FORMALIZM KANONICZNY

INNE (RÓWNOWAŻNE) SFORMUŁOWANIE RÓWNAŃ RUCHU.

f WSPÓŁRZĘDNYCH POŁOŻENIOWYCH $\rightarrow$ $2f$ WSPÓŁRZĘDNYCH "PRZESTRZENI FAZOWEJ"

$$(q_i, p_i) \qquad i = 1, \dots, f$$

"PĘDY UOGÓLNIONE" $\quad p_i = \dfrac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial \dot q_i}$

MOŻEMY WYRAZIĆ PRĘDKOŚCI UOGÓLNIONE PRZEZ PĘDY

$$\dot q_i = \dot q_i(q,p,t)$$

DEFINIUJEMY "HAMILTONIAN" (FUNKCJĘ HAMILTONA):

$$H(p,q,t) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot q_i(q,p,t) - L(q,\dot q(q,p,t),t)$$

WARIACJA HAMILTONIANU:

$$\delta H = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i \right) = \sum_i \Big(\cancel{p_i \delta \dot q_i} + \dot q_i \delta p_i$$

$$- \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i} \Big)$$

$$= \sum \left(\dot q_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \right)$$

134 ~~99~~

ALE: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \dot p_i$

$$\delta H = \Sigma\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right) = \Sigma\left(\dot q_i \delta p_i - \dot p_i \delta q_i\right)$$

$$\begin{cases} \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$ 2f równań 1 rzędu

ZAŁÓŻMY $L = \frac{1}{2}a_{ij}(q)\dot q_i \dot q_j - V(q)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = a_{ij}\dot q_j$$

$$H = \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L = a_{ij}\dot q_i \dot q_j - \frac{1}{2}a_{ij}\dot q_i \dot q_j + V = T + V$$

→ (CAŁKOWITA ENERGIA!)

MECHANIKA RELATYWISTYCZNA

$$L = -mc^2\sqrt{} - V$$

$$H = \bar p \bar v - \left(-mc^2\sqrt{} - V\right) = \frac{m\bar v^2}{\sqrt{}} + mc^2\sqrt{} + V = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + V$$

$$= c\sqrt{\bar p^2 + m_0^2c^2} + V$$

SIŁA LORENTZA $V = e(\varphi - \bar v\bar A)$ $\bar p = m\bar v + e\bar A \neq m\bar v$!

$$H = \frac{1}{2m}\left(\bar p - e\bar A\right)^2 + e\varphi$$

ZASADA WARIACYJNA DLA R. HAMILTONA ("TW. LIVENSA")

ROZPATRZMY WARIACJE δq_i T. ŻE $\delta q_i\big|_{t_1,t_2}=0$

ORAZ <u>DOWOLNE</u> δp_i (INTERPRETACJA NIEJASNA...)

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(p_i\dot q_i - H\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(p_i\delta\dot q_i + \dot q_i\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\left(-\dot p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(\dot q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta p_i\right]dt + \underbrace{p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}}_{0,\ \delta q_i|_{t_1,t_2}=0}$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\ldots)dt = 0 \iff \left.\begin{aligned}\dot p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\\ \dot q_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\end{aligned}\right\}\ \text{R. HAMILTONA}$$

TO NIE JEST $\iff$ ZAS. MAUPERTUIS, MIMO ŻE

$$L(q,\dot q,t) = p_i\dot q_i - H$$

TYM RAZEM WARIUJEMY NIE f TYLKO $2f$ ZMIENNYCH!

NAWIASY POISSONA

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}-\frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial u}{\partial p_i}\right)$$

$$\begin{cases}(u,v)=-(v,u)\\ (u,v_1+v_2)=(u,v_1)+(u,v_2)\\ (u,v_1v_2)=v_1(u,v_2)+(u,v_1)v_2\\ (u,(v,w))+(v,(w,u))+(w,(u,v))=0\end{cases}$$

