Seria zadań z Algebry IIR nr 1.1

29. kwietnia 2017 r.

Notacja: We wszystkich poniższych zadaniach $\mathbb{K}$ jest ciałem, V zaś jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$.

Zadanie 1. Niechaj $V := \mathbb{K}_4[t]$. Określmy podprzestrzenie

$$V_1 \;:=\; \{\, v \in V \quad | \quad F_v(-2) = 0_{\mathbb{K}} = F_v(2)\,\}\,,$$

$$V_2 \;:=\; \{\, v \in V \quad | \quad F_v(-1) = 0_{\mathbb{K}} = F_v(1) = F_v(0_{\mathbb{K}})\,\}\,.$$

Sprawdź, że $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = 3 = \dim_{\mathbb{K}} V_2 + 1$ i wskaż przykłady baz tych podprzestrzeni. Wykaż ponadto, że $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$ oraz $V_1 +_V V_2 = V$, a następnie znajdź rozkład wektora $v := c_0 \triangleright t^0 +_V c_1 \triangleright t^1 +_V c_2 \triangleright t^2 +_V c_3 \triangleright t^3 +_V c_4 \triangleright t^4 \in V$ na składowe $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$.

Zadanie 2. Podprzestrzenie $V_1, V_2 \subset V := \mathbb{R}^4$ są określone wzorami $V_1 := \ker A$ i $V_2 := \operatorname{im} A$, gdzie

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ -7 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Znajdź

(i) takie bazy V_1 i V_2, których część wspólna jest bazą $V_1 \cap V_2$;

(ii) układ równań opisujący $V_1 +_V V_2$.

Powtórz rachunki dla $V_1 := \langle B^{\bullet}{}_1, B^{\bullet}{}_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ i $V_2 := \langle B^{\bullet}{}_2, B^{\bullet}{}_4 \rangle_{\mathbb{R}}$, gdzie

$$B := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Sprawdź, czy $\mathbb{R}^3$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $V_1 := \ker \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ i $V_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$. W przypadku uzyskania odpowiedzi twierdzącej podaj rozkład wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na składowe z V_1 i V_2.

Zadanie 4. Wykaż, że $\mathbb{R}^2{}_2$ jest sumą prostą swoich podprzestrzeni

$$V_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

oraz

$$V_2 := \left\{ A \in \mathbb{R}^2{}_2 \;\middle|\; A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot A \right\}.$$

Znajdź rozkład wektora $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ na składowe z tych podprzestrzeni.

Zadanie 5. Niechaj V będzie sumą prostą swoich dwóch podprzestrzeni V_1, V_2, tj. $V = V_1 \oplus V_2$, i niech $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ dla pewnej przestrzeni wektorowej W nad $\mathbb{K}$. Oznaczmy $K := \ker L$. Potwierdź słuszność poniższej równoważności:

$$L(V_1) \cap L(V_2) = \{0_V\} \iff K = K \cap V_1 + K \cap V_2 \,.$$

Zadanie 6. Wyznacz rząd macierzy

$$D_4 := \begin{pmatrix} a_1 +_{\mathbb{K}} b_1 & a_1 +_{\mathbb{K}} b_2 & a_1 +_{\mathbb{K}} b_3 & a_1 +_{\mathbb{K}} b_4 \\ a_2 +_{\mathbb{K}} b_1 & a_2 +_{\mathbb{K}} b_2 & a_2 +_{\mathbb{K}} b_3 & a_2 +_{\mathbb{K}} b_4 \\ a_3 +_{\mathbb{K}} b_1 & a_3 +_{\mathbb{K}} b_2 & a_3 +_{\mathbb{K}} b_3 & a_3 +_{\mathbb{K}} b_4 \\ a_4 +_{\mathbb{K}} b_1 & a_4 +_{\mathbb{K}} b_2 & a_4 +_{\mathbb{K}} b_3 & a_4 +_{\mathbb{K}} b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4{}_4 \,,$$

a następnie uogólnij ten wynik na przypadek macierzy $D_n \in \mathbb{K}^n{}_n$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ zdefiniowanej analogicznie.

