

ALGEBRA GRUPOWA, KATEGORYCZNIE

RAFAŁ R. SUSZEK

STRESZCZENIE. W niniejszych notatkach prezentujemy zwięzłą, acz kompletną dyskusję struktury funktorialnego przyporządkowania grupom (skończonym) ich $\star$ -algebr grupowych.

Przedmiotem naszych rozważań będzie naturalna struktura algebraiczna na przestrzeni funkcji na grupie skończonej

$$(\Gamma, ., \text{Inv}, \bullet \mapsto e), \quad |\Gamma| < \infty$$

(symbol operacji binarnej $.$ będziemy na ogół pomijać) o wartościach w ciele liczb zespolonych

$$(\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2, +, \cdot, -(\cdot), (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto (0, 0), \bullet \mapsto (1, 0)).$$

1. REKWIZYTY

Zacniemy od przypomnienia elementarnych faktów z teorii reprezentacji grup skończonych, przy czym przez reprezentację grupy Γ na przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowej $(\mathcal{V}, +_{\mathcal{V}}, -_{\mathcal{V}}(\cdot), \bullet \mapsto 0_{\mathcal{V}}; \triangleright_{\mathcal{V}})$ będziemy rozumieć homomorfizm grup

$$\rho \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\Gamma, \text{GL}(\mathcal{V}; \mathbb{C})).$$

- (1) **Każda skończeniowymiarowa reprezentacja ρ grupy skończonej Γ jest unitaryzowalna poprzez redefinicję iloczynu skalarnego $(\cdot | \cdot)$ na jej nośniku $\mathcal{V}$ indukowaną przez tę reprezentację,**

$$(\cdot | \cdot)_{\rho} := (\cdot | \cdot) \circ \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(\gamma) \times \rho(\gamma).$$

Na tej podstawie będziemy zakładać, że na każdej rozpatrywanej poniżej przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowej będącej nośnikiem takiej właśnie reprezentacji został wybrany iloczyn skalarny, względem którego reprezentacja ta jest unitarna. Iloczyn taki pozwala wybrać w $\mathcal{V}$ bazę ortonormalną

$$\{e_{\rho, i}\}_{i \in \overline{1, \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}}}, \quad (e_{\rho, i} | e_{\rho, j}) = \delta_{i, j},$$

dla której

$$e_{\rho, i}^* \equiv (e_{\rho, i} | \cdot).$$

Wykorzystując kanoniczny izomorfizm skończeniowymiarowych przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowych

$$\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}) \cong \mathcal{V}^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{V},$$

otrzymujemy stąd bazę

$$(1.1) \quad \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}) = \langle e_{\rho, i}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\rho, j} \mid i, j \in \overline{1, \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}} \rangle_{\mathbb{C}},$$

w której

$$\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}) \ni \chi = \sum_{i, j=1}^{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}} \langle e_{\rho, j}^*, \chi(e_{\rho, i}) \rangle \dot{\triangleright} (e_{\rho, i}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\rho, j}) =: \sum_{i, j=1}^{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}} \chi_{\rho, ji} \dot{\triangleright} (e_{\rho, i}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\rho, j}),$$

przy czym $\dot{\triangleright}$ symbolizuje (punktowe) działanie $\mathbb{C}$ na $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V})$

- (2) **Przestrzeń $\mathbb{C}$ -liniowa**

$$(\mathbb{C}^{\Gamma}, \dot{+}, \dot{-}(\cdot), \bullet \mapsto 0; \odot)$$

funkcji na Γ o wartościach zespolonych (ze zdefiniowanymi punktowo: sumą $\dot{+}$, przeciwnością $\dot{-}(\cdot)$ i działaniem ciała skalarów $\odot$) jest wyposażona w naturalną strukturę hermitowską

$$(\cdot | \cdot)_{\Gamma} : \mathbb{C}^{\Gamma} \times \mathbb{C}^{\Gamma} \rightarrow \mathbb{C} : (F, G) \mapsto \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{F(g)} \cdot G(g).$$

- (3) Zbiór $\widehat{\Gamma}$ klas Γ -ekwiwariantnego izomorfizmu (tj. równoważności) reprezentacji nieprzywiedlnych grupy Γ jest równoliczny ze zbiorem

$$\Gamma/\text{Ad } \Gamma = \{ \text{Ad}_\Gamma(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \}$$

klas sprzężoności Γ , więc – w szczególności – skończony, co wynika z tego, że stwarzyszane z klasami $[\pi]_\sim \in \widehat{\Gamma}$, $\pi \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\Gamma, \text{GL}(\mathcal{V}_\pi; \mathbb{C}))$ charaktery

$$\chi_{[\pi]_\sim} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : \gamma \mapsto \text{tr}_{\mathcal{V}_\pi}(\pi(\gamma))$$

tworzą bazę podprzestrzeni funkcji klas

$$\mathbb{C}_{\text{kl}}^\Gamma = \{ F \in \mathbb{C}^\Gamma \mid \forall \gamma \in \Gamma : \text{Ad}_\gamma^* F = F \}$$

ortonormalną względem $(\cdot | \cdot)_\Gamma$,

$$(\chi_{[\pi_1]_\sim} | \chi_{[\pi_2]_\sim})_\Gamma = \delta_{[\pi_1]_\sim, [\pi_2]_\sim}.$$

Konstatacja ta nadaje sens rozmaitym wyrażeniom wypisywanym poniżej, w których pojawia się suma wyrażen indeksowanych elementami $\widehat{\Gamma}$.

- (4) Wymiary $d_\pi := \dim \pi$ reprezentacji nieprzywiedlnych Γ spełniają tożsamość

$$(1.2) \quad \sum_{[\pi]_\sim \in \widehat{\Gamma}} d_\pi^2 = |\Gamma|.$$

- (5) Rodzina funkcji

$$\{ \pi_{ij} := \sqrt{d_\pi} (e_{\pi,i} | \pi(\cdot) e_{\pi,j})_\pi \in \mathbb{C}^\Gamma \mid i, j \in \overline{1, d_\pi}, [\pi]_\sim \in \widehat{\Gamma} \}$$

tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{C}^\Gamma$ ortonormalną względem $(\cdot | \cdot)_\Gamma$,

$$(\pi_{ij} | \pi'_{kl})_\Gamma = \delta_{[\pi]_\sim, [\pi']_\sim} \delta_{i,k} \delta_{j,l}.$$

- (6) Operator P_π rzutu ortogonalnego na składnik $\bigoplus_{i=1}^{m_\pi} \mathcal{V}_\pi$, $m_\pi \in \mathbb{N}$ w sumie prostej

$$\mathcal{V} := \bigoplus_{[\pi]_\sim \in \widehat{\Gamma}} \bigoplus_{i=1}^{m_\pi} \mathcal{V}_\pi,$$

będącej nośnikiem reprezentacji

$$\pi_\oplus = \bigoplus_{[\pi]_\sim \in \widehat{\Gamma}} \bigoplus_{i=1}^{m_\pi} \pi$$

jest dany wzorem

$$(1.3) \quad P_\pi = \frac{d_\pi}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{\chi_{[\pi]_\sim}(\gamma)} \dot{\pi}_\pi(\gamma).$$

