

## TEMATY PYTAŃ NA EGZAMIN USTNY Z ALGEBRY IIR

RAFAL R. SUSZEK (KMMF)

- (1) Równoważne opisy rozkładu modułu na sumę prostą podmodułów.
- (2) Wewnętrzna suma prosta skończonej liczby podprzestrzeni przestrzeni wektorowej. Dopełnienie proste podmodułu i podprzestrzeni.
- (3) Operatory rzutu i (zupełne) rodziny rzutów komplementarnych a rozkłady modułu na sumę prostą podmodułów. Rozkład modułu zadawany przez pojedynczy operator rzutu.
- (4) Relacje między przecięciem, sumą algebraiczną i sumą prostą podmodułów. „Kwantowy” bilans wymiarów dla przestrzeni wektorowej i jej podprzestrzeni.
- (5) Warunki istnienia dopełnienia prostego podmodułu. Twierdzenie o istnieniu dopełnienia prostego podprzestrzeni wektorowej.
- (6) Macierze, naturalne operacje algebraiczne na macierzach, pierścień macierzowy.
- (7) Macierzowa realizacja odwzorowania liniowego i elementu modułu nad pierścieniem (wzgl. przestrzeni wektorowej).
- (8) Rola bazy w opisie macierzowym odwzorowań liniowych. Kanoniczna postać odwzorowania liniowego między przestrzeniami wektorowymi.
- (9) Rząd odwzorowania liniowego, rząd macierzy.
- (10) Równania liniowe i ich układy. Struktura zbioru rozwiązań.
- (11) Twierdzenie Kroneckera–Capelliego.
- (12) Odwzorowania wieloliniowe i formy na modułach nad pierścieniami przemiennymi, typy (na podstawie kryterium symetrii) i przykłady. Struktura modułu na ich zbiorach.
- (13) Odwzorowania alternujące a skośnie symetryczne. Struktura odwzorowania alternującego w obecności bazy.
- (14) Wyznacznik macierzy. Twierdzenie o istnieniu wyznacznika.
- (15) Zachowanie wyznacznika względem naturalnych operacji na macierzach (np. mnożenie, transpozycja).
- (16) Twierdzenie o odwracalności macierzy.
- (17) Definicja i podstawowe własności wyznacznika endomorfizmu.
- (18) Zastosowania wyznacznika macierzowego: wzory Cramera, warunki liniowej niezależności kolumn macierzy, istnienie i jednoznaczność rozwiązania (niejednorodnego) układu równań.
- (19) Funkcjonały liniowe, moduł sprzężony (także w przypadku sumy prostej modułów), przykłady.
- (20) Odwzorowania i formy dwuliniowe, odwzorowania stowarzyszone, dwoistości, macierz względem baz.
- (21) Anihilator, podstawowe własności. Związek ze zwyrodnieniem odwzorowania dwuliniowego.
- (22) Warunki istnienia dwoistości dla pary skończonej wymiarowych przestrzeni wektorowych.
- (23) Odwzorowanie sprzężone, podstawowe własności algebraiczne sprzężenia. Izomorfizm kontragredientny. Przykłady.
- (24) Moduł i odwzorowanie dwukrotnie sprzężone.
- (25) Formy współrzędniowe i bazy dualne. Związek z rozkładem elementu modułu oraz odwzorowania liniowego względem baz. Bazy wzajemnie dualne.
- (26) Ślad endomorfizmu i macierzy. Podstawowe własności (w odniesieniu do operacji algebraicznych na pierścieniach endomorfizmów i macierzy).
- (27) Formy  $J$ -pół- i półtoraliniowe oraz  $\varepsilon$ -hermitowskie. Przestrzeń  $J$ -sprzężona. Odwzorowania stowarzyszone. Przestrzeń  $\varepsilon$ -hermitowskie.
- (28) Morfizmy przestrzeni  $\varepsilon$ -hermitowskich. Grupa unitarna, ortogonalna i symplektyczna.
- (29) Macierz formy  $\varepsilon$ -hermitowskiej i jej zachowanie przy zmianie bazy. Formuły polaryzacyjne.
- (30) Zewnętrzna suma prosta przestrzeni  $\varepsilon$ -hermitowskich. Ortogonalność i suma ortogonalna. Baza ortogonalna.
- (31) Dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni wektorowej.
- (32) Twierdzenie o bazie ortogonalnej formy hermitowskiej.

- (33) Postać kanoniczna macierzy hermitowskiej.
- (34) Ortogonalizacja Grama–Schmidta.
- (35) Formy hermitowskie (pół)określone. Nierówność Schwarz’a. Warunki niezwyrodnienia. Iloczyn skalarny.
- (36) Sylwestera prawo bezwładności. Sygnatura formy hermitowskiej.
- (37) Formy i przestrzenie kwadratowe. Związek z symetrycznymi formami dwuliniowymi. Diagonalizacja według Lagrange’a. Wzów Sylwestera–Jacobiego.
- (38) Realizacja pierścienia wielomianów (o współczynnikach z ciała bazowego) na dziedzinie endomorfizmu. Typy realizacji. Podprzestrzenie niezmiennicze. Wartości, wektory i przestrzenie własne. Widmo i baza własna.
- (39) Wielomian charakterystyczny a wielomian minimalny endomorfizmu. Niezmienniki podstawowe. Twierdzenie Cayleya–Hamiltona.
- (40) Widmo endomorfizmu a jego wielomian charakterystyczny. Algebraiczny sens krotności pierwiastków. Wynik ewaluacji na endomorfizmie funkcji analitycznej na otoczeniu jego widma.
- (41) Podprzestrzenie redukujące dla endomorfizmu. Warunki niezmienniczości względem endomorfizmu rozkładu przestrzeni na sumę prostą jej podprzestrzeni i jej konsekwencje.
- (42) Przestrzenie pierwiastkowe endomorfizmu. Rozkład przestrzeni wektorowej na sumę prostą tychże.
- (43) Klatki jordanowskie i  $\chi$ -serie. Twierdzenie o jordanowskiej postaci normalnej endomorfizmu.
- (44) Endomorfizmy nilpotentne i diagonalizowalne – równoważne opisy. Rozkład widmowy endomorfizmu diagonalizowalnego.
- (45) Twierdzenie o rozkładzie endomorfizmu na część diagonalizowalną i nilpotentną.
- (46) Struktura algebraiczna i metryczna przestrzeni unitarnej. Nierówność Minkowskiego. Bazy ortonormalne.
- (47) Antyizomorfizm Fréchet’a–Riesza. Indukowana struktura unitarna na przestrzeni sprzężonej.
- (48) Odwzorowanie hermitowsko sprzężone. Podstawowe własności operacji sprzężenia, jądro i obraz odwzorowania hermitowsko sprzężonego. Podstawowe typy endomorfizmów przestrzeni unitarnej i ich widma.
- (49) Równoważne opisy endomorfizmu normalnego i jego podstawowe własności. Twierdzenie widmowe dla endomorfizmu normalnego zespolonej przestrzeni wektorowej i jego konsekwencje.