## I. ROZMAITOŚCI STOPNIA 2 W PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ

Rozmaitość drugiego stopnia w przestrzeni euklidesowej to hiperpowierzchnia opisana warunkiem, który mówi, że pewna funkcja wielomianowa stopnia 2 współrzędnych punktów w przestrzeni zeruje się gdy punkty te leżą na tej powierzchni. Np. w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej ze współrzędnymi $x_1$, $x_2$, $x_3$, i $x_4$, równanie

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

opisuje ,,sferę" o środku w punkcie $(0, 0, 0, 0)$ i promieniu 1, a równanie

$$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0 \tag{2}$$

opisuje nieskończony ,,walec" o promieniu 1, powstający z okręgu, leżącego w płaszczyźnie $x_3 = x_4 = 0$, o środku w punkcie $(0, 0, 0, 0)$ i promieniu 1, w wyniku nadawania współrzędnym $x_3$ i $x_4$ wszystkich możliwych wartości. Gdyby przestrzeń była trójwymiarowa, walec byłby tworzony przez okrąg przesuwany na wszystkie możliwe sposoby w kierunku współrzędnej $x_3$.

W dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej (na płaszczyźnie) hiperpowierzchnie są krzywymi. Krzywe stopnia 2 na płaszczyźnie to proste, elipsy, parabole, i hiperbole. Ruch dwóch mas przyciagających się siła Newtona, odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między masami, odbywa się w ten sposób, że z upływem czasu wektor łączący te masy zakreśla swym końcem jedną z tych krzywych. Podobnie odbywa się ruch ładunków elektrycznych oddziałujących na siebie siłą Coulomba.

Hiperpowierzchnie stopnia 2 w przestrzeni trójwymiarowej to stożki, proste, płaszczyzny, para płaszczyzn przecinających się lub równoległych, elipsoidy, hiperboloidy jednopowłokowe i dwupowłokowe, walce eliptyczne i hiperboliczne, paraboloidy eliptyczne i hiperboliczne, oraz walce paraboliczne. Gładkie powierzchnie w przestrzeni trójwymiarowej można w większości punktów lokalnie przybliżać przez jakąś powierzchnię drugiego stopnia. ,,Lokalnie" znaczy w małym otoczeniu wybranego punktu powierzchni.

Wiele zagadnień fizycznych opisuje się za pomocą energii potencjalnej, która jest funkcją współrzędnych w przestrzeni o dużej liczbie wymiarów. Kiedy mówimy o jednej cząstce, liczba wymiarów jest trzy. Kiedy mówimy o $N$ cząstkach, liczba wymiarów jest $3N$. Kiedy opisujemy ruch pola, liczba wymiarów jest nieskończona. Niemniej we wszystkich tych przypadkach stabilne położenie układu odpowiada lokalnemu minimum energii potencjalnej. Istnieją też położenia równowagi odpowiadające lokalnemu maksimum, punktowi siodłowemu, lub powierzchni walcowej. W mechanice kwantowej lokalne minima odpowiadają stanom metastabilnym, które rozpadają się z czasem życia zależnym od bariery potencjału, oddzielającej minimum lokalne od minimum absolutnego i minimów lokalnych o pośrednich wartościach. Kiedy mamy do czynienia z punktami przegięcia, ewolucja układu komplikuje się jeszcze bardziej. Ponieważ gładkie funkcje dają się przybliżać lokalnie wokół swoich extremów i punktów przegięcia przez funkcje drugiego stopnia, znajomość możliwych kształtów drugiego stopnia jest ważnym elementem rozumowania w analizie rzeczywistości. Trzeba umieć narysować powierzchnię opisaną funkcją wielomianową drugiego stopnia. Takie problemy powstają np. w teorii ruchów elektronów w ciałach stałych, kiedy rozważa się ich energię w funkcji pędu, lub w modelach ruchów kolektywnych w jądrach atomowych, kiedy analizuje się energię układu nukleonów w funkcji parametrów opisujących ten układ. Po analizie stosowalności powierzchni drugiego stopnia w danym problemie, jeśli taki opis nie wystarczy, można przystąpić do analizy powierzchni wyższych stopni wokół ekstremów. Np. w teorii cząstek elementarnych używa się funkcji pól kwantowych trzeciego i czwartego stopnia, i te funkcje są przedmiotem trudnych badań.