2. KONSTRUKCJA WŁAŚCIWA

Punktem wyjścia do szczegółowej dyskusji struktury algebraicznej na zbiorze $\mathbb{C}^\Gamma$ jest wygodny wybór bazy – tę możemy przyjąć w postaci

$$\mathbb{C}^\Gamma = \langle \delta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle, \quad \delta_\gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : \gamma' \mapsto \begin{cases} (1, 0) \equiv 1 & \text{dla } \gamma' = \gamma \\ (0, 0) \equiv 0 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

zauważywszy, że dowolna funkcja $F \in \mathbb{C}^\Gamma$ spełnia tożsamość

$$F = \sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma) \odot \delta_\gamma.$$

Obok standardowego punktowego iloczynu funkcji na $\mathbb{C}^\Gamma$ można określić dodatkową operację binarną, a mianowicie

Definicja 2.1. W przyjętych wcześniej oznaczeniach **splot funkcji** (na grupie skończonej) to odwzorowanie

$$\star : \mathbb{C}^\Gamma \times \mathbb{C}^\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^\Gamma : (F, G) \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma) \odot \ell_{\gamma^{-1}}^* G,$$

zadane w terminach lewego działania regularnego Γ (na sobie),

$$\ell : \Gamma \rightarrow \text{Aut}_{\text{Grp}}(\Gamma) : \gamma \mapsto \gamma \cdot,$$

czyli – mówiąc wprost –

$$F \star G(\gamma) = \sum_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha) \cdot G(\alpha^{-1}\gamma) \equiv \sum_{\alpha \in \Gamma} F(\gamma\alpha^{-1}) \cdot G(\alpha).$$

◇

O tym, jak naturalną jest wprowadzona powyżej operacja algebraiczna, przekonuje

Stwierdzenie 2.2. *Splot funkcji indukuje na zbiorze generującym*

$$\Delta^\Gamma := \{\delta_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathbb{C}^\Gamma$$

strukturę grupy kanonicznie izomorficznej z grupą Γ .

Dowód. Zauważmy przede wszystkim, że działanie $\star$ nie wyprowadza poza Δ^Γ ,

$$\forall_{\gamma \in \Gamma} : \delta_\alpha \star \delta_\beta(\gamma) = \sum_{\theta \in \Gamma} \delta_\alpha(\gamma\theta^{-1}) \cdot \delta_\beta(\theta) = \delta_\alpha(\gamma\beta^{-1}) \equiv \delta_{\alpha\beta}(\gamma) \iff \delta_\alpha \star \delta_\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

Z powyższej równości wynikają natychmiast tożsamości

$$\delta_\gamma \star \delta_e = \delta_\gamma = \delta_e \star \delta_\gamma,$$

które identyfikują funkcję δ_e jako element neutralny operacji $\star$. Implikuje ona także relację

$$\delta_\gamma^{-1} = \delta_{\gamma^{-1}}.$$

Ostatecznie zatem stwierdzamy istnienie postulowanej struktury grupy

$$(\Delta^\Gamma, \star, \text{Inv}^*, \bullet \mapsto \delta_e)$$

i bez trudu wskazujemy izomorfizm grup, o którym mowa w tezie stwierdzenia,

$$\delta : \Gamma \xrightarrow{\cong} \Delta^\Gamma : \gamma \mapsto \delta_\gamma$$

□

Udokumentowawszy w ten (elementarny) sposób naturalność wprowadzonej uprzednio całkowicie *ad hoc* operacji splotu, możemy następnie sformułować

Definicja 2.3. W przyjętych wcześniej oznaczeniach **algebra splotowa** na grupie Γ to unitalna algebra łączna nad ciałem $\mathbb{C}$ określona jako

$$(\mathbb{C}(\Gamma) \equiv \mathbb{C}^\Gamma, +, \cdot, \bullet \mapsto 0; \odot; \star, \bullet \mapsto \delta_e).$$

◇

Nie jest to jeszcze właściwy obiekt naszych dalszych rozważań – ten otrzymujemy wykorzystując istnienie dwóch antyinvolucji: Inv na Γ i sprzężenia zespolonego na $\mathbb{C}$ do dalszego wzbogacenia struktury algebraicznej. Zdefiniujemy w tym celu jawnie anty- $\mathbb{C}$ -liniowe odwzorowanie

$$\dagger : \mathbb{C}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}(\Gamma) : F \mapsto \overline{\text{Inv}^* F},$$

przy czym używamy tu oznaczenia $\overline{F}(\gamma) := \overline{F(\gamma)}$. Łatwo widzieć, że jest ono antyinvolucją,

$$\begin{aligned} (F \star G)^\dagger(\gamma) &\equiv \overline{(F \star G)(\gamma^{-1})} = \sum_{\alpha \in \Gamma} \overline{F(\gamma^{-1}\alpha^{-1})} \cdot \overline{G(\alpha)} \equiv \sum_{\alpha\gamma \in \Gamma} \overline{F(\gamma^{-1}\alpha^{-1})} \cdot \overline{G(\alpha\gamma\gamma^{-1})} \\ &= \sum_{\beta \in \Gamma} F^\dagger(\beta) \cdot G^\dagger(\gamma\beta^{-1}) \equiv (G^\dagger \star F^\dagger)(\gamma). \end{aligned}$$

Warunek niezwyrodnienia dla $F \neq 0$ sprawdzamy w rachunku

$$(F^\dagger \star F)(e) = \sum_{\gamma \in \Gamma} F^\dagger(e\gamma^{-1}) \cdot F(\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{F(\gamma)} \cdot F(\gamma) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma} |F(\gamma)|^2 \neq 0 \implies F^\dagger \star F \neq 0.$$

Jako wniosek z naszych ostatnich rachunków możemy sformułować kluczową

Definicja 2.4. W przyjętych wcześniej oznaczeniach **algebra grupowa** na grupie Γ to unitalna $\star$ -algebra łączna nad ciałem $\mathbb{C}$ powstała z algebry splotowej przez wyróżnienie antyinvolucji $\dagger$, tj. dana w postaci

$$(\mathbb{C}(\Gamma), +, \cdot, \bullet \mapsto 0; \odot; \star, \bullet \mapsto \delta_e; \dagger).$$

◇

O naturalności i strukturalnym charakterze konstrukcji algebry grupowej zaświadcza

Twierdzenie 2.5. W przyjętych wcześniej oznaczeniach przyporządkowanie $\Gamma \mapsto \mathbb{C}(\Gamma)$ ma charakter funktorialny, tzn. istnieje funktor kowariantny

$$\mathbb{C}(\cdot) : \text{Grp}^{<\infty} \rightarrow \star \text{Alg}_{\mathbb{C}}$$

którego składowa obiektowa realizuje rzeczzone przyporządkowanie.

