

FALĘ GRAWITACYJNE NA WODZIE

(28)

FALĘ POWIERZCHNIOWE, ~~ZANIKAJĄCE~~ UNOSZĄCE
WENNY TRZYM WARSZY, IN GŁĘBIEJ
TYM STABIEJ.

ROZPATRUJEMY FALĘ O MAŁEJ PRĘDKOŚCI
(CZĄSTEK CIECZĄ W FALI, NIEKONIE CZYNI
SAMO FALI!).

OKRES PRZEMIAN τ

AMPLITUDA FALI a , DŁ. FALI λ

$$v \sim \frac{a}{\tau}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \frac{v}{\tau}, \quad \vec{v} \nabla \vec{v} \sim \frac{v^2}{\lambda} \quad \left(\vec{v} \nabla \vec{v} \sim \frac{v}{\lambda} \right)$$

(CHCEMY ZANIEDBAĆ WYRAZ $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$)

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} \ll \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Rightarrow \frac{v^2}{\lambda} \sim \frac{a^2}{\lambda \tau^2} \ll \frac{a}{\tau^2}$$

$$a \ll \lambda$$

AMPLITUDA MAŁA W PORÓWNIANIU Z DŁ. FALI

$(\vec{v} \nabla) \vec{v}$ ZANIEDBYWALNY $\rightarrow$ RUCH POTENCJALNY

$$gz + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

POMIAMI WYRAZ $\frac{v}{z}$, STATA $\psi(t) \rightarrow 0$

(29)

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Δy - pT- ciowy, $o' z$ w góre.

~~RÓWNOWAŻE~~

(WYCHYLENIE) PUNKTÓW POWIERZCHNI - $\zeta(x, y, t)$
PIONOWE

w RÓWNOWAŻE $\zeta = 0$

CISNIENIE ATMOSFERYCZNE (OGÓLNE - STATA) $\rightarrow p_0$

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$\varphi \rightarrow \varphi + \frac{p_0 t}{\rho}$ (PRZECIECHOWANIE):

$$g \zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} = 0$$

ζ MAŁE $\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}$ ITP.

$$v_z = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{e}_z) v_z \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

ALB $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ - CZYLI

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=\zeta}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} \approx -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=0}$$

RAZEM:

(50)

$$\begin{cases} \text{W CIECZY } \Delta\varphi = 0 \\ \text{WAR. BRZEGOWY } \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

ZAKŁADAMY CIECZ O GŁĘBOKOŚCI h .

$$\text{NA DNI } v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$$

ROZWIĄZANIE W POSTACI FALI PŁASKIEJ:

$$\varphi = \omega(kx - \omega t) f(z)$$

$$\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$$

$$f = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

$$\text{~~Am~~ } v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \omega(kx - \omega t) k (Ae^{kz} - Be^{-kz})$$

$$v_z \Big|_{z=-h} = 0 \Rightarrow Ae^{-kh} = Be^{kh}$$
$$B = Ae^{-2kh}$$

$$\begin{aligned} \psi(z) &= A(e^{kz} + e^{-k(z+h)}) = Ae^{-kh} [e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}] \\ &= 2Ae^{-kh} \cosh k(z+h) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=0} = 0$$

39

$$\varphi = A \cos(kx - \omega t) \cosh k(z+h)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = A \cos(kx - \omega t) k \sinh kh$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t) \cosh kh$$

$$k \sinh kh - \frac{\omega^2}{y} \cosh kh = 0$$

$$\boxed{\omega^2 = ky \tanh kh}$$

ZWIAZEK DISPERSYJNY,

PRĘDKOŚĆ ROZCHODZENIA SIĘ FALI ("PR. GRUPOWA")

$$\vec{U} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}$$

DLA NASZYCH FAL

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sqrt{\frac{y}{k \tanh kh}} \left(\tanh kh + \frac{kh}{\cosh^2 kh} \right)$$

$h \rightarrow \infty$ (WODA GŁĘBOKA)

$$\omega^2 = ky, \quad U = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}}$$

WODA PŁYTKA $kh \ll 1$

32

$$\omega^2 = k^2 \sqrt{gh}$$

$$U = \sqrt{gh}$$

NA PŁYTKIEJ WODZIE SZYBKOSĆ FALI NIE ZALEŻY
OD JEJ DŁUGOŚCI, NA GŁĘBOKIEJ ROŚNIE Z
DŁUGOŚCIĄ,

INNE FALE =

DŁUGIE KANAŁY (SOLITONY, WYKRYTE
W ANGULI!)

FALĘ ENTROPII

FALĘ BEZWTAŃNOŚCIOWE W CIECZY
WIRUJĄCEJ

ITD.