Ogólna procedura identyfikacji hiperpowierzchni w przestrzeni euklidesowej na podstawie znajmości jej równania opisana jest w Rozdziale III książki Jacka Komorowskiego "Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego, i kwadryk", PWN, Warszawa 1978. W tekście poniżej podane są odnośniki do tej książki. Jej Rozdział III zawiera tabelę kanonicznych postaci równań wszystkich krzywych i powierzchni 2 stopnia w przestrzeniach euklidesowych o wymiarach 2 i 3 (str. 284). Na str. 290-297 znajdują się rysunki tych rozmaitości. Rozdział III można studiować w celu zrozumienia rysunków hiperpowierzchni 2 stopnia niemal niezależnie od reszty książki.

## II. RYSOWANIE ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ KWADRATOWYCH W $E^3$

Zamiast ogólnych wzorów w przestrzeni euklidesowej o dwolnym wymiarze, rozważmy przestrzeń trójwymiarową. Przypuśćmy, że ktoś podaje nam równanie

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 + \delta x_1 x_2 + \epsilon x_2 x_3 + \phi x_3 x_1 + \chi x_1 + \kappa x_2 + \lambda x_3 + \mu = 0\,, \tag{3}$$

i pyta jak narysować zbiór rozwiązań tego równania. Rysunek może być sporządzony w wyniku postępowania według następującego schematu.

Po pierwsze, zauważmy, że równanie (3) można napisać w postaci

$$[x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} \alpha & \frac{\delta}{2} & \frac{\phi}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \beta & \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{\phi}{2} & \frac{\epsilon}{2} & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [\chi, \kappa, \lambda] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \mu = 0. \tag{4}$$

W tej postaci wszystkie działania mnożenia wykonuje się według zasady ,,wiersz razy kolumna".

Po drugie, ponieważ macierz

$$(A) = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{\delta}{2} & \frac{\phi}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \beta & \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{\phi}{2} & \frac{\epsilon}{2} & \gamma \end{bmatrix} \tag{5}$$

jest rzeczywista i symetryczna, można ją zdiagonalizować w przestrzeni $E^3$.

Po trzecie, wektory własne odwzorowania liniowego $A$, reprezentowanego przez symetryczną macierz $(A)$ w bazie kanonicznej, odpowiadające różnym wartosciom własnym, są ortogonalne. W podprzestrzeniach własnych o wymiarze większym niż 1 (tzn. gdy mamy więcej niż jeden wektor własny o tej samej wartości własnej) można wybrać wektory własne tak,żeby były między sobą ortogonalne. Można więc zbudować bazę ortogonalną z wektorów własnych odwzorowania $A$. Można wektory tej bazy znormalizować, i otrzymać ortonormalną bazę zbudowaną z wektorów własnych odwzorowania $A$.

Przypuśćmy, że wartości własne macierzy $(A)$ wynoszą $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, i odpowiadające im kolumny współrzędnych znormalizowanych ortogonalnych wektorów własnych $u$, $v$, i $w$ odwzorowania $A$ w bazie kanonicznej w $E^3$ są (odpowiednio)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Macierz przejścia od bazy kanonicznej do bazy wektorów własnych dana jest wzorem

$$(B) = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Współrzędne wektorów $x_1$, $x_2$, i $x_3$ w bazie kanonicznej są związane ze współrzędnymi wektorów w nowej bazie, $y_1$, $y_2$, i $y_3$, wzorami

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Ponieważ macierz $(B)$ jest ortogonalna, jej odwrotność jest dana przez macierz transponowaną $(B)^{-1} = (B)^T$, i mamy

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

W nowych współrzędnych ortogonalnych, $y_1$, $y_2$, i $y_3$, mierzonych wzdłuż ortonormalnych wektorów własnych $u$, $v$, i $w$ odwzorowania $A$, tworzących nową bazę, nasze wyjściowe równanie zapisuje się w postaci

$$[y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + [\chi, \kappa, \lambda] \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \mu = 0. \tag{11}$$

