

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

NA OGÓC $F(r, \varphi) = F(r)$

Jeśli $\vec{F} = 0 \rightarrow$ ISTNIEJE POTENCJAŁ, $\vec{F} = -\nabla V(r)$

ZAGADNIENIE 2 CIAŁ:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} = \vec{F}(r)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}(r)$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = 0$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

RUCH JEST PLASKI - PŁASZCZYZNA WYZNACZONA

PRZEZ WEKTORY $\vec{r}_0, \vec{v}_0$

PRZYJMIJMY UKŁAD WSP. Γ -ZF, $x, y \in \text{pl}(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$,
 $os' \perp (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$

W CZASIE RUCHU $z \equiv 0$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2})$$

(48)

UKŁAD BIEGUNOWY

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

R. RUCHU

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \\ \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) = 0 \end{array} \right. \quad m r \dot{\varphi}^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m a_r = F \\ m a_\varphi = 0 \end{array} \right.$$

$$m r^2 \dot{\varphi} = J = \text{const} - \text{ZACHOWANY MOMENT Pędu}$$

SPRAWDZENIE - JW NOETHER

$$\bar{t} = t$$

$$\bar{r} = r$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + \epsilon \rightarrow \eta_\varphi = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \cdot 1 = J = m r^2 \dot{\varphi} \quad (\checkmark)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} \hat{r}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{J}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} = - \frac{J}{mr} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt} \left(- \frac{J}{mr} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right) = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} \left(- \frac{J}{mr} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right) \\ &= - \frac{J^2}{m^2 r^3} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

$$m \ddot{\vec{r}} - m r \dot{\varphi}^2 \hat{r} = F$$

$$- \frac{J^2}{m^2 r^3} m \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - m r \frac{J^2}{m^2 r^3} = F$$

$$\boxed{\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = - \frac{m r^2}{J^2} F(r)}$$

WZÓR BINETA — RÓWNAŃNIE TORU

PODSZAWIĄC $u = \frac{1}{r}$

$$u'' + u = - \frac{m}{J^2 u^2} F(u)$$

OSCILLATOR

WYMIUSZONĄ $\omega^2 = 1$

$$u' u'' + u u' = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (u'^2 + u^2) = - \frac{\mu}{j^2} F(u) u'$$

$$\begin{aligned} (*) \quad \frac{1}{2} (u'^2 + u^2) &= - \frac{\mu}{j^2} \int \frac{F(u)}{u^2} \frac{du}{d\varphi} d\varphi = - \frac{\mu}{j^2} \int \frac{F(u) du}{u^2} + C_1 \\ &= + \frac{\mu}{j^2} \int \underbrace{F(r) dr}_{-V(r)} + C_1 \end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} u' &= \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} = \frac{dt}{d\varphi} \frac{d}{dt} \frac{1}{r} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \dot{r} \\ &= \frac{\mu r^2}{j} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \dot{r} = \frac{\mu}{j} \dot{r} \end{aligned}$$

$$(*) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\mu^2}{j^2} \dot{r}^2 + \frac{\mu^2 r^2 \dot{\varphi}^2}{j^2} \right) + \frac{\mu}{j^2} V(r) = C_1$$

$$T + V = E = \frac{j^2 C_1}{\mu} \quad C_1 = \frac{\mu E}{j^2}$$

$$u' = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \dot{r}$$

$$\frac{1}{r^4} \dot{r}^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2\mu}{j^2} \int F(r) dr + C_1$$

$$\frac{\dot{r}^2}{r^2} = \frac{2\mu r^2}{j^2} \int F(r) dr + C_1 r^2 - 1$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r^2}{\sqrt{\frac{2Mr^2}{j^2} \int F(r) dr + (1 - r^2 - \gamma)}}$$

(57)

$$= \left(\frac{2M}{j^2} \int F(r) dr + (1 - 1/r^2) \right)^{-1/2}$$

~~φ = φ₀~~

$$\varphi = \int \left(\frac{2M}{j^2} \int F(r) dr + (1 - 1/r^2) \right)^{-1/2} dr$$

CAŁKUJE SIĘ PRZEZ FUNKCJE ELEMENTARNE
TYLKO CZASAMI - JEŻELI $F(r) = Fr^n$, TŁO DLA
 $n = 1, -1, -3$, CZYLI $F(r) \sim r, r^{-1}, r^{-3}$ (OSCILLATOR,
KEPLER, r^{-3})

