CO ~~TO~~ MA DO MECHANIKI KLASYCZNEJ ?

RACH. WARIACYJNY

SIŁA ZACHOWAWCZA

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{x})$$

$$m \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

ZDEFINIUJMY $L = E_k - V = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - V$

$$m\ddot{x}_i = m \frac{d}{dt} \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} E_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (E_k - V)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (E_k - V)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} L - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

R. NEWTONA DA SIĘ SFORMUŁOWAĆ W FORMIE R. LAGRANGE'A !!!

WYGLĄDA TRYWIALNIE → BARDZO GŁĘBOKIE KONSEKWENCJE!

1) ŁATWIEJ UWZGLĘDNIAĆ WIĘZY

2) ZAS. NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA HAMILTONA

$S = \int_{t_A}^{t_B} L \, dt = \min$ → ZMIANA OPISU Z LOKALNEGO NA GLOBALNY

3) WAŻNE SFORMUŁOWANIE MECH. KWANTOWEJ

$Z[Y] = \int e^{iS[Y]} \mathcal{D}(Y) = \min$ → r. SCHRÖDINGERA !

WARIACJA, ALTERNATYWNE WYPROWADZENIE RÓWNAŃ E-L.

35A

$$\delta y = \bar{y} - y \qquad \delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0$$

$$S = \int_{x_A}^{x_B} f(y, y', x)\, dx = \text{ekstremum}$$

$$\delta S = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx \qquad \delta y' = \frac{d}{dx} \delta y$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right)}_{0} \delta y \, dx$$

POLA NIEPOTENCJALNE – ZASADA MINIMALNEGO DZIAŁANIA MAUPERTUIS-LAGRANGE'A, WARIUJE SIĘ TAKŻE CZAS. REZULTAT

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = F_i \qquad \text{(SIŁY UOGÓLNIONE)}$$

RÓWNANIA E-L. DLA DOWOLNYCH WSPÓŁRZĘDNYCH (35)

$$q_i = q_i(x_i, t) \iff x_i = x_i(q_i, t) \qquad i = 1, \dots n$$

WEŹMY $n = 1$

$$L(x, \dot{x}, t) = L(x(q, t), \dot{x}(q, t), t) \equiv \tilde{L}(q, \dot{q}, t)$$

$$= \tilde{L}\left(q, \frac{\partial q}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial q}{\partial t}, t\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}\dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{\partial q}{\partial x}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} + \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}\dfrac{\partial \dot{q}}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} + \cancel{\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} -$$

$$- \cancel{\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}}\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial q}{\partial x}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q}\right) \qquad !!$$

RÓWNANIA E-L. MAJĄ TĘ SAMĄ POSTAĆ W KRZYWOLINIOWYCH UKŁADACH WSPÓŁRZĘDNYCH !!
RÓWNANIA NEWTONA NIE !

PRZYKŁAD

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{\rho}) = -\nabla V(\vec{\rho})$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ m\ddot{y} = F\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) - V(\rho)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} m\dot{\rho} = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} \\ \dfrac{d}{dt} m\rho^2\dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ZACH MOM. PĘDU, $m\rho^2\dot{\varphi} = L_0$

$$m\ddot{\rho} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

I DUŻ ...

WSPÓŁRZĘDNE NIEKARTEZJAŃSKIE ~ – "WSPÓŁRZĘDNE UOGÓLNIONE".

DOBRY WYBÓR ZASADNICZO UŁATWIA ROZWIĄZANIE DANEGO PROBLEMU!

