

MECHANIKA KLASYCZNA A

I SEMESTR / ZH

7

KINEMATYKA

WERSJA MIEZELATYWISTYCZNA

ZACNIEMY JEDNAK O CZASOPRZESTRZENI

"CONTINUUM 4-WYMIAROWE", NIESKONCZONE W
KAŻDYM WYMIARZE

~~CIAŁA~~ FIZ. KAŻDY PUNKT $\rightarrow$ ZESPÓŁ 4 LICZB, "WSPÓŁ-
RZĄDNE ZDARZENIA"

1 WSP. CZASOWA, 3 PRZESTRZENNE
CZASO

PRZESTRZENI = JEDNORODNA (~~IZOTROPOWA~~ BRAK WYRÓŻ-
NIENIACH PUNKTÓW)

PRZESTRZENI = IZOTROPOWA (BRAK WYRÓŻ. KIERUNKÓW)

CIAŁA FIZYCZNE MOGĄ WTRĄBIĆ OKREŚLONY OBSZAR
PRZESTRZENNY

KOMENTARZ:

PLASKOŚĆ $\rightarrow$ OTW

EKSTRA WYMIARY $\rightarrow$ PRAWO GRAWITACJI SPR. DO OK 1MM,
PONIŻEJ

$$R \lesssim 1 \text{ mm}$$

BRAMY, M-TEORIA, STRUNY, ...

2

UKŁAD ODWIESIENIA - WYBRANY ZESPÓŁ CIĄT

W PRZESTRZENI, INNE OKREŚLAMY WÓBC NIEBO

UKŁAD WSPÓŁCZESNYCH - KAŻDEMU PUNKTOWI PRZYPORZĄDKOWUJEMY $3 (x, y, z)$ LICZBY

ZACHWYTAJĄC $g_{ij} = \text{const} \rightarrow$ ~~PLASKA~~ POWIERZCHYNIA CIĄGA

PROSTOLINIOWA $\rightarrow$ UKŁAD KARTEZJAŃSKI, PROSTOLINIOWE WSP.

PRZESTRZEN EUKLIDESOWA $\rightarrow$ ISTNIEJE GLOBOalny UKŁ-KART.
MOŻLIWE ZAMIANY UKŁADU ODWIESIENIA

$$g^{i'j'} = t^{ij} (q^1, q^2, q^3) \quad \left| \begin{array}{l} \text{UŻYTKOWNE} = \text{WSP. ORTO-} \\ \text{GONALNE} \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ WEKTORY (TRANSF. SIE TAK WSPÓŁCZESNE),

SKALARY, TENSORY, PSEUD - ... ITP.

WAŻNE PODFOLIE = ELEMENT ODL - I TENSOR METRYCZNY

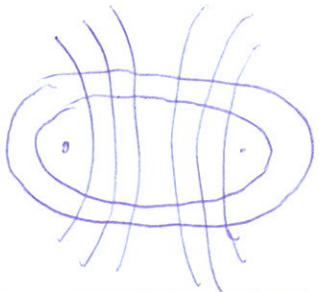
$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j$$

elipt. parab.

PATYKANDY $(x, y), (r, \varphi), (r, \vartheta), (z, \eta)$

$(x, y, z) (r, \theta, \varphi)$

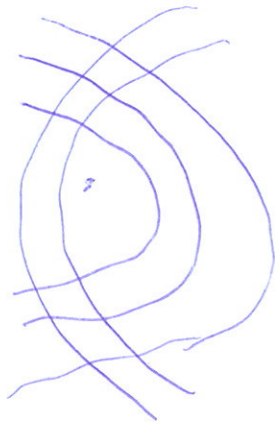
ELIPT:



$$x = \frac{1}{2} R \cosh \mu \cosh \nu \quad \nu \geq 0$$

$$y = \frac{1}{2} R \sinh \mu \sinh \nu \quad 0 \leq \mu < 2\pi$$

$$ds^2 = \frac{1}{4} R^2 (\sinh^2 \nu + \sinh^2 \mu) (d\nu^2 + d\mu^2)$$



3

$$x = \frac{1}{2}(3-n)$$

$$y^2 = 3y$$

$$3 \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$ds^2 = \frac{1}{\eta} \left(ds^2 \left(1 + \frac{\eta}{s} \right) + d\eta^2 \left(1 + \frac{s}{\eta} \right) \right)$$