PRZELICZYĆ JAKO PRZYKŁAD

(TOŻSAMOŚĆ JACOBIEGO)

$$\begin{cases}(u,q_i)=-\dfrac{\partial u}{\partial p_i}\\ (u,p_i)=\dfrac{\partial u}{\partial q_i}\end{cases}\qquad (q_i,p_j)=\delta_{ij}\qquad (q_i,q_j)=(p_i,p_j)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u,v)=\left(\frac{\partial u}{\partial t},v\right)+\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

MAMY $u(p,q,t)$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+(u,H)$$

W SZCZEGÓLNOŚCI, $\dot H=\frac{\partial H}{\partial t}$, $\frac{\partial H}{\partial t}=0\Rightarrow H=\text{CONST}.$

$$\dot{q}_i = (q_i, H) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = (p_i, H) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$u(p,q,t)$, $v(p,q,t)$ SĄ CAŁKAMI RUCHU (SĄ STAŁE W CZASIE RUCHU)

$$(H, (u,v)) = -(u, (v,H)) - (v, (H,u))$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u,v) - \frac{d}{dt}(u,v) = \left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right) - \left(v, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(u,v)$$

$$\frac{d}{dt}(u,v) = 0$$

(u,v) jest również całką ruchu!

NIESTETY, NAJCZĘŚCIEJ

$(u,v) \sim \alpha u + \beta v \ldots$

CIECZ FAZOWA

$\xi_i = q_i$

$\xi_{f+i} = p_i$

ξ_j $j = 1, \ldots, 2f$

CZASEM UŻYTECZNE NAWIASY LAGRANGE'A

$$[u,v] = \sum_r \left(\frac{\partial q_r}{\partial u}\frac{\partial p_r}{\partial v} - \frac{\partial q_r}{\partial v}\frac{\partial p_r}{\partial u}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{2f} (u_i, u_s)[u_i, u_r] = \delta_{rs}$$

– MACIERZE ODWROTNE

$\vec{\xi}$ – WEKTOR WODZĄCY W PRZESTRZENI FAZOWEJ

$$\operatorname{div} \dot{\vec{\xi}} = \sum_1^{2f} \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial \xi_i} = \sum_1^{f}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right) = \sum_1^{f}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}\right) = 0$$

$\operatorname{div} \vec{v} = 0$ – CIECZ NIEŚCIŚLIWA!

MOŻNA POKAZAĆ ŻE RUCH ZACHOWUJE OBJ. PRZESTRZ. FAZOWEJ!

CIECZ FAZOWA

$\xi_i = q_i \quad \xi_{f+i} = p_i \qquad i = 1 \dots f$

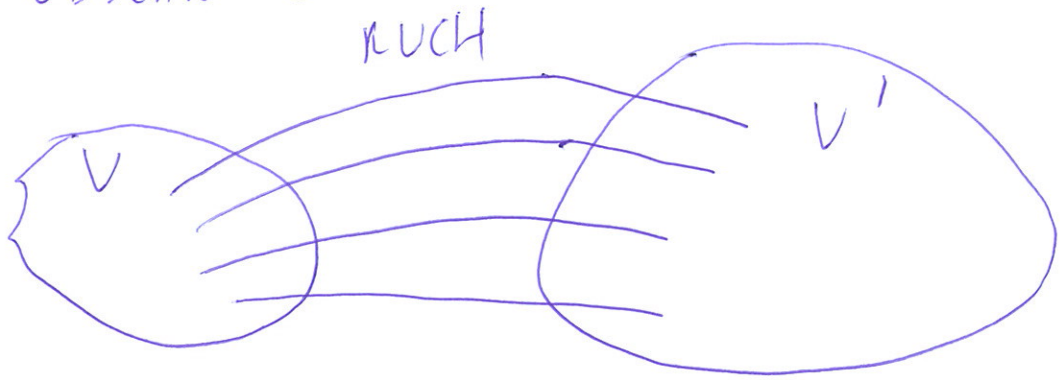
$\vec{\xi}$ – WEKTOR WODZĄCY

$$\operatorname{div} \dot{\vec{\xi}} = \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial \xi_i} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right)$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0$$

DLA p, q SPEŁNIAJĄCYCH R. RUCHU $\operatorname{div} \dot{\vec{\xi}} = 0$ – JAK DLA <u>CIECZY NIEŚCIŚLIWEJ</u>