Dowód. W pierwszej kolejności dowolnemu homomorfizmowi grup (skończonych) $\chi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ przypiszemy $\star$ -homomorfizm $\mathbb{C}(\chi) : \mathbb{C}(\Gamma_1) \rightarrow \mathbb{C}(\Gamma_2)$ odnośnych algebr grupowych. Ten jest w szczególności odwzorowaniem $\mathbb{C}$ -liniowym, wystarczy przeto zapostulować jego postać na bazie,

$$\mathbb{C}(\chi)(\delta_\gamma) := \delta_{\chi(\gamma)},$$

a następnie sprawdzić, czy otrzymany tą drogą jedyny homomorfizm przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowych (oznaczany przez nas tym samym symbolem)

$$\mathbb{C}(\chi)(F) = \sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma) \odot \delta_{\chi(\gamma)}$$

spełnia tożsamość

$$\mathbb{C}(\chi)(F \star_1 G) = \mathbb{C}(\chi)(F) \star_2 \mathbb{C}(\chi)(G).$$

O tym, że tak w istocie jest, przekonujemy się porównując rezultat poniższego rachunku

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\chi)(F \star_1 G)(\gamma) &= \sum_{\alpha \in \Gamma_1} (F \star_1 G)(\alpha) \cdot \delta_{\chi(\alpha)}(\gamma) = \sum_{\alpha \in \chi^{-1}(\{\gamma\})} (F \star_1 G)(\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \chi^{-1}(\{\gamma\})} \sum_{\beta \in \Gamma_1} F(\alpha\beta^{-1}) \cdot G(\beta) \end{aligned}$$

z tym otrzymanym w rachunku

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}(\chi)(F) \star_2 \mathbb{C}(\chi)(G))(\gamma) &= \sum_{\alpha, \beta \in \Gamma_1} F(\alpha) \cdot G(\beta) \cdot (\delta_{\chi(\alpha)} \star_2 \delta_{\chi(\beta)})(\gamma) = \sum_{\alpha, \beta \in \Gamma_1} F(\alpha) \cdot G(\beta) \cdot \delta_{\chi(\alpha\beta)}(\gamma) \\ &\equiv \sum_{\beta \in \Gamma_1} \sum_{\alpha \beta \in \Gamma_1} F(\alpha\beta\beta^{-1}) \cdot G(\beta) \cdot \delta_{\chi(\alpha\beta)}(\gamma) \\ &= \sum_{\beta \in \Gamma_1} \sum_{\alpha \beta \in \chi^{-1}(\{\gamma\})} F(\alpha\beta\beta^{-1}) \cdot G(\beta), \end{aligned}$$

w którym przywołaliśmy Stw. 2.2. Skoro też

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\chi)(F^{\sharp_1})(\gamma) &= \sum_{\alpha \in \Gamma_1} F^{\sharp_1}(\alpha) \cdot \delta_{\chi(\alpha)}(\gamma) = \sum_{\alpha \in \chi^{-1}(\{\gamma\})} \overline{F(\alpha^{-1})} \equiv \sum_{\alpha^{-1} \in \chi^{-1}(\{\gamma^{-1}\})} \overline{F(\alpha^{-1})} \\ &= \sum_{\beta \in \Gamma_1} \overline{F(\beta)} \cdot \delta_{\chi(\beta)}(\gamma^{-1}) \equiv \overline{\sum_{\beta \in \Gamma_1} F(\beta) \cdot \delta_{\chi(\beta)}(\gamma^{-1})} = \mathbb{C}(\chi)(F)^{\sharp_2}(\gamma), \end{aligned}$$

to jest jasnym, że $\mathbb{C}(\chi)$ jest $\star$ -homomorfizmem algebr grupowych. Wystarczy teraz upewnić się, że przyporządkowanie $\chi \mapsto \mathbb{C}(\chi)$ ma następujące własności

$$(2.1) \quad \mathbb{C}(\chi_2 \circ \chi_1) = \mathbb{C}(\chi_2) \circ \mathbb{C}(\chi_1), \quad \mathbb{C}(\text{id}_\Gamma) = \text{id}_{\mathbb{C}(\Gamma)},$$

z których pierwsza została zapisana dla dowolnych $\chi_n \in \text{Hom}_{\text{Grp}^{<\infty}}(\Gamma_n, \Gamma_{n+1})$, $n \in \{1, 2\}$. Oba sprawdzamy bez trudu na bazie dziedziny,

$$\mathbb{C}(\chi_2 \circ \chi_1)(\delta_\gamma) = \delta_{(\chi_2 \circ \chi_1)(\gamma)} \equiv \delta_{\chi_2(\chi_1(\gamma))} = \mathbb{C}(\chi_2)(\delta_{\chi_1(\gamma)}) = \mathbb{C}(\chi_2)(\mathbb{C}(\chi_1)(\delta_\gamma)) \equiv (\mathbb{C}(\chi_2) \circ \mathbb{C}(\chi_1))(\delta_\gamma),$$

$$\mathbb{C}(\text{id}_\Gamma)(\delta_\gamma) = \delta_{\text{id}_\Gamma(\gamma)} = \delta_\gamma \equiv \text{id}_{\mathbb{C}(\Gamma)}(\delta_\gamma).$$

Odwzorowanie $\mathbb{C}(\cdot)$ jest zatem – w istocie – funktorem kowariantnym. $\square$

Zwięzłe wysłownienie strukturalnych własności przyporządkowania algebr grupowych grupom wymagało od nas użycia konstrukcji z teorii kategorii stanowiącej naturalną abstrakcję pojęcia reprezentacji grupy, czyli funktora. Wychodząc od tej obserwacji możemy antycypować, dokąd zaprowadzi nas próba uzwarzenia, w tym samym duchu kategorialnym, opisu mechanizmu indukcji reprezentacji algebr grupowych z reprezentacji odnośnych grup – ten szlak rozumowania zaprowadzi nas nieuchronnie do kategorii, której obiektami będą kategorie (takie jak kategoria reprezentacji unitarnych danej grupy) i której morfizmami będą funktory, o relacjach ustalanych za pośrednictwem odwzorowań naturalnych. Substancji do wypowiedzianych tu skojarzeń dostarcza wykład [Sus15].

3. REPREZENTACJE

Tytułem przygotowania bazy pojęciowej pod dyskusję mechanizmu indukcji reprezentacji algebry grupowej z reprezentacji odnośnej grupy wyabstrahujemy z definicji unitarnej reprezentacji grupy strukturę pewnego szczególnego funktora kontrawariantnego.

Definicja 3.1. W przyjętych wcześniej oznaczeniach **kategoria reprezentacji unitarnych grupy** Γ to (mała) kategoria $\text{URep}(\Gamma)$, której obiektami są reprezentacje unitarne Γ , morfizmami zaś – Γ -ekwiwariantne izometrie między ich nośnikami.