Zadanie 7. Znajdź podprzestrzeń V_1 przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dopełniającą względem podprzestrzeni $V_2 := \ker(3, -2, 1, 2)$, tj. taką, która spełnia równość $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

Zadanie 8. Wyznacz metodą operacji elementarnych odwrotność macierzy

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 9. W zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ ustal zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{pmatrix} -1 & 1+p & 1+p \\ -p & 3+p & 2 \\ 1 & 2 & 3+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 10. Jaki warunek muszą spełniać parametry $a, b \in \mathbb{R}$, aby układ równań

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

był niesprzeczny? Rozwiąż ten układ dla $a = -1 = b$.

Zadanie 11. W zależności od wartości parametrów $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (\lambda + 3)x + y + 2z = a\lambda + b \\ \lambda x + (\lambda - 1)y + z = b(\lambda - 1) \\ 3(\lambda + 1)x + \lambda x + (\lambda + 3)z = (a + b)\lambda \end{cases} .$$

Zadanie 12. Niechaj V_1, V_2 będą podprzestrzeniami $\mathbb{K}$-liniowymi przestrzeni V. Skonstruuj izomorfizm przestrzeni wektorowych

$$V_1/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1 +_V V_2)/V_2 .$$

Zadanie 13. Niechaj V_1, V_2 będą podprzestrzeniami $\mathbb{K}$-liniowymi przestrzeni V i niech $\pi_k : V \to V/V_k,\ k \in \{1, 2\}$ będą rzutami kanonicznymi. Rozważmy odwzorowanie

$$\pi := \pi_1 \times \pi_2 \ : \ V \longrightarrow (V/V_1) \times (V/V_2) \ : \ v \longmapsto (\pi_1(v), \pi_2(v)) ,$$

$\mathbb{K}$-liniowe względem naturalnej (iloczynowej) struktury $\mathbb{K}$-liniowej na jego przeciwdziedzinie. Udowodnij, co następuje:

(i) π jest monomorfizmem $\iff$ $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$;

(ii) π jest epimorfizmem $\iff$ $V = V_1 + V_2$;

(iii) π jest izomorfizmem $\iff$ $V = V_1 \oplus V_2$.

Zadanie 14. Sprawdź liniową niezależność układów form liniowych na $\mathbb{R}^5$ złożonych z poniższych elementów:

(i)

$$\varphi_1 \ : \ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 ,$$

$$\varphi_2 \ : \ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 ,$$

$$\varphi_3 \ : \ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \longmapsto x_1 - x_2 ;$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \longmapsto x_1+7x_2+7x_3+7x_4+x_5\,,\\
\varphi_2 &: (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \longmapsto x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5\,,\\
\varphi_3 &: (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \longmapsto 12x_1+7x_2+13x_3+8x_4+9x_5\,,\\
\varphi_4 &: (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \longmapsto 10x_1-2x_2+3x_3-3x_4+3x_5\,;
\end{aligned}$$

Zadanie 15. Wyznacz bazę przestrzeni $(\mathbb{R}^4)^*$ form liniowych na przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^4$ dwoistą względem bazy $\mathbb{R}^4$ złożonej z wektorów

$$e_1 := (1,0,0,0)\,,\qquad e_2 := (1,1,0,0)\,,\qquad e_3 := (1,1,1,0)\,,\qquad e_1 := (1,1,1,1)\,.$$

Wypisz macierz przejścia między tak określoną bazą $(\mathbb{R}^4)^*$ a bazą standardową utworzoną przez rzuty kanoniczne na składowe wektora.

Zadanie 16. Określmy, dla ustalonej formy liniowej $\varphi \in V^*$, podzbiór $H_\varphi := \varphi^{-1}(\{1_\mathbb{K}\}) \subset V$. Udowodnij prawdziwość implikacji

$$\forall_{\varphi,\psi\in V^*} \;:\; (\; H_\varphi = H_\psi \implies \varphi = \psi\;)\;.$$

Zadanie 17. Niechaj $V_1 := \mathbb{R}_2[t]$, $V_2 := \mathbb{R}^2{}_2$ i niech $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Określmy operator $\mathbb{R}$-liniowy $L \in \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V_1,V_2)$ wzorem

$$L \;:\; V_1 \longrightarrow V_2 \;:\; a_0 \triangleright_{V_1} t^0 + a_1 \triangleright_{V_1} t^1 + a_2 \triangleright_{V_1} t^2 \longmapsto a_0 \triangleright_{V_2} \mathbf{1}_{2\times 2} + a_1 \triangleright_{V_2} A + a_2 \triangleright_{V_2} A^2\,.$$