GŁÓWNE ZASTOSOWANIE: RUCH Z WIĘZAMI

WIĘZY

HOLONOMICZNE: WSPÓŁRZĘDNE I CZAS

$f(x,y,z,t)=0$ 2-STRONNE

$f(x,y,z,t)\geqslant 0$ 1-STRONNE

RÓŻNICZKOWE

$f(\vec{r},\vec{v},t)=0$

$\geqslant 0$

NIEHOLONOMICZNE - INNE. NAJPROSTSZE:

$f_0 dt + f_i(x,y,z,t)\,dx_i = 0$

f_0 ZNIKA - KATASTATYCZNE (A-KATA..)

f_0 ZNIKA, f_1, f_2, f_3 NIE ZALEŻĄ OD t → SKLERONOMICZNE

ZALEŻĄ OD t → REONOMICZNE

SIŁY REAKCJI

$$m\vec{a}=\vec{F}$$

$$f(x,y,z,t)=0$$

$$df=0 \Rightarrow (\operatorname{grad} f)\vec{v}+\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

$$(\nabla f)\vec{a}=-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-2\bar{v}\nabla\frac{\partial f}{\partial t}-\vec{v}\left[(\bar{v}\operatorname{grad})\operatorname{grad} f\right]$$

$$a\nabla = a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

grad f $\perp$ pow $f=0$

$$\text{grad } f = |\text{grad } f| \vec{n}$$

$$a_n |\nabla f| = |\text{grad } f| \, \vec{a}\,\vec{n} = |\text{grad } f| \, \vec{a}_n$$

$\vec{a}_n$ WYZNACZONE WYŁĄCZNIE PRZEZ WIĘZY

$$\vec{a}_n = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2(\vec{v}\nabla) \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \left[(\vec{v}\nabla) \nabla f \right] \right\}$$

ALE, $m\vec{a}_n = (\vec{F} + \vec{R})_{\vec{n}}$

$\vec{R}_n$ - SIŁA REAKCJI WIĘZÓW $\quad \vec{R}_n = R\,\vec{n}$

$$\vec{R}_n \equiv \vec{N} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2} \left\{ \vec{F}_n + m \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2m\vec{v}\nabla \frac{\partial f}{\partial t} + m\vec{v} \left[(\vec{v}\nabla) \nabla f \right] \right\}$$

WIĘZY JEDNOSTRONNE - TYLKO NIERÓWNOŚCI

WIĘZY DOSKONAŁE (GŁADKIE) → CAŁA REAKCJA WIĘZÓW $\perp$ DO WIĘZÓW

NA OGÓŁ - TARCIE, WIĘZY SZORSTKIE. DOŚWIADCZENIE

1) $T_{min} = f|\vec{N}|$ $\quad$ f - wsp. tarcia statycznego

SPOCZYNEK ↗

2) RUCH $\quad T = -|N| f' \frac{\vec{v}}{|v|}$

$f' < f$

WIĘZY NIEHOLONOMICZNE

~~40~~ 38A

$$f_i\, dx^i + f_0\, dt = 0$$

$$\vec{f}\,\vec{v} + f_0 = 0$$

$$\vec{f}\,\vec{a} = -\frac{\partial f_0}{\partial t} - \vec{v}\,\mathrm{grad}\, f_0 - \vec{v}\,\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} - \vec{v}\left[(\vec{v}\,\mathrm{grad})\,\vec{f}\,\right]$$

SKŁADOWA $\vec{a} \parallel \vec{f}$ ZNANA → SIŁA REAKCJI $\parallel \vec{f}$!

WIĘZY HOLONOMICZNE :

$$\vec{R} = \lambda(t)\,\mathrm{grad}\,\vec{f}$$

NIEHOLONOMICZNE :

$$\vec{R} = \lambda(t)\,\vec{f}$$

STĄD → RÓWNANIA LAGRANGE'A

<u>I RODZAJU</u>

R. LAGR. I RODZAJU:

1) $f^{(k)}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, t) = 0 \qquad k = 1 \dots p$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(f^{(k)}_{ix} dx_i + f^{(k)}_{iy} dy_i + f^{(k)}_{iz} dz_i \right) + f^{(k)}_{i0} dt = 0$$

$k = 1 \dots p'$

2) $\sum_{i=1}^{N} \bar{f}^{(k)}_i \vec{v}_i + f^{(k)}_{i0} = 0$

SIŁY WIĘZÓW DOSKONAŁYCH: (NA j-TY PUNKT)

