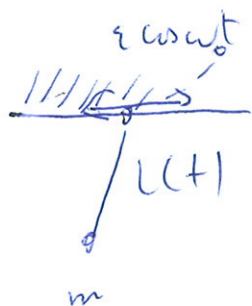


REZONANS PARAMETRYCZNY

110



$$L(t) = l_0 + \varepsilon \cos \omega_0 t$$
$$\Rightarrow \omega^2 = \omega^2(t)$$

CO WIĘCEJ?

POŚCIE TRUDNY PROBLEM...

OGÓLNIĘ

$$(*) \ddot{x} + 2g(t)\dot{x} + \omega^2(t)x = 0$$

$$\begin{cases} g(t+T) = g(t) \\ \omega^2(t+T) = \omega^2(t) \end{cases} \rightarrow \text{OKRESOWE}$$

ROZWIĄZUJEMY $(*)$ W PRZEDZINIIE FUNKCJI ZESPOŁONYCH, PO PODSTAWIENIU WAR. POŁZNYCH KOWTCH $\rightarrow$ ROZW. RZECZYWISTE. $\uparrow$

R. LINIOWE - Z NIEZALĘŻNE ROZWIĄZANIA

$x_1(t), x_2(t)$, OGÓLNE ROZW TO $c_1 x_1 + c_2 x_2$

$$x_i(t), i=1,2$$

$x_i(t)$ jest ~~rozwiązaniem~~ $\rightarrow x_i(t+T)$ też rozwiązaniem

$$\text{CZYLI } x_i(t+T) = c_i x_i(t)$$

$$\text{ROZWIĄZANIE: } x_1', x_2'$$

$$x_i'(t) = b_{ij}^{-1} x_j'(t)$$

1

$$x_i'(t+\tau) = b_{ij}^{-1} x_j'(t+\tau) = c_{ij}^{-1} x_j'(t) = c_{ij}^{-1} b_{jk} x_k'(t)$$

$$x_k'(t+\tau) = (b^{-1} c b)^k x_k'(t) \equiv (c')^k x_k'(t)$$

$$\boxed{c' = b^{-1} c b} \quad b - \text{dowolne nieosobliwe.}$$

Z ALGEBRY WIADOMO ŻE c MOŻNA SPROWADZIĆ DO POSTACI

$$1) \quad c = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{lub } 2) \quad c = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

↓

ZBIÓR c DADAJĄCY TAKĄ

POSTACI OTWARTEJ I

GEOSTY W $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ — "TYPOWY"

OPŁAD OGRANICZAMY SIĘ DO 1) — W ZASADZIE WSZYSTKIE SENSOWNE PROBLEMY. WYBIERAMY x_1, x_2 T-ZE:

$$\begin{cases} x_1(t+\tau) = \lambda_1 x_1(t) \\ x_2(t+\tau) = \lambda_2 x_2(t) \end{cases}$$

ROZWIĄZANIA LINIOWE RÓŻNICOWE I RZĘDNY (112)

ROZWIĄZANIA ZNAJDE, PODOBNE DO RÓŻNICZKOWYCH

$$\bar{x} = \lambda x \rightarrow x = (e^{\lambda t})$$

$$x(t+\tau) = \lambda x(t) \rightarrow x(t) = \lambda^{\frac{t}{\tau}} \pi(t)$$

$$\text{Gdzie } \pi(t+\tau) = \pi(t)$$

CZLI

$$\begin{cases} x_1(t) = \lambda_1^{\frac{t}{\tau}} \pi_1(t) \\ x_2(t) = \lambda_2^{\frac{t}{\tau}} \pi_2(t) \end{cases}$$

ROZPATRZYM WROD'SKIAN

$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1$$

$$\frac{dw}{dt} = x_1 \ddot{x}_2 - x_2 \ddot{x}_1 = -2g w$$

STAD

$$w = w(0) e^{-2 \int_0^t g(\tau) d\tau}$$

$$\text{ALE } w(t+\tau) = x_1(t+\tau) \dot{x}_2(t+\tau) - x_2(t+\tau) \dot{x}_1(t+\tau)$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 w(t)$$

$$\text{STAD } \frac{w(t+\tau)}{w(t)} = e^{-2 \int_0^{\tau} g(t) dt} = \lambda_1 \lambda_2$$

$$0 < \lambda_1 \lambda_2 \leq 1$$

↑

$$= \text{TYLKO DLA } g=0$$

KOLEJNY KROK $\rightarrow$ RÓWN. RZECZYWISTE, WIFC
JEŻELI $x(t)$ JEST ROZW, TO $\dot{x}(t)$ TEŻ

$$(211) \quad \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

113

$$A) \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$$

$$|\lambda_1|^2 = \lambda_1 \lambda_2 = e^{-2 \int_0^T \gamma(t) dt} \leq 1$$

$$\lambda_1 = |\lambda_1| e^{-i\varphi_1}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = |\lambda_1|^{\frac{t}{T}} e^{\frac{i\varphi_1 t}{T}} \pi_1(t) \\ x_2(t) = |\lambda_1|^{\frac{t}{T}} e^{-\frac{i\varphi_1 t}{T}} \pi_2(t) \end{cases}$$