WEŹMY OBSZAR V



$$V(t) = \int_{V(t)} d\xi_1 \dots d\xi_{2f}$$

WPROWADŹMY WSP. NUMERUJĄCE USTALONE "CZĄSTKI" CIECZY. MOŻNA JE WYBRAĆ JAKO $X_\alpha = \xi_\alpha(t=0)$, OZNACZMY TEŻ

$$V_0 = V(t=0) = \int_{V_0} dX_1 \dots dX_{2f}$$

$$V(t) = \int_{V(t)} d\xi_1 \ldots d\xi_{2f} = \int_{V_0} J(t)\, dX_1 \ldots dX_{2f}$$

$$J(t) = \det \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} \right|$$

$$\frac{dV}{dt} = \int_{V_0} \frac{dJ}{dt}\, dX_1 \ldots dX_{2f}$$

$$J = \frac{1}{(2f)!} \varepsilon_{i_1 \ldots i_{2f}} \epsilon_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2f}} \frac{\partial \xi_{i_1}}{\partial X_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \xi_{i_{2f}}}{\partial X_{\alpha_{2f}}}$$

MAMY

$$\frac{\partial \xi_l}{\partial X_\alpha} \frac{\partial J}{\partial \frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha}} = J \delta_{il} \longrightarrow \text{JEŻELI } i <> l \quad \varepsilon_{(\ldots)}$$

ZABIJA SUMĘ

ORAZ

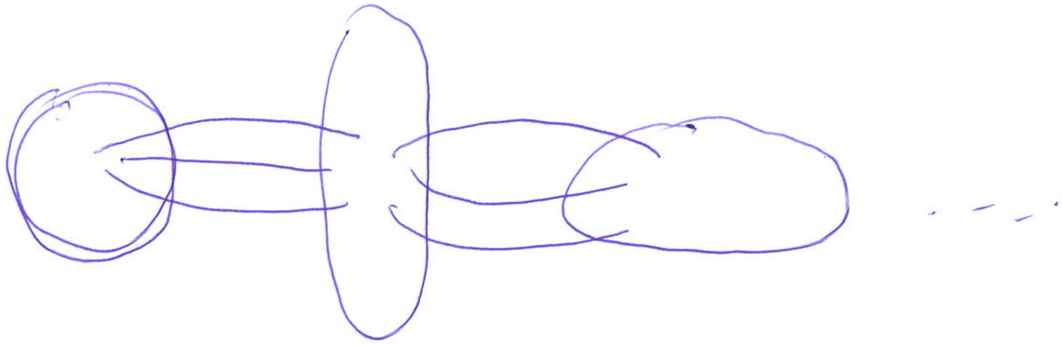
$$\frac{\partial X_\beta}{\partial \xi_i} J = \frac{\partial X_\beta}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial X_\alpha} \frac{\partial J}{\partial \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} \right)} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial J}{\partial \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} \right)} = \frac{\partial J}{\partial \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_\beta} \right)}$$

POLICZMY

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} \right)} \frac{d}{dt} \frac{\partial \xi_i}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial X_\alpha}{\partial \xi_i} J = \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial \xi_i} J$$

$$\frac{dJ}{dt} = \left(\operatorname{div} \dot{\vec{\xi}} \right) J = 0 \text{ DLA CIECZY FAZOWEJ!}$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \text{ — RUCH NIE ZMIENIA OBJĘTOŚCI!}$$



$$V = J_{2f} = \int dq_1 \dots dq_f \, dp_1 \dots dp_f = \text{CONST}$$

BEZWZGLĘDNY
„UNIWERSALNY NIEZMIENNIK CAŁKOWY RÓWNAŃ HAMILTONA"

INNE NIEZMIENNIKI? f SZTUK:

$$J_2 = \sum_{i=1}^{f} \int dp_i \, dq_i$$

$$J_4 = \sum_{i=1}^{f} \sum_{j=1}^{f} \int dq_i \, dp_i \, dq_j \, dp_j$$

$$\vdots$$

$$J_{2f-2} = \sum_{i_1=1}^{f} \dots \sum_{i_{f-1}=1}^{f} \int dp_{i_1} dq_{i_1} \dots dq_{i_{f-1}} dp_{i_{f-1}}$$