Wprowadzamy więc wektor o współrzędnych w nowej bazie danych wzorem

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \kappa \\ \lambda \end{bmatrix}, \tag{12}$$

równoważnym transponowanemu

$$[\chi, \kappa, \lambda] \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = [\mu_1, \mu_2, \mu_3] . \tag{13}$$

Teraz możemy sprowadzić nasze równanie zapisane w nowych zmiennych do pełnego kwadratu w następującym sensie. Piszemy je w postaci

$$[y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + [\mu_1, \mu_2, \mu_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \mu = 0 , \tag{14}$$

i obserwujemy, że ma ono strukturę

$$\omega_1 y_1^2 + \mu_1 y_1 + \omega_2 y_2^2 + \mu_2 y_2 + \omega_3 y_3^2 + \mu_3 y_3 + \mu = 0 . \tag{15}$$

Następny krok zależy od tego, czy wartości własne $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, są wszystkie różne od zera, czy niektóre się zerują.

Załóżmy najpierw, że wszystkie wartości własne są różne od zera. Wtedy możemy je wyciągnąć przed nawiasy i napisać nasze równanie w postaci

$$\omega_1 \left( y_1 + \frac{\mu_1}{2\omega_1} \right)^2 - \frac{\mu_1^2}{4\omega_1} + \omega_2 \left( y_2 + \frac{\mu_2}{2\omega_2} \right)^2 - \frac{\mu_2^2}{4\omega_2} + \omega_3 \left( y_3 + \frac{\mu_3}{2\omega_3} \right)^2 - \frac{\mu_3^2}{4\omega_3} + \mu = 0 . \tag{16}$$

Znaki wartości własnych oznaczmy literami $s$, tzn.

$$\omega_1 = s_1 |\omega_1| , \tag{17}$$
$$\omega_2 = s_2 |\omega_2| , \tag{18}$$
$$\omega_3 = s_3 |\omega_3| . \tag{19}$$

Wyraz wolny w naszym równaniu ma postać

$$\mu - \frac{\mu_1^2}{4\omega_1} - \frac{\mu_2^2}{4\omega_2} - \frac{\mu_3^2}{4\omega_3} = s_4 \left| \mu - \frac{\mu_1^2}{4\omega_1} - \frac{\mu_2^2}{4\omega_2} - \frac{\mu_3^2}{4\omega_3} \right| \tag{20}$$
$$= s_4 m^2 \tag{21}$$

Załóżmy, że jego moduł jest różny od zera, tzn. $m \neq 0$. Gdy $m$ wychodzi równe 0, to nie ma powodu do żadnych dodatkowych kroków z powodu członu wolnego bo po porostu go nie ma.

Ostatni etap przekształcania równania polega na wprowadzeniu współrzędnych

$$z_1 = \frac{1}{m\sqrt{|\omega_1|}} \left( y_1 + \frac{\mu_1}{2\omega_1} \right) , \tag{22}$$
$$z_2 = \frac{1}{m\sqrt{|\omega_2|}} \left( y_2 + \frac{\mu_2}{2\omega_2} \right) , \tag{23}$$
$$z_3 = \frac{1}{m\sqrt{|\omega_3|}} \left( y_3 + \frac{\mu_3}{2\omega_3} \right) . \tag{24}$$

W tych ortogonalnych współrzędnych, mierzonych wzdłuż wektorów własnych odwzorowania $A$, nasze równanie przybiera postać kanoniczną

$$s_1 z_1^2 + s_2 z_2^2 + s_3 z_3^2 + s_4 = 0 . \tag{25}$$

Na postawie tabeli na str. 284 w książce Jacka Komorowskiego odczytujemy typ powierzchni, z jaką mamy do czynienia. Możemy tę powierzchnię narysować przez analogię z przykładami ze str. 290-297. Przeskalowanie współrzędnych nie jest niezbędne do zorientowania się z jaką powierzchnią mamy do czynienia, ale jest pomocne w rysowaniu szczegółowych obrazów rozważanych powierzchni.