$\lambda^{(k)} D_j f^{(k)}$

$\lambda'^{(k)} f^{(k)}_j$

$$m_j \ddot{r}_j = F_j + \sum_{k=1}^{p} \lambda^{(k)} D_j f^{(k)} + \sum_{k=1}^{p'} \lambda'^{(k)} f^{(k)}_j$$

R. LAGRANGE'A I RODZAJU

3N RÓWNAŃ | 3N ZMIENNYCH x_j, y_j, z_j

p+p' WIĘZÓW | p+p' —11— $\lambda^{(k)}, \lambda'^{(k)}$

BARDZO TRUDNE I NIEWYGODNE W ROZWIĄZYWANIU...

ZASADA D'ALEMBERTA (RÓWNOWAŻNA R-L. I RODZAJU)

$\sum_{j=1}^{N} (m_j \ddot{\vec{r}}_j - \vec{F}_j)\delta \vec{r}_j = 0$ JEŻELI $\delta \vec{r}_j$ ZGODNE Z WIĘZAMI

RÓWNANIA LAGRANGE'A II RODZAJU.

TYLKO WIĘZY HOLONOMICZNE

WYBIERZMY WSP. ZGODNE Z WIĘZAMI Q_i

PRZYKŁAD: POW. KULI

$$x = R \cos\theta \sin\varphi$$
$$y = R \cos\theta \cos\varphi$$
$$z = R \sin\theta$$

φ, θ - ZGODNE Z WIĘZAMI

$r = R = \text{const}$

BYŁO WCZEŚNIEJ

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right)$$

R. L. I RODZAJU

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{r}_j} + \frac{\partial V}{\partial r_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}_j}(E_k - V) - \frac{\partial}{\partial r_j}(E_k - V)$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}_j} L - \frac{\partial L}{\partial r_j} = \sum_{k=1}^{p} \lambda^{(k)} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial r_j} + \sum_{k=1}^{p'} \lambda'^{(k)} g_j^{(k)}$$

$q_k \to x_i$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = \sum_{k=1}^{p}\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial Q_i}\frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}\lambda^{(k)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial Q_i}\lambda^{(k)} = 0$$

$$+ \sum_{k=1}^{p'} \frac{\partial r_j}{\partial Q_i}\lambda'^{(k)} g_j^{(k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{p'} \lambda'^{(k)} g_i^{(k)}(Q, t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \quad \left(= \sum_{k=1}^{p'} \lambda'^{(k)} \varphi_i(Q, t)\right) \quad L = T - V}$$

R. L. II RODZAJU

ZASADA D'ALEMBERTA

$\delta\vec{r}_i$ ZGODNE Z WIĘZAMI, TJ.

$$\sum_{j=1}^{N} \nabla_j f^{(k)} \delta\vec{r}_j = 0 \qquad k = 1 \dots p$$

$$\sum_{j=1}^{N} g_j^{(k)} \delta\vec{r}_j = 0 \qquad k = 1 \dots p'$$

R. L. I RODZAJU W SKŁADOWYCH

$$m_j \ddot{x}_j = X_j + \lambda^{(k)} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j} + \lambda'^{(k)} g_j^{(k)} \qquad j = 1, \dots 3N$$

MNOŻYMY PRZEZ δx_j, SUMUJEMY $\Rightarrow \sum_{j=1}^{3N} (m_j \ddot{x}_j - X_j)\delta x_j = 0$

ODWROTNIE, NIECH $f = 3N - p - p'$

f δx_i JEST NIEZALEŻNE, MOŻNA WYBRAĆ NP.