TW STOKESA

$$\oint_{\partial F} \sum_{i=1}^{n} A_i \, dx_i = \iint_F \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) dx_i \, dx_j$$

STĄD

$$J_2 = I_1 = \oint \sum_{i=1}^{f} p_i \, dq_i$$

$$J_4 = I_3 = \oiint \sum_{i,j=1}^{f} p_i \, dq_i \, dp_j \, dq_j$$

$$\vdots$$

I_1 DOSTAJE SIĘ $A_i = p_i \quad i \leq f$

$A_i = 0 \quad i > f$

ALTERNATYWNIE $A_i = 0 \quad i \leq f$, WTEDY

$A_i = -q_i \quad i > f$

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{f} q_i dp_i$$ ITP...

I_k – "WZGLĘDNE" NIEZMIENNIKI CAŁKOWE, BO OBSZARY CAŁKOWANIA NIE SĄ DOWOLNE

DOWÓD – OGÓLNY ŻMUDNY, ROZPATRZMY $J_2 = I_1$ (CAŁKA POINCARE)

$$\frac{d}{dt} J_2 = \frac{d}{dt} \oint_{\partial F} \sum_{i=1}^{f} p_i dq_i = \oint_{\partial F_0} \frac{d}{dt}\left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial X_\alpha}\right) dX_\alpha$$

$$= \oint_{\partial F_0} \left(\dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial X_\alpha} p_i\right) dX_\alpha$$

$$= \oint_{\partial F_0} \left(\dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial X_\alpha} - \dot{q}_i \frac{\partial p_i}{\partial X_\alpha}\right) dX_\alpha + \underbrace{\oint_{\partial F_0} \frac{\partial}{\partial X_\alpha} (\dot{q}_i p_i) dX_\alpha}_{\text{0 NA KONTURZE ZAMKNIĘTYM}}$$

$$\frac{d}{dt} J_2 = \frac{d}{dt} I_1 = \oint_{\partial F_0} \left(\dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial X_\alpha} - \dot{q}_i \frac{\partial p_i}{\partial X_\alpha}\right) dX_\alpha$$

SPEŁNIONE R. HAMILTONA:

$$\frac{d}{dt} J_2 = -\oint_{\partial F_0} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial X_\alpha}\right) dX_\alpha = -\oint_{\partial F_0} dH = 0$$

INNE NIEZMIENNIKI ("CAŁKA POINCARE" $- J_2, F_1$)

NIE MA! — TW LEE HWA-CHUNGA

JEŻELI ZNAJDZIEMY JAKIŚ I'_k, TO MOŻNA POKAZAĆ ŻE ZAWSZE $I'_k = c\, I_k$

JESZCZE OGÓLNIEJSZY NIEZMIENNIK — CAŁKA POINCARE-CARTANA

ROZSZERZONA ~~UOGÓLNIONA~~ PRZESTRZEŃ FAZOWA:

