

Pytania egzaminu ustnego z Analizy matematycznej IR
dla studentów pierwszego roku studiów indywidualnych
Rok akademicki 2011/2012, Semestr zimowy

1. Rachunek zdań. Konjunkcja, alternatywa, zaprzeczenie, implikacja. Kwantyfikatory, reguły de Morgana.
2. Zbiory, podstawowe działania na zbiorach. Inkluzja. Zbiory skończone i przeliczalne. Zbiór pusty. Liczby według von Neumana.
3. Paradoksy naiwnej teorii zbiorów. Aksjomaty teorii mnogości.
4. Iloczyn kartezjański zbiorów. Relacje i odwzorowania. Obrazy i przeciwobrazy zbiorów. Składanie (superpozycja) odwzorowań.
5. Relacje zwrotne, symetryczne, przechodnie, przeciwzwrotne. Relacja równoważności i podział na klasy równoważności.
6. Bijekcje i równoliczność zbiorów. Twierdzenie Cantora o nierównoliczności A i 2^A .
7. Pojęcie liczby rzeczywistej. Działania arytmetyczne i relacja nierówności. Odcinki i półproste.
8. Aksjomaty teorii liczb rzeczywistych.
9. Ograniczone podzbiory liczb rzeczywistych i ich kresy. Twierdzenie o istnieniu kresów.
10. Kresy funkcji ograniczonych. Własności arytmetyczne i porządkowe operacji "sup" i "inf".
11. Przestrzenie metryczne. Podstawowe własności metryki. Przykłady. Metryki w iloczynach kartezjańskich.
12. Kule i otoczenia. Zbiory otwarte. Otwartość kul.
13. Dopełnienie zbioru. Zbiory domknięte jako dopełnienia zbiorów otwartych.
14. Własności klasy wszystkich zbiorów otwartych. Topologia.
15. Odległość punktu od zbioru. Domknięcie zbioru. Podstawowe własności operacji domknięcia.

16. Zbiory domknięte. Własności klasy wszystkich zbiorów domkniętych.
17. Ciągi punktów przestrzeni metrycznej i ich granice. Granica jako pojęcie topologiczne.
18. Warunek Cauchy'ego jako warunek konieczny zbieżności ciągu. Przestrzenie zupełne.
19. Granice ciągów, a operacja domykania.
20. Zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R} jako przestrzeń metryczna. Własności topologiczne odcinków i półprostych. Zachowanie relacji nierówności przy przejściu do granicy.
21. Twierdzenie o zbieżności ciągów monotonicznych.
22. Twierdzenie o trzech ciągach.
23. Twierdzenie o iloczynie ciągu ograniczonego i ciągu dążącego do zera.
24. Zupełność przestrzeni \mathbb{R} . Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych. Nieprzeliczalność \mathbb{R} .
25. Ciągłość odwzorowania w punkcie (cztery równoważne definicje).
26. Zachowanie zbiorów otwartych przy odwzorowaniach ciągłych.
27. Odwzorowania lipschitz'owskie i ich ciągłość. Ciągłość odwzorowania stałego i tożsamościowego. Ciągłość metryki.
28. Zasada Banacha dla odwzorowań zblizających.
29. Superpozycja odwzorowań ciągłych. Iloczyn kartezjański odwzorowań ciągłych. Ciągłość rzutów.
30. Ciągłość działań arytmetycznych. Algebra funkcji ciągłych $C(X)$ (X - przestrzeń metryczna).
31. Przestrzeń liczb zespolonych jako przestrzeń metryczna. Ciągłość działań arytmetycznych w dziedzinie liczb zespolonych.
32. Ciągi, podciągi i zbiory zwarte. Zwartość podzbioru domkniętego zbioru zwartego. Zwartość iloczynu kartezjańskiego zbiorów zwartych.
33. Domkniętość i ograniczoność zbiorów zwartych. Zupełność przestrzeni zwartych.
34. Twierdzenie o malejącym ciągu podzbiorów domkniętych zbioru zwartego i równoważne mu twierdzenie o rosnącym ciągu zbiorów otwartych pokrywających zbiór zwarty.
35. Zwartość odcinka $[a, b]$. Górne i dolne granice ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych. Zbiory zwarte w \mathbb{R}^N .
36. Zwartość obrazu ciągłego zbioru zwartego. Własności funkcji ciągłych na zbiorach zwartych. Jednostajna ciągłość.
37. Twierdzenie o ϵ -sieci. Ośrodkowość zbiorów zwartych. Pokryciowa charakterystyka zbiorów zwartych.
38. Bijekcja ciągle zbiorów zwartych. Ciągłość odwzorowania odwrotnego.

