I. MACIERZ LINIOWEGO ODWZOROWANIA PRZESTRZENI WEKTOROWYCH

Wyobraźmy sobie, że przestrzeń wektorowa W jest zbudowana z kombinacji liniowych n liniowo niezależnych obiektów ξ_1, ξ_2, . . ., ξ_n, zwanych bazą. Na przykład, obiektami tymi mogą być wektory służące do zbudowania układu odniesienia w zwykłej przestrzeni trójwymiarowej. Mogą to być macierze matematyczne, funkcje takie jak wielomiany określonego stopnia, bardziej złożone funkcje pewnego typu, takie jak sinus i cosinus całkowitych wielokrotności argumentu, funkcjonały, czyli funkcje funkcji takie jak całka z funkcji na odcinku, przypisująca funkcji liczbę, lub elementy jakiejś abstrakcyjnej przestrzeni wektorowej. Każdy wektor w w przestrzeni W ma z definicji postać

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \xi_i \, . \tag{1}$$

Np. wielomian $w(z) = z + z^3 - z^4$ w bazie wielomianów $\xi_1 = z$, $\xi_2 = z^2$, $\xi_3 = z^3$, $\xi_4 = z^4$, zapisuje się jako kombinacja liniowa ze współczynnikami $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$, $w_4 = -1$. Współczynniki w_i nazywa się **współrzędnymi wektora** w w bazie $\{\xi_i\}_{i=1,...,n}$. Współrzędne wektorów opłaca się zapisywać w kolumnie,

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} , \tag{2}$$

ponieważ każde **odwzorowanie liniowe** wektorów daje się wtedy zapisać w uniwersalny sposób za pomocą **macierzy odwzorowania**. Macierz ta zmienia taką kolumnę współrzędnych według reguły ,,wiersz razy kolumna". Np. operacja obracania wektorów w przestrzeni jest liniowa i zapisuje się w ten sposób, różniczkowanie wielomianów jest odwzorowaniem liniowym i zapisuje się w ten sposób, transformacja Lorentza jest liniowa i zapisuje się w ten sposób, ewolucja atomów zapisuje się w ten sposób w mechanice kwantowej, i inne operacje w wielu przestrzeniach operatorów matematycznych użytecznych w fizyce czy informatyce zapisują się w ten sposób. Dlatego warto zaznajomić się bliżej z notacją użyteczną dla odwzorowań liniowych. Co więcej, pochodne wszystkich odwzorowań różniczkowalnych są odwzorowaniami liniowymi. Zatem odwzorowania liniowe opisują ogromną klasę odwzorowań przez scałkowanie.

Każde odwzorowanie liniowe L pewnej przestrzeni W w pewną przestrzeń V jest jednoznacznie wyznaczone przez jego działanie na bazę w przestrzeni argumentów W. Mamy bowiem

$$Lw = L \sum_{i=1}^{n} w_i \, \xi_i \tag{3}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i \, L\xi_i \, , \tag{4}$$

i znajomość n wektorów $L\xi_1$, $L\xi_2$, . . ., $L\xi_n$ w V pozwala podać wynik działania L na każdy wektor w W.

Każdy wektor v w przetrzeni V z definicji zapisuje się w postaci kombinacji wektorów bazy w przestrzeni V. Oznaczmy elementy bazy w przestrzeni wektorów-obrazów V przez χ_1, χ_2, . . ., χ_m. Ich liczba m nie musi być taka sama jak liczba n elementów bazy w przestrzeni W wektorów-argumentów odwzorowania L. Każdy wektor v w przestrzeni V zapisuje się teraz w postaci kombinacji

$$v = \sum_{l=1}^{m} v_l \, \chi_l \, , \tag{5}$$

i zaraz zobaczymy, że współrzędne wektorów v również opłaca się zapisać w kolumnie,

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} . \tag{6}$$

Mianowicie, wektory $L\xi_1$, $L\xi_2$, . . ., $L\xi_n$ można zapisać jako kombinacje liniowe wektorów bazowych χ_1, χ_2, . . ., χ_m w V. Współczynniki tych kombinacji można oznaczyć symbolami według następującej reguły:

$$\begin{aligned} L\xi_1 &= L_{11}\chi_1 + L_{21}\chi_2 + ... + L_{m1}\chi_m \,, & (7)\\ L\xi_2 &= L_{12}\chi_1 + L_{22}\chi_2 + ... + L_{m2}\chi_m \,, & (8)\\ &\vdots \\ L\xi_n &= L_{1n}\chi_1 + L_{2n}\chi_2 + ... + L_{mn}\chi_m \,. & (9)\end{aligned}$$

