RÓWNANIE HAMILTONA – JACOBIEGO

101 155

SPRÓBUJMY ZNALEŹĆ PRZ. KAN. TAKIE ŻE

$$\bar{H} = 0 \quad !$$

WTEDY $\dot{Q}_i = 0$, $\dot{P}_i = 0$ — Q_i, P_i STAŁE

$$Q_i = Q_i(p, q, t)$$
$$P_i = P_i(p, q, t)$$

$\to$ UKŁAD RÓWNAŃ NA p_i, q_i

$$\begin{cases} p_i = p_i(\alpha_i, \beta_i, t) \\ q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t) \end{cases}$$

α_i, β_i — WARUNKI POCZĄTKOWE

MUSIMY ZNALEŹĆ S T-ŻE:

$$0 = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H(q, p, t) + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t}$$

P_i – STAŁE

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$$

$$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE I RZĘDU!

$$S = S(q_1, \dots, q_f, \beta_1, \dots, \beta_f, t) + C$$

$$\alpha_i \equiv Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial \beta_i}$$

JEŻELI ZNAJDZIEMY $S(q, \beta, t)$ TO UKŁAD RÓWNAŃ

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \\ \alpha_i = \frac{\partial S}{\partial \beta_i} \end{cases}$$ DAJE $$p_i = p_i(\alpha, \beta, t) \quad q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$$ SPEŁNIAJĄCE R. HAMILTONA!

ZAMIENILIŚMY UKŁAD R. RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH NA R. CZĄSTKOWE I RZĘDU

ZAŁÓŻMY ŻE H NIE ZALEŻY OD q_i I/LUB t.

WTEDY

$$S(q_1 \ldots, q_f, t) = S'(q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots q_f) - Et + p_i q_i$$

PRZYKŁAD – RUCH PŁASKI, $V = V(r)$

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + V(r)$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r)$$

RÓWNANIE H-J:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right)+V(r)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

BRAK ZALEŻNOŚCI OD $\varphi, t \Rightarrow$

$$S=-Et+p_\varphi \varphi+S_1(r)$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right]+V(r)=E$$

$$\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2=\cancel{2m E}\quad 2m(E-V(r))-\frac{p_\varphi^2}{r^2}$$

$$S_1=\pm\int\sqrt{2m(E-V(r))-\frac{p_\varphi^2}{r^2}}\,dr+C_1$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial E}=-t_0=-t\pm\displaystyle\int\frac{m}{\sqrt{\quad}}\,dr \Rightarrow r(t)\\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial p_\varphi}=\varphi_0=\mp\displaystyle\int\frac{p_\varphi}{r^2\sqrt{\quad}}\,dr+\varphi \Rightarrow r(\varphi)\end{cases}$$

OD RAZU TOR!

RUCH W POLU $\vec{g}$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$p_x = m\dot{x}$$

$$p_y = m\dot{y}$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right) + mgy + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$S = -Et + x p_x + S_y(y)$$

$$\frac{1}{2m}\left(p_x^2 + \left(\frac{dS_1}{dy}\right)^2\right) + mgy = E$$

$$\left(\frac{dS_1}{dy}\right)^2 = 2m(E - mgy) - p_x^2$$

$$S_1 = \pm \int \sqrt{2m(E - mgy) - p_x^2}\, dy + C$$

$$= \pm m\sqrt{2g} \int \sqrt{\frac{E}{mg} - y - \frac{p_x^2}{2m^2 g}}\, dy + C$$

$$= \mp \frac{2}{3} m \sqrt{2g} \left(\frac{E}{mg} - \frac{p_x^2}{2m^2 g} - y\right)^{3/2}$$

15g

$$S(x,y,t) = -Et + p_x x \pm \frac{2}{3}\sqrt{2gm^2}\left(\frac{E}{mg} - \frac{p_x^2}{2gm^2} - y\right)^{3/2} + C$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t_0 = -t \pm \frac{2}{3}\sqrt{2gm^2}\,\frac{3}{2}\left(\frac{E}{mg} - \frac{p_x^2}{2gm^2} - y\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{mg}$$

$$= -t \pm \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\frac{E}{mg} - \frac{p_x^2}{2gm^2} - y\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_x} = x_0 = x \pm \sqrt{2gm^2}\left(\frac{E}{mg} - \frac{p_x^2}{2gm^2} - y\right)^{1/2} \cdot \left(-\frac{p_x}{gm^2}\right)$$