◇

Analogicznie określamy

Definicja 3.2. **Kategoria *-reprezentacji *-algebry** $\mathfrak{A}$ to (mała) kategoria $\star\text{Rep}(\mathfrak{A})$, której obiektami są *-reprezentacje $\mathfrak{A}$, morfizmami zaś – $\mathfrak{A}$ -ekwiwariantne izometrie między ich nośnikami.

◇

Możemy już teraz wyartykułować ważne stwierdzenie porządkujące naszą dotychczasową wiedzę.

Stwierdzenie 3.3. W przyjętych wcześniej oznaczeniach przyporządkowania $\Gamma \mapsto \text{URep}(\Gamma)$ i $\mathfrak{A} \mapsto \star\text{Rep}(\mathfrak{A})$ mają charakter funktorialny, tj. istnieją funktory kontrawariantne

$$\text{URep} : \text{Grp}^{<\infty} \rightarrow \text{Cat}, \quad \star\text{Rep} : \star\text{Alg}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Cat}$$

z kategorii grup skończonych wzgl. *-algebr nad $\mathbb{C}$ w kategorię Cat wszystkich kategorii¹, których składowe obiektywne realizują odnośne przyporządkowania.

Dowód. W ramach konstruktywnego dowodu tezy stwierdzenia stowarzyszymy z dowolnymi homomorfizmami: $\chi \in \text{Hom}_{\text{Grp}^{<\infty}}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ (grup skończonych) oraz $\xi \in \text{Hom}_{\star\text{Alg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ (*-algebr) morfizmy w Cat , czyli funktory

$$\text{URep}(\chi) : \text{URep}(\Gamma_2) \rightarrow \text{URep}(\Gamma_1)$$

oraz – odpowiednio –

$$\star\text{Rep}(\xi) : \star\text{Rep}(\mathfrak{A}_2) \rightarrow \star\text{Rep}(\mathfrak{A}_1),$$

i to w taki sposób, aby homomorfizmom identycznościowym id_{Γ} wzgl. $\text{id}_{\mathfrak{A}}$ były przyporządkowane (endo)funktory identycznościowe $\text{id}_{\text{URep}(\Gamma)}$ wzgl. $\text{id}_{\star\text{Rep}(\mathfrak{A})}$ oraz by dla dowolnych par homomorfizmów $\chi_n \in \text{Hom}_{\text{Grp}^{<\infty}}(\Gamma_n, \Gamma_{n+1})$, $n \in \{1, 2\}$ wzgl. $\xi_n \in \text{Hom}_{\star\text{Alg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n+1})$, $n \in \{1, 2\}$ zachodziły relacje

$$\text{URep}(\chi_2 \circ \chi_1) = \text{URep}(\chi_1) \diamond \text{URep}(\chi_2)$$

wzgl.

$$\star\text{Rep}(\xi_2 \circ \xi_1) = \star\text{Rep}(\xi_1) \diamond \star\text{Rep}(\xi_2),$$

w których zapisie użyliśmy symbolu $\diamond$ dla oznaczenia złożenia funktorów. Postulujemy przeto, dla dowolnych $\rho_i \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\Gamma_2, \text{U}(\mathcal{V}_i, \Phi_i))$ i $R_i \in \text{Hom}_{\star\text{Alg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{A}_2, \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_i, \Phi_i))$, $i \in \{1, 2\}$ (dla pewnych form hermitowskich Φ_i na odnośnych przestrzeniach $\mathbb{C}$ -liniowych $\mathcal{V}_i$)

$$(\mathcal{V}_i, \rho_i) \mapsto (\mathcal{V}_i, \rho_i \circ \chi) \quad (\text{składowa obiektyowa})$$

$$\text{URep}(\chi) : \left(\begin{array}{c} (\mathcal{V}_1, \rho_1) \xrightarrow{\psi} (\mathcal{V}_2, \rho_2) \\ (\forall_{\gamma \in \Gamma_2} : \psi \circ \rho_1(\gamma) = \rho_2(\gamma) \circ \psi) \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c} (\mathcal{V}_1, \rho_1 \circ \chi) \xrightarrow{\psi} (\mathcal{V}_2, \rho_2 \circ \chi) \\ (\text{składowa morfizmowa}) \end{array} \right),$$

oraz

$$(\mathcal{V}_i, R_i) \mapsto (\mathcal{V}_i, R_i \circ \xi) \quad (\text{składowa obiektyowa})$$

$$\star\text{Rep}(\xi) : \left(\begin{array}{c} (\mathcal{V}_1, R_1) \xrightarrow{\zeta} (\mathcal{V}_2, R_2) \\ (\forall_{X \in \mathfrak{A}_2} : \zeta \circ R_1(X) = R_2(X) \circ \zeta) \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c} (\mathcal{V}_1, R_1 \circ \xi) \xrightarrow{\zeta} (\mathcal{V}_2, R_2 \circ \xi) \\ (\text{składowa morfizmowa}) \end{array} \right).$$

¹Jej obiektami są kategorie, morfizmami zaś – funktorialne między nimi odwzorowania.

Jako że, w rzeczy samej, $\rho_i \circ \chi \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\Gamma_1, \text{U}(\mathcal{V}_i, \Phi_i))$ (złożenie izometrii jest izometrią) i $R_i \circ \xi \in \text{Hom}_{\star\text{Alg}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{A}_1, \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_i, \Phi_i))$ (złożenie $\star$ -morfizmów jest $\star$ -morfizmem), a nadto

$$\forall_{\gamma \in \Gamma_1} : \psi \circ (\rho_1 \circ \chi)(\gamma) = (\rho_2 \circ \chi)(\gamma) \circ \psi, \quad \forall_{X \in \mathfrak{A}_1} : \zeta \circ (R_1 \circ \xi)(X) = (R_2 \circ \xi)(X) \circ \zeta,$$

widzimy, że obie powyższe definicje mają sens. Kontrawariantny charakter tych przyporządkowań jest oczywisty, oto bowiem – np. – (oznaczenia jak w Równości (2.1), a do tego $\rho \in \text{Hom}_{\text{Grp}}(\Gamma_3, \text{U}(\mathcal{V}, \Phi))$ dla pewnej formy hermitowskiej Φ na przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowej $\mathcal{V}$)

$$\begin{aligned} \text{URep}(\chi_2 \circ \chi_1)(\mathcal{V}, \rho) &= (\mathcal{V}, \rho \circ (\chi_2 \circ \chi_1)) \equiv (\mathcal{V}, (\rho \circ \chi_2) \circ \chi_1) = \text{URep}(\chi_1)(\mathcal{V}, \rho \circ \chi_2) \\ &= \text{URep}(\chi_1)(\text{URep}(\chi_2)(\mathcal{V}, \rho)) \equiv \text{URep}(\chi_1) \diamond \text{URep}(\chi_2)(\mathcal{V}, \rho) \end{aligned}$$