PRAWA KEPLERA

$$F(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

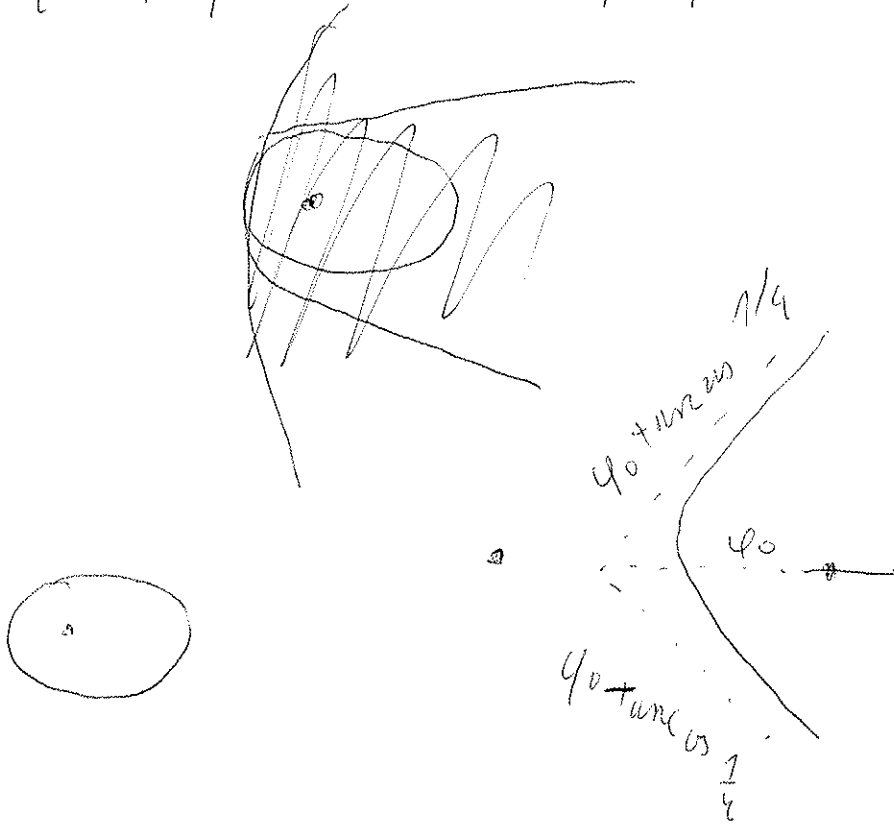
$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu \alpha}{j^2} \equiv \frac{1}{p} \quad p = \frac{j^2}{\mu \alpha} \quad \left(\begin{array}{l} \text{PARAMETR} \\ \text{ORBITY} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\varphi - \varphi_0)$$

e - mimośrodek ORBITY

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

KRZYWA SIÓDEKOWA

 $\xi < 1$, r skończona — ELLIPSA $\xi = 1$, $r \rightarrow \infty$ dla $\varphi = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{2}$ — PARABOLA $\xi > 1$, $r \rightarrow \infty$ dla $\varphi = \varphi_0 + \arccos \frac{1}{\xi}$ — HIPERBOLA

WYZNACZENIE STACJI

$$\frac{1}{2} (m \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{2}{r} = E$$

$$\frac{1}{2} m \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right)^2 \right] - \frac{2}{r} = E$$

$$\text{STACJA PO WSTAWIENIU} \quad \xi = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{mL^2}}$$

 $E < 0$ ELLIPSA, RUCH ZWIĄZANY $E = 0$ PARABOLA $E > 0$ HIPERBOLA — ZAWSZE DLA SIŁ ODPRYCHADZAJĄCYCH

OSIE ELIPSY

53

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{DŁUGA PÓŁOŚ} \quad a = \frac{p}{1-e} = -\frac{2}{2E} \\ \text{KRÓTKA PÓŁOŚ} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{2}{\sqrt{-2E}} \end{array} \right.$$

PRAWA KEPLERA

I) RUCH PO ELIPSIE — OK!

