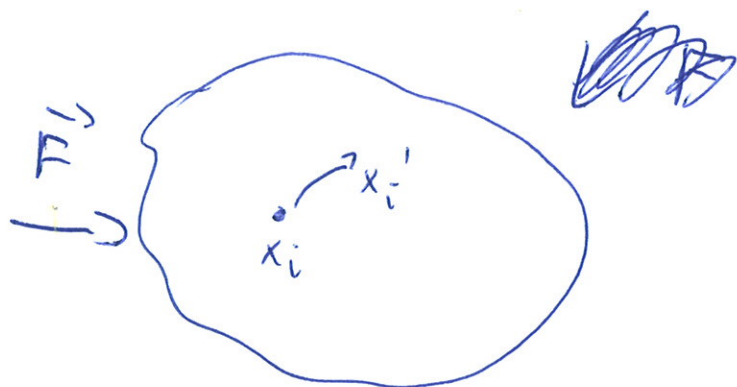




PRZEMIESZCZENIE $u_i = x_i' - x_i = u_i(x_i)$

ODLEGŁOŚĆ:

$$dl = \sqrt{dx_i^2}$$

$$dl' = \sqrt{dx_i'^2}$$

$$(dl')^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i^0 dx_k^0$$

$$+ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_k dx_i$$

$$= dl^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k + \dots$$

$$= dl^2 + 2u_{ik} dx_i^0 dx_k^0$$

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = u_{kic}$$

TENSOR ODKSZTAŁCENIA (DEFORMATION)

$$u = \begin{pmatrix} u^{(1)} & & \\ & u^{(2)} & \\ & & u^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$dl'^2 = (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2$$

ROZPATRUJEMY WARTOŚĆ ODKSZTAŁCENIA $\Rightarrow$

$$u_{ii} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{ii}}{\partial x_i} \right)$$

WIDOCZNOŚĆ ~~WIDOCZNOŚĆ~~

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} \approx \sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)}$$

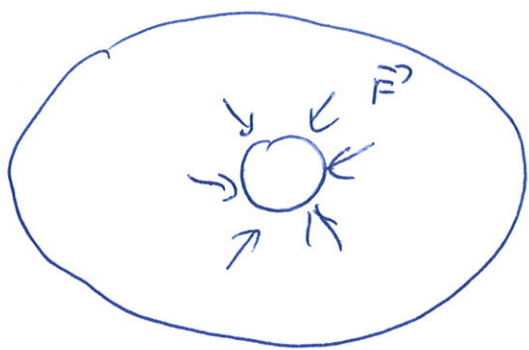
EL. OBYJTOŚCI:

$$\begin{aligned} dU' &= dx'_1 dx'_2 dx'_3 = dV (1 + u^{(1)}) (1 + u^{(2)}) (1 + u^{(3)}) \\ &\approx dV (1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}) = dV (1 + \text{Tr } \hat{u}) \\ &= dV (1 + u_{11} + u_{22} + u_{33}) \end{aligned}$$

TENSOR NAPIĘĆ

SIEĆ WEWNĘTRZNE — MOLEKULARNE — BARDZO KRÓTKOZASIĘGOWE

SIEĆ ODBIJAJĄCA NA FRAGMENT Ciała
— TŁUKO PRZECIŻEBO POWIERZCHNI

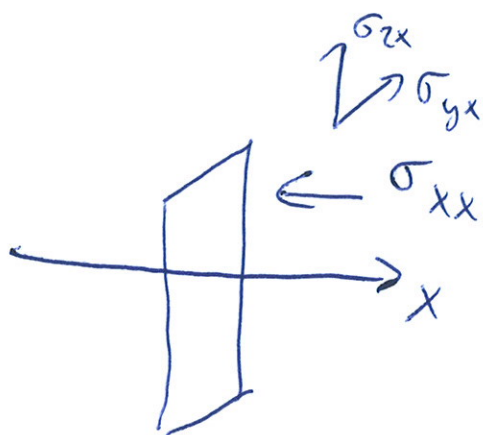


$$\text{SITA} = \int \vec{F} dV = \vec{e}_i \int F_i dV = \vec{e}_i \int \vec{\sigma}_i d\vec{S}$$

$$\boxed{F_i = \text{div } \vec{\sigma}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}}$$

$$= \vec{e}_i \int \sigma_{ik} dS_k$$

σ_{ik} — "TENSOR NAPRĘC"



w równowadze naprężeń wewnętrznych ($-\int \sigma_{ik} dS$)
i zewnętrznych są równowagą,

MOMENT SITA:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV = \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV$$

$$= \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV$$

(57)

$$H_{ik} = \oint (\sigma_{ik} x_k - \sigma_{ki} x_i) dS_i \\ + \underbrace{\int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV}$$

o gdy $\sigma_{ki} = \sigma_{ik}$, można to pokazać

licząc $\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}$, obóznik $\neq \delta_{ik}$ - napięcia ścinające