$$= x \mp \frac{p_x}{m}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\frac{E}{mg} - \frac{p_x^2}{2gm^2} - y\right)^{1/2}$$

$$\frac{-t_0 + t}{x_0 - x} = \frac{\pm\sqrt{\frac{2}{g}}}{\mp\frac{p_x\sqrt{2}}{m\sqrt{g}}} = -\frac{m}{p_x}$$

$$x_0 - x = -\frac{p_x}{m}\left(-t_0 + t\right)$$

$$\boxed{x = x_0 + \frac{p_x}{m}\left(t - t_0\right)}$$

$$\left(t - t_0\right)^2 = \frac{2}{g}\left(\frac{E}{mg} - \frac{p_x^2}{2gm^2} - y\right)$$

$$y = -\frac{1}{2} g (t-t_0)^2 + \frac{E}{mg} - \frac{p_x^2}{2g m^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = 0$$

$$y(0) = -\frac{1}{2} g t_0^2 + \frac{E}{mg} - \frac{p_x^2}{2gm^2} = y_0$$

$$y = -\frac{1}{2} g (t-t_0)^2 + y_0 + \frac{1}{2} g t_0^2$$

$$= y_0 + g t_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = y_0 + v_0^y t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{p_x}{m}(t-t_0) \\ y = -\frac{1}{2} g (t-t_0)^2 + \frac{E}{mg} - \frac{p_x^2}{2gm^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + (t-t_0) v_x^0 \\ y = y_0 + v_0^y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

METODY ROZWIĄZYWANIA RÓWNANIA H-J

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$$

SEPARACJA...

1) WSP. CYKLICZNE: $H = H(q_1 \ldots, q_{r-1}, \ldots, q_{r+1} \ldots q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$

SZUKAMY S W POSTACI (CZAS: $S = -Et + \tilde{S}(q_1 \ldots q_f)$)

$$S = \beta_r q_r + \tilde{S}(q_1, \ldots q_{r-1}, q_{r+1}, q_f, \beta_1 \ldots \beta_f, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_i} \text{ dla } i \neq r, \quad \frac{\partial S}{\partial q_r} = \beta_r$$

CZYLI ~~$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H(q_1, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}, t) = 0$~~

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H\left(q_1 \ldots q_{r-1}, q_{r+1}, \ldots q_f, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{r-1}}, \beta_r, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{r+1}} \ldots\right) = 0$$

2) HAMILTONIAN JEST SUMĄ WYRAZÓW ~~TAKIE ZALEŻNE OD CZASU~~

$$H = \sum_{j=1}^{f} H_j(q_j, p_j)$$

NAWET OGÓLNIEJ $H = H_1(p_1, q_1) + \tilde{H}(p_2, q_2, \ldots p_n, q_n, t)$

WTEDY $S = S_1(q_1) + \tilde{S}(q_2, \ldots q_n, t)$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) + \tilde{H}\left(q_2, \dots q_f, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_2} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_f}, t\right) = 0$$ 162

$$H_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} - \tilde{H} = \beta_1$$

$$\begin{cases} H_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \beta_1 \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \tilde{H} = -\beta_1 \end{cases}$$

$H = \Sigma H_j$, BRAK ZALEŻNOŚCI OD t:

$$S = S_1(q_1) + \dots + S_f(q_f)$$

$$\begin{cases} H_i\left(q_i, \frac{dS_i}{dq_i}\right) = \beta_i \\ \sum_{i=1}^{f} \beta_i = E \end{cases}$$

3) JESZCZE OGÓLNIEJ – UKŁADY LIOUVILLE'A

$$E_k = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{f} A_i(q_i)\right] \sum_{j=1}^{f} \frac{\dot{q}_j^2}{B_j(q_j)}$$

$$= \frac{1}{2\Sigma A_i} \Sigma B_j p_j^2$$

$$E_p = \frac{1}{\Sigma A_i} \sum_{i=1}^{f} V_i(q_i)$$

RÓWNANIE H-J:

$$\sum_{j=1}^{f} \left[\frac{1}{2} B_j \left(\frac{\partial S}{\partial q_j}\right)^2 + V_j\right] = E \sum_{i=1}^{f} A_i(q_i)$$