ZMIANY UKŁADU ODWIEŚNIENIA

TW. CHASLESA:

DWA DOWOLNE KART. UKŁADY PRAWOSKRĘTNE (KRW.)
MOŻNĄ NAŁOŻYĆ NA SIEBIE PRZY POMOCY ZŁOŻENIA
TRANSLACJI I OBRÓTU ("PRZEM. ŚRUBOWE")

PRZY POWODZIE: TW EULERA, KAŻDY OBRÓT WOKÓŁ
PUNKTU JEST OBRÓTEM WOKÓŁ PRAWNEJ OSI.

OPIS RUCHU

5

IDEALIZACJA: PUNKT MATERIALNY $\rightarrow$ POMIĄAMY ROZ-
CIĄGŁOŚĆ CIAŁA.

PRZYBLIŻENIE, CZASEN DOBRE, CZASEM NIE — PLA-
WKA, ATOM

WATEK SZTETWNA, OSRODEK CIECZNY $\sim$ OPIS JAKO
ZBIOR PUNKTÓW

PODZIAŁ

WEKTOR WODZĄCY $\vec{r}(t)$

TOR — KONTIEC $\vec{r}(t)$ ZAKRESŁIA

DRUGA S(1) PRĘGOSĆCIEKU TORU

TOR W PRZESZCZĘNIE — RUCH PRĘSKI

PRĘKOSĆ $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$

WIDOCZNA (PRĘKOSĆCIEKU)



$$\vec{v} = \vec{r} |\vec{v}| \equiv \vec{r} v = \vec{r} \frac{ds}{dt}$$

PRZYSPIESZENIE

5

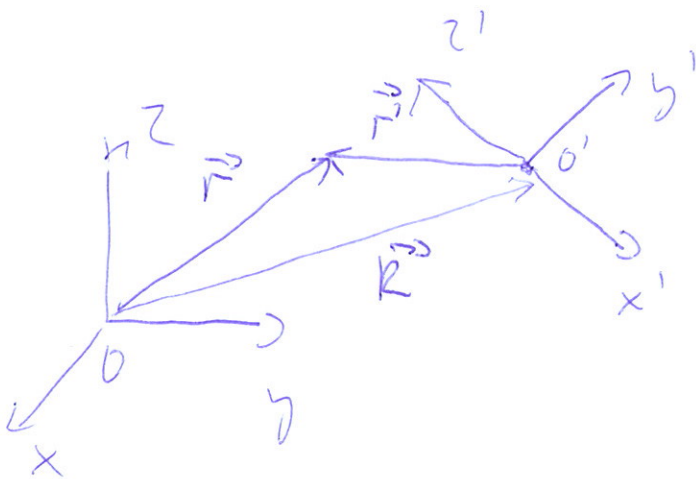
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\vec{t} v) = v \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} + \vec{t} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} \quad (\text{wzór KLENKIA})$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{t} \frac{dv}{dt} + \vec{n} \frac{v^2}{\rho} \quad - \text{w rt. poru!}$$

DWA UKŁADY ODWZEMNIENIA



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \quad t = t'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

zas dt

os' PRZEZ POCZĄTEK O'

(6)

$$d\vec{r} = d'\vec{r}' + d\vec{R} + d\varphi \times \vec{r}'$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{PRĘDKOŚĆ KĄTOWA}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

