MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

ZACZYNAMY OD HYDRODYNAMIKI

I OD $\boxed{\text{CIECZY IDEALNEJ}}$

CIECZ – OŚRODEK CIĄGŁY. BĘDZIEMY GO DZIELIĆ NA NIESKOŃCZENIE MAŁE KAWAŁKI, ALE NIESK. MAŁE "PUNKTY" CIĄGLE ZAWIERAJĄ B. DUŻĄ LICZBĘ CZĄSTECZEK!

OPIS MATEMATYCZNY CIECZY (≡CIECZ, GAZ)

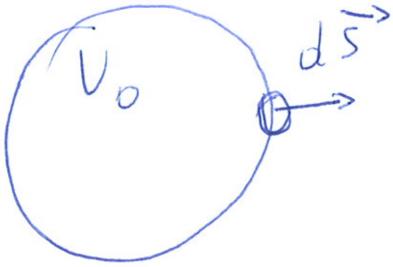
– $\bar{v}(x,y,z,t)$ oraz 2 WIELKOŚCI TERMODYNAMICZNE, NP $p(x,y,z,t)$ i $\rho(x,y,z,t)$

INNE WIELKOŚCI, NP. $T(x,y,z,t)$ – RÓWNANIE STANU.

PEŁNA CHARAKTERYSTYKA:

$\bar{v}, \rho, p$

RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI



$$m = \int_{V_0} \rho \, dV$$

WYPŁYW PRZEZ POLE $d\vec{S}$: $\rho \vec{v} d\vec{S}$

$\rho \vec{v} d\vec{S} > 0 \iff$ CIECZ WYPŁYWA Z OBJ. V_0

BILANS MASY:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV = - \oint \rho \vec{v} \, d\vec{S} = - \int \mathrm{div}(\rho \vec{v}) \, dV$$

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \, \rho \vec{v} \right) dV = 0$$

V_0 DOWOLNE $\Rightarrow$ R. CIĄGŁOŚCI:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \, \rho \vec{v} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \, \mathrm{div} \, \vec{v} + \vec{v} \, \mathrm{grad} \, \rho$$

$\vec{j} = \rho \vec{v} \rightarrow$ gęstość strumienia cieczy.

CIECZ NIEŚCIŚLIWA, $\rho = \mathrm{CONST}$, $\mathrm{div} \, \vec{v} = 0$

CIECZ IDEALNA – TAKA DLA KTÓREJ MOŻNA POMINĄĆ PROCESY TARCIA MIĘDZY ELEMENTAMI CIECZY ("LEPKOŚĆ") I PROCESY PRZEKAZU CIEPŁA WEWNĄTRZ CIECZY.

RÓWNANIE EULERA

BILANS SIŁY NA OBJ. dV:

$$\vec{F} = -\oint p\, d\vec{S} = -\int \operatorname{grad} p\, dV$$

MASA $\quad m = \int \rho\, dV$

INFINITEZYMALNA OBJ.

$$d\vec{F} = -\operatorname{grad} p\, dV$$

$$dm = \rho\, dV$$

$$dm \frac{d\vec{v}}{dt} = d\vec{F}$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = -\operatorname{grad} p\, dV$$

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p}$$

$\frac{d\vec{v}}{dt}$ – ZMIANA PRĘDKOŚCI KONKRETNEJ PORUSZAJĄCEJ SIĘ CZĄSTKI CIECZY, NIE POCHODNA W USTALONYM (x, y, z, t)!

TZW. "POCHODNA SUBSTANCJALNA"

$d\vec{v}$ ⇒ ZMIANA PRĘDKOŚCI W DANYM PUNKCIE + ZMIANA ZWIĄZANA ZE ZMIANĄ PUNKTU

$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}+d\vec{r}, t+dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + dz \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + (\vec{v}\nabla)\vec{v}\, dt$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

RÓWNANIE EULERA (1755)

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p}$$

JEŻELI MAMY SIŁĘ ZEWNĘTRZNĄ, NP. GRAWITACYJNĄ:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} \quad \left(\text{ogólnie } \vec{g} \to \frac{\vec{f}}{\rho}\right)$$

DODATKOWO → BRAK PRZEKAZU CIEPŁA ⇔ BRAK PRZEKAZU ENTROPII

$$ds = \frac{dQ}{T} = 0$$ → RUCH CIECZY IDEALNEJ JEST <u>ADIABATYCZNY</u> $\frac{ds}{dt} = 0$

$$\frac{ds}{dt} = 0 = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\nabla s$$

$$\rho \Big| \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\nabla s = 0$$

i DODAJEMY:

$$s \Big| \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \vec{v}) = 0$$

$\rho s \vec{v}$ – GĘSTOŚĆ STRUMIENIA ENTROPII

5 WIELKOŚCI DO WYZNACZENIA – $\rho, p, \vec{v}$.

5 RÓWNAŃ ($s = s(p, \rho) \to$ r. STANU)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\operatorname{grad} s = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{\rho}\left(-\nabla p + \vec{f}_{ZEWN}\right)$$

