

Ćwiczenia z Mechaniki 2008/2009

Seria 1

1. Znajdź wzory wyrażające transformacje pomiędzy wersorami dla układów współrzędnych:
 - a) kartezjańskiego i cylindrycznego
 - b) kartezjańskiego i biegunowego
2. Wyprowadź ogólny wzór na iloczyn mieszany wektorów: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ z wykorzystaniem wyznaczników.

(Zad. 36 str. 55 H&R&W, t.1)

Dane są trzy wektory: $\vec{A} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 4\vec{e}_z$, $\vec{B} = -3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ i $\vec{C} = 7\vec{e}_x - 8\vec{e}_y$.

Oblicz $3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B})$.

Uwagi:

- a) Należy wykorzystać wiedzę z zadania 5 serii 5 fizyki elementarnej:

Zadanie 5. Wyprowadź ogólny wzór na iloczyn wektorowy dwóch wektorów, posługując się składowymi tych wektorów w trójwymiarowym układzie kartezjańskim i korzystając z rozdzielności iloczynu względem dodawania wektorów:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z) \times (B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z) = \dots$$

Wynik przedstaw w najprostszej postaci, obliczając iloczyny wersorów, $\hat{e}_i \times \hat{e}_j$, na podstawie geometrycznej definicji iloczynu wektorowego.

Oblicz moment siły, jeśli ramię siły w pewnym układzie kartezjańskim jest równe $\vec{r} = [1, 4, 0]$ m, a siła jest równa $\vec{F} = [-5, -2, 0]$ N.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z) \times (B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z) = A_x \hat{e}_x \times B_x \hat{e}_x + A_x \hat{e}_x \times B_y \hat{e}_y + \dots \\ &= (A_x B_y - A_y B_x) \hat{e}_z + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{e}_y + (A_y B_z - A_z B_y) \hat{e}_x \end{aligned}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (r_x F_y - r_y F_x) \hat{e}_z = (18 \text{ mN}) \hat{e}_z$$

Pokazać, że

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

- b) Omówić interpretację geometryczną wyniku:

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = V$ - objętość (z dokładnością do znaku) równoległościanu rozpiętego na wektorach **a**, **b**, **c** i w związku z tym:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

3. Udowodnij tożsamość –(iloczyn potrójny).

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

4.

(Zad. 34 str. 55 H&R&W, t.1)

W równaniu $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$ przyjmijmy, że (wyjątkowo pomijając jednostki): $q = 2$,

$\vec{V} = 2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 6\vec{e}_z$ oraz $\vec{F} = [4, -20, 12]$. Oblicz składowe wektora

$\vec{B} = [B_x, B_y, B_z]$ wiedząc, że $B_x = B_y$.

Wskazówka: Udowodnij, że:

Jeżeli

$$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{b}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = p$$

$$\text{To: } \vec{v} = \vec{a} \frac{p}{a^2} + \vec{a} \times \vec{b} \frac{1}{a^2}$$

5. Punkt porusza się po okręgu położonym w płaszczyźnie XOY, o promieniu r i środku w początku układu współrzędnych. A) Zapisz wektor położenia jako funkcję kąta azymutalnego $\varphi = \varphi(t)$ w płaszczyźnie XOY. B) Oblicz wektor prędkości. C) Pokaż, że wektor prędkości można zapisać jako iloczyn wektorowy wektora prędkości kątowej i wektora położenia $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
6. Uogólnij wyniki Zad. 1 na przypadek opisu dowolnego ruchu płaskiego (np. w płaszczyźnie XOY) we współrzędnych walcowych $[r, \phi, z]$. A) Znajdź wersory bazy w tych współrzędnych i pokaż, że jest to baza prawoskrętna. B) Oblicz pochodne wersorów i pokaż, że można je zapisać w postaci $\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i$, gdzie wektor prędkości kątowej ma składowe $[0, 0, \dot{\phi}]$. C) Oblicz wektory prędkości i przyspieszenia w tej bazie.
7. „Primowany” układ odniesienia związany jest ze statkiem, który płynie z prędkością o wartości $V = 3$ m/s względem brzegu. Obserwator znajduje się w punkcie $x' = 0$. Na brzegu stoi traktor w położeniu $x = 0$. W chwili kiedy obserwator mija traktor (rys.), ten startuje i zaczyna poruszać się w

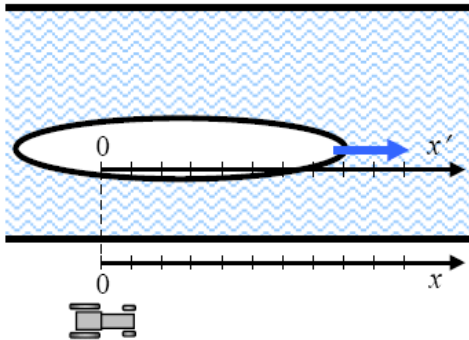
sposób opisany funkcją: $x(t) = \sqrt{A^2 + (Bt)^2} - A$, gdzie $A = 50$ m, a $B = 5$ m/s.

a) Jaka funkcja opisuje położenie traktora w układzie odniesienia związanym

ze statkiem? W jakich chwilach $x'(t) = 0$?

b) Jaka funkcja opisuje prędkość traktora w układzie odniesienia związanym

ze statkiem? W jakich chwilach $v'(t) = 0$?



8. Ciało o masie m spoczywa w punkcie $x=0$. W chwili $t=0$ zaczyna na nie działać wzdłuż osi OX siła zależna od czasu:

$$F(t) = B \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{t}{A} \right) \right) \quad \text{dla } 0 < t < A;$$

$$F(t) = 0 \quad \text{dla } t \geq A$$

Jak zależy od czasu prędkość i położenie ciała? Sporządzić wykresy tych wielkości