WEZIMY NOWOUST $\vec{z}$

$$\vec{z} = \vec{i}' z_{x'} + \vec{j}' z_{y'} + \vec{k}' z_{z'}$$

$$\frac{d'\vec{z}}{dt} = \vec{i}' \frac{dz_{x'}}{dt} + \dots = \vec{i}' \frac{dz_{x'}}{dt} + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{z}}{dt} &= \vec{i}' \frac{dz_{x'}}{dt} + \dots + z_{x'} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \dots \\ &= \frac{d'\vec{z}}{dt} + z_{x'} \frac{d\vec{i}'}{dt} + z_{y'} \frac{d\vec{j}'}{dt} + z_{z'} \frac{d\vec{k}'}{dt} \end{aligned}$$

$$\vec{i}'^2 = 1 \Rightarrow \vec{i}' \frac{d\vec{i}'}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{i}', \dots$$

$$\vec{i}' (\vec{\omega}_1 + \lambda \vec{i}') = \vec{i}' \vec{\omega}_1 + \lambda \Rightarrow 0 \quad \lambda = -\vec{i}' \vec{\omega}_1$$

$$\vec{i}' \vec{\omega}_1 = \vec{j}' \vec{\omega}_2 = \vec{k}' \vec{\omega}_3 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \vec{i}' \vec{j}' = \vec{j}' (\vec{\omega}_1 \times \vec{i}') + \vec{i}' (\vec{\omega}_2 \times \vec{j}') = \vec{\omega}_1 (\vec{i}' \times \vec{j}') + \vec{\omega}_2 (\vec{j}' \times \vec{i}') = \frac{1}{i\hbar} (\omega_1 - \omega_2) = 0$$

(7)

$$\begin{cases} \bar{k}'(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) = 0 \\ \bar{i}'(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_3) = 0 \\ \bar{j}'(\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1) = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \bar{i}'\bar{\omega}_2 = \bar{i}'\bar{\omega}_3 \quad \sigma_2 = \bar{j}'\bar{\omega}_3 = \bar{j}'\bar{\omega}_1 \quad \sigma_3 = \bar{k}'\bar{\omega}_1 = \bar{k}'\bar{\omega}_2$$

$$\bar{k}'(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) = 0 \Rightarrow \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 = \alpha \bar{i}' + \beta \bar{j}'$$

$$\alpha = \bar{i}'\bar{\omega}_1$$

$$\beta = -\bar{j}'\bar{\omega}_1$$

$$\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 = (\bar{i}'\bar{\omega}_1)$$

$$\bar{i}'\bar{\omega}_1 - \sigma_1 = \alpha = -\sigma_1$$

$$\sigma_2 = \beta$$

$$\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 = -\sigma_1 \bar{i}' + \sigma_2 \bar{j}'$$

$$\bar{\omega}_1 + \sigma_1 \bar{i}' = \bar{\omega}_2 + \sigma_2 \bar{j}' = \bar{\omega}_3 + \sigma_3 \bar{k}' = \vec{\Omega}$$

$$\frac{d\bar{i}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \bar{i}' \dots$$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega}$$

DLA KAŻDEGO $\vec{\Omega}$!

POWODUJĄCY RUCH "CIĘŻKI" $\rightarrow \vec{\Omega} = \vec{\Omega}'$ $\vec{\omega} = \vec{\Omega}$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\Omega}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

8

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{a}_{tr} = \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{\gamma}'$$

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a}' + \vec{a}_{tr}}_{\text{LORNIOLIS}} + \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\gamma} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'))}_{\text{ON S'RODKOWE}}$$

UKŁAD ODDOSOBNIONY - ODIZOLOWANY OD

(9)

WPŁYWÓW ZEWNĘTRZNYCH - NIE WYMIENIA
MATERII, NIE PODLEGA ODDZIAŁYWANIOM.

I ZASADA DYNAMIKI (ZAS BEZWŁADNOŚCI)

ISTNIEJE UKŁAD OPMIESIENIA ("INERCJALNY")

W KÓŁYM UKŁAD ODDOSOBNIONY SPOCZYWA LUB
PORUSZA SIĘ RUCHEM JEDNOSTAJNYM PROSTO-
LINIOWYM.