WARUNKI BRZEGOWE: $V_n = 0$ lub $V_n = V_{ŚCIANKI}$

DWIE CIECZE – NA STYKU $p_1 = p_2$ i $V_{n_1} = V_{n_2}$

ENTALPIA (NA JEDNOSTKĘ MASY):

$$w = \varepsilon + pV = \varepsilon + P/\rho$$

W WIĘKSZOŚCI PRAKTYCZNYCH PROBLEMACH ENTROPIA JEST STAŁA W CAŁEJ OBJĘTOŚCI CIECZY (STAŁA TEMP ITP.)

$$\frac{ds}{dt} = 0 \longrightarrow S = \text{CONST} \quad \text{DLA KAŻDEGO } t$$

TZW. RUCH IZENTROPOWY

WTEDY $dw = Tds + Vdp = Vdp = \frac{1}{\rho} dp$

$$dw = \frac{1}{\rho} dp \Rightarrow \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla w$$

CZYLI R. EULERA:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla \vec{w}$$

PRZEKSZTAŁCENIE – UŻYJMY

$$\frac{1}{2}\nabla \vec{v}^2 = (\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v}) + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

WTEDY $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - (\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v}) = -\mathrm{grad}\left(w + \frac{\vec{v}^2}{2}\right)$

PRZYKŁADAMY ROTACJĘ: (R. SŁUSZNY TYLKO DLA $s = \text{CONST}$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{v} = \mathrm{rot}(\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v})$$ – ZAWIERA TYLKO PRĘDKOŚĆ!

ELEMENTY HYDROSTATYKI

$\vec{v} = 0$

~~NIE MA~~ LEPKOŚĆ NIE MA ZNACZENIA – ZALEŻY OD PRĘDKOŚCI. EW. NAPIĘCIE POWIERZCHNIOWE...

POLE GRAWITACYJNE:

$$\nabla p = \rho \vec{g}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$p = p(z)$ – INACZEJ BYŁBY RUCH W PŁ. XY

POWIEDZMY ŻE NA WYSOKOŚCI h_0 PANUJE CIŚNIENIE p_0 (NP. POWIERZCHNIA WODY, $p_0 = 1 ATM$)

$$p(z) = p_0 + g \int_{h_0}^{z} \rho(z) dz$$

$$\rho = const \Rightarrow p = p_0 + \rho g (h_0 - z)$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho = \rho(z) \\ p = p(z) \end{array}\right\} \Rightarrow T = T(z) \; !$$

ZMIENNE POLE GRAWITACYJNE

$$\vec{g} = -\nabla \varphi \quad , \quad \Delta \varphi = 4\pi G \rho$$

$$\nabla p = \rho \vec{g} = -\rho \nabla \varphi$$

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = -4\pi G \rho}$$

RÓWNOWAGA MECHANICZNA – CIEPLNA NIEKONIECZNIE

CIAŁA SFERYCZNE

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G \rho$$

CZY RÓWNOWAGA MECHANICZNA BEZ RÓWNOWAGI CIEPLNEJ MOŻE BYĆ STABILNA?

TAK LUB NIE – MOŻE ZAJŚĆ KONWEKCJA, CHAOTYCZNE MIESZANIE CIECZY

ROZWAŻANIA TERMODYNAMICZNE PROWADZĄ DO WARUNKU BRAKU KONWEKCJI:

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g\beta T}{c_p} \qquad \beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

WSP. ROZSZERZALNOŚCI CIEPLNEJ

GAZ DOSKONAŁY

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p}$$

PRZEPŁYW STACJONARNY $\rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ (9)

LINIE PRĄDU: STYCZNE W KAŻDYM PUNKCIE DO WEKTORA PRĘDKOŚCI:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

RUCH STACJONARNY – LINIE PRĄDU STAŁE I POKRYWAJĄ SIĘ Z TOREM CZĄSTEK CIECZY

$\vec{l} \rightarrow$ wersor styczny do linii prądu

$\vec{l}(x,y,z)$

$\text{grad}\,\varphi \cdot \vec{l} = \frac{\partial \varphi}{\partial l}$ – pochodna w kierunku l

RUCH IZENTROPOWY:

$$\frac{1}{2}\nabla \vec{v}^2 - (\vec{v} \times \text{rot}(\vec{v})) = -\nabla \vec{w}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{v}^2}{\partial l} - 0 = -\frac{\partial \vec{w}}{\partial l}$$

$\vec{l}(\vec{v} \times \text{rot}(\vec{v})) = 0$ bo $\vec{l} \parallel \vec{v}$

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 + w\right) = 0$$

WZDŁUŻ LINII PRĄDU $\frac{1}{2}v^2 + w = \text{CONST}$

Z GRAWITACJĄ $\frac{1}{2}v^2 + w + gz = \text{CONST}$

BERNOULLI 1738!

