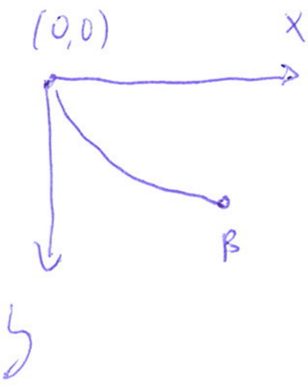
RACHUNEK WARIACYJNY - PODSTAWY

1) NAJKRÓTSZA KRZYWA ŁĄCZĄCA 2 PUNKTY?

$$I = \int_{(x_A, y_A)}^{(x_B, y_B)} ds = \min \quad - ?$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

2) TOR NAJKRÓTSZEGO SPADKU

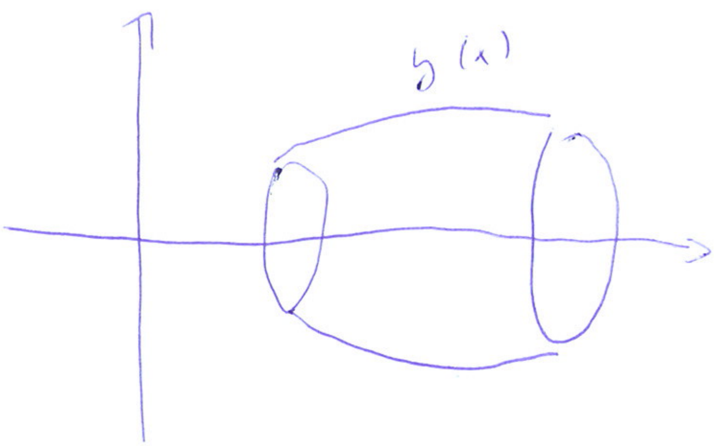


$$I = \int_A^B \frac{ds}{V} = \int_{xA}^{xB} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{V}\, dx$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx \qquad y(x_B) = y_B$$

3)



NAJMNIEJSZA POW. OBROTOWA

$$I = 2\pi \int_A^B y\, ds = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} y \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad \begin{array}{l} y(x_A) = y_A \\ y(x_B) = y_B \end{array}$$

PROBLEM – MINIMUM FUNKCJONAŁU $I(y)$

PRZY ZADANYCH WAR. BRZEGOWYCH $y(x_A) = y_A$
$y(x_B) = y_B$

$$I(y) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y')\,dx$$

ROZWIĄZANIE – RÓWNANIA EULERA-LAGRANGE'A
– RÓŻNICZKOWE!

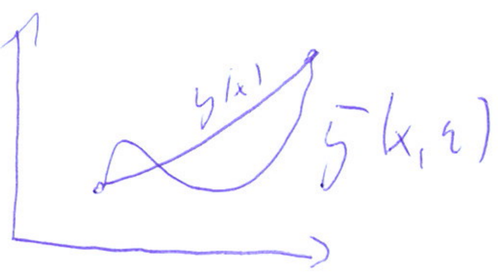
MINIMUM – DLA $y(x)$

BADAMY 1-PARAMETROWĄ RODZ. FUNKCJI PORÓWNAWCZYCH $\bar{y}(x, \varepsilon)$ T. ŻE:

$\bar{y}(x_A, \varepsilon) = y_A$ $\qquad$ $\bar{y}(x, 0) = y(x)$

$\bar{y}(x_B, \varepsilon) = y_B$

$\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ SĄ CIĄGŁE W x i ε



$$I = I(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx \quad \text{– MINIMUM DLA } \varepsilon = 0$$

WARUNEK KONIECZNY $\left[\frac{dI}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0$

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \underbrace{\frac{d\bar{y}'}{d\varepsilon}}_{\substack{= \\ \frac{d}{dx}\frac{d\bar{y}}{d\varepsilon}}} \right] =$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right] \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} + \left[\frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \right]_{x_A}^{x_B}$$

$$\left. \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} \right|_{x_A} = \left. \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} \right|_{x_B} = 0 \;!$$

ORAZ, OZNACZMY $\left. \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \eta(x)$, $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \eta(x) = 0 \text{ - MINIMUM}$$

DOWOLNE

RÓWNANIE E-L:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{DOSTATECZNOŚĆ?}$$

TRUDNE NIELINIOWE RÓW. RÓŻ. II RZĘDU!