W tej notacji mamy

$$\begin{aligned} Lw &= \sum_{i=1}^{n} w_i \, L\xi_i & (10)\\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{l=1}^{m} L_{li}\chi_l \,. & (11)\end{aligned}$$

Możemy zapisać sumowanie w odwrotnej kolejności i mamy

$$\begin{aligned} v &= Lw & (12)\\ &= \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} L_{li} w_i \right) \chi_l \,. & (13)\end{aligned}$$

Wiemy jednak, że wektor v zapisuje się za pomocą współrzędnych wzorem $v = \sum_{l=1}^{m} v_l \chi_l$. Tym samym, zgodnie z regułą mnożenia wiersz razy kolumna, mamy

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & ... & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \,. \tag{14}$$

Zatem współrzędne $\vec{v}$ wektora $v = Lw$ w przestrzeni obrazów V wyrażają się za pomocą współrzędnych $\vec{w}$ wektora w w przestrzeni argumentów W za pomocą **macierzy odwzorowania L w bazach $\{\xi_i\}_{i=1,...,n}$ i $\{\chi_l\}_{l=1,...,m}$**. *Macierz odwzorowania* zależy od wyboru tych baz. Kolumny *macierzy odwzorowania* są zbudowane ze współrzędnych obrazów wektorów bazy z przestrzeni argumentów tego odwzorowania w bazie w przestrzeni obrazów tego oddziaływania.

II. ZMIANA MACIERZY ODWZOROWANIA PRZY ZMIANIE BAZ

Zarówno zmiana bazy w przestrzeni argumentów W jak i zmiana bazy w przestrzeni obrazów V wpływają na postać macierzy odwzorowania L. Wybór bazy jest w zasadzie dowolny, chociaż niektóre wybory mogą być wygodniejsze niż inne. Np. kiedy obserwator wybiera bazę wektorów jednostkowych w przestrzeni, budując swój układ odniesienia, to kieruje się swoją wygodą. Inny obserwator, np. jadący samochodem, wybierze swoje wektory bazy w przestrzeni inaczej. Niemniej, fizyczna treść zjawisk obserwowanych przez obu obserwatorów nie będzie zależała od ich wyborów jakiej użyć bazy. Jeśli w jakimś zjawisku istnieje pewien związek między wektorami, $v = Lw$, obaj obserwatorzy zapiszą go w swoich bazach inaczej mimo, że fizyczna treść ich zapisów będzie ta sama. Różnice będą wynikały z różnych wyborów baz. Żeby obserwatorzy mogli się porozumieć i dotrzeć do treści fizycznej, która jest niezależna od wyboru bazy, muszą zrozumieć zależność macierzy odwzorowania L od wyboru bazy. Znając tę zależność, tzn. wiedząc jakie różnice powinni widzieć, będą mogli sprawdzić czy obserwują ten sam związek $v = Lw$, czy też ich teoria, sugerująca istnienie takiego związku, jest błędna.

W ogólności, możemy rozważać zmiany bazy w przestrzeniach W i V o dowolnych wymiarach. Zmiana bazy w W nie zmienia wymiaru W i zmiana bazy w V nie zmienia wymiaru V.

Rozważmy najpierw zmianę bazy w przestrzeni argumentów W. Wektor w zapisany w wyjściowej bazie $\{\xi_i\}_{i=1,...,n}$ jako kombinacja $w = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \xi_i$, może być również zapisany w innej bazie, $\{\xi'_i\}_{i=1,...,n}$, jako