10

$$\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon + \frac{p}{\rho} + gz = CONST$$

$\rho = CONST$, $\varepsilon = CONST$, RURA POZIOMA:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = CONST$$

SZYBSZY PRZEPŁYW – MNIEJSZE CIŚNIENIE!

STRUMIENIE PĘDU I ENERGII

STRUMIEŃ ENERGII

WEŹMY OBJĘTOŚĆ V_0

ENERGIA JEDNOSTKI OBJĘTOŚCI:

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon$$

ε - energia wewn. jednostki masy

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho \bar{v}^2}{2} = \frac{\bar{v}^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{\bar{v}^2}{2}\operatorname{div}\rho\vec{v} - \vec{v}\operatorname{grad}p - \rho\underbrace{\bar{v}(\bar{v}\nabla)\vec{v}}_{\vec{v}\nabla\frac{\bar{v}^2}{2}}$$

$$dw = Tds + \frac{1}{\rho}dp \Rightarrow \nabla p = \rho\nabla w - \rho T\nabla s$$

RAZEM

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho \bar{v}^2}{2} = -\frac{v^2}{2}\operatorname{div}\rho\vec{v} \cancel{\;\;\vec{v}\nabla p\;\;} - \rho\vec{v}\,\nabla\left(w+\frac{v^2}{2}\right)$$

$$+\rho T\,\vec{v}\,\nabla s$$

INNY ZWIĄZEK TERMODYNAMICZNY

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho$$

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon = w\,d\rho + \rho T\,ds$$

CZYLI

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = w\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} = -w\operatorname{div}\rho\vec{v} - \rho T\,\vec{v}\nabla s$$

RAZEM

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\bar{v}^2}{2}+\rho\varepsilon\right) = -\left(w+\frac{v^2}{2}\right)\operatorname{div}\rho\vec{v} - \rho(\vec{v}\nabla)\left(w+\frac{\bar{v}^2}{2}\right)$$

$$= -\operatorname{div}\left[\underbrace{\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)}_{\downarrow}\right]$$

gęstość strumienia energii.

DLACZEGO w A NIE ε W STRUMIENIU?

BO $w = \varepsilon + pV$ I $dw = T\,ds + p\,dV$ OPISUJE ZARÓWNO PRZEKAZ CIEPŁA JAK I PRACĘ CIŚNIENIA.

STRUMIEŃ PĘDU

OBLICZAMY $\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

R. CIĄGŁOŚCI

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

R. EULERA

CZYLI
$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

$$= -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k}} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k)$$

ZATEM
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

$\Pi_{ik} = \Pi_{ki} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ tensor gęstości strumienia pędu

$\Pi_{ik}dS_k$ – i-ta składowa pędu płynącego przez powierzchnię $d\vec{S}$. JEŻELI $d\vec{S} = \vec{n}dS$, to

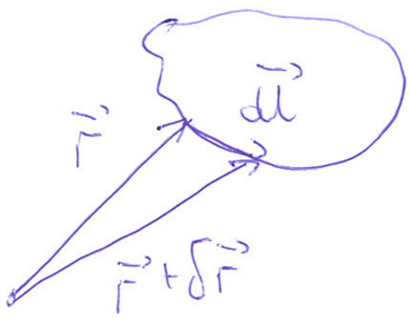
$$\Pi_{ik}n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k = (p\vec{n} + \rho\vec{v}(\vec{v}\vec{n}))_i$$

TW O ~~BEZWIROWO~~ ZACHOWANIU KRĄŻENIA PRĘDKOŚCI

KRĄŻENIE (CYRKULACJA):

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}\, d\vec{l} = \int \mathrm{rot}\, \vec{v}\, d\vec{S} \qquad \mathrm{rot}\, \vec{v} - \text{wirowość}$$

KONTUR C JEST CIEKŁY, PŁYNIE Z CIECZĄ



$$\Gamma = \oint \vec{v}\, \delta\vec{r}$$

$C = C(t)$ – KSZTAŁT SIĘ ZMIENIA

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v}\, \delta\vec{r} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \delta\vec{r} + \oint \vec{v}\, \frac{d\delta\vec{r}}{dt}$$

$$\oint \vec{v}\, \frac{d\delta\vec{r}}{dt} = \oint v\, \delta \frac{d\vec{r}}{dt} = \oint \vec{v}\, \delta\vec{v} = \frac{1}{2} \int \delta \vec{v}^2 = 0$$ NA KONTURZE ZAMKNIĘTYM

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \delta\vec{r} = -\oint \nabla w\, \delta r = -\int \mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, \vec{w}\, d\vec{S} = 0$$

STĄD $\oint \vec{v}\, d\vec{l} = \mathrm{CONST}$! TYLKO DLA PRZEPŁYWÓW IZENTROPOWYCH.