CZĘSTY PRZYPADEK $f = f(y, y')$

$$\frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) = \cancel{y'' \frac{\partial f}{\partial y'}} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} y' - \cancel{\frac{\partial f}{\partial y'} y''}$$

$$= y' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

f SPEŁNIA REL 1 $f \neq f(x) \Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) = 0$$

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const}$$

<u>CAŁKA PIERWSZA</u> (W MECH. KLASYCZNEJ <u>CAŁKA ENERGII</u>)

<u>NASZE ~~PRZYKŁADY~~</u>

~~1) NAJKRÓTSZA~~ LINIA

$$\cancel{f = \sqrt{1+y'^2}} \qquad f \neq f$$

$$\cancel{\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}} =$$

INNY WARIANT $\longrightarrow$ f NIE ZALEŻY OD y

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{CONST} \quad (\underline{\text{ZACH. PĘDU}})$$

NASZE PRZYKŁADY

1 NAJKRÓTSZA LINIA

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad f = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$y' = \mathrm{const} \implies y = ax + b \quad !$$

2 BRACHISTOCHRONA

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C$$

$$y' \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = \frac{-1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$

$$y(1+y'^2) = c^2 = 2a$$

$$y'^2 = \cancel{\frac{A}{y} - 1} = \frac{2a}{y} - 1$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

$$\int \sqrt{\frac{y}{2a-y}}\, dy = x - x_0$$

$y = a(1-\cos\theta)$ $\qquad dy = a\sin\theta\, d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$2a - y = a(1+\cos\theta)$

$$\sqrt{\frac{y}{2a-y}} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\int\sqrt{\frac{y}{2a-y}}\,dy = 2a\int \sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = a\int(1-\cos\theta)\,d\theta =$$
$$= a(\theta-\sin\theta)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta)\end{cases} \longrightarrow \text{CYKLOIDA !}$$

$y(x=0) = 0$

$$\begin{cases} 0 = x_0 + a(\theta - \sin\theta) \\ 0 = 1 - \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$x_0 = -\cancel{\frac{\pi}{2}a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}\ 0$$ $\boxed{\text{BERNOULLI 1697}}$

a z WARUNKU $y(x_B) = y_B$ – R. PRZESTĘPNE

3) NAJMNIEJSZA POWIERZCHNIA

$$f = y\sqrt{1+y'^2}$$

$$-b = y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = b$$

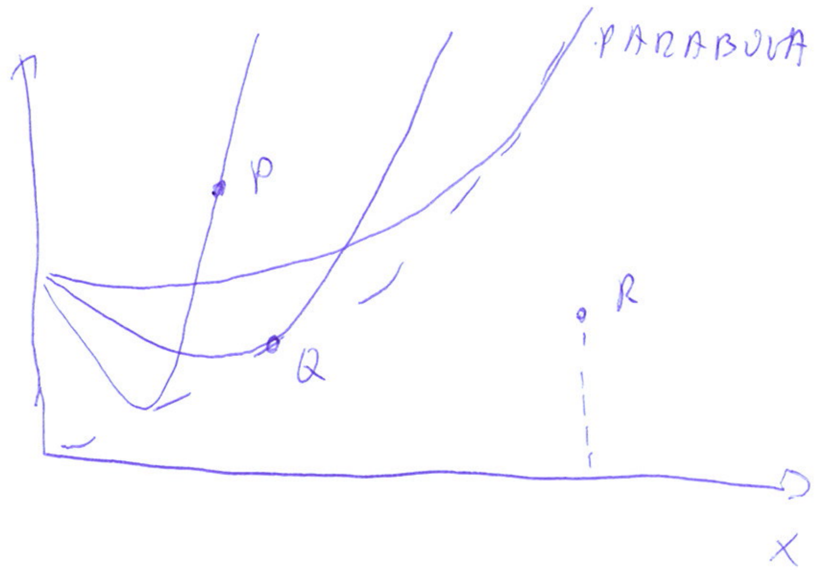
$$x - x_0 = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{b^2} - 1}} = b \operatorname{ar\,ch}\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$y = b \cosh \frac{x - x_0}{b}$$

$$y_A = b \cosh \frac{x_A - x_0}{b}$$

$$x_0 = x_A - b \operatorname{ar\,cosh} \frac{y_A}{b}$$

$$y = b \cosh\left[\frac{x - x_A}{b} + \operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{y_A}{b}\right)\right]$$



R → DWA OKRĘGI + OŚ, NIE MA KRZYWYCH 2-KROTNIE RÓŻNICZKOWALNYCH, $S = \pi(y_A^2 + y_B^2)$

WIELE ZMIENNYCH

$$f = f(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots, y_n, y_n')$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$$ – UKŁAD R-E-L.

