

Pytania egzaminacyjne z Analizy zespolonej i funkcji specjalnych I

Wersja wstępna

Wykład SLW, Semestr zimowy 2014/15.

1. Definicja funkcji holomorficzych. Przykłady.
2. Holomorficzność kombinacji algebraicznych funkcji holomorficzych. Superpozycja funkcji holomorficzych. Twierdzenie o lokalnej odwracalności.
3. Formy różniczkowe na \mathbb{C} . Kiedy $d(f(z)dz) = 0$.
4. Pochodne $\frac{\partial}{\partial z}$ i $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Wzory Cauchy-Riemanna.
5. Całki konturowe. Podstawowe oszacowanie wartości całki konturowej.
6. Twierdzenie i wzór Cauchy'ego.
7. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cauchy'ego.
8. Holomorficzność pochodnej funkcji holomorficzej. Wzory na kolejne pochodne w postaci całki konturowej.
9. Funkcje całkowite. Twierdzenie Liouville'a.
10. Zasadnicze twierdzenie algebry.
11. Szereg Taylora funkcji holomorficzej. Promień zbieżności tego szeregu.
12. Zera funkcji holomorficzych są izolowane. Krotność zera. Zachowanie się funkcji holomorficzej w otoczeniu zera.
13. Dzielenie funkcji holomorficzych. Bieguny, rząd bieguna. Funkcje meromorficzne.
14. Topologia zbieżności niemal jednostajnej. Niemal jednostajna granica ciągu funkcji holomorficzych jest funkcją holomorficzną.
15. Różniczkowanie niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji holomorficzych.
16. Szereg potęgowe. Koło zbieżności. Wzór na promień zbieżności.
17. Niemal jednostajna zbieżność szeregu potęgowego.
18. Szereg Laurenta funkcji holomorficzej. Obszar zbieżności tego szeregu.
19. Izolowane punkty osobliwe funkcji holomorficzych i ich klasyfikacja. Residuum punktu osobliwego. Wzór na residuum bieguna.
20. Zachowanie się funkcji holomorficzej w pobliżu punktu pozornie osobliwego.
21. Zachowanie się funkcji holomorficzej w pobliżu punktu bieguna.
22. Zachowanie się funkcji holomorficzej w pobliżu punktu istotnie osobliwego.
23. Zastosowanie twierdzenia o residuach do liczenia całek. Przykłady.

24. Zastosowanie twierdzenia o residuach do liczenia szeregów. Przykłady.

25. Funkcje meromorficzne. Pochodna logarytmiczna. Wzór na liczbę zer i biegunów.

26. Własności wyrażenia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} dt,$$

gdzie $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest (gładką) pętlą zamkniętą.

27. Obszary jednoczesne i niejednoczesne. Pierwsza grupa homotopii. Powierzchnia nakrywająca.

28. Logarytm jako funkcja na powierzchni nakrywającej $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Związek z funkcją wykładniczą.

29. Obrazy zbiorów otwartych przy odwzorowaniach holomorfcznych. Zasada maksimum dla funkcji holomorfcznych.

30. Powierzchnie Riemanna: mapy, atlas, odwzorowania holomorfczne.

31. Punkt w nieskończoności. Sfera Riemanna jako przykład zwartej powierzchni Riemanna.

32. Funkcje meromorficzne jako odwzorowania holomorfczne w sferę Riemanna.

33. Holomorfczność i meromorfczność funkcji w otoczeniu punktu w nieskończoności. Funkcje meromorfczne na sferze Riemanna.

34. Homografie jako automorfizmy sfery Riemanna.

35. Jednoczesne powierzchnie Riemanna i ich klasyfikacja. Twierdzenie Riemanna.

36. Przedłużanie holomorfczne. Zasada symetrii.

37. Przykłady powierzchni Riemanna wieloznacznych funkcji meromorfcznych.

38. Funkcja $\Gamma(z)$. Definicja i równanie funkcyjne.

39. Funkcja $\Gamma(z)$ jako funkcja meromorfczna na \mathbb{C} .

40. Równanie wiążące funkcje Γ i \sin .