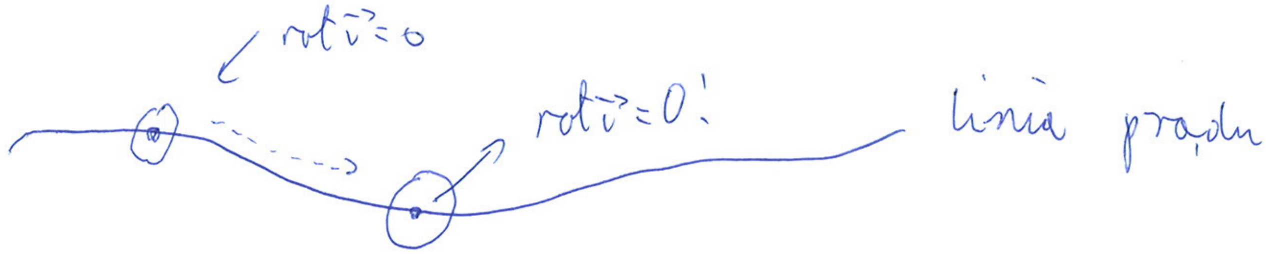
TW. THOMSONA (1869)

UOGÓLNIENIE TW. THOMSONA
NA PRZEPŁYWY NIEIZENTROPOWE:

$$\frac{\mathrm{rot}\,\vec{v} \times \nabla s}{\rho} = \mathrm{CONST}$$

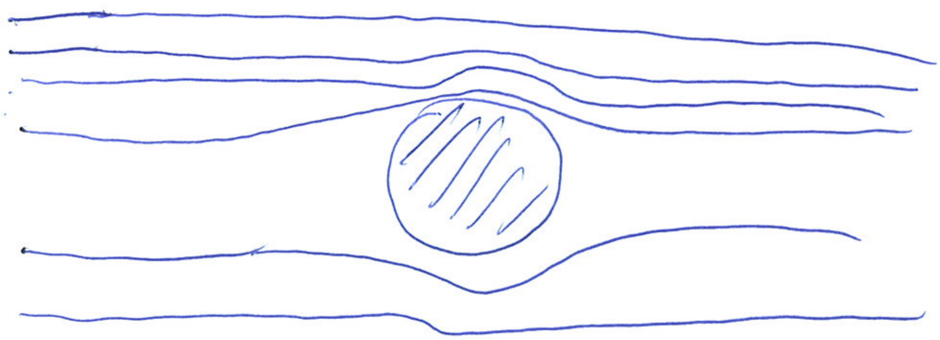
$\boxed{\text{PRZEPŁYWY POTENCJALNE } \mathrm{rot}\,\vec{v}=0}$ (RUCH STACJONARNY IZENTROPOWY)

NIECH W JAKIMŚ PUNKCIE CIECZY $\mathrm{rot}\,\vec{v}=0$



OGÓLNIE $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ JEST STAŁE NA LINII TORU CZĄSTKI CIECZY (STACJONARNIE - LINIA PRĄDU)

OPŁYW CIAŁA

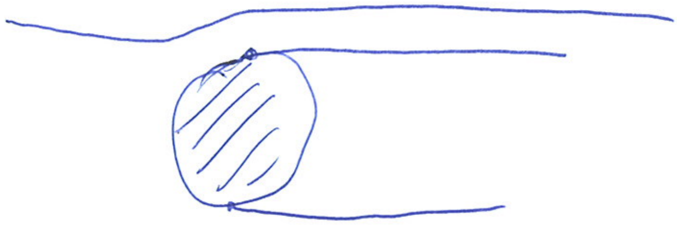


W NIESKOŃCZONOŚCI $\vec{v} = \mathrm{CONST}$, $\mathrm{rot}\,\vec{v}=0$.
CZY WIĘC ZAWSZE $\mathrm{rot}\,\vec{v}=0$?!
ALBO DLA PEWNEGO t RUCH JEST POTENCJALNY CZY ZAWSZE TAKI ZOSTANIE?

NIEKONIECZNIE!