ALE NIESTETY TYLKO

$$\left(\sum_i y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) - f = \text{CONST}$$, TYLKO 1

CAŁKA PIERWSZA

PROBLEMY Z WIĘZAMI

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y')\,dx = \text{EKSTREMUM}$$

$y(x_A) = y_A \quad y(x_B) = y_B$

PRZY WARUNKU

$$J = \int_{x_A}^{x_B} g(x, y, y')\,dx = J_0 = \text{CONST}$$ (MOŻE BYĆ WIĘCEJ WIĘZÓW)

$$\bar{y} = \bar{y}(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \qquad \bar{y}(x_A) = y_A \quad \bar{y}(x_B) = y_B$$

$$\bar{y}(x, 0, 0) = 0$$

$I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) =$ EKSTR.

$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) =$ CONST. $\longrightarrow$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ZALEŻNE DLA USTALONEGO J_0!

KONSTRUUJEMY

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

λ – "MNOŻNIK LAGRANGE'A"

$$\left.\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}\right|_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0} = \left.\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2}\right|_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = 0$$

(TO SAMO $\bar{I}$ CO DLA I)

$$h = f + \lambda g$$

$$\frac{d}{d\varepsilon_1}, \frac{d}{d\varepsilon_2} \Rightarrow \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right)\right] \eta_i(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial y'} - \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = y(x, \lambda, C_1, C_2)$$

$$\left.\begin{aligned} y(x_A, \lambda) &= y_A \\ y(x_B, \lambda) &= y_B \\ J = \int_{x_A}^{x_B} g\, dx &= J_0 \end{aligned}\right\}$$ 3 R-NIA, 3 STAŁE – OK!

WIĘCEJ WIĘZÓW

$$h = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_n g_n$$

PRZYKŁAD – KATENOIDA, KSZTAŁT WISZĄCEGO SZNURKA:

$$E_p = \rho g \int_A^B y\,ds = \rho g \int_{x_A}^{x_B} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = MIN$$

$$L = \int_A^B \sqrt{1+y'^2}\,dx = L_0 = CONST$$

$$\lambda = -\rho g y_0$$

$$h = \rho g (y-y_0)\sqrt{1+y'^2} \longrightarrow (y-y_0)\sqrt{1+y'^2}$$

$$\eta = y - y_0 \qquad h(\eta) = \eta\sqrt{1+\eta'^2}$$

$$\eta = b\,ch\left(\frac{x-x_0}{b}\right)$$

$$y = y_0 + b\,ch\left(\frac{x-x_0}{b}\right)$$

x_0, y_0, b – NUMERYCZNIE, ZAWSZE DA SIĘ ZNALEŹĆ

INNY TYP WIĘZÓW, TYPOWY DLA MECHANIKI KLASYCZNEJ

$$\left.\begin{cases} g_1(x, y_1 \ldots, y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ g_m(x, y_1 \ldots, y_n) = 0 \end{cases}\right\} \text{WIĘZY LOKALNE}$$

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y_1 \ldots, y_n, y_1' \ldots y_n') = 0$$

ZACZNIJMY OD JEDNEGO $g(x, y_1 \ldots, y_n) = 0$

WPROWADZAMY $\bar{y}_i(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ JAK ZWYKLE

WPROWADŹMY

$$J(x) = \int_{x_A}^{x_B} \varphi(x)\, g(x, \bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n) = 0$$

$\varphi(x)$ <u>DOWOLNE</u> $\Rightarrow g(x, \ldots) \equiv 0$

$K = I + \lambda J$

$$h = f + \lambda \varphi(x) g \equiv f + \lambda(x) g$$

$$\eta_j^{(i)}(x) = \left[\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial \varepsilon_j}\right]_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0}$$

$$(*) \sum_{i=1}^{n} \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y_i'}\right)\right] \eta_j^{(i)}(x)\, dx = 0 \qquad j = 1, 2$$

ALE TERAZ $\eta_j^{(i)}$ NIE SĄ NIEZALEŻNE, $g = 0$!

(33)

$$\frac{dg}{d\varepsilon_j} = 0 = \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_1}\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial \varepsilon_j} + \dots + \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n}\frac{\partial \bar{y}_n}{\partial \varepsilon_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\eta_j^{(i)}(x) \qquad j = 1, 2$$

(*) + g NIE ZALEŻY OD POCHODNYCH:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) + \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y_i} \right] \eta_j^{(i)}\, dx = 0$$

$\lambda(x)$ DOWOLNE, WYBIERZMY T. ŻE

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1'}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y_1} = 0$$

WTEDY $\sum_{i=1}^{n} \to \sum_{i=2}^{n}$, $\eta_j^{(i)}$ $i = 2, \dots, n$ NIEZALEŻNE

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0 \qquad i = 2, \dots, n$$

$\boxed{+\ i = 1}$

CZYLI, m WIĘZÓW

$$h = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\, g_i$$

n RÓWNAŃ

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial y_i'} - \frac{\partial h}{\partial y_i} = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} - \frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum \lambda_i \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0$$

+ WAR. BRZEGOWE + WIĘZY.