

Mechanika klasyczna 2024/2025

Zadanie domowe I - rozwiązania

Zadanie 1

Działo wyrzuca pociski o początkowej szybkości v w dowolnym (w stosunku do horyzontu) kierunku. Wyznaczyć równanie powierzchni ograniczającej obszar, do każdego punktu którego pocisk może dotrzeć.

Rozwiązanie

Jest jasne, że szukana powierzchnia jest symetryczna względem obrotów wokół pionowej osi przechodzącej przez punkt płaszczyzny, z którego wyrzucane są pociski. Wystarczy więc wyznaczyć odpowiednią krzywą na półpłaszczyźnie (x, z) o $x \geq 0$, czyli rozpatrzyć pociski wyrzucane pod kątem $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ w stosunku do osi x .

Zależność od czasu położenia pocisku wyrzuczonego w chwili $t = 0$ z punktu $(0, 0)$ tej płaszczyzny pod kątem α w stosunku do horyzontu (osi x) jest dana wzorami

$$x(t) = vt \cos \alpha, \quad z(t) = vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Eliminując czas otrzymujemy równanie toru w postaci

$$z(x, \alpha) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}.$$

Przy ustalonej (liczonej po ziemi) odległości od działu, czyli przy ustalonej współrzędnej x , współrzędna z punktu, w którym znajduje się pocisk (a więc punktu przezeń osiągalnego) jest ciągłą funkcją kąta α . Oczywiście współrzędna ta powinna być nieujemna (pocisk nie dociera pod ziemię) więc warunek $z(x, \alpha) \geq 0$, czyli $\sin \alpha \cos \alpha \equiv \frac{1}{2} \sin 2\alpha \geq gx/2v^2$ ogranicza zasięg działu na powierzchni Ziemi do $x \leq v^2/g$. Ponadto, przy ustalonym x funkcja $z(x, \alpha)$ ma maksimum dla kąta α_x takiego, że

$$\frac{x}{\cos^2 \alpha_x} - \frac{gx \operatorname{tg} \alpha_x}{v^2 \cos^2 \alpha_x} = 0,$$

czyli $\operatorname{tg} \alpha_x = v^2/gx$. Przy ustalonym x osiągalne są wszystkie punkty o z mniejszym niż

$$z(x, \alpha_x) = x \operatorname{tg} \alpha_x - \frac{gx^2}{2v^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_x) = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}.$$

Równaniem szukanej powierzchni jest więc

$$z(x, y) = \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2} (x^2 + y^2).$$

Pocisk z działu może osiągnąć każdy punkt w obszarze ograniczonym tą powierzchnią i płaszczyzną $z = 0$.

Zadanie 2

Punkt porusza się ze stałą szybkością v po leżącej w płaszczyźnie (x, y) krzywej o równaniu $y(x) = (2/3)ax^{3/2}$ ($a > 0$). Podać zależność od czasu współrzędnych x i y jego położenia przyjmując, że $x(0) = 0$. Podać kartezjańskie składowe wektora $\mathbf{v}$ prędkości i wektora $\mathbf{a}$ przyspieszenia punktu. Wyznaczyć także krzywiznę krzywej jako funkcji jej długości l .

Rozwiązanie

Szybkość v punktu jest równa l/t , gdzie l jest długością krzywej, po której punkt się porusza, przebytą w czasie t . Długość krzywej dzielącej leżące na niej punkty A i B jest dana całką

$$l_{AB} = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Ponieważ krzywa jest sparametryzowana zmienną x i przyjmując za A punkt o $x_A = 0$, za B punkt o $x_A = x$, znajdujemy długość krzywej

$$l(x) = \int_0^x d\tilde{x} \sqrt{1 + (y'(\tilde{x}))^2} = \int_0^x d\tilde{x} \sqrt{1 + a^2 \tilde{x}} = \frac{2}{3a^2} \left[(1 + a^2 x)^{3/2} - 1 \right].$$

Odwracając ten związek znajdujemy

$$x(l) = \frac{1}{a^2} \left[\left(1 + \frac{3}{2} a^2 l \right)^{2/3} - 1 \right],$$

$$y(l) = \frac{2}{3a^2} \left[\left(1 + \frac{3}{2} a^2 l \right)^{2/3} - 1 \right]^{3/2}.$$

Podstawiając tu $l = t/v$ otrzymujemy szukane wzory na $x(t)$ i $y(t)$. Mając $x(l)$ i $y(l)$ łatwo znaleźć składowe t_x i t_y w bazie $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ wektora $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/dl$ stycznego do krzywej:

$$t_x = \frac{dx}{dl} = \left(1 + \frac{3}{2} a^2 l \right)^{-1/3},$$

$$t_y = \frac{dy}{dl} = \left(1 + \frac{3}{2} a^2 l \right)^{-1/3} \left[\left(1 + \frac{3}{2} a^2 l \right)^{2/3} - 1 \right]^{1/2}.$$

Jest jasne, że $t_x^2 + t_y^2 = 1$, tak jak powinno być. Składowymi kartezjańskimi wektora prędkości $\mathbf{v} = v\mathbf{t}$ są więc $v_x = vt_x$ i $v_y = vt_y$.

