

Mechanika Klasyczna 2024/2025

10 seria zadań domowych

UWAGA: zbierane będą zadania 1a, 4 i 5, reszta do poćwiczenia przed egzaminem

Zad. 1.

Korzystając z równań Hamiltona-Jacobiego przeanalizować ruch cząstki w polu:

- dipola o potencjale $V(\vec{r}) = \alpha \frac{\cos(\theta)}{r^2}$, gdzie α jest stałą;
- fali elektromagnetycznej o polaryzacji kołowej, gdzie potencjał skalarny $\varphi = 0$, zaś potencjał wektorowy wynosi $\vec{A} = A_0 \left[\sin(kz - ct), -\cos(kz - ct), 0 \right]$, gdzie k jest wektorem falowym, zaś c jest prędkością światła.

Zad. 2.

Cząstka o masie m i ładunku $-e$ porusza się w polu siły potencjalnej $V_1(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ (na przykład opisującej oddziaływanie z nieskonczone ciężkim, punktowym jądrem atomowym o ładunku Ze).

- Napisać lagranżjan tej cząstki w paraboloidalnym układzie współrzędnych

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \phi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \phi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta). \quad (1)$$

- Znaleźć hamiltonian, wykonując transformację Legendre'a uzyskanego w poprzednim punkcie lagranżjanu.

Zad. 3.

Cząstka o masie m porusza się w polu dwóch nieruchomych centrów kulombowskich oddalonych o 2σ :

$$U = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$$

gdzie r_1, r_2 są odległościami cząstki od centrów. Znaleźć (w kwadraturach, czyli wypisując całki dające rozwiązanie, bez ich wykonywania, to trudne) ruch cząstki.

Równanie H-J separuje się dla tego przypadku przy użyciu tzw. współrzędnych eliptycznych (wybieramy oś z wzdłuż prostej łączącej centra potencjału, początek układu w połowie odległości między nimi):

$$\begin{aligned}\rho &= \sigma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \\ z &= \sigma \xi \eta \\ 1 &\leq \xi < \infty & -1 \leq \eta \leq 1\end{aligned}$$

Wtedy (udowodnić):

$$\begin{aligned}r_1 &= \sigma(\xi - \eta) \\ r_2 &= \sigma(\xi + \eta)\end{aligned}$$

Zad. 4.

Dane są cztery wielkości A_i :

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{4} (x^2 + p_x^2 - y^2 - p_y^2) \\ A_2 &= \frac{1}{2} (xy + p_x p_y) \\ A_3 &= \frac{1}{2} (xp_y - yp_x) \\ A_4 &= (x^2 + p_x^2 + y^2 + p_y^2)\end{aligned}$$

Znaleźć algebrę nawiasów Poissona wielkości A_i , czyli obliczyć wszystkie (A_i, A_j) .

Zad. 5.

Pokazać za pomocą nawiasów Poissona, że dla ruchu w polu

$$U(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r} - \vec{F}\vec{r}$$

zachowana jest wielkość

$$C = \vec{F}(\vec{v} \times \vec{L}) - \frac{\alpha \vec{F}\vec{r}}{r} + \frac{1}{2} (\vec{F} \times \vec{r})^2.$$