Znajdź

(i) bazę $\ker L$;

(ii) równania spełniane przez wyrazy $x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R}$ macierzy $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{im}\, L$;

(iii) macierz $[L]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_1}$ operatora L względem baz $\mathscr{B}_1 := \{e_1 := t^0, e_2 := t^1, e_3 := t^2\} \subset V_1$ (baza jednomianowa) oraz

$$\mathscr{B}_2 := \left\{ f_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, f_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, f_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, f_4 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dokonaj transformacji macierzy uzyskanej w punkcie (iii) do „bazy Pauliego"

$$\mathscr{B}_2' := \left\{ f_1' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_2' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f_3' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, f_4' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zadanie 18. Odwzorowanie liniowe $L \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[t])$ zadane jest wzorem

$$w \longmapsto (t+1)w' =: L(w),$$

w którym w' oznacza wielomian o funkcji wielomianowej będącej pochodną w. Wyznacz macierz L w bazie jednomianowej $\mathbb{R}_n[t]$, a następnie – $\ker L, \mathrm{im}\, L$ oraz $\mathrm{rk}\, L$. Czy odwzorowanie to jest odwracalne?

Zadanie 19. Niechaj V_n będzie podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej) złożoną z funkcji postaci $L(w) : x \mapsto F_w(\sin x, \cos x)$, zapisanych w terminach funkcji wielomianowej F_w stowarzyszonej z wielomianem $w \in \mathbb{R}_n[s,t]$ stopnia (całkowitego) co najwyżej n w *dwóch* zmiennych. Ustal wymiar $\mathbb{R}$-liniowy V_n. Wybierz (dowolnie) bazę $\mathscr{B}_1$ w $\mathbb{R}_n[s,t]$ oraz bazę $\mathscr{B}_2$ w V_n. Wyznacz macierz $[L]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_1}$ względem tych baz odwzorowania liniowego

$$L : \mathbb{R}_n[s,t] \longrightarrow V_n : w \longmapsto L(w),$$

a nadto – macierz $[D]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_2}$ operatora pochodnej $D \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_n)$.

Zadanie 20. Niechaj $\mathbf{0}$ oznacza trywialną przestrzeń wektorową nad $\mathbb{K}$. Rozważmy **krótki ciąg dokładny** przestrzeni wektorowych:

$$\mathbf{0} \longrightarrow V_1 \xrightarrow{L_1} V_2 \xrightarrow{L_2} V_3 \longrightarrow \mathbf{0},$$

tj. kolekcję przestrzeni wektorowych $\mathbf{0}, V_1, V_2, V_3$ nad $\mathbb{K}$ wraz z odwzorowaniami $\mathbb{K}$-liniowymi między nimi oznaczonymi strzałkami na powyższym diagramie, o tej własności, że dla każdej pary sąsiednich odwzorowań jądro następnika pokrywa się z obrazem poprzednika, np. $\ker L_2 = \mathrm{im}\, L_1$. (Co nam to mówi o L_1 i L_2?)

Udowodnij, że ciąg powyższy **rozszczepia się**, tj. spełniony jest jeden z równoważnych warunków:

(R) Istnieje epimorfizm $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_2, V_1)$ o własności $\rho \circ L_1 = \mathrm{id}_{V_1}$. Odwzorowanie to nazywamy **retrakcją liniową stowarzyszoną z** L_1.

(C) Istnieje monomorfizm $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_3, V_2)$ o własności $L_2 \circ \sigma = \mathrm{id}_{V_3}$. Odwzorowanie to nazywamy **cięciem liniowym stowarzyszonym z** L_2.

Wykaż słuszność następujących stwierdzeń:

(i) Istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni wektorowych $V_2 \cong V_1 \oplus V_3$ (zewnętrzna suma prosta!).

(ii) Diagram

$$\mathbf{0} \longleftarrow V_1 \xleftarrow{\rho} V_2 \xleftarrow{\sigma} V_3 \longleftarrow \mathbf{0}$$

określa krótki ciąg dokładny przestrzeni wektorowych.