$w = \sum_{i=1}^n w'_i \, \xi'_i$. Ponieważ mamy do czynienia z jednym i tym samym wektorem, musi zachodzić równość

$$\sum_{i=1}^n w_i \, \xi_i \; = \; \sum_{i=1}^n w'_i \, \xi'_i \, . \tag{15}$$

Gdy zrozumiemy związek współrzędnych

$$\vec{w}\,' \; = \; \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ \vdots \\ w'_n \end{bmatrix} \tag{16}$$

w bazie $\{\xi'_i\}_{i=1,...,n}$ ze współrzędnymi

$$\vec{w} \; = \; \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

w bazie $\{\xi_i\}_{i=1,...,n}$, i gdy zastosujemy to samo rozumowanie do wektorów w przestrzeni obrazów V, to będziemy mieli wszystkie elementy potrzebne do podania macierzy odwzorowania L w nowych bazach (z primami) na podstawie znajmości macierzy L w bazach wyjściowych (bez primów) i definicji nowych baz w języku baz wyjściowych (jak bazy primowane, jedna w W i jedna w V, są określone za pomocą baz nie primowanych, jednej w W i jednej w V).

Przypuśćmy, że nowa baza w przestrzeni argumentów W jest zadana w postaci następujących kombinacji liniowych

$$\xi'_1 \; = \; B_{11}\xi_1 + B_{21}\xi_2 + ... + B_{n1}\xi_n \, , \tag{18}$$

$$\xi'_2 \; = \; B_{12}\xi_1 + B_{22}\xi_2 + ... + B_{n2}\xi_n \, , \tag{19}$$

$$\vdots$$

$$\xi'_n \; = \; B_{1n}\xi_1 + B_{2n}\xi_2 + ... + B_{nn}\xi_n \, . \tag{20}$$

Wiersze w macierzy $n \times n$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & ... & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & ... & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & ... & B_{nn} \end{bmatrix} \tag{21}$$

są współrzędnymi wektorów nowej bazy w wyjściowej bazie.

Równanie (15) mówi, że kombinacja $\sum_{i=1}^n w'_i \, \xi'_i$ musi być równa kombinacji $\sum_{i=1}^n w_i \, \xi_i$. To znaczy, że

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w'_i \xi'_i \; &= \; w'_1 \, (B_{11}\xi_1 + B_{21}\xi_2 + ... + B_{n1}\xi_n) \\ &+ \; w'_2 \, (B_{12}\xi_1 + B_{22}\xi_2 + ... + B_{n2}\xi_n) \\ &\vdots \\ &+ \; w'_n \, (B_{1n}\xi_1 + B_{2n}\xi_2 + ... + B_{nn}\xi_n) \\ &= \; \sum_{i=1}^n w_i \, \xi_i \, . \end{aligned} \tag{22}$$

Możemy zgrupować współczynniki przy wektorach bazy wyjściowej i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w'_i \xi'_i \; &= \; (w'_1 \, B_{11} + w'_2 \, B_{12} + ... + w'_n \, B_{1n}) \; \xi_1 \\ &+ \; (w'_1 \, B_{21} + w'_2 \, B_{22} + ... + w'_n \, B_{2n}) \; \xi_2 \\ &\vdots \\ &+ \; (w'_1 \, B_{n1} + w'_2 \, B_{n2} + ... + w'_n \, B_{nn}) \; \xi_n \\ &= \; \sum_{i=1}^n w_i \, \xi_i \, . \end{aligned} \tag{23}$$

Równość współczynników przy ξ_i dla każdego $i = 1, 2, ..., n$ w drugiej z powyższych równości oznacza, że współrzędne w_i dają się zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = w'_1 \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{bmatrix} + w'_2 \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \\ \vdots \\ B_{n2} \end{bmatrix} + ... + w'_n \begin{bmatrix} B_{1n} \\ B_{2n} \\ \vdots \\ B_{nn} \end{bmatrix} . \tag{24}$$

Ponieważ wiersze w macierzy (21) są współczynnikami rozkładu wektorów nowej bazy na wektory wyjściowej bazy, to kolumny w równaniu (24) są zbudowane ze współrzędnych wektorów nowej bazy w wyjściowej bazie. Zauważmy również, że kombinacja liniowa kolumn w równaniu (24) daje się zapisać jako wynik działania macierzy na kolumnę współczynników w'_j z $j = 1, 2, ..., n$. Mianowicie,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & ... & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & ... & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & ... & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ \vdots \\ w'_n \end{bmatrix} . \tag{25}$$

Równanie (25) mówi, że współrzędne dowolnego wektora w w przestrzeni W w wyjściowej bazie można zapisać jako kolumnę współrzędnych $\vec{w}$, która jest wynikiem działania *macierzy przejścia* (B) według zasady ,,wiersz razy kolumna” na kolumnę współrzędnych $\vec{w}'$ tego samego wektora w nowej bazie. *Macierz przejścia* (B) jest ustawiona z kolumn współrzędnych wektorów nowej bazy w wyjściowej bazie.