~~BO...~~ WTEDY $S = -Et + S_0$

$$S_0 = \sum_j S_j(q_j)$$

$$\frac{1}{2} B_1 \left(\frac{dS_1}{dq_1}\right)^2 = EA_1 - f_1 - \sum_{j=2}^{f} \beta_i$$

$$\frac{1}{2} B_j \left(\frac{dS_j}{dq_j}\right)^2 = EA_j - f_j - \beta_j \qquad j \geq 2$$

CZYLI

$$S = \int dq_1 \sqrt{\frac{2}{B_1}\left(EA_1 - f_1 + \sum_{j=2}^{f} \beta_i\right)} + \sum_{j=2}^{f} \int dq_j \sqrt{\frac{2}{B_j}\left(EA_j - f_j - \beta_j\right)}$$

$$- Et$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t_0 \qquad \text{ZALEŻNOŚĆ CZASOWA}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_{2 \ldots f}} = \alpha_{2 \ldots f} \qquad \text{TOR}$$

4) JESZCZE OGÓLNIEJ - TW STÄCKELA ...

PRZYKŁADY PONOWNIE

OGÓLNY RUCH W POLU SIŁY CENTRALNEJ

$$\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + V(r) = H(p,r)$$

ZAZWYCZAJ $\theta = \frac{\pi}{2}$, $p_\theta = 0 \Longrightarrow$ PROBLEM 2-WYM.

CZY DA SIĘ OGÓLNIE? TAK!

φ JEST CYKLICZNE:

$$S = -Et + \varphi\beta + S_1(r,\theta)$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2\right] + V(r) + \frac{\beta^2}{2mr^2\sin^2\theta} = E$$

PROBLEM LIOUVILLE'A

$A_r = mr^2$ $\qquad \varphi_r = mr^2 V(r)$

$A_\theta = 0$ $\qquad \varphi_\theta = \frac{\beta^2}{\sin^2\theta}$

$B_r = r^2$

$B_\theta = 1$

$$S = -Et + \beta\varphi + \int dr\sqrt{2(mE + mV(r)) + \beta_2 r^{-2}}$$

$$+ \int d\theta \sqrt{-\beta_2 - \frac{\beta^2}{\sin^2\theta}}$$

POLE E-M.

$$H = \frac{1}{2m}\left(\bar{p} - e\bar{A}\right)^2 + \varphi e$$

ALBO

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + (\bar{p} - e\bar{A})^2} + e\varphi$$

ROZPATRZMY EFEKT ZEEMANA

$$e\varphi = -\frac{e^2}{r} \qquad \vec{A} = \tfrac{1}{2}\bar{B}\times\bar{r} \quad , \bar{B} = \mathrm{const} = (0,0,B)$$

$\bar{B}$ JEST SŁABE, POMIJAMY $\bar{B}^2$:

$$\frac{1}{2m}\bar{p}^2 - \frac{e}{2m}\bar{p}\,(\bar{B}\times\bar{r}) - \frac{e^2}{r} = E$$

$$\bar{p}\,(\bar{B}\times\bar{r}) = \bar{r}\,(\bar{p}\times\bar{B}) = \bar{B}\,(\bar{r}\times\bar{p}) = B\,(r\times p_z) =$$

$$= B(xp_y - yp_x) = B\left[\frac{\partial y}{\partial\varphi}p_y + \frac{\partial x}{\partial\varphi}p_x + \frac{\partial z}{\partial\varphi}p_z\right] =$$

$$= Bp_\varphi$$

$$\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{eB}{2m}p_\varphi - \frac{e^2}{r} = E$$

$$S_0 = p_1\varphi + S_1(r,\theta)$$

$E' = E + \frac{eBp_1}{2m}$ — RUCH COULOMBOWSKI ZE ZMIENIONĄ ENERGIĄ.