1 UKŁ INERCJALNY $\rightarrow$ NIESKOŃCZENIE WIELE

KTÓRE UMIEMY ZNALEŹĆ TAKI UKŁAD - KOLEJNE
PRZYBLIŻENIA ...

Z UKŁADY INERCJALNE

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_{tr}$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, \quad t = t' - \text{SZCZEGÓLNA TRANSF.}$$

GALEUSZA

(ODPOW. $\sim$ SZCZEG. OBRÓTY)

TWORZĄ GRUPĘ.

ZASADY ZACHOWANIA - KLUCZOWE PODJĘCIE W FIZYCE

10

PEŁN, MOMENT PEŁN
ENERGIA
ŁADUNEK EL.

} ŚCISŁE, BEZWARTUNKOWE

ISOSPIN

LICZBA BARIONOWA

NA ZAS. ZACHOWANIA OPIERAŁA, SŁYŻĄ TEORIE OPOL.
ELEMENTARNICH.

ŚCISŁOŚĆ

UKŁAD ODDOBNOWIONY $\rightarrow$ WIELKOŚĆ $F(t_1) = F(t_2)$ (NIE-
ZALEŻNIE OD OPOL. WEWNĘTRZNYCH)

IDEALIZACJA - POMIAR INTERAKCJI W UKŁAD!

ZASADA ZACHOWANIA PEŁN - WYNIK DOŚW.!

KAZDEMU CIAŁU MOŻNA PRZYPISACI LICZBĘ m

$$\text{I. ZŁ.} \quad \sum m_i \vec{v}_i = \text{CONST}$$

m - "MASA BEZWŁADNA", LNAK TAKI SAM DLA
WSZYSTKICH CIAŁ (WYMIERNY "t")

WPROWADZAMY (TRÓJ-) PEŁN

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\sum \vec{p}_i = \vec{p} = \text{CONST}$$

$$STW: m(v) = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad | \quad \text{UNIWERSALNIE}$$

77

INNE SFORMULOWANIA

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0$$

WIERELATYWISTYCZNE

$$\frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \vec{V} = \text{const} \quad - \text{JEDNOSTAJNY RUCH SR. MASY}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

ZMIANY pędu $\rightarrow$ II ZASADA DYNAMIKI

SŁA $\rightarrow$ "PRZECYNA ZMIAN PĘDU CAŁKOWITEGO UKŁADU FIZYCZNEGO"

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{UKŁADY INERCJALNE})$$

DEFINICJA CZY PRAWO PRZYRODY? TO DRUGIE!

Z JEDNEGO UKŁADU MIERZĄCY, W INNYCH WYKORZYSTUJEMY - DZIAŁA!

II ZASADA DYNAMIKI NEWTONA

SILĄ JEST WEKTOROM $\rightarrow$ DEFINICJA

SILY MOŻNA DODAWAĆ $\rightarrow$ SUMA SIL DAJE PRZYSPIESZENIE RÓWNE SUMIE PRZYSPIESZEŃ
NIEOCZYWISTE!!

$$ma_1 = F_1(a_1) \quad ma_2 = F_2(a_2)$$

$$m(a_1 + a_2) = F_1(a_1) + F_2(a_2) \equiv F_1(a_1 + a_2) + F_2(a_2 + a_1)$$

PRAWDA TYLKO JEŻELI $\vec{F}$ NIE ZALEŻY OD $\vec{a}$, $\vec{v}$ ITD.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

KONTRPRZYKŁAD $\rightarrow$ TARCIE PROMIENISTE $\sim \ddot{r}$

SUMA SIL NA UKŁAD

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i0} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j}} \vec{F}_{ij}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

UKŁ - OPOSOBNIONY $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \sum_i \vec{F}_{i0} = 0 \Rightarrow$
 $\sum_{\substack{i \neq j \\ i, j}} \vec{F}_{ij} = 0$

III ZASADA DYNAMIKI NEWTONA: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

