

Elementy Algebry i Geometrii Wyższej w Fizyce

Rafał R. Suszek

KATEDRA METOD MATEMATYCZNYCH FIZYKI

WYDZIAŁ FIZYKI

UNIwersytet Warszawski

Warszawa, 17 listopada 2016 r.

STRESZCZENIE. Niniejszy skrypt stanowi zapis trójsemestralnego wykładu monograficznego algebry i geometrii wyższej przeznaczony dla wszystkich zainteresowanych z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i spoza niego, wygłoszonego w latach akademickich 2015/2016 oraz 2016/2017.

Spis treści

Przedmowa	6
Podziękowania	9
Część 1. Prolegomena: Rekwizytoria algebro-analityczna	11
Rozdział 1.1. Struktury algebraiczne i ich transport	13
1. Struktury algebraiczne proste	13
2. Struktury algebraiczne złożone	32
Rozdział 1.2. Uniwersalność i internalizacja	61
1. Produkt i koprodukt	68
2. Iloczyn tensorowy	93
3. Produkt włóknisty i koprodukt kowłóknisty	125
Rozdział 1.3. Ciągi dokładne	151
Rozdział 1.4. Rudymenty topologii i geometrii różniczkowej	158
1. Niezbędnik topologiczny	158
2. Fundamentalne struktury i twierdzenia analizy	168
3. Geometria różniczkowa – algebra liniowa jako model lokalny	222
Rozdział 1.5. Grupy topologiczne – struktura i działanie	272
Część 2. Algebry – struktury ogólne	310
Rozdział 2.1. Algebry	311
1. Aksjomatyka i podstawowe konstrukcje	311
2. Algebra tensorowa modułu	327
3. Algebry z gradacją	330
4. Algebry różniczkowe	334
5. Algebry Frobeniusa	334
6. Algebry i algebroidy Liego	334
7. Superalgebry Liego	334
Rozdział 2.2. Elementy teorii reprezentacji algebr	335
1. Pojęcia podstawowe	335
2. Reprezentacje algebr prostych	339
Część 3. Algebry Clifforda i spinory	348
Rozdział 3.1. Ogólne struktury	349

1. Motywacja	349
2. Konstrukcja uniwersalna i funktor Cliff	350
3. Algebra zewnętrzna jako algebra Clifforda	365
4. Podstawowe własności strukturalne	368
Rozdział 3.2. Klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda	393
1. Rzeczywiste algebry Clifforda w skończonym wymiarze	393
2. Zespolone algebry Clifforda w skończonym wymiarze	401
Rozdział 3.3. Teoria reprezentacji algebr Clifforda	407
1. Ogólne własności modułów Clifforda	407
2. Reprezentacje rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda	410
Rozdział 3.4. Spinory	415
1. Cliffordowskie realizacje izometrii	415
2. Reprezentacje spinorowe	425
3. Spinory czyste i flagi zerowe – studium przypadków	428
Część 4. Wiązki włókniste z powiązaniem	434
Rozdział 4.1. Wprowadzenie do teorii wiązek włóknistych	436
1. Struktury ogólne	436
2. Wiązki wektorowe	446
3. Wiązki główne	455
4. Wiązki stowarzyszone	464
Rozdział 4.2. Elementy teorii powiązania w wiązce włóknistej	472
1. Powiązanie – poczwórna ścieżka	473
2. Uzgadnianie powiązania ze strukturą na włóknie	484
3. Indukcja powiązania wzdłuż odwzorowania gładkiego	518
Rozdział 4.3. Naturalne konstrukcje	519
1. Geometryzacja konstrukcji liniowych	519
2. Redukcja wiązki głównej	524
3. Prolongacja wiązki głównej	527
Rozdział 4.4. Dodatkowa struktura na wiązce włóknistej	535
1. Struktura metryczna	535
2. Orientacja na wiązce wektorowej	539
Część 5. Wiązki Clifforda i spinorowe	547
Rozdział 5.1. Struktura Spin na wiązce wektorowej	549
Rozdział 5.2. Geometryzacja algebr i modułów Clifforda	550
Rozdział 5.3. Powiązanie spinowe i operator Diraca	551
Część 6. Wiązki włókniste w teorii pola	552
Część 7. Zastosowania algebry homologicznej	553