Aby wyznaczyć lokalną krzywiznę różniczkujemy wektor $\mathbf{t}$:

$$\frac{dt_x}{dl} = -\frac{1}{2} a^2 \left(1 + \frac{3}{2} a^2 l \right)^{-4/3},$$

$$\frac{dt_y}{dl} = \frac{1}{2} a^2 \left(1 + \frac{3}{2} a^2 l \right)^{-4/3} \left[\left(1 + \frac{3}{2} a^2 l \right)^{2/3} - 1 \right]^{-1/2}.$$

Ponieważ $\dot{v} = 0$ składowa styczna przyspieszenia punktu znika i $\mathbf{a} = v^2 d\mathbf{t}/dl$. Składowymi kartezjańskimi wektora przyspieszenia $\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{t} + v^2 d\mathbf{t}/dl$ są więc $a_x = v^2 dt_x/dl$ i $a_y = v^2 dt_y/dl$. Krzywizna $\rho(l)$ jest odwrotnością długości wektora $d\mathbf{t}/dl$ i jest równa (a ma wymiar $L^{-1/2}$!)

$$\rho(l) = \frac{2}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2} a^2 l \right) \left[\left(1 + \frac{3}{2} a^2 l \right)^{2/3} - 1 \right]^{1/2}.$$

Zadanie 3

Na ciało o masie m i prędkości początkowej $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ działa tylko siła oporu

$$\mathbf{F}_{\text{op}} = -\kappa |\mathbf{v}|^\alpha \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad \kappa, \alpha > 0.$$

Zbadać jak czas trwania takiego ruchu i jego zasięg zależą od wykładnika α .

Rozwiązanie

Ponieważ na ciało działa tylko jedna siła, która ma zawsze ten sam kierunek, co chwilowa prędkość ciała (i przeciwny do niej zwrot), dobrze jest wybrać oś x w kierunku $\mathbf{v}_0$. Problem staje się wtedy jednowymiarowy i redukuje się do rozwiązywania równania

$$m\dot{v}(t) = -\kappa v^\alpha(t), \quad \text{czyli} \quad \dot{v}(t) = -\frac{\kappa}{m} v^\alpha(t),$$

z warunkami początkowymi $v(0) = v_0$ ($v_0 > 0$) oraz, bez straty ogólności, $x(0) = 0$. Rozdzielenie zmiennych prowadzi do całki

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^\alpha} = -\frac{\kappa}{m} t,$$

która, jako całka z funkcji potęgowej, jeśli $\alpha \neq 1$, daje

$$\frac{1}{1-\alpha} [v^{1-\alpha}(t) - v_0^{1-\alpha}] = -\frac{\kappa}{m} t,$$

czyli, po “odkręceniu”,

$$v(t) = v_0 \left[1 + (\alpha - 1) \frac{\kappa}{m} v_0^{\alpha-1} t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Wynik dla $\alpha = 1$, która to wartość α jest, jak widać, wyróżniona (uzasadnione jest więc nazwanie jej wartością krytyczną), można dostać albo obliczając bezpośrednio całkę z $\alpha = 1$, albo, co jest bardziej kształcące, dokonując w powyższym wzorze przejścia granicznego $\alpha \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left[1 + (\alpha - 1) \frac{\kappa}{m} v_0^{\alpha-1} t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = v_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \exp \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \ln \left[1 + (\alpha - 1) \frac{\kappa}{m} v_0^{\alpha-1} t \right] \right\} \\ &= v_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \exp \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \left[(\alpha - 1) \frac{\kappa}{m} t - \frac{1}{2} (\alpha - 1)^2 \frac{\kappa^2}{m^2} t^2 + \dots \right] \right\} = v_0 e^{-(\kappa/m)t}, \end{aligned}$$

(Pod logarytmem można już było spokojnie położyć $v_0^{\alpha-1} = 1$).

Z otrzymanych wzorów tych widać, że jeśli $\alpha < 1$, to czas trwania ruchu jest skończony: ciało zatrzymuje się po czasie

$$t_{\max} = \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} > 0.$$

Zasięg ruchu, jest w takim przypadku, rzecz jasna, skończony.