Identyczne rozumowanie w odniesieniu do przestrzeni V i zmiany bazy z wyjściowej $\{\chi_l\}_{l=1,...,m}$ na bazę $\{\chi'_l\}_{l=1,...,m}$ daną kombinacjami liniowymi

$$\chi'_1 = C_{11}\chi_1 + C_{21}\chi_2 + ... + C_{m1}\chi_m , \tag{26}$$
$$\chi'_2 = C_{12}\chi_1 + C_{22}\chi_2 + ... + C_{m2}\chi_m , \tag{27}$$
$$\vdots$$
$$\chi'_m = C_{1m}\chi_1 + C_{2m}\chi_2 + ... + C_{mm}\chi_m , \tag{28}$$

prowadzi do wniosku, że współrzędne wszystkich wektorów v w przestrzeni V w wyjściowej bazie można zapisać w postaci kolumn następująco:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & ... & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & ... & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & ... & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_m \end{bmatrix} . \tag{29}$$

Równanie (29) mówi, że współrzędne dowolnego wektora v w przestrzeni V w wyjściowej bazie można zapisać jako kolumnę współrzędnych $\vec{v}$, która jest wynikiem działania *macierzy przejścia* według zasady ,,wiersz razy kolumna” na kolumnę współrzędnych $\vec{v}'$ tego samego wektora w nowej bazie. *Macierz przejścia* jest ustawiona z kolumn współrzędnych wektorów nowej bazy w wyjściowej bazie. *Macierz przejścia* (C) w przestrzeni V zależy od wyboru baz w przestrzeni V i jest niezależna od *macierzy przejścia* (B) w przestrzeni W zależnej od wyboru baz w przestrzeni W. Lecz gdy rozważamy odwzorowania przestrzeni W w przestrzeń W, to można używać jednej i tej samej bazy wyjściowej dla opisu wektorów argumentów i wektorów obrazów, i również jednej i tej samej nowej bazy dla opisu wektorów argumentów i wektorów obrazów. Wtedy *macierz przejścia* (C) jest identyczna z *macierzą przejścia* (B).

Załóżmy teraz, że zgodnie ze wzorem (14) współrzędne $\vec{v}$ wektorów-obrazów $v = Lw$ w odwzorowaniu L w wyjściowej bazie w przestrzeni V wyrażają się przez współrzędne $\vec{w}$ wektorów-argumentów w w odwzorowaniu L w wyjściowej bazie w przestrzeni W następującym wzorem:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & ... & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} . \tag{30}$$

W tym wzorze kolumny macierzy (L) odwzorowania L są zbudowane ze współrzędnych obrazów wektorów bazy z przestrzeni argumentów tego odwzorowania w bazie w przestrzeni obrazów tego odwzorowania.

Wstawiając wzory (25) i (29) do równania (30), otrzymujemy wzór

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ : \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & ... & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & ... & C_{2m} \\ : & : & ... & : \\ C_{m1} & C_{m2} & ... & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ : \\ v'_m \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & ... & L_{2n} \\ : & : & ... & : \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ : \\ w_n \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & ... & L_{2n} \\ : & : & ... & : \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & ... & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & ... & B_{2n} \\ : & : & ... & : \\ B_{n1} & B_{n2} & ... & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ : \\ w'_n \end{bmatrix}, \tag{33}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & ... & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & ... & C_{2m} \\ : & : & ... & : \\ C_{m1} & C_{m2} & ... & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ : \\ v'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & ... & L_{2n} \\ : & : & ... & : \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & ... & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & ... & B_{2n} \\ : & : & ... & : \\ B_{n1} & B_{n2} & ... & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ : \\ w'_n \end{bmatrix}. \tag{34}$$

W tym wzorze występują wyłącznie współrzędne wektorów w i $v = Lw$ w nowych bazach w przestrzeniach W i V. Kwadratowe macierze przejść (B) i (C) są z definicji nieosobliwe i istnieją macierze do nich odwrotne, $m \times m$ macierz $(C)^{-1}$ oraz $n \times n$ macierz $(B)^{-1}$.