RÓWNANIE H-J W OBLICZENIACH PRZYBLIŻONYCH

$$H = H_0(p,q,t) + H_1(p,q,t)$$

UMIEMY ROZWIĄZAĆ RUCH Z H_0

$$\begin{cases} q_i^{(0)} = q_i^{(0)}(\alpha,\beta,t) \\ p_i^{(0)} = p_i^{(0)}(\alpha,\beta,t) \end{cases} \qquad i = 1\ldots f$$

$$H_0\left(q_1,\ldots,q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial S}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \qquad \alpha_i = \frac{\partial S}{\partial \beta_i} \longrightarrow \text{STĄD } p_i^{(0)}, q_i^{(0)}$$

S JEST FUNKCJĄ TWORZĄCĄ PRZEKSZT. KANONICZNEGO OD p,q DO α,β ($\alpha,\beta = P,Q$ NA POPRZEDNIM WYKŁADZIE, WYPROW. R. H-J)

$$\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + H_1 + \frac{\partial S}{\partial t} = H_1$$

CZYLI
$$\begin{cases} \dot{\alpha}_i = \dfrac{\partial H_1}{\partial \beta_i} \\ \dot{\beta}_i = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} \end{cases} \qquad i = 1\ldots f$$

H_1 MAŁE $\Rightarrow$ α,β PRAWIE STAŁE (WOLNO ZMIENNE)

$$H_1(\alpha,\beta,t) = H_1\big(q(\alpha,\beta,t), p(\alpha,\beta,t), t\big)$$

PO PRAWEJ STRONIE WSTAWIAMY $\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}$

$$H_1 \cong H_1(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, t)$$

WTEDY $\quad \alpha_i \cong \alpha_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} dt$

$$\beta_i \cong \beta_i^{(0)} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} dt$$

α_i, β_i WSTAWIAMY DO $\quad q_i^{(0)}(\alpha, \beta, t)$

$$p_i^{(0)}(\alpha, \beta, t)$$

I EWENTUALNIE ITERUJEMY

$\boxed{\text{PRZYKŁAD}}$

$$H = H_0 + \gamma x^4 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + \omega^2 m^2 x^2\right) + \gamma x^4$$

$H_1 = \gamma x^4$

ROZW. Z H_0

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + m^2\omega^2 x^2\right] = \beta \qquad (E = \beta)$$

$$x^{(0)} = \sqrt{\frac{2\beta}{m}} \frac{1}{\omega} \sin \omega (t - \alpha)$$

$$p^{(0)} = \sqrt{2m\beta} \cos \omega (t - \alpha)$$

$$H_1(\alpha,\beta,t) = \gamma\left(\frac{2\beta}{m}\right)^2 \frac{1}{\omega^4} \sin^4[\omega(t-\alpha)]$$

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} + \gamma \frac{\beta^{(0)}}{m^2} \frac{1}{\omega^5}\left[3\xi - 2\sin(2\xi) + \frac{1}{4}\sin(4\xi)\right]$$

$$\beta^{(1)} = \beta^{(0)} + \left(\frac{2\beta^{(0)}}{m}\right)^2 \frac{\gamma}{8\omega^4}\left[3 - 4\cos(2\xi) + \cos(4\xi)\right]$$

GDZIE $\xi = \omega(t-\alpha^{(0)})$

WSTAWIAMY $x^{(1)} = \sqrt{\frac{2\beta^{(1)}}{m}} \frac{1}{\omega} \sin[\omega(t-\alpha^{(1)})]$

$$p^{(1)} = \sqrt{2m\beta^{(1)}} \cos[\omega(t-\alpha^{(1)})]$$

DALEJ ROZWIJAMY, NP.

$$\sqrt{\beta^{(1)}} = \sqrt{\beta^{(0)}}\sqrt{1 + \frac{\beta^{(0)}\gamma}{2m^2\omega^4}[\ldots]} =$$

$$\cong \sqrt{\beta^{0}} + \frac{\beta^{(0)^{3/2}}\gamma}{4m^2\omega^4}\left[3 - 4\cos(2\xi) + \cos(4\xi)\right]$$

$$\sin\omega(t-\alpha^{(1)}) = \sin(\xi + \omega\Delta\alpha) \cong \sin\xi + \omega\Delta\alpha\cos\xi$$

MNOŻYMY, ZOSTAWIAMY WYRAZY LINIOWE W γ.

ALBO – ITERUJEMY DO $\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}$

INNY PRZYKŁAD: RUCH PLANET $M \gg m_A \gg m_B$

TWIERDZENIE ERGODYCZNE

ŚREDNIA PO CZASIE = ŚREDNIA "PO ZESPOLE"?

KLUCZOWE DLA FIZYKI STATYSTYCZNEJ!

TW POINCARE O POWROCIE

WEŹMY PUNKT NA TRAJEKTORII Z OBSZARU NIEZMIENNICZEGO Λ (O SKOŃCZONEJ MIERZE)

WEŹMY OTOCZENIE TEGO PUNKU, Ω

DLA $t > t_0$ TRAJEKTORIA WRÓCI DO Ω NIESKOŃCZENIE WIELE RAZY!