II) STAŁA "PRĘDKOŚĆ POŁOWA":

$$\vec{c} = \frac{1}{r} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{j} - \text{OK!}$$

$$ds = \frac{1}{2} r v_{\perp} dt = |\vec{c}| dt$$

III) OKRES OBROTU, STOSUNEK

$$T = \frac{\pi ab}{c} = \frac{2\pi (-\frac{2}{2E}) \frac{2}{\sqrt{-2E}}}{1} = -\pi \sqrt{\frac{1}{-2E^3}}$$

$$\text{PLANET} \quad d_i = G m_i M \quad i=1,2$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \frac{a_2}{a_1} \frac{b_2^2}{b_1^2} \frac{m_1^2}{m_2^2} \frac{J_2^2}{J_1^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \frac{J_1^2}{J_2^2} \frac{\cancel{J_{m_2 E_2}}}{\cancel{J_{m_1 E_1}}} \frac{m_1^2}{m_2^2} \frac{\cancel{J_2}}{\cancel{J_1}} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{J_{E_2}}{J_{E_1}}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \frac{M_2}{M_1} \frac{d_2}{d_1} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \frac{\cancel{m_1} \cancel{M}}{\cancel{m_2} \cancel{M}} \frac{\cancel{m_2} \cancel{M}}{\cancel{m_1} \cancel{M}} \quad (59)$$

$$= \frac{a_1^3}{a_2^3} \frac{m_2 + M}{m_1 + M}$$

KEPLER $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$, ALB $m/M < 1/100$ (JOWISZ)

ZALEŻNOŚĆ CZASOWA RUCHU

$$dt = \frac{M}{\gamma} r^2 d\varphi = \frac{M}{\gamma} \frac{p^2 d\varphi}{(\gamma + e \cos \varphi)^2} \quad \varphi(t=0) = 0$$

NIE CHYBIE SIĘ ELEMENTARNIE

PODSTAWIAJĄC $r = a(1 - e \cos u)$ DOSTAJE SIĘ

$$t = \frac{M}{\gamma} ab(u - e \sin u)$$

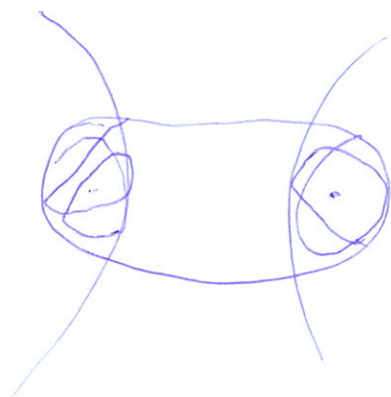
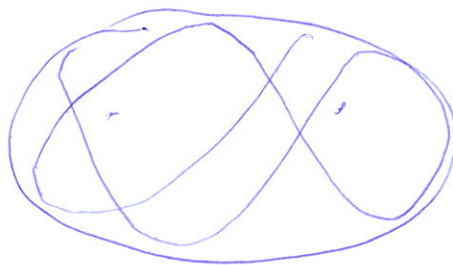
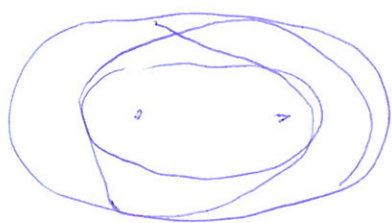
$$r = a(1 - e \cos u)$$

CIEKAWOSTKI (POLA CENTRALNE)

(55)

1) ZAGADNIENIE 3 CIAŁ — PODOBNO ROZWIĄZANE
ANALITYCZNE, ALE W OSTATNICH 20 LATACH!
MOSTLY USELESS ANYWAY ---

2) ŁATWIEJSZA ANALIZA — 2 CIĘŻKIE CENTRA.



LUB RUCH NIE OGRANICZONY.

3) RELATYWISTYCZNE ZAG. KEPLEROWE.

STW — MOŻE ZROBIMY

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{G^2 M^2 m^2}{J^2 c^2}}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \chi (\psi - \psi_0)}$$

$$V = \frac{G M m}{r}$$

$$\Delta \psi = 2\pi \frac{1}{\gamma} - 2\pi = 2\pi \frac{1 - \gamma}{\gamma} \approx \frac{G^2 M^2 m^2 \pi}{J^2 c^2}$$

OTW = GxTILE I SIĘ ZGADZA!

JEDEN Z WAŻNIEJSZYCH TESTÓW OTW.

MERKURY

TEORIA 42.9" / ~~rok~~ obrót

EKSPERYMENT 42.56" / ~~rok~~ obrót