W przypadku gdy jedna lub więcej wartości własnych odwzorowania $A$ wychodzą 0, współrzędne w kierunku wektorów własnych o zerowych wartościach własnych traktujemy inaczej. Mianowicie, współrzędne w tych kierunkach występują tylko w członach liniowych w naszym równaniu, bo w kwadratowych zerowe wartości własne $A$ zabijają ich wkład. Gdyby człony liniowe w kierunkach zerowych wartości własnych były zero, to nic już nie musimy robić. Jeśli człony liniowe w kierunkach o zerowych wartościach własnych nie znikają, to opisujemy je następująco.

Przeżywające człony liniowe mają postać

$$\vec{\mu}\vec{y}\,. \tag{26}$$

Pamiętajmy, że strzałki odnoszą się tylko do składowych w kierunkach o zerowych wartościach własnych. Postać iloczynu skalarnego mówi nam, że można wybrać jedną nową współrzędną wzdłuż wektora $\vec{\mu}$, a pozostałe w kierunkach prostopadłych. Te w kierunkach prostopadłych nie wnoszą żadnego wkładu do naszej funkcji, i prowadzą do struktur typu walcowego. Natomiast ta jedna współrzędna, która jest wzdłuż $\vec{\mu}$ i występuje tylko liniowo w naszym równaniu, wprowadza osobną klasę hiperpowierzchni parabolicznych lub paraboidalnych. Rozmaitości te identyfikujemy na postawie tabeli na str. 284 w książce Jacka Komorowskiego. Odczytujemy typ powierzchni i rysujemy jej kształt w szczegółach posługując się analogią z przykładami ze str. 290-297. Warto też zapoznać się z przykładem na str. 298-300.

## III. SKRÓCONA FORMA ROZUMOWANIA

Zauważmy, że równanie (4) można zapisać w postaci

$$(x|Ax) + (a|x) + \mu = 0\,. \tag{27}$$

W tej postaci znak $(\cdot|\cdot)$ oznacza iloczyn skalarny w rzeczywistej przestrzeni unitarnej, która jest użyta do definicji rzeczywistej przestrzeni euklidesowej.

Używając własności iloczynu skalarnego w przestrzeni euklidesowej, możemy napisać

$$\left(x + \frac{b}{2}\middle| A\left[x + \frac{b}{2}\right]\right) = (x|Ax) + \left(x\middle| A\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\middle| Ax\right) + \left(\frac{b}{2}\middle| A\frac{b}{2}\right)\,. \tag{28}$$

Jeśli odwzorowanie $A$ jest ortogonalne, to istnieje $A^{-1} = A^T$, i możemy napisać

$$\left(x + \frac{b}{2}\middle| A\left[x + \frac{b}{2}\right]\right) = (x|Ax) + (x|Ab) + \left(\frac{b}{2}\middle| A\frac{b}{2}\right)\,. \tag{29}$$

Wprowadzając

$$b = A^{-1}a\,, \tag{30}$$

otrzymujemy

$$(x + b/2|A[x + b/2]) = (x|Ax) + (x|a) + \frac{1}{2}\,(a|A^{-1}a)\,. \tag{31}$$

W takim razie, za pomocą wektorów $y$ zdefiniowanych wzorem

$$y \;=\; x + \frac{1}{2}\,A^{-1}a\,, \tag{32}$$

możemy napisać równanie (27) w postaci

$$(y|Ay) + \mu - \frac{1}{4}\,(a|A^{-1}a) = 0\,. \tag{33}$$

Następnie diagonalizujemy odwzorowanie $A$ i rysujemy obraz rozmaitości.

Gdy odwzorowanie $A$ jest diagonalizowalne, ale odwrotność $A$ nie istnieje z powodu zerowania się pewnych wartości własnych, powyższe rozumowanie stosuje się tylko do podprzestrzeni o niezerowych wartościach własnych, z tak ograniczonym $A$. Zaś w podprzestrzeni rozpinanej przez wektory własne $A$ o zerowych wartościach własnych wprowadzamy jeden wektor nowej bazy wzdłuż tej części $a$, która leży w tej podprzestrzeni, a pozostałe wektory bazy w tej podprzestrzeni są wybrane w kierunkach prostopadłych do $a$. Kierunek wektora bazy utworzonego w ten sposób z $a$ wyznacza orientację hiperpowierzchni paraboloidalnych lub parabolicznych. Pozostałe wektory bazy w podprzestrzeni własnej $A$ o wartości własnej 0 wskazują kierunki osi walców.