

Seria zadań II z Algebry IR2015 II

“Zielony zbiór zadań” to *Od liczb zespolonych do kwadryk. Zbiór zadań z algebry z rozwiązaniami. Pod redakcją J. Jezierskiego.* “Zbiór Kostrykina” to *Zbiór zadań z algebry. Pod redakcją A.I. Kostrykina.*

Zadanie 1. Zadanie 76 z *zielonego zbioru zadań*

Dowieść, że $\cos(\frac{2\pi}{7})$ jest pierwiastkiem wielomianu $8z^3 + 4z^2 - 4z - 1$. Znaleźć pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

Zadanie 2. Zadanie 74 z *zielonego zbioru zadań*

Znając pierwiastki wielomianu $z^3 - 3z + 1$ wyprowadzić wzory

$$\frac{1}{\cos(40^\circ)} = 2 - 4\cos(80^\circ) \quad \frac{1}{\cos(80^\circ)} = 2 - 4\cos(160^\circ) \quad \frac{1}{\cos(160^\circ)} = 2 - 4\cos(40^\circ)$$

Zadanie 3. Zadanie 7.3.2 ze *zbioru zadań Kostrykina*

Obliczyć sumę kwadratów i iloczyn wszystkich pierwiastków zespolonych wielomianu

$$\text{a) } 3x^5 - x^3 + x + 2 \quad \text{b) } x^n + ax^{n-1} + b, n \geq 3$$

Zadanie 4. Zadanie 1.2.5 ze *zbioru zadań Kostrykina*

Niech A i B będą podgrupami normalnymi G , takimi że $A \cap B = \{e\}$. Wykazać, że $xy = yx$ dla dowolnych $x \in A$ oraz $y \in B$.

Zadanie 5. Zadanie 1.2.12 ze *zbioru zadań Kostrykina*

Wykazać, że centrum grupy rzędu p^n gdzie p jest liczbą pierwszą s $n \in \mathbb{N}$, zawiera więcej niż jeden element.

Zadanie 5. Zadanie 1.2.17 ze *zbioru zadań Kostrykina*

Wyznaczyć wszystkie homomorfizmy grup:

$$\text{a) } \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6 \quad \text{b) } \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{18} \quad \text{c) } \mathbb{Z}_{18} \rightarrow \mathbb{Z}_6 \quad \text{d) } \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{15} \quad \text{e) } \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{25}$$

Zadanie 6. Pokazać, że jeśli w grupie G istnieje dokładnie jeden element a rzędu 2, to $a \in Z(G)$.

Zadanie 7. Pokazać, że dowolna podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

Zadanie 8. Pokazać, że żaden skończony podzbiór grupy liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, +)$ nie generuje tej grupy.

Ponadto proszę przerobić zadania od 211 do 225 z *zielonego zbioru zadań*.