać problem w zmiennych biegunowych. Rozwiązać ten sam problem w przestrzeni o D wymiarach.

Rozwiązanie

W dwóch wymiarach zadanie jest banalne: długość krzywej γ łączącej punkty A i B jest dana funkcjonalem

$$J[\gamma] = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + y'^2},$$

który prowadzi, ponieważ funkcja podcałkowa nie zależy ani od x ani od y , do oczywistego równania

$$\frac{dy}{dx} = C = \text{const},$$

skąd, jak należało się spodziewać, $y(x) = Cx + D$.

Wartość funkcjonala $J[\gamma]$ obliczona na danej drodze γ nie zależy od wyboru zmiennych. W zmiennych walcowych np.

$$J[\gamma] = \int d(r \cos \varphi) \sqrt{1 + \left[\frac{d(r \sin \varphi)}{d(r \cos \varphi)} \right]^2} = \int \sqrt{[d(r \cos \varphi)]^2 + [d(r \sin \varphi)]^2},$$

czyli, parametryzując krzywą γ kątem φ ,

$$J[\gamma] = \int d\varphi \mathcal{J}(r, r') = \int d\varphi \sqrt{r'^2 + r^2}.$$

Odpowiadające tej postaci funkcjonala równanie Eulera-Lagrange'a ma nieciekawą postać

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + r^2}} = \frac{r}{\sqrt{r'^2 + r^2}}.$$

Na szczęście funkcja podcałkowa $J[\gamma]$ nie zależy od zmiennej całkowania φ , więc stałą jest “hamiltonian”

$$r' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r'} - \mathcal{J} = -\frac{r^2}{\sqrt{r'^2 + r^2}} = -C = \text{const}.$$

Po wywikłaniu względem r' i rozdzieleniu zmiennych dostajemy stąd ($\pm$ jest znakiem pochodnej $dr/d\varphi$, który a priori mógłby się zmieniać na krzywej przy ustalonym C)

$$\pm \int d\varphi = C \int \frac{dr}{r \sqrt{r^2 - C^2}} = C \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2}}}.$$

Standardowym chwytem jest tu podstawienie $u = C/r$, które daje

$$\pm(\varphi + \varphi_0) = - \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos u.$$

Zatem $u \equiv C/r = \cos(\varphi + \varphi_0)$, czyli

$$C = r \cos \varphi \cos \varphi_0 - r \sin \varphi \sin \varphi_0 \equiv x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0,$$

co oczywiście jest równaniem prostej $y = Ax + B$ z $A = \operatorname{ctg} \varphi_0$ i $B = -C/\sin \varphi_0$.

W przestrzeni D wymiarowej, aby traktować symetrycznie wszystkie współrzędne x_i najwygodniej jest przyjąć opis parametryczny $x_i = x_i(\xi)$ krzywej γ , w którym parametr $\xi \in [0, \xi_k]$ tak, że $x_i(0) = x_i^A$, $x_i(\xi_k) = x_i^B$. Długość drogi jest wtedy dana funkcjonałem (kropki oznaczają pochodne po ξ)

$$J[\gamma] = \int_0^{\xi_k} d\xi \mathcal{J}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_D) = \int_0^{\xi_k} d\xi \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_D^2}.$$

Funkcjonał $J[\gamma]$ jest niezmienniczy względem reparametryzacji krzywej (czyli mówiąc górnolotnie - prof. Meissner to uwielbia - względem działania grupy dyffeomorfizmów), tj. jeśli $\xi = \xi(\tau)$, to

$$x'_i \equiv \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{d\xi} \frac{d\xi}{d\tau} \equiv \dot{x}_i \frac{d\xi}{d\tau},$$

i, ponieważ $d\xi = d\tau(d\xi/d\tau)$,

$$J[\gamma] = \int_0^{\xi_k} d\xi \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_D^2} = \int_{\tau_i}^{\tau_k} d\tau \sqrt{x_1'^2 + \dots + x_D'^2},$$

z $0 = \xi(\tau_i)$, $\xi_k = \xi(\tau_k)$. Ma więc on tę samą postać¹¹ (jeśli nie liczyć innych oznaczeń pochodnych po ξ i po τ), niezależnie od wyboru parametryzacji krzywej.

Ponieważ $\mathcal{J}$ nie zależy od x_i wszystkie równania Eulera-Lagrange'a dają się raz scałkować prowadząc do układu D równań:

$$\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_D^2}} = C_i, \quad i = 1, \dots, D.$$

Wynika z nich, że

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{C_i}{C_j} \equiv C_{ij} = \text{const},$$

¹¹Należy to porównać z zamianą zmiennych z kartezjańskich do walcowych, rozpatrywaną wyżej: tam wartość funkcjonału nie zależała od wyboru zmiennych, ale sama postać funkcji podcałkowej była inna. Nie była więc to niezmienniczość (czyli symetria).