$$q_1 \dots q_f, p_1 \dots p_f, t \rightarrow 2f+1 \text{ WYMIARÓW}$$

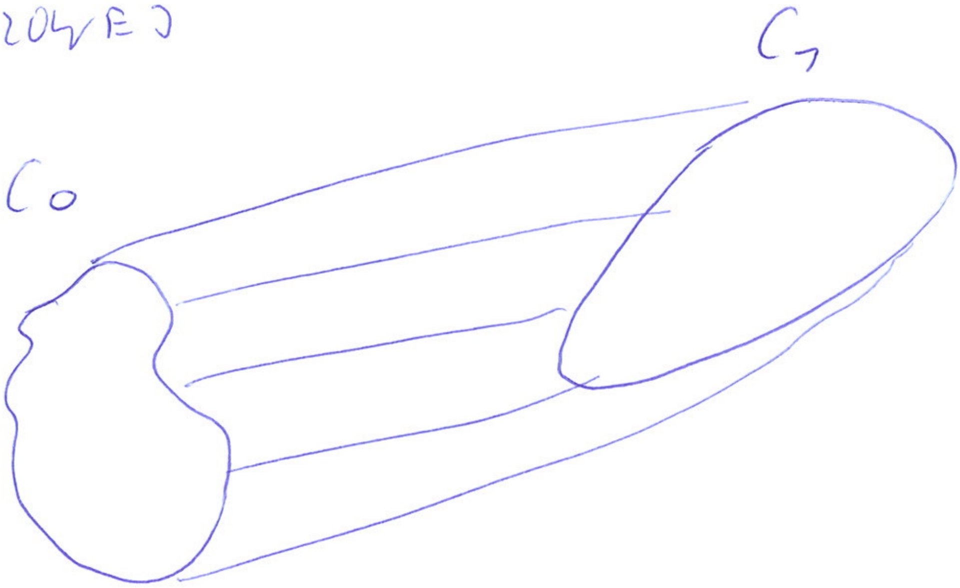
WEŹMY KRZYWĄ ZAMKNIĘTĄ C_0, PARAMETRYZOWANĄ ZMIENNĄ τ:

$$t = t^{(0)}(\tau), \quad q_i = q_i^{(0)}(\tau) \quad p_i = p_i^{(0)}(\tau)$$

$$\tau \in [0,T], \ \bigwedge_X X(0) = X(T)$$

DLA KAŻDEGO τ (t,p,q) DAJE WARUNEK POCZĄTKOWY RUCHU:

"RURKA" W ROZSZERZONEJ PRZESTRZ. FAZOWEJ



C_1 MA JEDEN PUNKT WSPÓLNY Z KAŻDĄ KRZYWĄ RURKI, WIĘC MOŻE BYĆ SPARAMETRYZOWANA TYM SAMYM $\tau \in [0,T]$

NA KRZYWEJ C_1

$$t = t^{(1)}(\tau)$$
$$q_i = q_i^{(1)}(\tau)$$
$$p_i = p_i^{(1)}(\tau)$$

δt - przyrost funkcji $t(\tau)$

$$\delta q_i = q_i \, \delta t + \frac{\partial q}{\partial \tau} \delta \tau$$

~~$\oint p$~~ NIEZMIENNIK POINCARE - CARTANA (DOWÓD → BIAŁKOWSKI)

$$\oint_{C_1} \left(\sum_{i=1}^{f} p_i \delta q_i - H \delta t \right) = \oint_{C_1} \left(\sum_{i=1}^{f} p_i \delta q_i - H \delta t \right)$$

I A. INNE NIEZMIENNIKI?

~~ZASADNICZO NIE MA – TW. LEE HWA-CHUNGA~~

~~ZNAJDZIEMY JAKIŚ I'_k → MOŻNA POKAZAĆ $I'_k = c\bar{I}_k$~~

~~OGÓLNA NAZWA $J_k, \bar{I}_k$: NIEZMIENNIKI POINCARE-CARTANA~~

PRZEKSZTAŁCENIA (TRANSFORMACJE) KANONICZNE

<u>WEŹMY</u>:

$$Q_i = Q_i(p,q,t) \qquad i = 1 \ldots f \qquad i \qquad \begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$
$$P_i = P_i(p,q,t)$$

PRZEKSZTAŁCENIE JEST KANONICZNE GDY ISTNIEJE $\bar{H}$ T-ŻE:

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} \end{cases}$$

OGÓLNIE $\bar{H} \neq H$!

SZCZEGÓLNY PRZYPADEK – PRZEKSZTAŁCENIA PUNKTOWE

PRZEKSZTAŁCENIA KANONICZNE

PRZEKSZT. PUNKTOWE:

$$(*)\ \begin{cases} q_i = q_i(Q,t) \\ Q_i = Q_i(q,t) \end{cases} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot Q_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot Q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\frac{\partial \dot q_j}{\partial \dot Q_i} = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

$$p_i = \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}$$

$$\sum_i p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i = p_i \delta q_i - p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial q_l}\delta q_l$$

$$= p_i \delta q_i - p_k \delta q_l \frac{\partial q_k}{\partial q_l} = 0$$

$$(*) \Rightarrow \delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\delta Q_k$$

$$\delta Q_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

$\sum_{i=1}^{f} p_i \delta q_i$ jest niezmiennikiem transf. punktowej

~~(jeden z tzw. niezmienników Poincaré – Cartana)~~

OGÓLNIE P. KAN.:

$$Q_i = Q_i(q,p,t) \quad i = 1..f \qquad \begin{cases} \dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$P_i = P_i(q,p,t)$$