$\underbrace{\quad}_{\text{OKRES}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{OKRES}}$
 $\frac{2\pi T}{\varphi_1} \quad T$

$|\lambda_1| < 1$ — ZANIK WYKŁADNICZY

$|\lambda_1| = 1$ (czyli $\gamma = 0$) — NIE MA REZONANSU,

RUCH OKRESOWY O ILE $\frac{2\pi T}{\varphi_1} = \frac{2\pi}{\varphi_1} = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$,

OKRES $T' = LT$

B) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — WYBIERAMY $\lambda_1 > \lambda_2$

$|\lambda_1| < 1$ — ZANIK

ALE MOŻE BYĆ $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$

WTEPY $x_1(t) = |\lambda_1|^{\frac{t}{T}} (\pm 1)^{\frac{t}{T}} \pi_1(t)$

$$\underbrace{e^{\frac{i\pi \alpha t}{T}}}_{\alpha = 0, 1}$$

ROZW 5) z $|h| \gg 1$ - "REZONANS
PARAMEJNYCZNY"

- AMPLITUDE ~~ROZW~~ DRGAŃ ROŚNIE WTKŁADNICZO
- REZONANS TYLKO DLA PEWNYCH WARUNKÓW
POCZĄTKOWYCH, MP. NIE DLA $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$

PRZYKŁAD - "OSCYLATOR HILLA"

$$\rho = 0 \quad \omega^2(t) = \omega_0^2 (1 + h \cos \gamma t)$$

$$|h| \ll 1$$

$$\gamma = \frac{2\pi}{T}$$

szukamy rozw w postaci

$$x(t) = e^{(s + i\frac{\gamma^2}{2})t} \pi(t)$$

czyli $\lambda = e^{i\pi\lambda + sT}$, REZONANS DLA $s > 0$

$$\pi(t+T) = \pi(t) \Rightarrow \pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\gamma t}$$

WZEM

$$x(t) = e^{(s + i\frac{\gamma^2}{2})t} \pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{[s + i\gamma(n + \frac{1}{2})]t}$$

$$\ddot{x}(t) = \sum a_n [s + i\gamma(n + \frac{1}{2})]^2 e^{[s + i\gamma(n + \frac{1}{2})]t}$$

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 \left[1 + \frac{h}{2} e^{i\gamma t} + \frac{h}{2} e^{-i\gamma t} \right]$$

$$\omega^2(t)x(t) = \omega_0^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \left(a_n + \frac{h}{2} a_{n-1} + \frac{h}{2} a_{n+1} \right) e^{[...]\tau}$$

(15)

PORÓWNUJĄC WSP. PRZY $e^{[...]\tau}$, DOSIĄDZEMY
WIESKONCZONY UKŁAD RÓWNAŃ

$$\left\{ \left[s + i\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 + \omega_0^2 \right\} a_n + \frac{\omega_0^2 h}{2} (a_{n-1} + a_{n+1}) = 0$$

OGÓLNE ROZWIĄZANIE WIEZNIANIE ---

PRZYBLIŻONE ROZW. $\rightarrow$ RACHUNEK ZABURZEŃ
W $h \ll 1$

RZĄD 0

Ktądżiemy $h=0 \rightarrow$ ZWYKŁY OSCYLATOR

$$\left\{ \left[s + i\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 + \omega_0^2 \right\} a_n = 0$$

$a_n \neq 0$ GDT $\left[s + i\gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 + \omega_0^2 = 0$ DLA TAKIEGOS $n=n_0$

DLA DOVOLNIE MAŁEGO WŁOCHCIEMY $s > 0$ (CZLI
REZONANS), TO DLA $h \geq 0$ MUSI BYĆ $s \geq 0$. ALE

$$s = \pm i\omega_0 - i\gamma \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) - \text{UNOSIŁY CHYBA, ŻE}$$

$$\begin{cases} s = 0 \\ \omega_0 = \pm \gamma \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

$$\omega_0 > 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\gamma}{2} |2n_0 + 1|$$