$\delta x_1 = 1$, $\delta x_2 = \dots \delta x_4 = 0$, RESZTA DO WYZNACZENIA

$$\sum (m_j \ddot{x}_j - X_i)\delta x_i = 0$$

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad \Big| \; \lambda^{(k)}$$

$$g_i^{(k)} \delta x_i = 0 \quad \Big| \; \lambda'^{(k)}$$

DODAJEMY $\Rightarrow \sum \left(m_j \ddot{x}_j \mp X_j - \lambda^{(k)} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j} - \lambda'^{(k)} g_j^{(k)}\right) \delta x_j = 0$

p+p' DOWOLNYCH $\lambda^{(k)}, \lambda'^{(k)}$ WYBIERAMY

T. ŻE SPEŁNIONE SĄ R. LAGRANGE'A

I RODZAJU DLA $j = f+1, \ldots, 3N$.

ALE $\delta x_1 \ldots \delta x_f$ NIEZALEŻNE $\rightarrow$

SPEŁNIONE TAKŻE R. $1 \ldots f$

ŁĄCZNIE D'ALEMBERT $\Longleftrightarrow$ LAGRANGE I RODZAJU

STATYKA $\rightarrow \frac{d}{dt}$ ZNIKA.

WARUNEK RÓWNOWAGI

$$\sum \left(\bar{F}_i - \lambda^{(k)} D_j f^{(k)} - \lambda'^{(k)} g^{(k)}\right) \delta \vec{r}_i = 0$$

UKŁAD PUNKTÓW

$$\frac{dE_k}{dt} = \sum \bar{F}_j \bar{v}_j + \sum \bar{R}_j \bar{v}_j$$

$$\sum \lambda^{(k)} \bar{v}_j \operatorname{grad}_j f^{(k)} = -\sum \lambda^{(k)} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}$$

$$\sum \bar{g}_j^{(k)} \bar{v}_j = -g_0^{(k)}$$

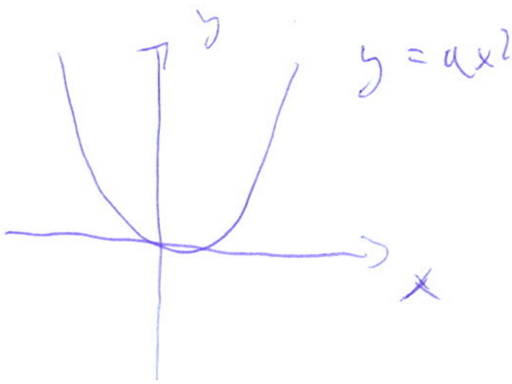
$$\frac{dE_k}{dt} = \sum \bar{F}_j \bar{v}_j - \sum \lambda^{(k)} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} - \sum \lambda'^{(k)} g_0^{(k)}$$

ZMIANA ENERGII $\rightarrow$ WIĘZY REONOMICZNE, AKATASTATYCZNE

OGROMNE UŁATWIENIE !!

NIE MUSIMY PAMIĘTAĆ O SIŁE REAKCJI WIĘZÓW, WYSTARCZA DOBRE WSPÓŁRZĘDNE I ZNAJOMOŚĆ POTENCJAŁU !!

PRZYKŁADZIK: RUCH PO PARABOLI



$$T = E_k = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \left(1 + 4a^2x^2\right)$$

$$V = mgy = mgax^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \left(1 + 4a^2x^2\right) - mgax^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} m\dot{x}\left(1+4a^2x^2\right) = m\ddot{x}\left(1+4a^2x^2\right) + m\dot{x}\, 8a^2 x\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2\, 8a^2 x - 2mgax$$

$$m\ddot{x}\left(1+4a^2x^2\right) + 8ma^2x\dot{x}^2 - 4ma^2x\dot{x}^2 + 2mgax = 0$$

$$\ddot{x}\,(1+4a^2x^2)+4a^2x\dot{x}^2+2gax=0$$

$$\ddot{x}+\frac{4a^2x\dot{x}^2}{1+4a^2x^2}+\frac{2gax}{1+4a^2x^2}=0$$

TO SAMO Z RÓWNAŃ NEWTONA – BARDZO SKOMPLIKOWANE...