PRZ. JEST KANONICZNE GDY ISTNIEJE $\tilde H$ T.ŻE

$$\dot Q_i = \frac{\partial \tilde H}{\partial P_i}, \quad \dot P_i = -\frac{\partial \tilde H}{\partial Q_i} \qquad \text{OGÓLNIE } \tilde H \neq H$$

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H)\, dt = 0 \qquad \delta q(t_0) = \delta Q(t_0) = 0$$

$$\delta \int (P_i \dot{Q}_i - \bar{H})\, dt = 0 \qquad \text{itp. (TAKŻE } \delta P \text{)}$$

STĄD:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[(p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) - (H - \bar{H}) \right] dt = 0$$

ZAŁÓŻMY ŻE ISTNIEJE $\Phi(Q, P, t)$ t. że

$$(p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) - (H - \bar{H}) = \frac{d\Phi}{dt}$$

ALBO $\quad p_i\, dq_i - P_i\, dQ_i - (H - \bar{H})\, dt = d\Phi$

Φ – "FUNKCJA TWORZĄCA" PRZEKSZTAŁCENIA KANONICZNEGO

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) - (H - \bar{H})\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi}{dt}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \delta\Phi\, dt = \delta\Phi \Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \delta Q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \delta P_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

ISTNIEJĄ $\bar{H}$, Φ – PRZEKSZT. JEST KANONICZNE

DLA JAKIEGOŚ H ZNAJDZIEMY $\bar{H}$ $\Rightarrow$ DLA [illegible]

PARĘ PRZYKŁADÓW:

A) $Q_i = \alpha q_i$

$P_i = \beta p_i$

$$\bar{H} = \alpha\beta H$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} = \frac{\partial\, \alpha\beta H}{\partial\, \alpha q_i} = \beta \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\beta \dot{p}_i = -\dot{P}_i \qquad \text{itp.}$$

~~B) $Q_i = \alpha p_i$ $P_i = \beta q_i$ $\bar{H} = -\alpha\beta H$~~

A)

$$\frac{d\Phi}{dt} = p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i - (H - \bar{H}) = \left(\frac{1}{\alpha\beta} - 1\right) P_i \dot{Q}_i - \left(\frac{1}{\alpha\beta} - 1\right)\bar{H}$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha\beta} - 1\right)\left[P_i \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} - \bar{H}\right]$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{p}^2}{2m} + V(Q) \qquad \bar{p}\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} = \frac{\bar{p}^2}{m}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{1}{\alpha\beta} - 1\right)\left(\frac{\bar{p}^2}{2m} - V(Q)\right)$$

B) $Q_i = \alpha p_i$

$P_i = \beta q_i$ $\qquad \bar{H} = -\alpha\beta H$

3) $Q = q\cos t + p\sin t$

$P = -q\sin t + p\cos t$

$\bar{H} = H + \frac{1}{2}(p^2+q^2)$

WŁASNOŚCI PRZEKSZTAŁCEŃ KANONICZNYCH:

1) TWORZĄ GRUPĘ W PRZ. FAZOWEJ

a) ISTNIEJE JEDYNKA

b) ZŁOŻENIE JEST PRZ. KANONICZNYM

$$\begin{cases} p_i dq_i - P_i dQ_i - (H-\bar{H})dt = d\Phi \\ P_i dQ_i - P_i' dQ_i' - (\bar{H}-\bar{H}')dt = d\Phi' \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$p_i dq_i - P_i' dQ_i' - (H-\bar{H}')dt = d(\Phi+\Phi')$$

FUNKCJA TW. JEST ZŁOŻENIEM, $\Phi_{NEW} = \Phi + \Phi'$

c) ELEMENT ODWROTNY $\Phi \to -\Phi$

2) ZACHOWUJĄ NAWIASY POISSONA!

