

Rozwiązanie zadań 1 i 3 z I kolokwium

Zadanie 1:

Położenia x_2, x_3 , odpowiednio mas $2m$ i $3m$, najwygodniej mierzyć od poziomu na wysokości l od podłogi. Wtedy rozciągnięcie sprężyny jest równe x_3 i energia sprężystości przyjmuje najprostszą postać.

1. Energia kinetyczna i potencjalna są równe

$$T = m\dot{x}_2^2 + \frac{3}{2}m\dot{x}_3^2; \quad U = 2mgx_2 + 3mgx_3 + \frac{1}{2}kx_3^2.$$

Lagranżjan przyjmuje postać

$$L = m\dot{x}_2^2 + \frac{3}{2}m\dot{x}_3^2 - 2mgx_2 - 3mgx_3 - \frac{1}{2}kx_3^2.$$

2. Jeśli masa $2m$ i jednocześnie bloczek do którego jest ona zaczepiona podnoszą się o Δx_2 to odcinki liny, które łączą ten bloczek z sufitem i drugim bloczkiem są krótsze o $2\Delta x_2$. Długość liny jest stała, więc masa $3m$ musi obniżyć się o taką samą odległość i $\Delta x_3 = -2\Delta x_2$. Oznacza to, że

$$x_3 + 2x_2 = \text{const.}$$

3. Masy połączone są liną, więc układ ma jeden rzeczywisty stopień swobody. Wykorzystując poprzedni podpunkt otrzymujemy związek pomiędzy przyspieszeniami $\ddot{x}_3 = -2\ddot{x}_2$. Poszukujemy wydłużenia sprężyny w równowadze, które dane jest przez x_3 , więc wygodniej jest wyrazić lagranżjan przez x_3 i $\dot{x}_3$.

$$L = \frac{7}{4}m\dot{x}_3^2 - 2mgx_3 - \frac{1}{2}kx_3^2.$$

Równanie Eulera-Lagrange'a ma postać

$$\frac{7}{2}m\ddot{x}_3 = -2mg - kx_3.$$

W równowadze $\ddot{x}_3 = 0$, więc wydłużenie sprężyny wynosi

$$\bar{x}_3 = -\frac{2mg}{k}.$$

Znak minus oznacza, że w rzeczywistości jest ona ściśnięta.

4. Częstość drgań znajdujemy wykorzystując parametr opisujący wychylenie z położenia równowagi $\epsilon = x_3 - \bar{x}_3$. Równanie jest liniowe, więc nie wymaga rozwinięcia w małym ϵ .

$$\frac{7}{2}m\ddot{\epsilon} = -k\epsilon$$

Częstość drgań jest równa $\sqrt{\frac{2k}{7m}}$.

Zadanie 3. Treść zadania:

Do kropli pewnej substancji opadającej w nieruchomej i jednorodnej mgłę doczepiają się drobiny pary wodnej w taki sposób, że kondensacja w czasie na kropli jest proporcjonalna do jej objętości, oraz do jej prędkości. Znajdź przyspieszenie oraz prędkość kropli, jeżeli ma ona stałą gęstość. Ogranicz się do przypadku, w którym kropla spada (zwrot prędkości jest zgodny ze zwrotem siły grawitacji).

Wskazówka: następująca całka wynosi:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + \text{const.} \quad (1)$$

Przez kondensację rozumiemy zwiększanie się masy lub objętości w czasie. Daje to następujące wzory (nie ma strzałek nad wektorami, bo problem jest jednowymiarowy):

$$\frac{dm}{dt} \propto Vv, \quad \frac{dV}{dt} \propto Vv. \quad (2)$$

Jako że gęstość kropli ma pozostać stała, to możemy zapisać:

$$\rho = \text{const.} = \frac{m}{V} \implies \begin{cases} \frac{dm}{dt} \propto Vv \propto mv \\ \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} \end{cases}. \quad (3)$$

W dalszej części będziemy używać zależności na $\dot{m}$:

$$\dot{m} = \alpha mv, \quad (4)$$

ale identyczny wynik uzyskalibyśmy wstawiając w kolejne wzory zależność na $\dot{V}$. Jeśli chodzi o znak α , to zależy on od osi współrzędnych. Nasza oś X będzie skierowana ku dołowi (co wpływa też na znak siły ciężenia), więc $\alpha > 0$, tak że masa będzie się zwiększała. Dla osi skierowanej ku górze musi być więc $\alpha < 0$, bo $v < 0$. Będzie to istotne gdy dojdziemy do całki ze wskazówki.

Aby uzyskać równanie na prędkość kropli należy użyć wzoru wiążącego pęd układu P^{sys} z wszystkimi siłami zewnętrznymi $F_{\text{całkowite}}^{\text{ext}}$:

$$\frac{d}{dt} P^{\text{sys}} = F_{\text{całkowite}}^{\text{ext}}, \quad P^{\text{sys}} = (p_{\text{kropli}} + p_{\text{mgły}}). \quad (5)$$

Kluczowa jest tu informacja, że mgła jest nieruchoma względem inercjalnego układu odniesienia w jakim operujemy (związanego z Ziemią). Brak ruchu mgły i jej jednorodność mówią nam też, że nie działają na nią żadne wypadkowe siły zewnętrzne, czy wewnętrzne. Można więc zapisać:

$$\dot{p} = F_{\text{całkowite}}^{\text{ext}} \implies \dot{m}v + m\dot{v} = mg, \quad (6)$$

gdzie p , v i m to odpowiednio pęd, prędkość i masa kropli.