BTW: MAŁE DRGANIA

$$\ddot{x}+2gax=0$$

$$\omega=\sqrt{2ga}$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

TRUDNIEJSZE PRZYPADKI RUCHU Z WIĘZAMI – NIE DO ROZWIĄZANIA BEZ UŻYCIA RÓWNAŃ LAGRANGE'A II RODZAJU.

WIĘZY NIEDOSKONAŁE (SZORSTKIE) – TARCIE. DOŚWIADCZENIE

1) SPOCZYNEK $T_{min}=f|\bar{N}|$ f – wsp. tarcia statycznego

2) RUCH $T=-|\bar{N}|f'\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$ $f'<f$

DODATEK – POLE ELEKTROMAGNETYCZNE

ZDEFINIUJMY "POTENCJAŁ UOGÓLNIONY"

$$U = q(\varphi - \vec{v}\vec{A}) \qquad T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$$

ORAZ $L = T - U$

POLICZMY

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = m v_i + q A_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = -q\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q v_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = m a_i + q\frac{\partial A_i}{\partial t} + q\frac{\partial A_i}{\partial x_j} v_j$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = m a_i + q\frac{\partial A_i}{\partial t} + q\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - q v_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} + q v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

POLA $\bar{E}$ i $\bar{B}$

$$\bar{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \quad E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

POLICZMY $\vec{v} \times \vec{B}$

$$(\bar{v} \times \bar{B})_i = \epsilon_{ijk} v_j B_k = \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m$$

$$(\vec{v}\times\vec{B})_i = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, v_j \frac{\partial}{\partial x_l} A_m$$

$$= v_j \frac{\partial}{\partial x_i} A_j - v_j \frac{\partial}{\partial x_j} A_i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$ RÓWNOWAŻNE

$$m a_i - q E_i - q(\vec{v}\times\vec{B})_i = 0$$

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$ – SIŁA LORENTZA

RÓWNANIA L-E DADZĄ SIĘ SFORMUŁOWAĆ MIMO BRAKU "ZWYKŁEGO" POTENCJAŁU – MAMY "POTENCJAŁ UOGÓLNIONY" ZALEŻNY OD t, A NAWET OD $\vec{v}$!

ZASADY ZACHOWANIA – TW. NOETHER

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

$$\begin{cases} \tilde{q}(\tilde{t}) = q(t) + \varepsilon \eta(t, q, \dot{q}) \\ \tilde{t} = t + \varepsilon \xi(t, q, \dot{q}) \end{cases}$$

GRUPA TRANSFORMACJI INFINITEZYMALNYCH

$$\tilde{S}^* = \int_{\tilde{t}_A^*}^{\tilde{t}_B} L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{t})\, d\tilde{t} = S$$

CO Z TEGO WYNIKA? → TW. NOETHER

$$\tilde{q}(\tilde{t}) = q(\tilde{t} - \varepsilon\xi) + \varepsilon \eta(\tilde{t}, q, \dot{q})$$

$$= q(\tilde{t}) - \varepsilon \frac{\partial q}{\partial \tilde{t}} \xi(\tilde{t}, q, \dot{q}) + \varepsilon \eta(\tilde{t}, q, \dot{q})$$

$$\tilde{q}(\tilde{t}) = q(\tilde{t}) + \varepsilon \rho(\tilde{t}, q, \dot{q})$$

$$\rho = \eta - \xi \frac{\partial q}{\partial \tilde{t}}$$

$$S(\varepsilon) = \int_{\tilde{t}_A}^{\tilde{t}_B} L\left[\tilde{t}, q(\tilde{t}) + \varepsilon\rho(\tilde{t}), \dot{q}(\tilde{t}) + \varepsilon\dot{\rho}(\tilde{t})\right] d\tilde{t}$$

$$\tilde{t}_A = t_A + \varepsilon \xi(t, q, \dot{q})\big|_{t = t_A} \equiv t_A + \delta_A$$