39. Zbiory spójne. Spójność obrazu ciągłego zbioru spójnego.
40. Odcinki (i półproste) jako jedyne podzbiory spójne \mathbb{R} . Własność Darboux zbiorów i funkcji.
41. Spójność a łukowa spójność.
42. Własności funkcji różnowartościowych określonych na odcinku otwartym. Ciągłość funkcji odwrotnej.
43. Granice i filtry. Granica odwzorowania w punkcie.
44. Pochodna i różniczka funkcji. Funkcje klasy C^k i klasy C^∞ . Pochodna funkcji w punkcie w którym przyjmuje ona maksimum (lub minimum).
45. Technika różniczkowania: pochodna sumy, iloczynu, ilorazu i superpozycji funkcji różniczkowalnych.
46. Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a. Wnioski z twierdzenia Lagrange'a.
47. Funkcje o niezerującej się pochodnej. Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej.
48. Wzór Cauchy'ego. Reguły de l'Hospitala.
49. Wzór Taylora. Reszty Lagrange'a i Cauchy'ego. Wielomian ściśle styczny.
50. Dwumian Newtona. n -ta pochodna iloczynu funkcji.
51. Minima i maksima lokalne. Warunki konieczne i wystarczające.
52. Funkcje wypukłe.
53. Podziały odcinka. Podpodziały (podziały drobniejsze). Sumy Riemanna i ich własności. Całki górne i dolne. Funkcje całkowalne w sensie Riemanna.
54. Zbiory skierowane i ciągi uogólnione. Całka jako granica wypunktowanych sum Riemanna.
55. Całkowalność funkcji ciągłych.
56. Własności całki. Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.
57. Logarytm jako funkcja pierwotna do $\frac{1}{x}$. Własności logarytmu.
58. Funkcja wykładnicza jako funkcja odwrotna do logarytmu. Własności funkcji wykładniczej. Liczba e . Potęga o dowolnym wykładniku rzeczywistym.
59. Wypukłość funkcji wykładniczej i jej konsekwencje.
60. Rozwinięcie Taylora funkcji wykładniczej. Funkcja wykładnicza argumentu zespolonego.
61. Szeregi liczb zespolonych. Zbieżność i suma szeregu. Kryterium zbieżności szeregu wynikające z zupełności przestrzeni liczb zespolonych.
62. Szeregi o wyrazach dodatnich. Porównawcze kryterium zbieżności szeregu. Porównywanie szeregów z szeregiem geometrycznym i wynikające stąd szczegółowe kryteria zbieżności szeregów.

63. Szeregi bezwzględnie zbieżne. Zbieżność szeregu bezwzględnie zbieżnego. Przekształcanie wyrazów w szeregu bezwzględnie zbieżnym.
64. Mnożenie szeregów. Własności funkcji wykładniczej argumentu zespolonego.
65. Funkcje trygonometryczne. Tożsamości trygonometryczne.
66. Metryka w przestrzeni odwzorowań ograniczonych w przestrzeń metryczną. Jednostajna zbieżność ciągów odwzorowań. Zupełność przestrzeni $\mathcal{M}_{\text{ogr}}(X, Y)$.
67. Domkniętość $\mathcal{C}_{\text{ogr}}(X, Y)$ w $\mathcal{M}_{\text{ogr}}(X, Y)$.
68. Zbieżność jednostajna ciągu funkcji. Całka jako funkcjonal ciągły. Kiedy pochodna granicy ciągu funkcji jest równa granicy ciągu pochodnych.
69. Szeregi potęgowe. Promień zbieżności. Jednostajna zbieżność szeregów potęgowych. Ciągłość funkcji przedstawionej szeregiem potęgowym.
70. Różniczkowanie szeregów potęgowych. Gładkość funkcji przedstawionej szeregiem potęgowym. Pochodne funkcji trygonometrycznych.
71. Elementarne własności funkcji trygonometrycznych. Liczba π . Wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych. Okresowość funkcji trygonometrycznych i funkcji wykładniczej. Zgodność *szkolnej definicji* funkcji trygonometrycznych z definicją podaną na wykładzie.
72. Funkcja \arctg i jej pochodna. Przedstawienie $\arctg(x)$ w postaci szeregu potęgowego. Obliczanie liczby π .
73. Szeregi naprzemienne. Twierdzenie o zbieżności. Przedstawienie liczb $\frac{\pi}{4}$ i $\log 2$ w postaci szeregów naprzemiennych.
74. Całkowanie funkcji wymiernych.
75. Funkcje hiperboliczne i ich własności. Związek z funkcjami trygonometrycznymi.
76. Całkowanie funkcji wymiernych od funkcji wykładniczej i od funkcji trygonometrycznych
77. Funkcje \arcsin i \arccos . Całkowanie najprostszych niewymierności.
78. Podstawienia Eulera.