TW. O ZACHOWANIU WIROWOŚCI NIE OBOWIĄZUJE NA ŚCIANKACH (NP. NIE MA ZAMKNIĘTYCH KONTURÓW)

„ODRYWANIE STRUG" – NIECIĄGŁOŚĆ $v_{\parallel}$ NA POW- ŚCIANY



NIECIĄGŁOŚĆ → POWIERZCHNIOWA ROTACJA

ROZW. RÓWNAŃ RUCHU STAJE SIĘ NIEJEDNOZNACZNE

→ TURBULENCJA, BARDZO TRUDNY PROBLEM (OPIS PÓŹNIEJ). LEPKOŚĆ USUWA NIEJEDNOZNACZNOŚCI

OGÓLNIE PRZEPŁYWY POTENCJALNE SĄ MAŁO REALISTYCZNE, ALE DLA CIAŁ „AERODYNAMICZNYCH" DAJĄ NIEZŁE PRZYBLIŻENIE RUCHU (POZA CIENKĄ WARSTWĄ PRZY POWIERZCHNI I WĄSKIM ŚLADEM ZA CIAŁEM)

INNY DOBRY PRZYKŁAD – MAŁE DRGANIA W CIECZY

OSZACUJMY DLA DRGAŃ $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla w$

ROZMIAR DRGAŃ $\simeq a$, ROZMIAR CIAŁA $l \gg a$

PRĘDKOŚĆ $\simeq u$

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} \sim \frac{u^2}{l}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \omega u \sim \frac{u^2}{a}$$

CZYLI $\left|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right| \gg \left|(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right| \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \vec{w} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$

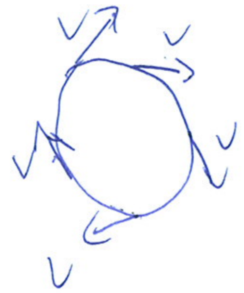
CZYLI $\mathrm{rot}\,\vec{v} = \mathrm{const}$, ALE DLA DRGAŃ $\langle \vec{v} \rangle = 0$.

CZYLI TAKŻE $\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$

<u>OGÓLNE WŁASNOŚCI RUCHU POTENCJALNEGO</u>

$$\oint \vec{v}\,d\vec{l} = \int \mathrm{rot}\,\vec{v}\,d\vec{f} = 0$$

W OBSZARZE JEDNOSPÓJNYM NIE MOŻE BYĆ ZAMKNIĘTYCH LINII PRĄDU!



$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - (\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{v}) = -\nabla w \Rightarrow$$

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w\right) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + w = f(t) = 0$$ (STAŁA $f(t)$ NIEISTOTNA, ~~rot~~ $\nabla f(t) = 0$)

CZYLI $\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + w = f(t)$

PRZEPŁYW STACJONARNY $\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, $f(t) = \text{CONST}$

$\frac{1}{2}\vec{v}^2 + w = \text{CONST}$ $\longrightarrow$ DLA CAŁEJ CIECZY, NIE NA LINII PRĄDU!

DODATKOWE ZAŁOŻENIE – CIECZ JEST NIEŚCIŚLIWA

$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$ r. LAPLACE'A!

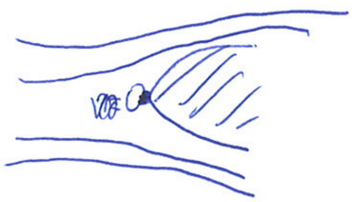
$+\ v_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ ZADANE NA ŚCIANKACH

r. EULERA SPEŁNIONE TOŻSAMOŚCIOWO

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

RUCH STACJONARNY: $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{CONST}$

$p = p_{MAX}$ dla $v = 0$



DLA O $v = 0$ ("PUNKT KRYTYCZNY")

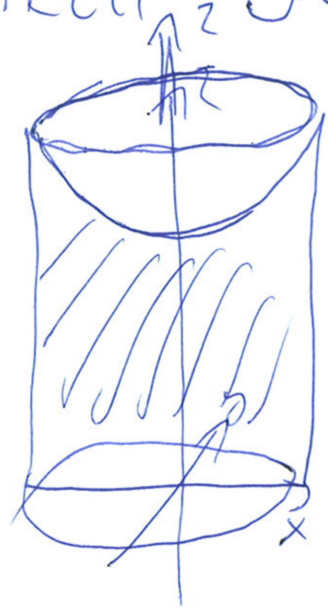
$$p_{MAX} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho u_\infty^2$$

$\varphi = \varphi(\vec{u})$, nie zależy od przyspieszeń!

NA PEWNO NIERELATYWISTYCZNE ...

PRZYKŁADY, W KOŃCU!