$Q_i = Q_i(q,p,t)$

$P_i = P_i(q,p,t)$

RÓŻNICZKUJEMY PO CZASIE:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial Q_k}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial Q_k}{\partial p_l}\dot{p}_l + \frac{\partial Q_k}{\partial t}$$

$$\dot{P}_k = \frac{\partial P_k}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial P_k}{\partial p_l}\dot{p}_l + \frac{\partial P_k}{\partial t}$$

ZRÓŻNICZKUJMY TEŻ $\bar{H}(Q,P,t) = H(q,p,t) + \bar{H}(Q,P,t) - H(q,p,t)$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = \frac{\partial H}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial P_k} + \frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial P_k} + \frac{\partial}{\partial P_k}\left(H - \bar{H}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = \frac{\partial H}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial}{\partial Q_k}\left(H - \bar{H}\right)$$

$$\dot{Q}_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = \left(\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l}\right)\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} + \frac{\partial H}{\partial p_l}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial P_k}\right)$$
$$+ \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q_l}\right)\frac{\partial Q_k}{\partial p_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_l} + \frac{\partial q_l}{\partial P_k}\right)$$
$$+ \frac{\partial Q_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\bar{H} - H\right)$$

$$\dot{P}_k + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = \left(\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l}\right)\frac{\partial P_k}{\partial q_l} + \frac{\partial H}{\partial p_l}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_l} + \frac{\partial p_l}{\partial Q_k}\right)$$
$$+ \left(\dot{p}_l + \frac{\partial H}{\partial q_l}\right)\frac{\partial P_k}{\partial p_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l}\left(\frac{\partial P_k}{\partial p_l} - \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}\right)$$
$$+ \frac{\partial P_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\bar{H} - H\right)$$

RÓWNANIA RUCHU SPEŁNIONE $\Rightarrow$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_l}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial P_k}\right) - \frac{\partial H}{\partial q_l}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_l} + \frac{\partial q_l}{\partial P_k}\right)$$

$$+ \frac{\partial Q_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial P_k}(\bar{H} - H)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_l}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_l} + \frac{\partial p_l}{\partial Q_k}\right) - \frac{\partial H}{\partial q_l}\left(\frac{\partial P_k}{\partial p_l} - \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}\right)$$

$$+ \frac{\partial P_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Q_k}(\bar{H} - H)$$

JEST TAK DLA DOWOLNEGO H. STĄD

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} = \frac{\partial p_l}{\partial P_k} \qquad \frac{\partial P_k}{\partial q_l} = -\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial p_l} = -\frac{\partial q_l}{\partial P_k} \qquad \frac{\partial P_k}{\partial p_l} = \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P_k}(\bar{H} - H) \qquad \frac{\partial P_k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q_k}(\bar{H} - H)$$

STĄD DALEJ
$$\frac{\partial F}{\partial q_l} = \frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial Q_m}{\partial q_l} + \frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial P_m}{\partial q_l}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_l} = \frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial Q_m}{\partial p_l} + \frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial P_m}{\partial p_l}$$

$$(F,G) = \frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial G}{\partial P_n}(Q_m,P_n) + \frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial G}{\partial Q_n}(P_m,Q_n)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial G}{\partial Q_n}(Q_m,Q_n) + \frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial G}{\partial P_n}(P_m,P_n)$$

$$(Q_m,P_n) = \frac{\partial Q_m}{\partial q_l}\frac{\partial P_n}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_m}{\partial p_l}\frac{\partial P_n}{\partial q_l} =$$

$$= \frac{\partial Q_m}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial Q_n} + \frac{\partial Q_m}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial Q_n} = \frac{\partial Q_m}{\partial Q_n} = \delta_{mn}$$

$$(Q_m,Q_n) = (P_m,P_n) = 0$$

STĄD $(F,G) = \frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial G}{\partial P_m} - \frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial G}{\partial P_n} = (F,G)'$!

c.b.d.o.