Jeśli zaś $\alpha \geq 1$, to ruch trwa wiecznie (co nie znaczy jeszcze, jak zobaczymy niżej, że zasięg jego jest nieskończony) i asymptotycznie $v(t) \propto 1/t^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Wynik ten może na pierwszy rzut oka wydawać się dziwny: przecież wydaje się, że dla większych wartości α siła oporu jest większa! I istotnie tak jest, ale dla dużych prędkości;¹ jednak dla kwestii, czy siła oporu spowoduje całkowite zatrzymanie się ciała, decydująca jest wielkość siły oporu dla prędkości małych, nie zaś dużych, a w sposób oczywisty jeśli $(v/v_{\text{char}}) < 1$, gdzie v_{char} jest jakąś prędkością charakterystyczną, to $(v/v_{\text{char}})^{\alpha_1} > (v/v_{\text{char}})^{\alpha_2}$, gdy $\alpha_1 < \alpha_2$.

Zależność przebytej drogi x od czasu jest dana całką

$$x(t) = \int_0^t dt' v(t') = v_0 \int_0^t dt' \left(1 - \frac{t'}{\tau} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

gdzie wielkość $\tau \equiv (m/\kappa)(v_0^{1-\alpha}/(1-\alpha)) = t_{\max}$ jest, gdy $\alpha < 1$, tożsama z czasem trwania ruchu $t_{\max}$, dla $\alpha \geq 1$ zaś $|\tau|$ jest po prostu pewnym czasem charakterystycznym. Otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \tau \int_0^{t/\tau} d\xi (1-\xi)^{\frac{1}{1-\alpha}} = v_0 \tau \frac{-1}{1 + \frac{1}{1-\alpha}} (1-\xi)^{1 + \frac{1}{1-\alpha}} \Big|_0^{t/\tau} \\ &= v_0 \tau \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right] = \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

¹Jak zawsze, aby orzec, czy wielkość wymiarowa jest duża, czy mała, trzeba powiedzieć, w porównaniu z czym. W związku z tym zauważmy, że wymiar współczynnika κ w podanym wzorze na siłę oporu zmienia się z α ; aby operować współczynnikiem o wymiarze niezależnym od α , należy wzór ten zapisać w postaci

$$\mathbf{F}_{\text{op}} = -\kappa' \frac{|\mathbf{v}|^\alpha}{v_{\text{char}}^\alpha} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

w której $\kappa' \equiv \kappa v_{\text{char}}^\alpha$ ma już wymiar $[M][L][T]^{-2}$ niezależny od α . Pojawia się wtedy prędkość charakterystyczna v_{char} i to porównanie z nią decyduje, czy prędkość $v(t)$ jest duża lub mała.

Ze wzoru tego od razu widać, że 2 jest drugą krytyczną wartością wykładnika α . Oczywiście jeśli $\alpha < 1$, zasięg d jest skończony i wynosi

$$d = x(t_{\max}) = \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

Wzór ten pozostaje słuszny także przy $\alpha = 1$ (gdy ruch trwa wiecznie), co można sprawdzić albo całkując bezpośrednio wzór na $v(t)$ z $\alpha = 1$, lub też dokonując przejścia granicznego

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{m}{\kappa} v_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ 1 - \left[1 - (1-\alpha) \frac{\kappa}{m} v_0^{\alpha-1} t \right]^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right\} \\ &= \frac{m}{\kappa} v_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ 1 - \exp \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \ln \left[1 - (1-\alpha) \frac{\kappa}{m} v_0^{\alpha-1} t \right] \right) \right\} \\ &= \frac{m}{\kappa} v_0 \left(1 - e^{-(\kappa/m)t} \right). \end{aligned}$$

co dla $t = \infty$ daje $d_{\alpha=1} = (m/\kappa)v_0$. Zasięg ruchu pozostaje skończony aż do $\alpha = 2$, gdyż dla $1 < \alpha < 2$ wykładnik $(2-\alpha)/(1-\alpha)$ jest ujemny podobnie jak i τ i, gdy $t \rightarrow \infty$,

$$x(t) = \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (t/|\tau|)]^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}} \right\} \longrightarrow \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

Dla $\alpha = 2$ wzór na $x(t)$ jest osobliwy i konieczne jest znowu przejście graniczne

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{m}{\kappa} \lim_{\alpha \rightarrow 2} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right\} \\ &= \frac{m}{\kappa} \lim_{\alpha \rightarrow 2} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Po rozwinięciu funkcji exponens otrzymujemy stąd

$$x(t) = \frac{m}{\kappa} \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) = \frac{m}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa}{m} v_0 t \right).$$

Zasięg jest więc wtedy nieskończony: przebyta droga rośnie wolno, jak logarytm czasu, ale jednak rośnie nieograniczenie. Oczywiście zasięg jest też nieskończony dla wszystkich $\alpha > 2$ (i wtedy rośnie już z czasem potęgowo).