

# TEMATY PYTAŃ NA EGZAMIN USTNY Z ALGEBRY IR

RAFAL R. SUSZEK (KMMF)

## 1. POZIOM ELEMENTARNY

- (1) Struktura algebraiczna, jej podstruktury i morfizmy (definicja ogólna, przykłady).
- (2) Podstawowe struktury algebraiczne: grupa, pierścień i ciało (definicja, przykłady).
- (3) Ciało liczb zespolonych – elementy konstrukcji.
- (4) Prezentacje: kartezjańska i trygonometryczna liczb zespolonych.
- (5) Proste operacje na liczbach zespolonych: moduł i sprzężenie zespolone.
- (6) Liczby zespolone o module jednostkowym – struktura algebraiczna i geometria.
- (7) Argument liczby zespolonej i pierwiastek.
- (8) Pierścień, dziedzina całkowitości i dziedzina euklidesowa. Pierścień endomorfizmów grupy przemiennej jako przykład pierścienia (nieprzemiennej).
- (9) Pierścień wielomianów o współczynnikach z ciała – elementy konstrukcji, stopień wielomianu.
- (10) Relacja podzielności i jej elementarne własności.
- (11) Treść Podstawowego Twierdzenia Algebry.
- (12) Grupy – aksjomatyka, przykłady, notacje, homomorfizmy.
- (13) Grupa automorfizmów grupy, automorfizmy wewnętrzne.
- (14) Jądro i obraz homomorfizmu grup.
- (15) Warstwy względem podgrupy, indeks podgrupy, dzielnik normalny, grupa ilorazowa.
- (16) Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie.
- (17) Działanie i realizacja grupy na zbiorze – definicja, typy, odwzorowania ekwiwariantne, stabilizatory i orbity, przykłady.
- (18) Grupa permutacji, grupa alternująca, rząd, nośnik, orbita, typ i znak permutacji.
- (19) Struktura modułu nad pierścieniem i przestrzeni wektorowej, podmoduł i podprzestrzeń, podstawowe własności, odwzorowania liniowe, przykłady.
- (20) Kombinacja liniowa, zbiór generujący, powłoka liniowa, liniowa niezależność, baza, moduł wolny, rząd modułu i wymiar przestrzeni wektorowej.
- (21) Wewnętrzna suma prosta skończonej liczby podprzestrzeni przestrzeni wektorowej. Dopelnienie proste podmodułu i podprzestrzeni.
- (22) Operatory rzutu i rodziny rzutów komplementarnych. Rozkład modułu zadawany przez pojedynczy operator rzutu.

## 2. POZIOM ZASADNICZY

- (1) Relacje między ciałem liczb zespolonych a ciałem liczb rzeczywistych.
- (2) Podstawowe własności modułu i sprzężenia zespolonego.
- (3) Interpretacja geometryczna struktury algebraicznej na zbiorze liczb zespolonych.
- (4) Twierdzenie o rozkładzie biegunowym liczby zespolonej.
- (5) Podstawowe własności algebraiczne odwzorowań  $\text{Arg}$  i  $\sqrt{\cdot}$ .
- (6) Niejednoznaczność argumentu liczby zespolonej i pierwiastka.
- (7) Związek między wielomianami a funkcjami wielomianowymi, zera wielomianu i ich krotności, homomorfizm ewaluacji.
- (8) Pierścień wielomianów o współczynnikach z ciała  $\mathbb{K}$  jako moduł, zanurzenie  $\mathbb{K}$  w  $\mathbb{K}[t]$ .
- (9) Podstawowe własności algebraiczne odwzorowania  $\text{deg}$ .
- (10) Algorytm Euklidesa.
- (11) Twierdzenie Bezouta i jego konsekwencje.
- (12) Własności ciała algebraicznie domkniętego.
- (13) Proste konsekwencje domkniętości algebraicznej ciała liczb zespolonych.
- (14) Własności elementu neutralnego i odwrotnego do danego w grupie.
- (15) Definicja i własności homomorfizmu grup.

