Zad.1. Udowodnij, że wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} p_1 & a & a & a & \cdots & a \\ b & p_2 & a & a & \ddots & \vdots \\ b & b & p_3 & a & \ddots & \vdots \\ b & b & b & p_4 & \ddots & a \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & \cdots & \cdots & b & p_n \end{pmatrix} =: A_n$$

ma postać

1) $b \neq a \implies$

$$\det A_n = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a},$$

gdzie $$f(x) := \prod_{i=1}^{n} (p_i - x).$$

2) $b = a \implies$

$$\det A_n = a \sum_{i=1}^{n} f_i(a) + p_n f_n(a),$$

gdzie

$$f_k(x) := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (p_i - x).$$

Wykorzystaj udowodnione tożsamości w celu wyznaczenia

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Zad.2. Udowodnij, że dla $b \neq a$ zachodzi tożsamość

$$\det \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & ab \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Jaką postać wyznacznik ten przyjmuje dla $b = a$?

Zad.3. Wyznacz wielomian charakterystyczny macierzy

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{n-1} \\ -a_0 & a \end{pmatrix}, \quad a := (-a_1, -a_2, \dots, -a_{n-1}).$$

Zad. 4. Niechaj $t \mapsto a_{ij}(t),\ i,j \in \overline{1,n}$ będą różniczkowalnymi funkcjami argumentu $t \in \mathbb{R}$ na pewnym otoczeniu 0. Wykaż słuszność wzoru

$$\frac{d}{dt} \det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_{11}(t) \dots a_{1j-1}(t) & \frac{da_{1j}}{dt}(t) & a_{1j+1}(t) \dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) \dots a_{2j-1}(t) & \frac{da_{2j}}{dt}(t) & a_{2j+1}(t) \dots a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) \dots a_{nj-1}(t) & \frac{da_{nj}}{dt}(t) & a_{nj+1}(t) \dots a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

a następnie użyj go do obliczenia

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(\mathbb{I}_n + tA).$$

Zad. 5. Udowodnij, że wyznacznik dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}(n)$ o własności

$$\forall_{i,j \in \overline{1,n}} : A_{ij} \in \{-1,1\}$$

jest liczbą podzielną przez 2^{n-1}.

Zad. 6. Zdefiniujmy macierze

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ a_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ a_4 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(4)$$

$$B := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(4).$$

Wiedząc, że

$$\det A = 4 = 4 \det B,$$

wyznacz

$$\det(A+B).$$

Zad. 7. W zależności od wyboru ciała bazowego $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

oceń prawdziwość poniższej implikacji odnoszącej się do dowolnej macierzy $A \in \mathbb{K}(n)$:

$$A^2 + \mathbb{I}_n = 0 \implies n \in 2\mathbb{N}.$$

Zad. 8. Niechaj $A \in \mathbb{C}(n)$, przy czym $\begin{cases} AA^T = \mathbb{I}_n \\ \det A < 0 \end{cases}$.

Wyznacz $\det(A + \mathbb{I}_n)$.

Zad. 9. Dla dowolnych macierzy $A, B, C, D \in \mathbb{K}(n)$ o własności

$$ABCD = \mathbb{I}_n$$

udowodnij tożsamości

$$ABCD = DABC = CDAB = BCDA = \mathbb{I}_n.$$

Zad. 10. Niechaj A będzie macierzą spełniającą tożsamość $A^3 = 2\mathbb{I}_n$.

Udowodnij, że macierz $B := A^2 - 2A + 2\mathbb{I}_n$

jest odwracalna.

Zad. 11. Wyznacz odwrotność macierzy

(i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(n)$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

(iii)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv)
$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ i \in \overline{1,n}.$$

Zad. 12. Niechaj $A, B, C, X, Y, Z \in \mathbb{C}(n)$, przy czym zakładamy, że istnieją macierze A^{-1}, C^{-1}.

Wyznacz
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1}, \quad \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & X & Y \\ 0 & \mathbb{I}_n & Z \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}^{-1}.$$

Zad. 13. Wyznacz odwrotność macierzy Vandermonde'a

$$V(a_1, a_2, a_3) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\#\{a_1, a_2, a_3\} = 3.$$

Zad. 14. Zakładając istnienie wszystkich wypisanych poniżej macierzy odwrotnych, udowodnij dla $A, B \in \mathbb{K}(n)$ tożsamość

$$(A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(B^{-1} - A^{-1})^{-1}A^{-1},$$

implikującą — w szczególności —

$$(\mathbb{I}_n + A)^{-1} = \mathbb{I}_n - (A^{-1} + \mathbb{I}_n)^{-1},$$

więc też $\det\left((\mathbb{I}_n + A)^{-1} + (\mathbb{I}_n + A^{-1})^{-1}\right) = 1.$

Zad. 15. Niechaj $A \in \mathbb{K}(m)$, $C \in \mathbb{K}(n)$, $B \in \mathbb{K}^m{}_n$,

$D, E \in \mathbb{K}^n{}_m$.

Udowodnij tożsamości

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & C \end{pmatrix}$$

i wyprowadź wzór na wyznacznik

$$\det\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & E \end{pmatrix}.$$

Zad. 16. Niech $A, B, C, D \in \mathbb{C}(n)$. Udowodnij słuszność implikacji

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

$$[A, C] = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Zad. 17. Rozważamy macierze $A, B_1, B_2, B_3, B_4 \in \mathbb{R}(2)$,

przy czym zakładamy, że $A \neq 0$.

Udowodnij, że ilekroć zachodzi

$$\forall i \in \overline{1,4} : \det(A + B_i) = \det A + \det B_i ,$$

wówczas macierze $B_i , i \in \overline{1,4}$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$.