1) OBRÓT WALCOWEGO WIADRA – POW. SWOBODNA CIECZY, z $\circlearrowleft\Omega$



$\rho = const$

$v_x = -\Omega y$

$v_y = \Omega x$

$v_z = 0$

$$\operatorname{div}\vec{v} = \Omega\left(-\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \vec{g}}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \Rightarrow p = -\rho g z + f_1(x,y) \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = y\Omega^2 \Rightarrow p = \frac{\rho}{2} y^2\Omega^2 + f_2(x,z) \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = x\Omega^2 \end{cases}$$

RAZEM $\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2) - gz + CONST$

NA POW. SWOBODNEJ $p = p_{ATM} = CONST \Rightarrow$

$$z = \frac{\Omega^2}{2g}(x^2+y^2) + C$$

2) POTENCJALNY OPŁYW KULI

KULA O PROMIENIU R PORUSZA SIĘ W CIECZY Z PRĘDKOŚCIĄ $\vec{u}$

$\Delta\varphi = 0$ $\longrightarrow$ W NIESKOŃCZONOŚCI $v \to 0$, $\varphi \to 0$

ROZW $\Delta\varphi = 0$ DĄŻĄCE DO 0 W ∞:

$\frac{1}{r}$ I POCHODNE $\frac{1}{r}$ (POCZĄTEK UKŁ. WSPÓŁRZĘDNYCH W ŚRODKU KULI)

POTENCJAŁ MOŻE ZALEŻEĆ TYLKO OD $\vec{u}$, I TYLKO LINIOWO – RÓWNANIE I WAR BRZEGOWE SĄ LINIOWE

CZYLI $\varphi \sim \vec{u}\nabla\frac{1}{r}$

PODSTAWIAMY $\varphi = \vec{A}\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\bar{A}\bar{n}}{r^2}$ $\qquad \bar{n} = \frac{\bar{r}}{r}$

NA POWIERZCHNI KULI $\vec{v}\vec{n} = \vec{u}\vec{n}$

$$\vec{v} = \nabla\varphi = \frac{1}{r^3}\left(3\bar{n}(\bar{A}\bar{n}) - \vec{A}\right)$$

$$\vec{v}\vec{n}\Big|_{r=R} = \frac{2(\vec{A}\vec{n})}{R^3} = \vec{u}\vec{n} \implies \vec{A} = \frac{\vec{u}R^3}{2}$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{R^3}{2r^2}\vec{u}\vec{n} \qquad \vec{v} = \frac{R^3}{2r^3}\left(3\vec{n}(\vec{u}\vec{n}) - \vec{u}\right)}$$

ROZKŁAD CIŚNIENIA

$$p = p_\infty - \frac{\rho v^2}{2} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \neq 0$ BO UKŁAD WSP. SIĘ PORUSZA!

$$d\varphi = \varphi(\vec{r}(t+dt), t+dt) - \varphi(\vec{r}(t), t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{u}} \dot{\vec{u}} - \vec{u} \nabla \varphi = -\vec{u}\vec{v} + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{u}} \dot{\vec{u}}$$

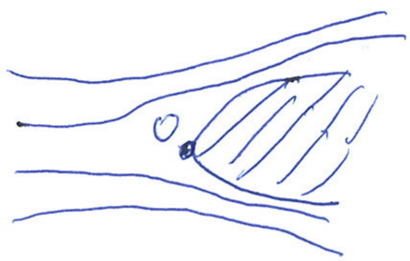
$$p = p_\infty - \frac{\rho v^2}{2} + \rho \vec{u}\vec{v} + \frac{R^3}{2r^2} \dot{\vec{u}}\vec{n}$$

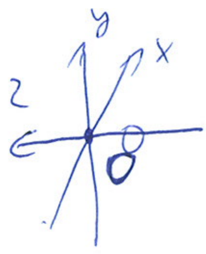
NA POW. KULI, $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{n})$

$$p = p_\infty + \frac{\rho u^2}{8}(9\cos^2\theta - 5) + \frac{\rho}{2} R \vec{n} \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\theta = 0, \pi \longrightarrow p = p_{max} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho u^2$$

3) PRZEPŁYW WOKÓŁ PUNKTU KRYTYCZNEGO





XY – PŁ. STYCZNA W PUNKCIE O. MOŻEMY PRZYBLIŻYĆ MAŁY KAWAŁEK CIAŁA TĄ PŁASZCZYZNĄ.
ROZWIJAMY W SZEREG TAKŻE φ:

$$\varphi = ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz$$

WARUNKI BRZEGOWE

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{DLA} \quad x=y=z=0 \quad \text{(PUNKT KRYTYCZNY)}$$

STĄD $a=b=c=0$

$C = -A-B$

$E=F=0$

D DOWOLNE, MOŻE BYĆ WYELIMINOWANE PRZEZ OBRÓT OSI xy. RAZEM

$$\varphi = Ax^2 + By^2 - (A+B)z^2$$

BRYŁY OBROTOWE WOKÓŁ OSI $z \Rightarrow A=B$

$$\varphi = A\left(x^2+y^2-2z^2\right)$$

$$v_x = 2Ax, \; v_y = 2Ay, \; v_z = -4Az$$

LINIE PRĄDU $x^2z = c_1$, $y^2z = c_2$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \\[2ex] \dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dz}{2z} \\[2ex] \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dz}{2z} \end{cases}$$

SIŁA OPORU PRZY PRZEPŁYWIE POTENCJALNYM

RUCH CIECZY WOKÓŁ CIAŁA I CIAŁA

W NIERUCHOMEJ CIECZY RÓWNOWAŻNY

— WYBIERAMY RUCH CIAŁA.

UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH PORUSZA SIĘ Z CIAŁEM,

W ∞ $\varphi \to 0$, $\vec{v} \to 0$

$$\varphi \underset{r\to\infty}{=} -\frac{a}{r} + \vec{A}\nabla\frac{1}{r} + \ldots \quad \text{(WYŻSZE POCHODNE } \tfrac{1}{r}\text{)}$$

$$\varphi = -\frac{a}{r} \Rightarrow \vec{v} = -\nabla\frac{a}{r} = \frac{a\vec{r}}{r^3}$$

WEŹMY STRUMIEŃ CIECZY PRZEZ KULĘ O PROMIENIU R

$$|\vec{v}|\Big|_{\vec{r}=\vec{R}} = \frac{a}{R^2} = \text{CONST}$$

STRUMIEŃ $= \rho \cdot 4\pi R^2 \cdot \frac{a}{R^2} = 4\pi\rho a \to$ POWINIEN BYĆ 0

DLA CIECZY NIEŚCIŚLIWEJ. STĄD $a=0$.

STĄD $\varphi \cong \vec{A}\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{A}\vec{n}}{r^2}$ DLA $r\to\infty$

$$\vec{v} = \frac{3(\vec{A}\vec{n})\vec{n} - \vec{A}}{r^3} \quad \text{(dipol)}$$

WYZNACZENIE $\vec{A}$ WYMAGA ROZW $\Delta\varphi = 0$ DLA KONKRETNEGO KSZTAŁTU CIAŁA.

ENERGIA KINETYCZNA CIECZY:

$$E = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV$$

ZEWNĄTRZ

CIAŁA

WEŹMY DUŻĄ KULĘ O PROMIENIU R I SCAŁKUJMY PO
TEJ KULI

$$\int v^2 dV = \underbrace{\int u^2 dV}_{u^2 (V - V_0)} + \int (\bar{v} + \bar{u})(\bar{v} - \bar{u}) dV$$

W II CAŁCE $\vec{v} + \vec{u} = \nabla(\varphi + \bar{u}\bar{r})$

$$\mathrm{div}\left[(\varphi + \bar{u}\bar{r})(\bar{v} - \bar{u})\right] = \nabla(\varphi + \bar{u}\bar{r})(\bar{v} - \bar{u}) + (\varphi + \bar{u}\bar{r})\left[\mathrm{div}\,\bar{v} - \mathrm{div}\,\bar{u}\right]$$

$$\equiv (\bar{v} + \bar{u})(\bar{v} - \bar{u})$$

CZYLI

$$\int v^2 dV = u^2 (V - V_0) + \int \mathrm{div}\left[(\varphi + \bar{u}\bar{r})(\bar{v} - \bar{u})\right] dV$$

$$= u^2 (V - V_0) + \int_{S + S_0} (\varphi + \bar{u}\bar{r})(\bar{v} - \bar{u}) d\vec{S}$$

NA WEWNĘTRZNEJ POWIERZCHNI S_0 $v_n = u_n$,

CZYLI $\oint_{S_0} \to 0$

NA ZEWNĘTRZNEJ POWIERZCHNI $\varphi \simeq -\frac{\bar{A}\bar{n}}{r^2}$, $d\bar{S} = \bar{n} R^2 d\Omega$

$$\int v^2 dV = u^2 \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - V_0\right) + \int \left[3(\bar{A}\bar{n})(\bar{u}\bar{n}) - (\bar{u}\bar{n})^2 R^3\right] d\Omega$$

$\int X \, d\Omega = 4\pi \langle X \rangle$ – DEFINICJA

$\langle (\bar{A}\bar{n})(\bar{B}\bar{n}) \rangle = \langle A_i n_i B_j n_j \rangle = A_i B_j \langle n_i n_j \rangle$

$$\langle n_i n_j \rangle = \begin{cases} i \neq j & \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle = 0 \\ i = j & \langle n_i^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \bar{n}^2 \rangle = \frac{1}{3} \end{cases}$$

CZYLI $\langle (\bar{A}\bar{n})(\bar{B}\bar{n}) \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} A_i B_j = \frac{1}{3} \bar{A}\bar{B}$

RAZEM

$$\int v^2 dV = u^2\left(\frac{4}{3}\pi R^3 - V_0\right) + 4\pi (\bar{u}\bar{A}) - \frac{4}{3}\pi R^3 u^2$$
$$= 4\pi (\bar{A}\bar{u}) - u^2 V_0$$

