Ćwiczenie 1. Załóż, że $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ jest ciałem i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Które z następujących właściwości są prawdą?

1. $0 \cdot \alpha = 0$.
2. $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$.
3. Każdy element zbioru $\mathbb{F}$ ma tylko jeden element przeciwny.
4. Każdy element $\alpha \neq 0$ zbioru $\mathbb{F}$ ma tylko jeden element odwrotny.
5. $(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$.
6. $1 + 1 \neq 0$.
7. Jeżeli $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq 0$, to $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

Ćwiczenie 2. Niech $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ będzie ciałem. Funkcją wymierną o współczynnikach w $\mathbb{F}$ nazywamy formalny napis postaci

$$f = \frac{f_1(\mathfrak{X})}{f_2(\mathfrak{X})},$$

gdzie $f_1(\mathfrak{X})$ i $f_2(\mathfrak{X})$ są wielomiany o współczynnikach w $\mathbb{F}$ i $f_2(\mathfrak{X}) \neq 0$. Ponadto, mówimy, że $f = g$, gdy $f_1(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X}) = g_1(\mathfrak{X}) \cdot f_2(\mathfrak{X})$. Zbiór funkcji wymiernych można wyposażyć w dodawanie i mnożenie

$$h + g = \frac{h_1(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X}) + h_2(\mathfrak{X}) g_1(\mathfrak{X})}{h_2(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X})}, \qquad h \cdot g = \frac{h_1(\mathfrak{X}) \cdot g_1(\mathfrak{X})}{h_2(\mathfrak{X}) \cdot g_2(\mathfrak{X})}.$$

Udowodnij, że zbiór funkcji wymiernych o współczynnikach w $\mathbb{F}$ jest ciałem względem tych działań.

Ćwiczenie 3. Dany jest wielomian $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathfrak{X}^n$ o współczynnikach w ciele $(\mathbb{F}, +, \cdot, 1, 0)$ z pierwiastkami $x_1, \ldots, x_n$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{k<k'=1}^{n} x_k x_{k'} = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \sum_{k<k'<k''=1}^{n} x_k x_{k'} x_{k''} = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Te wzory to część tzw. wzorów Viete'a.

Ćwiczenie 4. Niech $P(\mathfrak{X})$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnij, że $P(\mathfrak{X})$ jest podzielny przez $(\mathfrak{X} - a)^k$ wtedy i tylko wtedy gdy wielomiany $d^i P(\mathfrak{X})/dx^i$, dla $i = 0, \ldots, k$, są podzielne przez $(\mathfrak{X} - a)$.

Ćwiczenie 5. Oblicz resztę z dzielenia następujących wielomianów:

- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^7 - 4\mathfrak{X}^6 + \mathfrak{X}^5 + 5\mathfrak{X}^4 + 5\mathfrak{X}^3 - 5\mathfrak{X}^2 + 10\mathfrak{X} - 7$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 6\mathfrak{X}^2 + 11\mathfrak{X} - 6$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^9 - 8\mathfrak{X}^8 + 15\mathfrak{X}^7 + 5\mathfrak{X}^4 + 9\mathfrak{X} - 16$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 9\mathfrak{X}^2 + 23\mathfrak{X} - 15$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^8 - 9\mathfrak{X}^7 + 24\mathfrak{X}^6 - 24\mathfrak{X}^5 + 24\mathfrak{X}^4 - 24\mathfrak{X}^3 + 24\mathfrak{X}^2 - 22\mathfrak{X} + 16$ przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 8\mathfrak{X} + 15$.

Ćwiczenie 6. Znaleźć reszty z dzielenia wielomianu $f(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^6 - \mathfrak{X}^5 + \mathfrak{X}^4 + \mathfrak{X}3 + 2\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X} + 1$ przez:

- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - \mathfrak{X}$

- $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 + 2$
- $f_3(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 - 2\mathfrak{X} + 1$
- $f_4(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X} - 2$

W pierścieniu wielomianów $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$, dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$.

Ćwiczenie 7. Ustal a, b i c dla których wielomian, o współczynnikach w $\mathbb{R}$, dany wzorem:

$$\begin{aligned} f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^7 - (a+b+c)\mathfrak{X}^6 + \mathfrak{X}^5(3+ab+ac+bc) - (3a+3b+3c-abc)\mathfrak{X}^4 \\ + (2+3ab+3ac+3bc)\mathfrak{X}^3 - (2a+2b+2c+3abc)\mathfrak{X}^2 + 2(ab+bc+ac)\mathfrak{X} - 2abc \end{aligned}$$

jest podzielny przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^3 - 6\mathfrak{X}^2 + 11\mathfrak{X} - 6$.

Ćwiczenie 8. Dla jakich n wielomian o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$ dany wzorem

$$f_n(\mathfrak{X}) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{X}^k$$

jest podzielny przez $f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^2 + 1$?

Ćwiczenie 9. Podaj przykład dwóch wielomianów o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$ określające tą samą funkcję wielomianową.

Ćwiczenie 10. Oblicz za pomocą algorytmu Euklidesa największy wspólny dzielnik par wielomianów:

- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 2\mathfrak{X}^4 - 22\mathfrak{X}^3 - 8\mathfrak{X}^2 + 117\mathfrak{X} - 90$, $\qquad f_2(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 14\mathfrak{X}^4 + 74\mathfrak{X}^3 + 184\mathfrak{X}^2 + 213\mathfrak{X} + 90$.
- $f_1(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^5 + 8\mathfrak{X}^4 + 8\mathfrak{X}^3 - 62\mathfrak{X}^2 - 153\mathfrak{X} - 90$, $\qquad f_2(\mathfrak{X}) = 4 + 8\mathfrak{X} + 5\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}^3$.