dla każdej pary indeksów i oraz j , czyli że dowolna współrzędna x_i wyraża się przez dowolną inną współrzędną x_j funkcją liniową (w sensie szkolnym, a nie w ścisłym sensie algebraicznym). Rozwiązaniem są więc związki $x_i(\xi) = \beta_i h(\xi) + \alpha_i$, w których $h(\xi)$ jest dowolną funkcją, co odpowiada dowolności parametryzacji krzywej (prostej). Stałe całkowania C_i są wtedy równe $C_i = \beta_i / \sqrt{\beta_1^2 + \dots + \beta_D^2}$. Związki te, to oczywiście parametryczny opis prostej.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na “hamiltonian”, który, ponieważ funkcja podcałkowa $\mathcal{J}$ w funkcjonale $J[\gamma]$ nie zależy od ξ , powinien być stałą. Znajdujemy jednak, że

$$\sum_{i=1}^D \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{x}_i} - \mathcal{J} \equiv 0.$$

Hamiltonian tożsamościowo znika! Odpowiedzialny jest za to fakt, że funkcja podcałkowa jest funkcją jednorodną rzędu pierwszego prędkości $\dot{x}_i$, tzn, ma własność (w rozpatrywanym wyżej zagadnieniu funkcja $\mathcal{J}$ nie zależy od x_i)

$$\mathcal{J}(x_1, \dots, x_D, \lambda \dot{x}_1, \dots, \lambda \dot{x}_D) = \lambda \mathcal{J}(x_1, \dots, x_D, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_D).$$

Jeśli równość tę zróżniczkujemy się po λ i położy $\lambda = 1$, otrzyma się związek oznaczający znikanie “hamiltonianu” (jest to tzw. twierdzenie Eulera o funkcjach jednorodnych - w termodynamice prowadzi ono do tzw. równania Gibbsa-Duhema). Jest to typowa sytuacja, gdy funkcjonal jest niezmienniczy, tak jak tutaj, względem reparametryzacji, bo wymaga ona właśnie, by funkcja podcałkowa była funkcją jednorodną rzędu pierwszego prędkości.

Zadanie 7.9

Wykazać, że geodetyką (tj. najkrótszą krzywą) na sferze (o promieniu R) łączącą dwa zadane punkty sfery jest wycinek koła wielkiego (tj. krzywej powstałej z przecięcia sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej środek) przechodzącego przez te dwa punkty.

Rozwiązanie

Szukamy leżącej na sferze drogi γ , na której funkcjonal

$$L[\gamma] = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

osiąga ekstremum. Warunkiem zapewniającym, że droga γ przebiega po sferze jest $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

W tym przypadku od razu przechodzimy do zmiennych zgodnych z więzami $x(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi$, $y(\theta, \varphi) = R \sin \theta \sin \varphi$, $z(\theta, \varphi) = R \cos \theta$, w których $L[\gamma]$, po sparametryzowaniu drogi kątem θ (szukamy więc funkcji $\varphi = \varphi(\theta)$) ma postać

$$L[\gamma] = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta \sqrt{1 + \varphi'^2 \sin^2 \theta},$$

w której $\varphi' = d\varphi/d\theta$. Funkcja podcałkowa nie zależy tu od samej szukanej funkcji $\varphi(\theta)$, więc równanie Eulera-Lagrange'a sprowadza się do

$$\frac{\varphi' \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \varphi'^2 \sin^2 \theta}} = H = \text{const.}$$

Stąd, rozwikłując względem $d\varphi/d\theta$ i całkując przez rozdzielanie zmiennych otrzymujemy

$$\varphi - \varphi_0 = \pm H \int \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - H^2}} = \pm H \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - H^2/\sin^2 \theta}},$$

Podstawiamy $u = \text{ctg} \theta$ (czyli $1/\sin^2 \theta = 1 + u^2$), $du = -d\theta/\sin^2 \theta$, co daje

$$\varphi - \varphi_0 = \mp H \int \frac{du}{\sqrt{1 - (1 + u^2)H^2}} = \mp H \int \frac{du}{\sqrt{1 - H^2 - u^2 H^2}} = \mp \int \frac{dw}{\sqrt{1 - H^2 - w^2}}.$$

Stąd $\varphi - \varphi_0 = \mp \arcsin(Hu/\sqrt{1 - H^2})$, albo

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \mp \frac{H}{\sqrt{1 - H^2}} \text{ctg} \theta.$$

Po zapisaniu tego wyniku w postaci

$$\sqrt{1 - H^2} \sin \varphi_0 \sin \theta \cos \varphi - \sqrt{1 - H^2} \cos \varphi_0 \sin \theta \sin \varphi - H \cos \theta = 0,$$

widać (bo $x = R \sin \theta \cos \varphi$ itd.), że punkty leżące na ekstremali spełniają równanie

$$x \sqrt{1 - H^2} \sin \varphi_0 - y \sqrt{1 - H^2} \cos \varphi_0 - z H = 0.$$

Jest to właśnie równanie płaszczyzny przechodzącej przez środek sfery. Stałe φ_0 i H trzeba tak dobrać, by ekstremala przechodziła przez dwa zadane punkty.