ENERGIA KINETYCZNA CIECZY

$$E = \frac{1}{2}\rho (4\pi \bar{u}\bar{A} - V_0 u^2)$$

ZNAJOMOŚĆ $\vec{A}$ WYMAGA ŚCISŁEGO ROZW $\Delta\varphi = 0$, ALE ZAWSZE JEST ON LINIOWĄ FUNKCJĄ $\vec{u}$.
ZAWSZE WIĘC $E = \frac{1}{2} m_{ik} u_i u_k$

m_{ik} – "TENSOR MASY ZWIĄZANEJ"

SKŁADOWE PĘDU: $\int \rho \vec{v} dV$ NIEOKREŚLONA, ALE

$$d\bar{P} = \vec{F} dt$$

$$\bar{u} d\vec{P} = \bar{F} \bar{u} \, dt = dW = dE$$

$$dE = \bar{u} d\vec{P} \Rightarrow P_i = m_{ik} u_k$$

STĄD $\vec{P} = 4\pi\rho\bar{A} - \rho V_0 \bar{u}$ → SKOŃCZONY!

PĘD <u>PRZEKAZYWANY</u> CIECZY PRZEZ CIAŁO W JEDN. CZASU TO $\frac{d\bar{P}}{dt} = -\vec{F}_{REAKCJI}$

CZYLI $$\bar{F}_R = -\frac{d\bar{P}}{dt}$$

SKŁADOWA $\vec{F} \parallel \bar{u}$ – SIŁA OPORU

— " — $F \perp \bar{u}$ – SIŁA NOŚNA

PARADOKS D'ALEMBERTA

$\vec{u} = \text{CONST} \Rightarrow \bar{P} = \text{CONST} \Rightarrow \bar{F}_R = 0$!

MUSI TAK BYĆ – BO W CIECZY IDEALNEJ NIE MA DYSSYPACJI ENERGII.

JESZCZE MOMENT SIŁY

$$\bar{M} = 4\pi\rho (\vec{A} \times \vec{u})$$

POPRZEDNIE ROZWAŻANIA DOTYCZĄ CIECZY NIESKOŃCZONEJ, BEZ POWIERZCHNI SWOBODNEJ – INACZEJ POJAWIA SIĘ TZW.

OPÓR FALOWY – RUCH GENERUJE FALE UNOSZĄCE ENERGIĘ DO ∞.

NA KONIEC RUCH DRGAJĄCY

1) CIAŁO DRGA W CIECZY

$$M \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ZEWN}$$

$$(M\delta_{ik} + m_{ik}) \frac{du_k}{dt} = F_i$$

2) CIECZ DRGA I PORUSZA CIAŁO

NIECH PRĘDKOŚĆ CIECZY MAŁO SIĘ ZMIENIA NA ROZMIARACH CIAŁA.

$\vec{v}$ – PRĘDKOŚĆ RUCH CIECZY "BEZ CIAŁA"

$\vec{u}$ – PRĘDKOŚĆ CIAŁA

CIAŁO "PORYWANE", $\vec{v} = \vec{u}$ – SIŁA TAKA SAMA JAK NA OBJ. CIECZY, $\rho V_0 \frac{d\vec{v}}{dt}$

ALE $\vec{v} \neq \vec{u}$, DODATKOWY PĘD $m_{ik}(u_k - v_k)$

ŁĄCZNA SIŁA

$$\rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k) = M \frac{du_i}{dt}$$

STĄD $(M\delta_{ik} + m_{ik}) u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik}) v_k \rightarrow$ RÓWNANIE ALGEBRAICZNE

PRZYKŁAD – DRGANIA KULI PORYWANEJ PRZEZ CIECZ

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{u}R^3$$

$$E = \frac{1}{2}\rho\left(4\pi \vec{A}\vec{u} - V_0 u^2\right) \equiv \frac{1}{2} m_{ik} u_i u_k$$

STĄD $m_{ik} = \frac{2}{3}\pi\rho R^3 \delta_{ik}$

1) KULA PORUSZA CIECZ

$$\vec{P}_{CIECZY} = \frac{2\pi\rho R^3 \vec{u}}{3} \qquad \vec{F} = -\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{2}{3}\pi\rho R^3 \frac{d\vec{u}}{dt}$$

STĄD $\frac{4\pi R^3}{3}\left(\rho_0 + \frac{1}{2}\rho\right)\frac{d\vec{u}}{dt} = f$

"EFEKTYWNA GĘSTOŚĆ" $\to \rho_0 + \frac{1}{2} \otimes$ GĘSTOŚCI CIECZY

2) CIECZ PORUSZA KULĘ

$$\vec{u} = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_0}\vec{v}$$

$\rho_0 > \rho$ – KULA SIĘ SPÓŹNIA

$\rho_0 < \rho$ – KULA WYPRZEDZA CIECZ