(dowód dla $\star\text{Alg}_{\mathbb{C}}$ jest w pełni analogiczny, a sama własność jest trywialnie dziedziczona przez składowe morfizmowe funktorów). I wreszcie, wprost z definicji

$$\text{URep}(\text{id}_{\Gamma}) \equiv \text{id}_{\text{URep}(\Gamma)}, \quad \star\text{Rep}(\text{id}_{\mathfrak{A}}) \equiv \text{id}_{\star\text{Rep}(\mathfrak{A})},$$

co kończy dowód funktorialności przyporządkowań $\Gamma \mapsto \text{URep}(\Gamma)$ i $\mathfrak{A} \mapsto \star\text{Rep}(\mathfrak{A})$. $\square$

W obecności trzech wprowadzonych tutaj funktorów układających się w diagram trójkątny

$$\begin{array}{ccc} & \text{Grp}^{<\infty} & \\ \mathbb{C}(\cdot) \swarrow & & \searrow \text{URep} \\ \star\text{Alg}_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\star\text{Rep}} & \text{Cat} \end{array}$$

pojawia się naturalne pytanie o relację między funktorami URep i $\star\text{Rep} \diamond \mathbb{C}(\cdot)$. Prostej odpowiedzi na nie nie dostarcza

Twierdzenie 3.4. *W przyjętych wcześniej oznaczeniach istnieje transformacja naturalna*

$$\mathbb{C}(\cdot) : \text{URep} \Longrightarrow \star\text{Rep} \diamond \mathbb{C}(\cdot).$$

Dowód. Musimy wykazać istnienie rodziny morfizmów (czyli funktorów)

$$\{ \mathbb{C}_{\Gamma}(\cdot) \in \text{Hom}_{\text{Cat}}(\text{URep}(\Gamma), \star\text{Rep}(\mathbb{C}(\Gamma))) \}_{\Gamma \in \text{Obj}(\text{Grp}^{<\infty})},$$

spełniających dla dowolnego $\chi \in \text{Hom}_{\text{Grp}^{<\infty}}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ tożsamości²

$$(3.1) \quad \mathbb{C}_{\Gamma_1}(\cdot) \diamond \text{URep}(\chi) = \star\text{Rep}(\mathbb{C}(\chi)) \diamond \mathbb{C}_{\Gamma_2}(\cdot).$$

Składowa obiektowa takowego funktora indukuje $\star$ -reprezentację algebry grupowej Γ z zadanej (dowolnie) reprezentacji grupy Γ . Postulujemy ją w najprostszej możliwej postaci:

$$\mathbb{C}_{\Gamma}(\cdot) : (\mathcal{V}, \rho) \mapsto (\mathcal{V}, \mathbb{C}_{\Gamma}(\rho)),$$

przy czym homomorfizm $\star$ -algebr $\mathbb{C}_{\Gamma}(\rho) \in \text{Hom}_{\star\text{Alg}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}(\Gamma), \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}))$ zadajemy na bazie dziedziny wzorem

$$\mathbb{C}_{\Gamma}(\rho)(\delta_{\gamma}) := \rho(\gamma),$$

po czym rozszerzamy (w sposób jednoznaczny) do odwzorowania $\mathbb{C}$ -liniowego,

$$\mathbb{C}_{\Gamma}(\rho)(F) \equiv \mathbb{C}_{\Gamma}(\rho) \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma) \odot \delta_{\gamma} \right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma) \dot{\circ} \rho(\gamma).$$

Pozostaje jeszcze sprawdzić tożsamości

$$\mathbb{C}_{\Gamma}(\rho)(F \star G) = \mathbb{C}_{\Gamma}(\rho)(F) \circ \mathbb{C}_{\Gamma}(\rho)(G)$$

oraz

$$\mathbb{C}_{\Gamma}(\rho)(F^{\dagger}) = \mathbb{C}_{\Gamma}(\rho)(F)^{\dagger},$$

co czynimy bez trudu w bezpośrednich rachunkach:

$$\mathbb{C}_{\Gamma}(\rho)(F) \circ \mathbb{C}_{\Gamma}(\rho)(G) = \left(\sum_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha) \dot{\circ} \rho(\alpha) \right) \circ \left(\sum_{\beta \in \Gamma} G(\beta) \dot{\circ} \rho(\beta) \right) = \sum_{\alpha, \beta \in \Gamma} F(\alpha) \cdot G(\beta) \dot{\circ} \rho(\alpha\beta)$$

²Należy pamiętać o kontrawariantnym charakterze funktorów URep i $\star\text{Rep}$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{\alpha \beta \in \Gamma} F(\alpha) \cdot G(\alpha^{-1} \alpha \beta) \dot{\rho}(\alpha \beta) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha) \cdot G(\alpha^{-1} \gamma) \dot{\rho}(\gamma) \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} (F \star G)(\gamma) \dot{\rho}(\gamma) = \mathbb{C}_\Gamma \langle \rho \rangle (F \star G)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_\Gamma \langle \rho \rangle (F^\dagger) &= \mathbb{C}_\Gamma \langle \rho \rangle \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{F(\gamma)} \odot \delta_\gamma^\dagger \right) = \mathbb{C}_\Gamma \langle \rho \rangle \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{F(\gamma)} \odot \delta_{\gamma^{-1}} \right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{F(\gamma)} \dot{\rho}(\gamma^{-1}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{F(\gamma)} \dot{\rho}(\gamma)^\dagger \\
&= \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma) \dot{\rho}(\gamma) \right)^\dagger \equiv \mathbb{C}_\Gamma \langle \rho \rangle (F)^\dagger,
\end{aligned}$$

przy czym przedostatnia równość jest konsekwencją unitarności ρ . Konstrukcję funktora $\mathbb{C}_\Gamma \langle \cdot \rangle$ wienczy definicja jego składowej morfizmowej (zapisana w konwencji dowodu Stwierdzenia 3.3)

$$\mathbb{C}_\Gamma \langle \cdot \rangle : \left((\mathcal{V}_1, \rho_1) \xrightarrow{\psi} (\mathcal{V}_2, \rho_2) \right) \mapsto \left((\mathcal{V}_1, \mathbb{C}_\Gamma \langle \rho_1 \rangle) \xrightarrow{\psi} (\mathcal{V}_2, \mathbb{C}_\Gamma \langle \rho_2 \rangle) \right),$$

której sensowność wynika wprost z $\mathbb{C}$ -liniowości ψ . Jej trywialną konsekwencją są tożsamości

$$\mathbb{C}_\Gamma \langle \psi_2 \circ \psi_1 \rangle = \mathbb{C}_\Gamma \langle \psi_2 \rangle \circ \mathbb{C}_\Gamma \langle \psi_1 \rangle, \quad \mathbb{C}_\Gamma \langle \text{id}_{(\mathcal{V}, \rho)} \rangle = \text{id}_{(\mathcal{V}, \mathbb{C}_\Gamma \langle \rho \rangle)},$$

nieodzowne dla funktorialności $\mathbb{C}_\Gamma \langle \cdot \rangle$.