TW. ERGODYCZNY

$f(\xi)$ ZDEFINIOWANE DLA $\xi \in \Lambda$

$$\langle f \rangle_T = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(\xi(t))\, dt = \langle f \rangle_\Lambda = \frac{1}{V(\Lambda)} \int_\Lambda f(\xi) dV$$

NIE ZALEŻY OD t_0

TW POINCARE

$T(Q) = Q$ – OBSZAR NIEZMIENNICZY

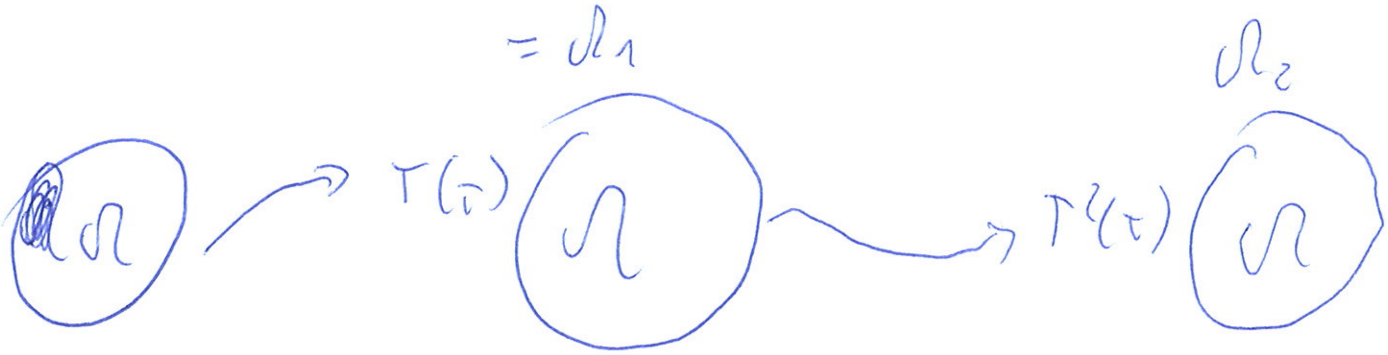
$V(Q) \neq 0$ $V(Q) < \infty$

$\Omega \subset Q$ – DOWOLNIE MAŁY

ISTNIEJE TRAJEKTORIA $\in \Omega$ DLA $t = t_0$:

KTÓRA: WRÓCI DO Ω DOWOLNIE WIELE RAZY

I PO DOWOLNIE DŁUGIM CZASIE



NP $\tau = 1$, DOWOLNIE

$T(t)\Omega \to T(t+\tau)\Omega$

CZYLI $x \in \Omega_1$ i $\Omega_2 \Leftrightarrow x \in \Omega$ i Ω_1

$V(\Omega_1) = V(\Omega_0) = CONST$ $V(Q) < \infty$

$\Rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j \neq 0$ DLA JAKIEGOŚ i, j

CZYLI $\Omega \cap \Omega_{i-j} \neq 0$ $\Omega' = \Omega \cap \Omega_{i-j}$ – OTWARTY $V(\Omega') \neq 0$

POWTARZAMY ROZUMOWANIE NA Ω' 17

$\rightarrow \Omega'' = \Omega' \cap \Omega'_{i'-j'}$

$\Omega \supset \Omega' \supset \Omega'' \supset \ldots \supset \omega$ ω – ZBIÓR LUB PUNKT

CZYLI ISTNIEJE $\omega \subset \Omega$ DO KTÓREGO TRAJEKTORIE WRÓCĄ NIESKOŃCZENIE WIELE RAZY (BYĆ MOŻE TYLKO JEDNA, $\omega = \{p_0\}$)

POWROTY PO CZASACH

$t + \tau(i-j)$ $i-j \geq 1$

$t + \tau(i-j) + \tau(i'-j')$ $i'-j' \geq 1$

$\ldots$

CZYLI KTÓRYŚ KOLEJNY POWRÓT PO DOWOLNIE DŁUGIM T !

NIEPRECYZYJNIE – WEŹMY MAŁE OTOCZENIE JAKIEGOŚ PUNKTU NA TRAJEKTORII – – WRÓCI DO NIEGO NIESKOŃCZENIE WIELE RAZY...