- (16) Warstwy jako klasy abstrakcji i proste tego konsekwencje, twierdzenie Lagrange'a.
- (17) Ciągi dokładne grup – definicja, podstawowe typy, przykłady.
- (18) Uniwersalność rzutu kanonicznego i kanoniczny rozkład homomorfizmu.
- (19) Realizacja grupy na zbiorze jako homomorfizm.
- (20) Odpowiedniość między działaniami lewo- i prawostronnymi.
- (21) Orbity działania grupy jako klasy abstrakcji, twierdzenie o klasyfikacji orbit i jego prosta konsekwencja dla zbiorów z działaniem przechodnim.
- (22) Permutacje o nośnikach rozłącznych, struktura orbity.
- (23) Rozkład permutacji na cykle rozłączne oraz transpozycje.
- (24) Grupy i moduły ilorazowe.
- (25) Grupa odwzorowań  $R$ -liniowych, pierścień endomorfizmów modułu oraz grupa automorfizmów modułu. Działanie pierścienia na odwzorowaniach  $R$ -liniowych.
- (26) Struktura modułu na powłoce liniowej. Charakterystyka zbiorów liniowo niezależnych i baz w ogólnym module nad pierścieniem i w przestrzeni wektorowej. Istnienie bazy jako wyróżnik przestrzeni wektorowych (przykłady).
- (27) Lemat Steinitza o wymianie.
- (28) Izomorfizm przestrzeni wektorowych a ich wymiar.
- (29) Zupełne komplementarne rodziny rzutów a rozkłady modułu na sumę prostą podmodułów.

### 3. POZIOM ZAAWANSOWANY

- (1) Trzecie twierdzenie o izomorfizmie.
- (2) Indukcja normalnych ciągów dokładnych przez homomorfizmy.
- (3) Ekwiwariantne izomorfizmy. Indukowane działania wierne. Relacje między stabilizatorami elementów orbity.
- (4) Lemat Cauchy'ego–Frobeniusa.
- (5) Modele zbiorów z działaniem przechodnim wzgl. wolnym, czyli twierdzenie o ekwiwariantnym izomorfizmie zbiorów z działaniem.
- (6) Stałość typu permutacji na klasach sprzężoności w grupie symetrycznej.
- (7) Parzystość permutacji.
- (8) Twierdzenie o istnieniu bazy przestrzeni wektorowej.
- (9) Równoliczność baz a izomorfizm modułów.
- (10) Bilans wymiarów dla przestrzeni wektorowej i jej podprzestrzeni.
- (11) Produkt i suma prosta modułów nad pierścieniem (bez ogólnej dyskusji struktur uniwersalnych). Suma prosta podmodułów.
- (12) Równoważne opisy rozkładu modułu na sumę prostą podmodułów.
- (13) Relacje między przecięciem, sumą algebraiczną i sumą prostą podmodułów. „Kwantowy” bilans wymiarów dla przestrzeni wektorowej i jej podprzestrzeni.
- (14) Warunki istnienia dopełnienia prostego podmodułu. Twierdzenie o istnieniu dopełnienia prostego podprzestrzeni wektorowej.

### 4. ZAGADNIENIA NADPROGRAMOWE

- (1) Rozszerzenia epimorfizmów a iloczyny półproste.
- (2) Twierdzenie o jednostronnej odwracalności homomorfizmu i jego związek z konstrukcją sumy prostej modułów nad pierścieniem.
- (3) Zbiory generujące dla  $\mathfrak{S}_n$  i  $\mathfrak{A}_n$ . Grupa symetryczna jako grupa abstrakcyjna i jej związek z grupą warkoczową.
- (4) Ciągi dokładne grup i modułów. Zastosowania. Twierdzenia o izomorfizmie, indukcja normalnych ciągów dokładnych przez homomorfizmy, rozszczepialność modułów.
- (5) Produkt i koprodukt jako struktury uniwersalne. Przykłady (w tym przykład z kategorii modułów nad pierścieniem).