Stopniowo wprowadziliśmy notację dla macierzy i współrzędnych wektorów w odwzorowaniu L:

- $\vec{w}$ = kolumna współrzędnych wektora w w przestrzeni argumentów W w wyjściowej bazie ξ,
- (L) = macierz odwzorowania L w bazach uporzadkowanych ξ w W oraz χ w V,
- $\vec{v}$ = kolumna współrzędnych wektora v w przestrzeni obrazów V w wyjściowej bazie χ,
- Równanie (30): $\vec{v} = (L)\ \vec{w}$,
- $\vec{w}\,'$ = kolumna współrzędnych wektora w w przestrzeni argumentów W w nowej bazie ξ',
- (B) = macierz przejścia od bazy ξ do ξ' w przestrzeni argumentów W,
- $\vec{w} = (B)\ \vec{w}\,'$,
- $\vec{v}\,'$ = kolumna współrzędnych wektora v w przestrzeni obrazów V w nowej bazie χ',
- (C) = macierz przejścia od bazy χ do χ' w przestrzeni obrazów V,
- $\vec{v} = (C)\ \vec{v}\,'$,
- Równanie (34): $(C)\ \vec{v}\,' = (L)\ (B)\ \vec{w}\,'$.

Po pomnożeniu przez odwrotność macierzy (C), ostatni z tych punktów mówi, że obowiązuje następująca zasada konstrukcji macierzy $(L)'$ odwzorowania L w nowych bazach (primowanych), kiedy zna się jego macierz (L) w wyjściowych bazach (nie primowanych) i macierze przejść (B) i (C) od wyjściowych baz do nowych:

$$(L)' = (C)^{-1}\,(L)\,(B)\,.$$

Stosując konwencję sumacyjną: powtórzony indeks zawsze sumuje się od 1 do wymiaru przestrzeni, można w skrócie powiedzieć, że wektor $w = w_i \xi_i$, i jeśli $w_i = B_{ij} w'_j$, to $w = B_{ij} w'_j \xi_i$, i stąd $w = w'_j B^T_{ji} \xi_i$, czyli $\xi'_j = B^T_{ji} \xi_i$. Macierz (B^T), kombinująca wektory wyjściowej bazy $\{\xi_i\}_{i=1,\ldots,n}$ w wektory nowej bazy $\{\xi'_j\}_{j=1,\ldots,n}$, jest macierzą transponowaną do macierzy przejścia (B), która podaje współrzędne wektorów w wyjściowej bazie (nie primowanej) jako kombinacje liniowe współrzędnych wektorów w nowej bazie (primowanej).

Używając konwencji sumacyjnej, mamy

$$v_i = (L)_{ij} w_j \,, \tag{35}$$
$$v_i = (C)_{il} v'_l \,, \tag{36}$$
$$w_j = (B)_{jk} w'_k \,, \tag{37}$$
$$(C)_{il} v'_l = (L)_{ij} (B)_{jk} w'_k \,, \tag{38}$$
$$v'_l = (C)^{-1}_{li} (L)_{ij} (B)_{jk} w'_k \,. \tag{39}$$

W konwencji symacyjnej każdy indeks może wystąpić tylko raz po jednej stronie równania (wtedy nie jest wysumowany i musi wystąpić również raz po drugiej stronie równnia, np. obie strony równania opisują współrzędne wektora i po obu stronach musi pojawić się ten sam numer współrzędnej) lub tylko dwa razy (wtedy jest wysumowany i może wystąpić tylko po jednej stronie równania). Żaden indeks nie może wystąpić więcej niż dwa razy. Jeśli powstaje sytuacja, w której trzy lub więcej indeksów są sobie równe i są wysumowane, konwencja sumacyjna mówi, że taką sytuację trzeba wyjaśnić dodatkowym komentarzem. Jeśli jakiś indeks występuje dwa lub więcej razy ale nie ma być wysumowany, konwencja wymaga, żeby dodać wyjaśnienie, że nie należy sumować po powtórzonych indeksach. W specjalnych sytuacjach może być tak, że po jednej stronie równania występuje jeden indeks, a po drugiej stronie go nie ma. W takiej sytuacji konwencja mówi, że dla wszystkich wartości tego indeksu otrzymuje się takie samo równanie, ale liczba równań jest nadal równa liczbie wartości, które może przyjąć ten jeden indeks.