MOMENTUM

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$

MOMENTUM

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{D}$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$$

$$\vec{D}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i0} + \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

$$\begin{aligned} \vec{D}_w &= \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

SUM CENTRALE: $\vec{F} \parallel \vec{r} \rightarrow$ SUM WYŻEJ $\vec{D}_w = 0$

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i0} = \vec{D}_0$$

$$\vec{F}_0 = \sum \vec{F}_{i0}$$

157

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{L} \times \vec{p}) = \vec{L} \times \sum \vec{F}_i = \vec{L} \times \vec{F}_0$$

$\vec{r}_i^{(s)} \rightarrow$ opt. od sr. masy

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^{(s)}$$

$$\vec{J} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum (\vec{R} + \vec{r}_i^{(s)}) \otimes m_i (\dot{\vec{r}}_i^{(s)} + \dot{\vec{R}}) =$$

$$= \vec{R} \times \vec{p} + \sum m_i \vec{r}_i^{(s)} \times \dot{\vec{r}}_i^{(s)} + \cancel{\vec{R} \otimes \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^{(s)}} + \cancel{\dot{\vec{R}} \otimes \sum m_i \vec{r}_i^{(s)}} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \\ \dot{\vec{R}} \times \vec{R} \\ = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{J} = \vec{R} \times \vec{p} + \vec{J}_s$$

$$\vec{D} = \vec{R} \times \vec{F}_0 + \vec{D}_s$$

$$\frac{d\vec{J}_s}{dt} = \vec{J}^{(s)} -$$

NAWET DZIELU
UKŁAD SR MASY
JEST NIEINWARIANT

$$\vec{D} = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i^{(s)}) \times \left(\vec{F}_{i0} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right) = \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_{i0} + \vec{R} \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{r}_i^{(s)} \times \vec{F}_{i0} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i^{(s)} \times \vec{F}_{ij}$$

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

15

$$v m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \vec{v} = m \cdot a \cdot v$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Rightarrow \frac{1}{2} m (\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2) = E_k(t_2) - E_k(t_1) =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

$$\vec{v} dt = d\vec{r}$$

$$E_k(t_2) - E_k(t_1) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}$$

POLNE POTENCJALNE $\rightarrow F = -\text{grad} V(\vec{r}, t)$
(SIŁA) (MUSI BYĆ! $\text{rot } \vec{F} = 0$)

SIŁA ZACHOWAWCZA $\rightarrow V(\vec{r}, t) = V(\vec{r})$

Wtedy $E_{\text{pot}} \equiv V(\vec{r})$ ORAZ

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = -(V(P_2) - V(P_1)) = -(E_p(P_2) - E_p(P_1))$$

$$E_k(P_2) + E_p(P_2) = E_k(P_1) + E_p(P_1) = E = \text{const}$$

DEŻELI $V = V(t)$, TO

$$dV = -\vec{F} d\vec{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad \text{— NIE MA CAŁKI ENERGII}$$

ODPOSOBNIONY UKŁAD PUNKTÓW:

16

$$\sum_i d(E_k)_i = \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j}} \bar{F}_{ij} d\bar{r}_i$$

$$= \sum_i \sum_{j < i} \bar{F}_{ij} (d\bar{r}_i - d\bar{r}_j) = \sum_i \sum_{j < i} \bar{F}_{ij} d\bar{r}_{ij}$$

DEŻELI $-dV_{ij} = \bar{F}_{ij} d\bar{r}_{ij}$, TO

$$E_k + E_p = E = \text{CONST}$$

$$E_k = \sum_i (E_k)_i$$

$$E_p = \sum_i \sum_{j < i} V_{ij}(\bar{r}_{ij})$$

MECHANIKA - BRAK ENERGII SAMOODZIAŁYWANIA

TEORIA POLA - GŁÓWNY PROBLEM:

KRÓTKA DYSKUSJA.