WARUNEK RÓWNOWAGI NAPIĘĆ WŁASNYCH:

$$0 = F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

w POLU GRAW: $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$

NA POWIERZCHNI MAMY SIŁĘ ZEWN. $\vec{p}$

WARUNEK RÓWNOWAGI TO

$$\vec{p} dS - \sigma_{ik} dS_k = 0$$

czyli $\sigma_{ik} n_k = p_i$

ZMIANA ENERGII

$$\int \delta R dV = \int F_i \delta u_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dV \\ = \oint \sigma_{ik} \delta u_i dS_k - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} dV$$

OŚRODEK NIEODKSZTALCOWY w ∞ -

(52)

— CAŁKA PO POW. ZNIKA

$$\int \delta R dV = -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) dV$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV$$

$$= - \int \sigma_{ik} \delta u_{ik} dV$$

STAD $\delta R = -\sigma_{ik} \delta u_{ik} \quad (T = \text{const!})$

PRAWO HOOKE'EGO

CIAŁO W RÓWNOWADZE, $T = \text{const} \Rightarrow$

$$u_{ik} = 0 \Rightarrow \sigma_{ik} = 0$$

PONIEWAŻ $\sigma_{ik} = \frac{\partial R}{\partial u_{ik}}$, TO W R NIE MA

WTRĄZÓW LINIOWYCH W u_{ik}

— ENERGIJA SWOBODNA

F JEST SKALAREM, Z u_{ik} MOŻNA UTWORZYĆ

$$2 \text{ SKALARY} = \sum_i u_{ii}^2 \quad \text{ORAZ} \quad \sum_{i,k} u_{ik}^2$$

STAD OGÓLNIIE

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \lambda u_{ii}^2 + \mu \sum u_{ik}^2$$

λ, μ — WSP. LAME'GO

$$dV' = dV (1 + Tr u)$$

53

$$Tr u = 0 \text{ -- "CZyste ścinanie"}$$

INNY PRZYPADK -- ZMIANA OBJ. Z ZACHOWANIEM
KSZTAŁTEM -- "ŚCISKANIE
WSZECHESTRONNE"

O BÓLNE ODKSZTAŁCENIE -- ZŁOŻENIE TRZECI Z-CH

$$u_{ik} = (u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}) + \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}$$

INNA FORMA

$$F = \mu \sum_{i,k} (u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll})^2 + \frac{1}{2} K \sum_u u_u^2$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$$

$K, \mu > 0$ -- musi być minimum F , nie punkty
siodłowy (może ścisłości i może ścinania)

$$\text{TENSOR NAPIĘĆ } \sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}$$

$$\sigma_{ik} = K u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu (u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik})$$

ODWROTNOŚĆ

$$u_{ik} = \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll})$$

$$u_{ik} \sim \sigma_{ik} \quad \text{DLA MATYCZ} \quad u_{ik} \rightarrow$$

54

"PRAWO HOOKE'A"

JEDNORodne ROZCIĄGANIE TŁĘSTA

DO KOŃCÓW PRZYKŁADAMY SIŁĘ p / 1 POWIERZCHNI.

ODKSZTAŁCENIE JEDNORodne $\rightarrow u_{ik}$ STAJE, CZLI
TEŻ σ_{ik} STAJE

NA POW. BOCZNEJ $\sigma_{ik} n_k = 0$, STAJE TYLKO $\sigma_{xx} \neq 0$

NA KOŃCACH $\sigma_{xi} n_i = p \Rightarrow \sigma_{xx} = p$

STAJE $u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3\kappa} \right) p$

$$u_{xx} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\kappa} + \frac{1}{\mu} \right) p = \frac{p}{E}$$

$$E = \frac{9\kappa\mu}{3\kappa + \mu} \quad - \quad \text{"MODUŁ YOUNGA"}$$

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}$$

$$\sigma = \text{"WSP. POISSONA"} = \frac{1}{2} \frac{3\kappa - 2\mu}{3\kappa + \mu}$$

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)} \sum_{i,k} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ii} \delta_{ik} \right)^2$$

(55)

$$\begin{cases} \sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right) \\ u_{ik} = \frac{1}{E} \left((1+\sigma) \sigma_{ik} - \sigma \sigma_{ll} \delta_{ik} \right) \end{cases}$$

WARUNKI RÓWNOWAŻY:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 \quad (+) \quad u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \vec{u} = -\rho \vec{g} \frac{2(1+\sigma)}{E}$$

BEZ SIŁ ZEWNĘTRZNYCH

$$(1-2\sigma) \Delta \vec{u} + \text{grad div } \vec{u} = 0 \quad | \text{div}$$

$\Downarrow$

$$\Delta \text{div } \vec{u} = 0$$

PRZYKŁADY — PĄTARZ ZAMKNIĘTY —