

Pytania egzaminu ustnego z Analizy Funkcjonalnej II  
Semestr zimowy 2010/11

1. Przestrzenie Hilberta. Definicja i podstawowe własności.
2. Twierdzenie o rozkładzie ortogonalnym i o postaci funkcjonału liniowego ciągłego.
3. Ograniczone operatory działające na przestrzeni Hilberta. Norma operatora.  $B(H)$  jako  $C^*$ -algebra.
4. Operatory odwracalne. Podstawowe własności odwzorowania:  $a \rightarrow a^{-1}$ .
5. Widmo operatora ograniczonego. Zwartość i niepustość widma. Promień spektralny.
6. Operatory unitarne, hermitowskie i normalne. Promień spektralny operatora normalnego.
7. Wielomiany od operatora ograniczonego. Wzór  $\text{Sp } w(a) = w(\text{Sp } a)$ .
8. Widma rzutów, operatorów unitarnych i operatorów hermitowskich.
9. Rachunek funkcji ciągłych dla operatorów hermitowskich.
10. Wektor cykliczny dla operatora hermitowskiego. Twierdzenie spektralne dla operatora hermitowskiego posiadającego wektor cykliczny.
11. Całki proste przestrzeni Hilberta. Twierdzenie spektralne dla operatora hermitowskiego.
12. Przemienne algebry  $C^*$ . Twierdzenie Gelfanda Naimarka.
13. Twierdzenie spektralne dla rodziny przemiennej operatorów hermitowskich.
14. Miary spektralne. Przedstawienie operatora hermitowskiego w postaci całki spektralnej.
15. Miary spektralne na przestrzeniach zwartych, a reprezentacje algebry funkcji ciągłych.
16. Operatory nieograniczone i ich wykresy. Kiedy podprzestrzeń w  $H \oplus H$  jest wykresem?
17. Operatory domknięte. Twierdzenie o wykresie domkniętym.
18. Problemy z operacjami algebraicznymi na operatorach nieograniczonych.
19. Operator sprzężony i jego wykres. Symetryczne, samosprężone i normalne operatory.
20. Własności  $T^*T$ , gdzie  $T$  jest domkniętym operatorem.
21. Operatory symetryczne a operatory samosprężone. Przestrzenie defektu i indeksy defektu.
22. Transformacja Caley'a operatora symetrycznego. Unitarność transformacji Caley'a operatora samosprężonego. Rozszerzanie operatora symetrycznego do samosprężonego.
23. Twierdzenie spektralne dla operatora samosprężonego.

24. Operatory samosprężone i generowane przez nie jednoparametrowe grupy operatorów unitarnych.
25. Jednoparametrowe grupy operatorów unitarnych i ich infinitesimalne generatory.
26. Jedno-jednoznaczna odpowiedniość między grupami a generatorami.
27. Widma operatorów nieograniczonych.
28. Związek między widmami operatorów  $T^*T$  i  $TT^*$ . Operatory spełniające relacje komutacyjne  $aa^* = a^*a + I$ .