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$$

III ZAS. DYNAMIKI $\Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}$

~~III~~
$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{— sr. masę}$$

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}t$$

WPROWADZMY $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases}$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m_1} \vec{F} - \frac{1}{m_2} (-\vec{F}) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \text{masa zredukowana} \begin{cases} \sim m_1 & \text{gdy } m_1 \ll m_2 \\ \sim m_1/2 & \text{gdy } m_1 \sim m_2 \end{cases}$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

RUCH RAKIETY — CIAŁA O ZMIENNEJ MASIE 18

Czas t do $t + dt$

1) PRZEBYWA (UBYWA) dm MASY, z PRĘDKOŚCIĄ $\vec{w}$ WZGLĘDEM UKŁADU ZWIĄZANEGO Z CIAŁEM.

2) NA CIAŁO DZIAŁA SIŁA ZEWNĘTRZNA $\vec{F}$

BILANS PŁYNU:

a) popęd siły $\vec{F} dt$

b) pęd uniesiony przez masę $dm \rightarrow dm(\vec{v} + \vec{w})$,
bo $\vec{v} + \vec{w}$ to prędkość względem układu inercyjnego

$$d\vec{p} = \vec{F} dt + dm(\vec{v} + \vec{w})$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} + \vec{w})$$

$$\boxed{m \vec{a} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{w}}$$

~~C) ENERGIA~~

$$\vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \frac{dE_k}{dt}$$

$$= m \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} + \frac{1}{2} m \vec{w}^2 - \frac{1}{2} m (\vec{v} - \vec{w})^2$$

$\vec{w} = 0 \Rightarrow \frac{dE_k}{dt} < \vec{v} \cdot \vec{F}$, rozprzeczanie masy

$\vec{w} = \vec{v} \rightarrow$ 'PRZIBIERANIE' MASY

MOŻE BYĆ NP $\vec{w} = -\vec{v}$ (PARUJĄCA KROPIA)

$\vec{w} = \text{const}$ (RAKIETA)

? Z CIAŁA O ZMIENNEJ MASIE

$m(t)$ zadane z góry!

d) BILANS ENERGII

(78A)

$$\vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \dot{m} \vec{v}^2$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} \dot{m} \vec{v}^2 + m \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}$$

$$\vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{1}{2} \dot{m} \vec{v}^2 = \vec{F} \cdot \vec{v} + \dot{m} (\vec{v}^2 + \vec{v} \cdot \vec{w})$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} &= \vec{F} \cdot \vec{v} + \dot{m} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \vec{v} \cdot \vec{w} \right) \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \dot{m} \left[(\vec{v} + \vec{w})^2 - \vec{w}^2 \right] \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \dot{m} (\vec{v} + \vec{w})^2 - \frac{1}{2} \dot{m} \vec{w}^2 \end{aligned}$$

1) $\vec{w} = 0 \rightarrow$ PRZĘSTOŚĆ LUB UBYTEK E_k WRAZ Z "OBRASTANIEM" W MASĘ

2) $\vec{w} = -\vec{v}$, DODAWANIE (ODEJMOWANIE) MASY SPOCZYWAJĄCEJ
- ZMNIĘDZCZENIE E_k , BO MASA I PRĘDKOŚĆ
(ZWIĘKSZENIE) ROZPRZECIWIENIA

KUCH RAKIETY W POLU $\vec{g}$, PROSTOLI - (19)
NIDWI

$$\begin{cases} \dot{m} = -g \\ \vec{w} = \text{const} \end{cases} \quad \text{PÓKI PĄLIWA STAŁOŻY}$$

$$m = m_0 - g(t - t_0)$$

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - g\vec{w}$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dm} \frac{dm}{dt} = \vec{r}' \dot{m}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dm} \left(\frac{d\vec{r}}{dm} \frac{dm}{dt} \right) \frac{dm}{dt}$$

$$= \dot{m}^2 \vec{r}'' + \dot{m} \vec{r}' \frac{d}{dm} \frac{dm}{dt}$$

$$= \dot{m}^2 \vec{r}'' + \dot{m} \vec{r}' \frac{dt}{dm} \frac{d}{dt} \frac{dm}{dt} = \dot{m}^2 \vec{r}'' + \vec{r}' \ddot{m}$$

$$\begin{cases} \dot{m} = -g \\ \ddot{m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = g^2 \vec{r}''$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dm^2} = \frac{\vec{g}}{g^2} - \frac{\vec{w}}{mg}$$

$$\begin{cases} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}(m_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{r}'(m_0) = -\frac{\vec{v}_0}{g} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{g}_m}{g^2} - \frac{\vec{w}}{g} \ln m + C$$