Skonstruowawszy poszukiwane funktory, sprawdzamy tożsamość (3.1). Przywołując jawną postać funktorów $\text{URep}(\chi)$ i $\star \text{Rep}(\xi)$, $\xi = \mathbb{C}(\chi)$ z dowodu Stwierdzenia 3.3, stwierdzamy pożądaną równość składowych obiektowych,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{C}_{\Gamma_1} \langle \cdot \rangle \diamond \text{URep}(\chi))(\mathcal{V}_i, \rho_i) &= \mathbb{C}_{\Gamma_1} \langle (\mathcal{V}_i, \rho_i \circ \chi) \rangle = (\mathcal{V}_i, \mathbb{C}_{\Gamma_1} \langle \rho_i \circ \chi \rangle) \equiv (\mathcal{V}_i, \mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle \rho_i \rangle \circ \mathbb{C}(\chi)) \\
&= \star \text{Rep}(\mathbb{C}(\chi))(\mathcal{V}_i, \mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle \rho_i \rangle) \equiv \star \text{Rep}(\mathbb{C}(\chi)) \diamond \mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle \cdot \rangle (\mathcal{V}_i, \rho_i),
\end{aligned}$$

zasadzając się na ciągu trywialnych równości

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{\Gamma_1} \langle \rho_i \circ \chi \rangle (F) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_1} F(\gamma) \dot{\rho}_{\Gamma_1} \langle \rho_i \circ \chi \rangle (\delta_\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma_1} F(\gamma) \dot{\rho}_{\Gamma_1} \langle \rho_i \circ \chi \rangle (\gamma) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma_1} F(\gamma) \dot{\rho}_i(\chi(\gamma)) \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_1} F(\gamma) \dot{\rho}_{\Gamma_2} \langle \rho_2 \rangle (\delta_{\chi(\gamma)}) \equiv \mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle \rho_2 \rangle \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_1} F(\gamma) \odot \delta_{\chi(\gamma)} \right) = (\mathbb{C}_{\Gamma_2} \langle \rho_2 \rangle \circ \mathbb{C}(\chi))(F).
\end{aligned}$$

Identycznościowy charakter składowych morfizmowych wszystkich składanych funktorów czyni składową morfizmową dowodzonej równości oczywistą. $\square$

Na zakończenie spożytkujemy zgromadzoną wiedzę oraz fakty przytoczone w Rozdziale 1 formułując nietrywialne, a zarazem całkowicie konstruktywne

Twierdzenie 3.5. *W przyjętych wcześniej oznaczeniach funktorialny obraz reprezentacji*

$$\pi_\oplus = \oplus_{[\pi] \sim \epsilon \widehat{\Gamma}} \pi \in \text{Hom}_{\text{Grp}^{<\infty}} \left(\Gamma, \bigoplus_{[\pi] \sim \epsilon \widehat{\Gamma}} \text{U}(\mathcal{V}_\pi, \Phi_\pi) \right)$$

względem komponenty $\mathbb{C}_\Gamma \langle \cdot \rangle$ transformacji naturalnej z tezy Twierdzenia 3.4 jest $\star$ -izomorfizmem,

$$\mathbb{C}_\Gamma \langle \pi_\oplus \rangle : \mathbb{C}(\Gamma) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{[\pi] \sim \epsilon \widehat{\Gamma}} \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_\pi),$$

który w połączeniu z (dowolnym) wyborem bazy w każdej z przestrzeni $\mathbb{C}$ -liniowych $\mathcal{V}_\pi$ określa konkretną macierzową realizację algebry grupowej wymiaru $|\Gamma|$.

Dowód. Postać, jaką $\star$ -morfizm $\mathbb{C}_\Gamma \langle \pi_\oplus \rangle$ przybiera na układzie generującym Δ_Γ algebry $\mathbb{C}(\Gamma)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_\Gamma \langle \pi_\oplus \rangle (\delta_\gamma) &= \bigoplus_{[\pi] \sim \epsilon \widehat{\Gamma}} \pi(\gamma) \equiv \bigoplus_{[\pi] \sim \epsilon \widehat{\Gamma}} \left(\sum_{i=1}^{d_\pi} e_{\pi,i}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\pi,i} \right) \circ \pi(\gamma) \circ \left(\sum_{j=1}^{d_\pi} e_{\pi,j}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\pi,j} \right) \\
&= \bigoplus_{[\pi] \sim \epsilon \widehat{\Gamma}} \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \langle e_{\pi,i}^*, \pi(\gamma)(e_{\pi,j}) \rangle \dot{\rho}(e_{\pi,i}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\pi,j}) \equiv \bigoplus_{[\pi] \sim \epsilon \widehat{\Gamma}} \sum_{i,j=1}^{d_\pi} \frac{\pi_{ij}(\gamma)}{\sqrt{d_\pi}} \dot{\rho}(e_{\pi,i}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\pi,j}),
\end{aligned}$$

w połączeniu z Faktami (2) i (5) z Rozdziału 1 podpowiada oczywistą definicję odwzorowania odwrotnego na układzie generującym $\star$ -algebry $\bigoplus_{[\pi] \sim \epsilon \widehat{\Gamma}} \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_\pi)$ będącym konkatenacją baz typu (1.1)

$$\Sigma(e_{\pi,i}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\pi,j}) := \frac{\sqrt{d_\pi}}{|\Gamma|} \odot \overline{\pi_{ij}}(\cdot).$$

Pokażemy, że jednoznacznie określone rozszerzenie $\mathbb{C}$ -liniowe Σ ,

$$\Sigma : \oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}_{\pi}) \rightarrow \mathbb{C}(\Gamma) : \oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \chi^{(\pi)} \mapsto \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} \sqrt{d_{\pi}} \cdot \chi_{\pi,ij}^{(\pi)} \odot \overline{\pi_{ij}(\cdot)},$$

$$\chi_{\pi,ij}^{(\pi)} \equiv \langle e_{\pi,i}^*, \chi^{(\pi)}(e_{\pi,j}) \rangle,$$

jest w istocie homomorfizmem $\star$ -algebr odwrotnym do $\mathbb{C}_{\Gamma} \langle \pi_{\oplus} \rangle$. W tym celu zauważmy najpierw, że z jednej strony zachodzi równość

$$\begin{aligned} & \Sigma(\oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \chi_2^{(\pi)} \circ \oplus_{[\pi'] \sim \epsilon \Gamma} \chi_1^{(\pi')})(\gamma) = \Sigma(\oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} (\chi_2^{(\pi)} \circ \chi_1^{(\pi)}))(\gamma) \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} \sqrt{d_{\pi}} \cdot (\chi_2^{(\pi)} \circ \chi_1^{(\pi)})_{\pi,ij} \cdot \overline{\pi_{ij}(\gamma)} = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j,k=1}^{d_{\pi}} \sqrt{d_{\pi}} \cdot \chi_{2\pi,ik}^{(\pi)} \cdot \chi_{1\pi,kj}^{(\pi)} \cdot \overline{\pi_{ij}(\gamma)}, \end{aligned}$$

z drugiej zaś – wobec unitarności reprezentacji π oraz tożsamości

$$\sqrt{d_{\pi}} \cdot \pi_{ij}(\alpha\beta) = \sum_{k=1}^{d_{\pi}} \pi_{ik}(\alpha) \cdot \pi_{kj}(\beta)$$

