1. Znajdź rząd, sygnaturę i bazę diagonalizującą następujących form kwadratowych:

   a) $p(x) = x_1x_2 + x_2x_3 - (x_2)^2$, $x \in \mathbb{R}^4$

   b) $q(X) = \mathrm{Tr}\left(X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X^T\right)$, $X \in \mathbb{R}_{2x2}$

   c) $r(v) = v(0)v'(1) - v(1)v'(0)$, $v \in \mathbb{R}_3[\cdot]$

   d) $[s]_{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

2. Znajdź rząd, sygnaturę i bazę diagonalizującą następującej formy kwadratowej na $\mathbb{R}_2[\cdot]$ w zależności od parametru λ:

$$q(f) = \int_{-1}^{1} f(x+\lambda)f(x-\lambda)\mathrm{d}x \tag{1}$$

3. Znajdź operator liniowy F, taki, że $q_2(v) = q_1(Fv)$, dla $q_1(X) = \mathrm{Tr}\, X^2$, $X \in \mathbb{R}_{2x2}$, $q_2(v) = v'(1)v(-1) + v(1)^2$, $v \in \mathbb{R}_2[\cdot]$.

4. W powyższym problemie, dla dowolnych q_1 i q_2, jeżeli operator F istnieje, to dana jest pewna swoboda w jego konstrukcji. Jaki warunek musi spełniać para form kwadratowych, by skonstruowany operator *mógł* być odwracalny? Jaki warunek musi spełniać para form kwadratowych, by skonstruowany operator *musiał* być odwracalny?

5. Dana jest forma kwadratowa na przestrzeni $\mathbb{R}_{2x2}$: $q(X) = \mathrm{Tr}\left(X^T \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} X\right)$. Zapisz macierz tej formy kwadratowej w dowolnie wybranej bazie $\mathbb{R}_{2x2}$. Jakie warunki spełniać muszą rzeczywiste współczynniki x, y, z, t, by podana forma kwadratowa zadawała iloczyn skalarny na $\mathbb{R}_{2x2}$?