Algebra i jej zastosowania - I. GRUPY

3. Własności grup.

1. Pokazać, że grupa $(G, \cdot)$ jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $a, b \in G$, $(ab)^2 = a^2b^2$.

2. Znaleźć wszystkie podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +)$.

3. Narysować diagram relacji zawierania dla podgrup grupy $(S_3, \circ)$ oraz dla podgrup grupy kwaternionów $(Q_8, \cdot)$.

4. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą i niech $Z(G) = \{a \in G \mid \forall g \in G, ag = ga\}$ będzie tzw. centrum tej grupy. Pokazać, że $(Z(G), \cdot)$ jest abelową podgrupą grupy $(G, \cdot)$. Znaleźć centrum grupy $(S_3, \circ)$.

5. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą i niech H będzie skończonym podzbiorem G takim, że dla dowolnych $a, b \in H$, $a \cdot b \in H$. Pokazać, że $(H, \cdot)$ jest podgrupą grupy $(G, \cdot)$.

6. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Pokazać, że jeśli każdy element $a \in G$ jest rzędu 2, to grupa $(G, \cdot)$ jest przemienna.

7. Pokazać, że jeśli w grupie $(G, \cdot)$ istnieje dokładnie jeden element $a \in G$ rzędu 2, to $a \in Z(G)$.

8. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Jeżeli $a \in G$ jest elementem rzędu $n < \infty$, to dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{Z}$, $a^k = e$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n|k$.

9. Pokazać, że rząd permutacji $\pi \in S_n$ jest najmniejszą wspólną wielokrotnością długości jego rozłącznych cykli.

10. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ podać przykład grupy, w której istnieją dwa elementy rzędu 2 o iloczynie będącym elementem rzędu n.

11. a) Czy w grupie nieskończonej istnieją elementy skończonego rzędu?
    b) Czy w grupie skończonej istnieją elementy nieskończonego rzędu?
    c) Czy iloczyn elementów skończonego rzędu może być elementem nieskończonego rzędu?
    d) Czy iloczyn elementów nieskończonego rzędu może być elementem skończonego rzędu?

12. Pokazać, że żaden skończony podzbiór grupy liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, +)$ nie generuje tej grupy.

13. a) Czy grupa skończona, w której każda właściwa podgrupa jest cykliczna, jest grupą cykliczną?
b) Czy skończona grupa abelowa, w której każda właściwa podgrupa jest cykliczna, jest grupą cykliczną?

14. Pokazać, że dowolna podgrupa grupy cyklicznej jest grupą cykliczną.

15. Pokazać, że grupa $(Z_{2^n}^*, \cdot_{2^n})$, dla $n \geq 3$, nie jest grupą cykliczną.