– dostajemy

$$\begin{aligned} \Sigma(\oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \chi_2^{(\pi)}) \star \Sigma(\oplus_{[\pi'] \sim \epsilon \Gamma} \chi_1^{(\pi')})(\gamma) &= \frac{1}{|\Gamma|^2} \sum_{[\pi] \sim, [\pi'] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} \sum_{k,l=1}^{d_{\pi'}} \sqrt{d_{\pi} d_{\pi'}} \cdot \chi_{2\pi,ij}^{(\pi)} \cdot \chi_{1\pi',kl}^{(\pi')} \cdot (\overline{\pi_{ij}} \star \overline{\pi'_{kl}})(\gamma) \\ &= \frac{1}{|\Gamma|^2} \sum_{[\pi] \sim, [\pi'] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} \sum_{k,l=1}^{d_{\pi'}} \sqrt{d_{\pi} d_{\pi'}} \cdot \chi_{2\pi,ij}^{(\pi)} \cdot \chi_{1\pi',kl}^{(\pi')} \cdot \overline{\pi_{ij}(\gamma \alpha^{-1})} \cdot \overline{\pi'_{kl}(\alpha)} \\ &\equiv \frac{1}{|\Gamma|^2} \sum_{[\pi] \sim, [\pi'] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j,m=1}^{d_{\pi}} \sum_{k,l=1}^{d_{\pi'}} \sqrt{d_{\pi'}} \cdot \chi_{2\pi,ij}^{(\pi)} \cdot \chi_{1\pi',kl}^{(\pi')} \cdot \overline{\pi_{im}(\gamma)} \cdot \left(\sum_{\alpha \in \Gamma} \overline{\pi_{mj}(\alpha^{-1})} \cdot \overline{\pi'_{kl}(\alpha)} \right) \\ &\equiv \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{[\pi] \sim, [\pi'] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j,m=1}^{d_{\pi}} \sum_{k,l=1}^{d_{\pi'}} \sqrt{d_{\pi'}} \cdot \chi_{2\pi,ij}^{(\pi)} \cdot \chi_{1\pi',kl}^{(\pi')} \cdot \overline{\pi_{im}(\gamma)} \cdot \left(\frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\alpha \in \Gamma} \pi_{jm}(\alpha) \cdot \overline{\pi'_{kl}(\alpha)} \right) \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{[\pi] \sim, [\pi'] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j,m=1}^{d_{\pi}} \sum_{k,l=1}^{d_{\pi'}} \sqrt{d_{\pi}} \cdot \chi_{2\pi,ij}^{(\pi)} \cdot \chi_{1\pi',kl}^{(\pi')} \cdot \overline{\pi_{im}(\gamma)} \cdot (\pi'_{kl} | \pi_{jm})_{\Gamma} \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j,l=1}^{d_{\pi}} \chi_{2\pi,ij}^{(\pi)} \cdot \chi_{1\pi,jl}^{(\pi)} \cdot \overline{\pi_{il}(\gamma)}, \end{aligned}$$

więc też

$$\Sigma(\oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \chi_2^{(\pi)} \circ \oplus_{[\pi'] \sim \epsilon \Gamma} \chi_1^{(\pi')}) = \Sigma(\oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \chi_2^{(\pi)}) \star \Sigma(\oplus_{[\pi'] \sim \epsilon \Gamma} \chi_1^{(\pi')}).$$

Ponadto, znów uwzględniając unitarność π , obliczamy

$$\begin{aligned} \Sigma(\oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \chi^{(\pi)\dagger})(\gamma) &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} \sqrt{d_{\pi}} \cdot \overline{\chi_{\pi,ji}^{(\pi)}} \cdot \overline{\pi_{ij}(\gamma)} = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} \sqrt{d_{\pi}} \cdot \overline{\chi_{\pi,ji}^{(\pi)}} \cdot \pi_{ji}(\gamma^{-1}) \\ &\equiv \overline{\Sigma(\oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \chi^{(\pi)})(\gamma^{-1})} = \Sigma(\oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \chi^{(\pi)})^{\dagger}(\gamma), \end{aligned}$$

czyli

$$\Sigma(\oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \chi^{(\pi)\dagger}) = \Sigma(\oplus_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \chi^{(\pi)})^{\dagger}.$$

Jest zatem Σ w istocie homomorfizmem $\star$ -algebr.

Na koniec pokażemy, że Σ jest odwrotnością $\mathbb{C}_{\Gamma} \langle \pi_{\oplus} \rangle$, przy czym dowód tego faktu wystarczy przeprowadzić dokonując ewaluacji superpozycji morfizmów na wprowadzonych uprzednio układach generujących obu $\star$ -algebr. Pomocnym przy tym okazuje się ustalenie transformacji przejścia pomiędzy dwiema bazami algebry grupowej: bazą Δ_{γ} oraz bazą ortonormalną z punktu (5) w Rozdziale 1. Oto więc z jednej strony mamy

$$\pi_{ij}(\cdot) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi_{ij}(\gamma) \odot \delta_{\gamma},$$

a z drugiej

$$\delta_{\gamma} = \sum_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} (\pi_{ij}(\cdot) | \delta_{\gamma})_{\Gamma} \odot \pi_{ij}(\cdot) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{[\pi] \sim \epsilon \Gamma} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} \sum_{\alpha \in \Gamma} \overline{\pi_{ij}(\alpha)} \cdot \delta_{\gamma}(\alpha) \odot \pi_{ij}(\cdot)$$

$$= \sum_{[\pi]_{\sim} \in \widehat{\Gamma}} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} \frac{1}{|\Gamma|} \overline{\pi_{ij}(\gamma)} \odot \pi_{ij}(\cdot).$$

Teraz możemy już obliczyć wprost

$$\Sigma \circ \mathbb{C}_{\Gamma} \langle \pi_{\oplus} \rangle (\delta_{\gamma}) = \Sigma \left(\sum_{[\pi]_{\sim} \in \widehat{\Gamma}} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} \frac{\pi_{ij}(\gamma)}{\sqrt{d_{\pi}}} \dot{\circ} (e_{\pi,i}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\pi,j}) \right) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{[\pi]_{\sim} \in \widehat{\Gamma}} \sum_{i,j=1}^{d_{\pi}} \pi_{ij}(\gamma) \odot \overline{\pi_{ij}(\cdot)} = \overline{\delta_{\gamma}} \equiv \delta_{\gamma}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{\Gamma} \langle \pi_{\oplus} \rangle \circ \Sigma(e_{\pi,i}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\pi,j}) &= \mathbb{C}_{\Gamma} \langle \pi_{\oplus} \rangle \left(\frac{\sqrt{d_{\pi}}}{|\Gamma|} \odot \overline{\pi_{ij}(\cdot)} \right) = \mathbb{C}_{\Gamma} \langle \pi_{\oplus} \rangle \left(\frac{\sqrt{d_{\pi}}}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{\pi_{ij}(\gamma)} \odot \delta_{\gamma} \right) \\ &= \frac{\sqrt{d_{\pi}}}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{\pi_{ij}(\gamma)} \dot{\circ} \sum_{[\pi']_{\sim} \in \widehat{\Gamma}} \sum_{k,l=1}^{d_{\pi'}} \frac{\pi'_{kl}(\gamma)}{\sqrt{d_{\pi'}}} \dot{\circ} (e_{\pi',k}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\pi',l}) \\ &= \sqrt{d_{\pi}} \sum_{[\pi']_{\sim} \in \widehat{\Gamma}} \sum_{k,l=1}^{d_{\pi'}} \frac{1}{\sqrt{d_{\pi'}}} \cdot (\pi_{ij} | \pi'_{kl})_{\Gamma} \dot{\circ} (e_{\pi',k}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\pi',l}) \\ &= e_{\pi,i}^* \otimes_{\mathbb{C}} e_{\pi,j}, \end{aligned}$$