Uzyskamy to samo równanie z równań Eulera-Lagrange'a, jeśli wypiszemy lagranżjan dla kropli, w którym masa jest funkcją czasu, tj. $m = m(t)$. Wynik ten jest jednak uzyskany niepoprawnie, ponieważ nie można tak opisać układów o zmiennej masie¹.

Po podstawieniu (??) w (??) otrzymujemy wyrażenie:

$$\frac{1}{\alpha} \dot{v} = \frac{g}{\alpha} - v^2 \implies \int \frac{dv}{\frac{g}{\alpha} - v^2} = \alpha \int dt. \quad (7)$$

¹Aby wyprowadzenie było poprawne należy dodać siłę uogólnioną do równań E.-L. Patrz: A. R. Plastino, J. C. Muzzio, "On the use and abuse of Newton's second law for variable mass problems.", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 53.3 (1992): 227-232.

To oczywiście moment, w którym należy zastosować wzór ze wskazówki (poza wynikiem tej całki wskazówka sugeruje też równanie, do którego dochodzi się w toku rozwiązywania zadania). Należy jednak zauważyć, że wyrażenie g/α musi być dodatnie, aby dało się to zrobić. Stąd wcześniejsza uwaga o znaku α . Całkować należałoby albo w odpowiednich granicach, a wtedy wyglądałoby to tak:

$$\int_{v_0}^v \frac{dw}{\frac{g}{\alpha} - w^2} = \alpha \int_0^t d\tau. \quad (8)$$

O ile mamy swobodę w wyborze chwili początkowej, to nie można zakładać, że prędkość początkowa jest równa 0. Zgodnie z treścią przyjmujemy natomiast, że $v_0 \geq 0$. Alternatywnie możemy nie przejmować się dolną granicą całkowania i relegować te wyrazy w stałą, której wartość będą określały warunki początkowe (co uczynimy). Warto jeszcze dodać, że z (??) otrzymać możemy prędkość, dla której przyspieszenie znika:

$$v_\infty = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}. \quad (9)$$

Ze wzoru (??) widać też, że w zależności od wartości prędkości przyspieszenie będzie dodatnie lub ujemne. Wynikiem całkowania w (??) jest:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{g}} \log \left| \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v} \right| = \alpha t + \text{const.}, \quad (10)$$

z czego otrzymujemy

$$\left| \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v} \right| = C e^{2\sqrt{\alpha g} t}. \quad (11)$$

Wartość bezwzględna zmusza nas to przeanalizowania dwóch przypadków:

$$v < \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \quad \text{ i } \quad v > \sqrt{\frac{g}{\alpha}}, \quad (12)$$

czyli prędkości mniejszych i większych od v_∞ . W pierwszym przypadku mamy:

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v} = C e^{2\sqrt{\alpha g} t} \implies v = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \frac{C e^{2\sqrt{\alpha g} t} - 1}{C e^{2\sqrt{\alpha g} t} + 1} \quad (13)$$

stałą C możemy teraz wyliczyć z warunków początkowych:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \frac{C - 1}{C + 1} \implies C = \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v_0}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v_0}, \quad v_0 < \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \quad (14)$$

Zatem prędkość i przyspieszenie (przez różniczkowanie, lub ze wzoru (??)) będą dane przez (stałą C trzymam niejawnie dla przejrzystości):

$$v = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \frac{C e^{2\sqrt{\alpha g} t} - 1}{C e^{2\sqrt{\alpha g} t} + 1} \quad (15)$$

$$a = 4g \frac{C e^{2\sqrt{\alpha g} t}}{(C e^{2\sqrt{\alpha g} t} + 1)^2} > 0 \quad (16)$$

W drugim przypadku mamy:

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v} = -C e^{2\sqrt{\alpha g} t} \implies v = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \frac{C e^{2\sqrt{\alpha g} t} + 1}{C e^{2\sqrt{\alpha g} t} - 1}. \quad (17)$$

Stała C jest nadal dana wzorem (??), ale trzeba zauważyć, że

$$C = \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v_0}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v_0} < 0, \quad \text{bo} \quad v_0 > \sqrt{\frac{g}{\alpha}}, \quad (18)$$

Przyspieszenie w drugim przypadku będzie dane przez:

$$a = 4g \frac{Ce^{2\sqrt{\alpha g}t}}{(Ce^{2\sqrt{\alpha g}t} + 1)^2} < 0. \quad (19)$$

W obu przypadkach przyspieszenie początkowe dla $v_0 = 0$ jest równe g , a asymptotycznie ($t \rightarrow \infty$) dąży do 0. Prędkość dąży asymptotycznie do v_∞ , przy czym dla małych prędkości ($v < v_\infty$) ciało będzie do tej prędkości przyspieszać, a dla dużych prędkości ($v > v_\infty$) będzie do niej zwalniać.

Bez większych problemów da się problem uogólnić dla prędkości skierowanych w górę (tj. gdy prędkość początkowa jest skierowana do góry). Wyniki będą właściwie takie same ale przedziały prędkości będą dane przez:

$$\left| \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v} \right| > 0 \iff v \in]-\infty, v_\infty[\cup]v_\infty, \infty[\quad (20)$$

$$\left| \frac{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} + v}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} - v} \right| < 0 \iff v \in]v_\infty, v_\infty[\quad (21)$$