(20)

$$\frac{\vec{v}_0}{g} = \frac{\vec{g}_{m_0}}{g^2} - \frac{\vec{w}}{g} \ln m_0 + C$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\vec{v}_0}{g} + \frac{\vec{g}}{g^2} (m - m_0) - \frac{\vec{w}}{g} \ln \frac{m}{m_0}$$

II CATEKOWANIE

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) - \frac{\vec{v}_0}{g} (m - m_0) + \frac{1}{2} \frac{\vec{g}}{g^2} (m - m_0)^2 \\ - \frac{\vec{w} m_0}{g} \left[\frac{m}{m_0} \left(\ln \frac{m}{m_0} - 1 \right) + 1 \right] \end{aligned}$$

PODSIAWIAJĄC $m(t)$

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \frac{\vec{g}}{2} (t - t_0)^2 \\ - \frac{\vec{w} m_0}{g} \left\{ \left[1 - \frac{g}{m_0} (t - t_0) \right] \left[\ln \left(1 - \frac{g}{m_0} (t - t_0) \right) - 1 \right] + 1 \right\} \end{aligned}$$

DYSKUSJA

POCZĄTKOWA KAZA RUCHU $g(t - t_0) \ll m_0$

$$\ln \left(1 - \frac{g}{m_0} (t - t_0) \right) \approx -\frac{g}{m_0} (t - t_0)$$

$$\vec{r} \approx \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \left(\frac{\vec{g}}{2} - \frac{\vec{w} g}{m_0} \right) (t - t_0)^2$$

START Z POW ZIEMI W $t_0 = 0$

(21)

$$\vec{r}_0 = 0$$

$$\vec{v}_0 = 0$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{g} t^2}{2} - \frac{\vec{w} m_0}{g} \left[\left(1 - \frac{g t}{m_0} \right) \left[\ln \left(1 - \frac{g t}{m_0} \right) - 1 \right] + 1 \right]$$

$$\vec{v} = \vec{g} t - \frac{\vec{w} m_0}{g} \left\{ - \frac{g}{m_0} \left[\ln \left(1 - \frac{g t}{m_0} \right) - 1 \right] + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{g t}{m_0} \right) \frac{-\frac{g}{m_0}}{1 - \frac{g t}{m_0}} \right\}$$

$$= \vec{g} t - \frac{\vec{w} m_0}{g} \left\{ - \frac{g}{m_0} \ln \left(1 - \frac{g t}{m_0} \right) + \frac{g}{m_0} - \frac{g}{m_0} \right\}$$

$$= \vec{g} t + \vec{w} \ln \left(1 - \frac{g t}{m_0} \right)$$

$$g t \ll m_0 \Rightarrow \vec{v} \approx \left(\vec{g} - \frac{g \vec{w}}{m_0} \right) t$$

START MOŻLIWI JĘZEKI $g w > g m_0$

INNY PRZYPADK $\dot{m} = -\alpha m$ $m = m_0 e^{-\alpha t}$

$$\vec{r} = \vec{g} t - \alpha \vec{w} t^2$$

↑
BARDZO DUŻO PŁAŚĆ
TRZEBA ...

$$v(t) = (\alpha w - g) t$$

$$z(t) = \frac{1}{2} (\alpha w - g) t^2$$

KOMPLIKACJE: $\vec{w} = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} w$, RUCH $\neq \vec{g}$, $\vec{g} \neq \text{const}$