TW. ODWROTNE – MAMY PRZEKSZTAŁCENIE ZACHOWUJĄCE NAWIASY POISSONA: ~~[illegible]~~ I WARUNKI RÓŻNICZKOWE OTRZYMANE WCZEŚNIEJ

$$\dot{Q}_l = \frac{dQ_l}{dt} = (Q_l,H) + \frac{\partial Q_l}{\partial t} \quad (Q_l,H)' = \frac{\partial H}{\partial P_l}$$

$$\dot{Q}_l = \frac{\partial H}{\partial P_l} + \frac{\partial Q_l}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial P_l} + \frac{\partial}{\partial P_l}(\bar{H} - H) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_l} \text{ itd.}$$

· RUCH : PRZEKSZTAŁCENIE PRZESTRZENI FAZOWEJ: (152)

$$q_0, p_0 \to q(q_0, p_0, t), p(q_0, p_0, t)$$

ZACHOWUJE RÓWNANIA HAMILTONA Z $\bar{H} = H$!

CZYLI RUCH JEST PRZEKSZTAŁCENIEM KANONICZNYM (TZW. SWOBODNYM UNIWALENCYJNYM)

SYMPLEKTYCZNOŚĆ

$$U = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)_{2N \times 2N}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_f}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_f}{\partial q_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_f} & \frac{\partial Q_f}{\partial p_f} & \frac{\partial P_1}{\partial p_f} & & \frac{\partial P_f}{\partial p_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix}$$

$$K^T U K = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q}^T & \frac{\partial Q}{\partial p}^T \\ \frac{\partial P}{\partial q}^T & \frac{\partial P}{\partial p}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial p}^T & -\frac{\partial Q}{\partial q}^T \\ \frac{\partial P}{\partial p}^T & -\frac{\partial P}{\partial q}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{Q, Q\} & \{Q, P\} \\ (P, Q) & (P, P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) ~~$Q = q\cos t + p\sin t$~~

~~$P = -q\sin t + p\cos t$~~

~~$\bar{H} = H + \frac{1}{2}(p^2+q^2)$~~

$\det K^2 = 1 \Rightarrow \det K = 1$

K – JACOBIAN

P. KANONICZNE ZACHOWUJĄ OBJĘTOŚĆ W PRZ. FAZOWEJ!

~~7??~~

~~748~~

753

PO CO SĄ PRZ. KAN.?

MAMY

$$p_i dq_i - P_i dQ_i - (H - \bar{H})dt = d\Phi$$

STĄD

$$p_i dq_i + Q_i dP_i - (H - \bar{H})dt = d(P_i Q_i + \Phi)$$

MAJĄC $P_i = P_i(q, p, t)$ MOŻNA TEŻ WYLICZYĆ
$Q_i = Q_i(q, p, t)$

$$P_i = P_i(q, Q, t)$$

ORAZ

$$Q_i = Q_i(q, P, t)$$

ZDEFINIUJMY NOWE FUNKCJE TWORZĄCE:

$$W(q, Q, t) = \Phi(Q, P(q, Q, t), t)$$

$$S(q, P, t) = P_i Q_i(q, P, t) + \Phi(Q(q, P, t), P, t)$$

WTEDY

$$p_i dq_i - P_i dQ_i - (H - \bar{H})dt = dW(q, Q, t)$$

$$p_i dq_i + Q_i dP_i - (H - \bar{H})dt = dS(q, P, t)$$

PISZĄC

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial q_i}{\partial P_k} dP_k + \frac{\partial q_i}{\partial t} dt$$

$$dp_i = \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial p_i}{\partial P_k} dP_k + \frac{\partial p_i}{\partial t} dt$$

WSTAWIAJĄC I PORÓWNUJĄC WSP. DOSTAJEMY

1) $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ $\quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i}$ $\quad \bar{H}(Q,P,t) = H + \frac{\partial W}{\partial t}(q,Q,t)$

2) $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ $\quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$

$$\bar{H}(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,P,t)$$

PARĘ WŁASNOŚCI TR. KAN:

1) TWORZĄ GRUPĘ W PRZES. FAZOWEJ
2) ZACHOWUJĄ NAWIASY POISSONA.

$$\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial G}{\partial Q_i} \;!$$