$$\tilde{t}_B = t_B + \delta_B$$

$$\int_{\tilde{t}_A}^{\tilde{t}_B} = \int_{t_A+\delta_A}^{t_B+\delta_B} = \int_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_A+\delta_A} + \int_{t_B}^{t_B+\delta_B}$$

$$\tilde{S} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(\hat{t}, q+\varepsilon\zeta, \dot{q}+\varepsilon\dot{\zeta})\,d\hat{t} + \int_{t_B}^{t_B+\delta_B} \mathcal{L}(\hat{t}, q, \dot{q})\,dt$$

$$- \int_{t_A}^{t_A+\delta_A} \mathcal{L}(\hat{t}, q, \dot{q})\,d\hat{t} + O(\varepsilon^2)$$

$$\tilde{S}(\varepsilon) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(\hat{t}, q, \dot{q})\,d\hat{t} + \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} \left[\zeta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \dot{\zeta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] d\hat{t}$$

$$+ \delta_B \mathcal{L}\big|_{\hat{t}=t_B} - \delta_A \mathcal{L}\big|_{\hat{t}=t_A} + O(\varepsilon^2)$$

$$\cancel{\tilde{S}(\varepsilon) - S = \varepsilon \int_{t_A}^{t_B}}$$

$$\delta_A = \varepsilon \zeta\big|_{\hat{t}=t_A}$$

$$\delta_B = \varepsilon \zeta\big|_{t}$$

$$\cancel{\dot{\zeta} = \eta}$$

$$\tilde{S} = S + \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} \zeta \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) d\hat{t} + \zeta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{t_A}^{t_B} + \varepsilon \zeta L \Big|_{t_A}^{t_B}$$

$$= S + \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} \zeta \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) d\hat{t}$$

$$+ \varepsilon \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta + \left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \zeta \right]_{t_A}^{t_B} + O(\varepsilon^2)$$

$\hat{S} = S$ I SPEŁNIONE RÓWNANIA E-L:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta + \left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \xi = \text{CONST} \quad \left(\text{ZNIKA} \Big|_{t_1}^{t_0} \right)$$

$$\begin{cases} \hat{t} = t + \varepsilon \xi \\ \hat{q} = q + \varepsilon \eta \end{cases}$$

WIĘCEJ ZMIENNYCH:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i + \left(L - \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \xi = \text{CONST.}$$

PRZYKŁAD: 1) L NIE ZALEŻY OD CZASU –

WTEDY $\xi = 1$, $\eta = 0$ $\quad L(\hat{t}) = L(t) = L$, $d\hat{t} = d(t + \varepsilon) = dt$

$S = \hat{S}$

STĄD

$$L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = E = \text{CONST}$$

2) L NIE ZALEŻY OD q

$\xi = 0$, $\eta = 1$ $\quad \hat{t} = t \quad \hat{q} = q + \varepsilon$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{"}p\text{"} = \text{CONST} \text{ – ZACHOWANIE PĘDU}$$

3) Z NIEZMIENNICZY WZGLĘDEM OBROTÓW

WEŹMY OŚ Z

$$\bar{t} = t$$

$$\bar{z} = z$$

$$\bar{x} = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon \cong x + y\varepsilon$$

$$\bar{y} = -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon \cong y - \varepsilon x$$

$$\eta_1 = y$$

$$\eta_2 = -x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(y) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)(-x) = y\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - x\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \text{CONST} = -J_z$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(\vec{r})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x$$

$$\cancel{y p_x =} \quad x p_y - y p_x = (\vec{r} \times \vec{p})_z = J_z$$

ZACHOWANIE MOMENTU PĘDU J_z

OBROTY WOKÓŁ $x, y \rightarrow J_x, J_y$ - WSZYSTKIE 3 NA RAZ - ZACHOWANIE $\vec{J}$

WIELE INNYCH - BOOSTY LORENTZA, O(4) DLA ATOMU WODORU ITP.