tym samym pokazując dowodnie, że $\mathbb{C}_{\Gamma} \langle \pi_{\oplus} \rangle$ jest $\star$ -izomorfizmem. $\square$

4. CENTRUM

Na zakończenie naszej szczegółowej dyskusji anatomii algebry grupowej przyjrzymy się uważniej strukturze jej centrum, w czym pomocne okażą się wcześniejsze nasze ustalenia.

Stwierdzenie 4.1. *W przyjętych wcześniej oznaczeniach zachodzi równość*

$$\mathcal{Z}(\mathbb{C}(\Gamma)) = \mathbb{C}_{\text{kl}}(\Gamma),$$

a przy tym

$$\mathcal{Z}(\mathbb{C}(\Gamma)) = \left\{ \mathbb{C}_{\Gamma} \langle \pi_{\oplus} \rangle^{-1} (P_{\pi}) \mid [\pi]_{\sim} \in \widehat{\Gamma} \right\}_{\mathbb{C}},$$

gdzie P_{π} są operatorami rzutu z punktu (6) Rozdziału 1.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $F \in \mathbb{C}(\Gamma)$ jest elementem centralnym algebry grupowej, czyli dla dowolnego $\gamma \in \Gamma$ zachodzi

$$F \star \delta_{\gamma} = \delta_{\gamma} \star F \quad \Leftrightarrow \quad F = \delta_{\gamma} \star F \star \delta_{\gamma^{-1}} = \sum_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha) \odot \delta_{\gamma} \star \delta_{\alpha} \star \delta_{\gamma^{-1}} \equiv \sum_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha) \odot \delta_{\text{Ad}_{\gamma}(\alpha)},$$

a zatem także

$$F(\beta) = \sum_{\alpha \in \Gamma} F(\alpha) \odot \delta_{\text{Ad}_{\gamma}(\alpha)}(\beta) = F(\text{Ad}_{\gamma^{-1}}(\beta)),$$

czyli $F \in \mathbb{C}_{\text{kl}}(\Gamma)$. Stwierdzamy więc inkluzję

$$\mathcal{Z}(\mathbb{C}(\Gamma)) \subset \mathbb{C}_{\text{kl}}(\Gamma).$$

Następnie załóżmy – odwrotnie –, że $F \in \mathbb{C}(\Gamma)$ jest stała na klasach sprzężoności, wobec czego dla dowolnej funkcji $G \in \mathbb{C}(\Gamma)$ otrzymujemy tożsamość

$$\begin{aligned} F \star G &= \sum_{\alpha, \beta \in \Gamma} F(\beta \alpha^{-1}) \cdot G(\alpha) \odot \delta_{\beta} = \sum_{\beta \in \Gamma} \sum_{\beta \gamma^{-1} \in \Gamma} F(\beta(\beta \gamma^{-1})^{-1}) \cdot G(\beta \gamma^{-1}) \odot \delta_{\beta} \\ &\equiv \sum_{\beta \in \Gamma} \sum_{\beta \gamma^{-1} \in \Gamma} F(\beta \gamma \beta^{-1}) \cdot G(\beta \gamma^{-1}) \odot \delta_{\beta} = \sum_{\beta \in \Gamma} \sum_{\beta \gamma^{-1} \in \Gamma} F(\gamma) \cdot G(\beta \gamma^{-1}) \odot \delta_{\beta} \\ &\equiv \sum_{\beta, \gamma \in \Gamma} G(\beta \gamma^{-1}) \cdot F(\gamma) \odot \delta_{\beta} = G \star F, \end{aligned}$$

która implikuje inkluzję odwrotną

$$\mathcal{Z}(\mathbb{C}(\Gamma)) \supset \mathbb{C}_{\text{kl}}(\Gamma).$$

Dla zamknięcia dowodu pozostaje jeszcze rozpiąć elementy $\chi_{[\pi]_{\sim}}$ bazy ortonormalnej $\mathbb{C}_{\text{kl}}(\Gamma)$, o której mówi punkt (3) Rozdziału 1, na przeciwobrazach operatorów rzutu P_{π} względem izomorfizmu $\mathbb{C}_{\Gamma} \langle \pi_{\oplus} \rangle$. Wprost na podstawie wzoru (1.3) otrzymujemy równość

$$\overline{\chi_{[\pi]_{\sim}}} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{\chi_{[\pi]_{\sim}}}(\gamma) \odot \delta_{\gamma} = \frac{|\Gamma|}{d_{\pi}} \odot \mathbb{C}_{\Gamma} \langle \pi_{\oplus} \rangle (P_{\pi}),$$

musimy więc jedynie wykazać, że także sprzężenia charakterów nieprzywiedlnych są bazą $\mathbb{C}_{kl}(\Gamma)$. To jednak wynika natychmiast z rachunku

$$\mathbb{C}_{kl}(\Gamma) \ni F \equiv \overline{\overline{F}} = \overline{\sum_{[\pi]_{\sim} \in \widehat{\Gamma}} (\chi_{[\pi]_{\sim}} | \overline{F})_{\Gamma} \odot \chi_{[\pi]_{\sim}}} = \sum_{[\pi]_{\sim} \in \widehat{\Gamma}} \overline{(\chi_{[\pi]_{\sim}} | \overline{F})_{\Gamma} \odot \overline{\chi_{[\pi]_{\sim}}}} = \sum_{[\pi]_{\sim} \in \widehat{\Gamma}} (\overline{F} | \chi_{[\pi]_{\sim}})_{\Gamma} \odot \overline{\chi_{[\pi]_{\sim}}}.$$

□

LITERATURA

[Sus15] R.R. Suszek, “*W 6 stron od teorii grup do teorii kategorii*”, notatki wykładowe, 2015.

R.R.S.: KATEDRA METOD MATEMATYCZNYCH FIZYKI, WYDZIAŁ FIZYKI UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO, UL. PASTEURA 5, PL-02-093 WARSZAWA, POLAND

Adres mejlowy: `suszek@fuw.edu.pl`