Ćwiczenie 11. Dane są wielomiany:

$$P(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + a\mathfrak{X}^3 + b\mathfrak{X}^2 + c\mathfrak{X} + 1, \qquad Q(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^4 + c\mathfrak{X}^3 + b\mathfrak{X}^2 + a\mathfrak{X} + 1.$$

Jakie warunki spełniać muszą współczynniki a, b i c, gdzie $a \neq c$, aby $P(\mathfrak{X})$ i $Q(\mathfrak{X})$ miały dwa wspólne pierwiastki? Oblicz rozwiązania $P(\mathfrak{X}) = 0$ i $Q(\mathfrak{X}) = 0$ w takim przypadku.

Ćwiczenie 12. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi różnymi od zera takimi, że $a+b+c \neq 0$ i

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Udowodnij, że

$$\frac{1}{a^{2015}} + \frac{1}{b^{2015}} + \frac{1}{c^{2015}} = \frac{1}{a^{2015} + b^{2015} + c^{2015}}.$$

Ćwiczenie 13. Niech $\mathbb{H}$ będzie zbiorem elementów postaci

$$q = x + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad x, y, z, t, \in \mathbb{R}.$$

Na tym zbiorze definiujemy dodawanie:

$$q + q' = (x+x') + (y+y')\mathbf{i} + (z+z')\mathbf{j} + (t+t')\mathbf{k}, \qquad q' = x' + y'\mathbf{i} + z'\mathbf{j} + t'\mathbf{k} \in \mathbb{H}$$

oraz mnożenie ,które jest łączne i rozdzielne względem dodawania i spełnia następujące tożsamości:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad 1\mathbf{i} = \mathbf{i}1 = \mathbf{i}, \quad 1 \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j}\dot{1} = \mathbf{j}, \quad 1\mathbf{k} = \mathbf{k}1 = \mathbf{k}.$$

Udowodnij, że $(\mathbb{H}, +, \cdot, 1, 0)$ jest ciałem nieprzemiennym, czyli posiada wszystkie właściwości ciała, poza przemiennością mnożenia. To nieprzemienne ciało jest znane jako zbiór kwaternionów.

Ćwiczenie 14. Zbuduj wszystkie ciała o pięciu elementach.

Ćwiczenie 15. Niech a będzie liczbą wymierną i niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnij, że wielomian o współczynnikach wymiernych

$$\mathfrak{X}^{2^n}(\mathfrak{X} + a)^{2^n} + 1$$

jest nierozkładalny.

Ćwiczenie 16. Wykazać, że dla $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$ oraz $w \neq 1$, równanie

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = w$$

ma dokładnie n pierwiastków rzeczywistych. Wyznaczyć te pierwiastki.

Ćwiczenie 17. Dane trzy liczby zespolone $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ nie na jednej linii, znajdź $z_0 \in \mathbb{C}$ taki, że $f(z_0) \leqslant f(z)$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, gdzie

$$f(z) = |z_1 - z|^2 + |z_2 - z|^2 + |z_3 - z|^2.$$

Ćwiczenie 18. Znajdź odwrotność liczb zespolonych:

(a) $\dfrac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \dfrac{3-i}{1+i} + (\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i) - i^3$,

(b) $2i(i-1) + \left(\sqrt{3}+i\right)^3 + (1+i)\overline{(1+i)}$.

Ćwiczenie 19. Przedstawić w postaci kanonicznej:

1. $(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})^{1410}$,

2. $\left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)} + i^{101}\right]^{2015}$,

3. $\dfrac{(2-3i)^3 - (1+i)^2(5-i)}{(4-3i)^2 - i(1+2i)^3}$.

Ćwiczenie 20. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu nad ciałem $\mathbb{C}$

1. $-z^3 + (7+i)z^2 - (12+7i)z + 12i$,
2. $z^4 - 2z^3 + +(2-i)z^2 + 2iz - 2i$,
3. $z^6 - z^4 + z^2 - 1$.

Ćwiczenie 21. Rozwiązać równania:

1. $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$,
2. $i(z+\bar{z}) + i(z-\bar{z}) = 2i - 3$,

Ćwiczenie 22. Znajdź i narysuj na płaszczyźnie zespolonej obraz odwzorowania $f(S_i)$, gdzie:

$$f(z) = \frac{z+1}{z-2}$$

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1|^2 = 8\}\ ,\ S_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \Re(z) \leqslant 1\}$$

Ćwiczenie 23. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ćwiczenie 24. Udowodnij, że

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\phi + \alpha) = 2^n \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\varphi}{2} + \alpha\right);$$

$$(b)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cos(k\phi) = \left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n}{2}(\varphi + \pi)\right).$$

Ćwiczenie 25. Niech z będzie liczbą zespoloną taką, że $|z+1| > 2$. Udowodnij, że $|z^3+1| > 1$.

Ćwiczenie 26. Niech k będzie dodatnią liczb a całkowitą. Niech $f(\mathfrak{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathfrak{X}^k$ będzie wielomianem takim, że $a_k \in \{-1, 0, 1\}$ i podzielnym przez $(\mathfrak{X}-1)^k$. Niech q będzie liczbą pierwszą taką, że $\frac{q}{\log(q)} < \frac{k}{\log(n+1)}$ Udowodnij, że każda liczba $w \in \mathbb{C}$ taka, że $w^q = 1$, jest pierwiastkiem wielomianu $f(\mathfrak{X})$.