PRZY USTALONYM ω_0 , REZONANS
ZACHODZI GDY

(116)

$$\gamma = \frac{2\omega_0}{N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

$$n_0 = \frac{N-2}{2} \quad \text{or} \quad \frac{N+2}{2}$$

$$\begin{cases} 2n_0 + 2 = \pm N \\ n_0 = \frac{\pm N - 2}{2} \end{cases}$$

2 I-ZE n_0 CAŁKOWITE

NADSIŁNIESTY REZONANS (POWÓD PÓŻNIKS)

DLA $N=1$. WTEDY $2=1$, $\gamma = 2\omega_0$, $a_0, a_{-1} \neq 0$

REZON 1

$$\gamma = 2\omega_0 + \epsilon$$

ϵ, s i a_n dla $n \neq 0, -1$ REZONU ω^1 LUB UTZYSKGO

DLA $n=0, -1$

$$\left\{ \left[s + \frac{i}{2} (2\omega_0 + \epsilon)^2 + \omega_0^2 \right] a_0 + \frac{\hbar}{2} \omega_0^2 (a_{-1} + a_1) \right\} = 0$$

$$\left\{ \left[s - \frac{i}{2} (2\omega_0 + \epsilon)^2 + \omega_0^2 \right] a_{-1} + \frac{\hbar}{2} \omega_0^2 (a_{-2} + a_0) \right\} = 0$$

$$\left[s \pm \frac{i}{2} (2\omega_0 + \epsilon)^2 \right]^2 + \omega_0^2 = s^2 \pm i s (2\omega_0 + \epsilon) - \frac{1}{4} (2\omega_0 + \epsilon)^2 + \omega_0^2$$

$$= s^2 \pm i s (2\omega_0 + \epsilon) - \omega_0 \epsilon - \frac{1}{4} \epsilon^2 = \pm 2i\omega_0 \left(s \pm \frac{i\epsilon}{2} \right) + O(\hbar^2)$$

$$2i\omega_0 \left(s + \frac{i\zeta}{2}\right) a_0 + \frac{\hbar}{2} \omega_0^2 a_{-1} = 0$$

$$-2i\omega_0 \left(s - \frac{i\zeta}{2}\right) a_{-1} + \frac{\hbar}{2} \omega_0^2 a_0 = 0$$

WSZYSTKIE CZŁONY $\sim \hbar^1$

$$a_0, a_{-1} \neq 0 \rightarrow \exists \text{ } \zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}[\dots] = 0$$

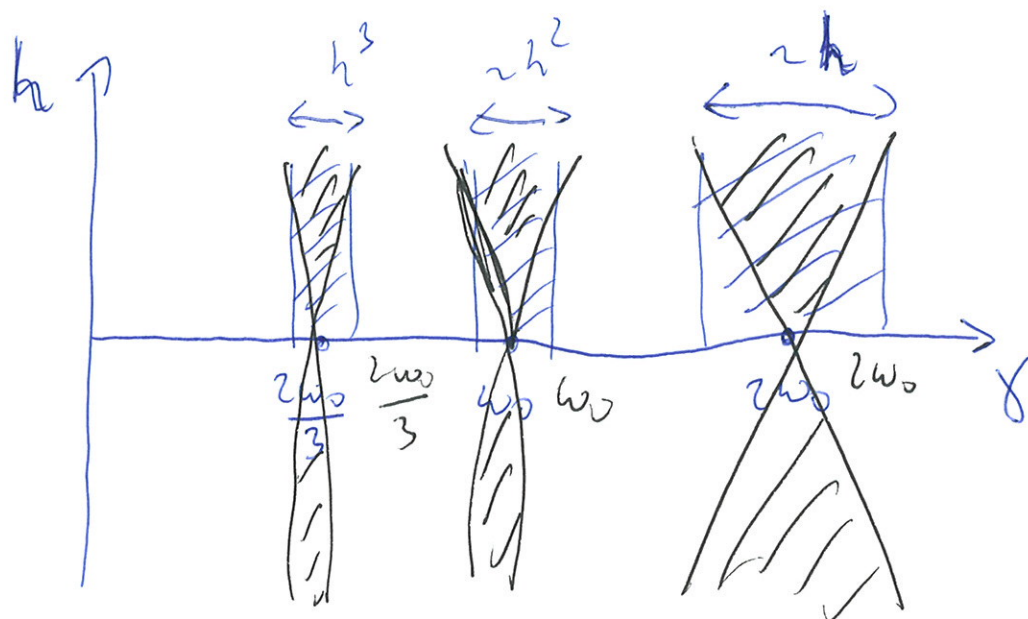
$$\hbar \omega_0^2 \left(s^2 + \frac{\zeta^2}{4}\right) - \frac{\hbar^2}{4} \omega_0^4 = 0$$

$$s^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\hbar \omega_0}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right] = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\hbar \omega_0}{2}\right)^2 - (\gamma - 2\omega_0)^2 \right]$$

$$s > 0 \text{ dla } -\frac{\hbar \omega_0}{2} < \zeta < \frac{\hbar \omega_0}{2}$$

$$2\omega_0 - \frac{\hbar \omega_0}{2} < \gamma < 2\omega_0 + \frac{\hbar \omega_0}{2}$$

CATK PASKO CZĘSTOTLIWOŚCI REZONANSOWYCH
OGÓLNIŁE: (POKAZAĆ NA KOŃCU)



WEJMY JESZCZE $N=2$

118

RZAD 0 $\rightarrow d=0, \quad \gamma=\omega_0 \quad a_1, a_{-1} \neq 0$

RZAD 1 $\rightarrow \gamma=\omega_0+\epsilon$

PONOWNIE DLA $n \neq -1, 1$ MAMY $\epsilon, s, a_n \sim h^1$

$$\{ [s + i(\omega_0 + \epsilon)]^2 + \omega_0^2 \} a_1 + \frac{1}{2} \omega_0^2 h (a_0 + a_2) = 0$$

$$\{ [s - i(\omega_0 + \epsilon)]^2 + \omega_0^2 \} a_{-1} + \frac{1}{2} \omega_0^2 h (a_{-2} + a_0)$$

$$\underbrace{\pm 2i\omega_0(s \pm i\epsilon)}_{\sim h^2 \rightarrow 0}$$

CHCI W RZĘDZIE $h^1 \quad s \pm i\epsilon = 0 \Rightarrow s=0, \epsilon=0$

— NIE MA ROZWIĄZANIA — ROZWINIĘCIE s, ϵ ZACZYNA SIĘ WIFC OD h^2 . ALIŻ SA POPRAVKI

$\sim h^1$ DO $a_0, a_{\pm 2}$:

$$(\cancel{s^2} + \omega_0^2) a_0 + \frac{\omega_0^2}{2} h (a_{-1} + a_1) = 0$$

$$\{ [\cancel{s \pm 2i(\omega_0 + \epsilon)}]^2 + \omega_0^2 \} a_{\pm 2} + \frac{\omega_0^2}{2} h (a_{\pm 1} + \cancel{a_{\pm 3}}) = 0$$

$$a_0 = -\frac{h}{2} (a_{-1} + a_1)$$

$$a_{\pm 2} = \frac{h}{6} a_{\pm 1}$$

RZAD 2 — TRZY MAMY WTRĄTY h^2

$\epsilon, s, a_n \sim h^2$ DLA $n \neq 0, \pm 1, \pm 2$

$$\pm 2i \omega_0 (s \pm i\epsilon) a_{\pm 1} + \frac{\omega_0^2}{2} h \left(-\frac{h}{2} a_{-1} - \frac{h}{2} a_1 + \frac{h}{6} a_{\pm 1} \right) = 0$$

(179)

$$\left[2i(s + i\epsilon) - \frac{\omega_0^2 h^2}{6} \right] a_1 - \frac{\omega_0^2 h^2}{4} a_{-1} = 0$$

$$-\frac{\omega_0^2 h^2}{4} a_1 + \left[-2i(s - i\epsilon) - \frac{\omega_0^2 h^2}{6} \right] a_{-1} = 0$$

ЗНИКАНИЕ ВИЗНАЧНИКА

$$\left(2\epsilon + \frac{\omega_0^2 h^2}{6} \right)^2 + 4s^2 - \frac{\omega_0^2 h^4}{16} = 0$$

$$4\epsilon^2 + 4s^2 + \frac{2}{3} \epsilon \omega_0^2 h^2 - \frac{5}{144} \omega_0^2 h^4 = 0$$

$s \gg 0$ ВІСПРЯГНУТ

$$4\epsilon^2 + \frac{2}{3} \epsilon \omega_0^2 h^2 - \frac{5}{144} \omega_0^2 h^4 < 0$$

$$\Delta = \frac{4}{9} \omega_0^2 h^4 + \frac{5}{9} \omega_0^2 h^4 = \omega_0^2 h^4$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{1}{8} \left(-\frac{2}{3} \omega_0^2 h^2 \pm \omega_0^2 h^2 \right) = \begin{cases} -\frac{5}{144} \omega_0^2 h^2 \\ \frac{1}{24} \omega_0^2 h^2 \end{cases}$$

$$-\frac{5}{144} \omega_0^2 h^2 < \epsilon < \frac{1}{24} \omega_0^2 h^2$$

ПЕРИОДИЧНОСТЬ: ВИМАГАННЯ h_{min} !