Rozdział 7.1. Kohomologia snopowa i kohomologia de Rhama	554
Rozdział 7.2. Homologia singularna	555
Rozdział 7.3. Kohomologie Čecha i Beilinsona–Deligne’a	556
Rozdział 7.4. Kohomologia grupowa	557
Rozdział 7.5. Kohomologia (super)algebr Liego	558
Rozdział 7.6. Homologia Morse’a	559
Część 8. Teoria kategorii – więcej niż semiotyka	560
Rozdział 8.1. Język teorii kategorii – rekapitulacja	561
Rozdział 8.2. Kategorie z dodatkową strukturą	562
Rozdział 8.3. Topologiczna kwantowa teoria pola	563
Rozdział 8.4. Wyższe kategorie	564
Rozdział 8.5. Kategorifikacja	565
Część 9. Epilegomena	566
Rozdział 9.1. Co by tu jeszcze...	567
Dodatek A. W 8 stron od teorii grup do teorii kategorii	568
Dodatek B. Konwencje	576
Dodatek C. Tablice	579
Bibliografia	583
Indeks	585

Przedmowa

Fundamentalną ideą porządkującą niniejszy wykład jest Zasada Lokalnej Trywializacji (ZLT), która otwiera możliwość metodycznego budowania opisu struktur topologicznych o dowolnym stopniu złożoności (w praktyce dyktowanym przez fizykę rozważanych zjawisk) – takich jak chociażby różności symplektyczne z działaniem grupy Liego obecne w kanonicznym opisie układów fizycznych z symetrią ciągłą, geometryzacje całkowitych klas kohomologii de Rhama przydatne w opisie układów z ładunkiem topologicznym, superrozności wykorzystywane w modelowaniu układów z supersymetrią, przestrzenie orbit, orbifolde oraz T -foldy pojawiające się w modelach układów z symetrią wycechowaną i in. – na gruncie zrozumienia struktur prostszych modelujących te bardziej złożone *lokalnie*, tj. na otoczeniach otwartych (punktów) pokrywających przestrzeń modelowaną. Prosty rekurencyjny schemat logiczny stanowiący treść ZLT precyzuje następująca

DEFINICJA 1. Niechaj Top będzie kategorią¹ przestrzeni topologicznych, tj. klasą zbiorów z wyróżnioną topologią wraz z odwzorowaniami ciągłymi pomiędzy tymi zbiorami (w odnośnych topologiach) jako morfizmami², i niech $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1 \subseteq \text{Top}$ będą dwiema dowolnymi podkategoriami kategorii Top , przy czym podkategorię \mathcal{C}_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ tworzą przestrzenie topologiczne z pewną dodatkową strukturą³ wraz z odnośnymi morfizmami kategorii Top , czyli odwzorowaniami ciągłymi, transportującymi (albo inaczej zachowującymi) ową strukturę. Wówczas obiektami w **kategorii przestrzeni typu \mathcal{C}_1 lokalnie modelowanych na \mathcal{C}_2** są czwórki $((X, \mathcal{T}(X)), \mathcal{O}, \mathcal{Y}, \varphi)$ złożone z

- przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ z kategorii \mathcal{C}_1 ;
- otwartego pokrycia $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(X)$, zwanego **pokryciem trywializującym**;
- rodziny $\mathcal{Y} := \{Y_i\}_{i \in I}$ przestrzeni z kategorii \mathcal{C}_2 ;
- rodziny izomorfizmów $\varphi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow Y_i$ w kategorii \mathcal{C}_1 o złożeniach $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j) \rightarrow \varphi_j(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$ będących izomorfizmami w kategorii \mathcal{C}_2 , określonych dla dowolnych par indeksów (i, j) ze zbioru

$$\langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}} := \{ (i, j) \in I^{\times 2} \mid \mathcal{O}_{ij} \equiv \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset \}.$$

¹Elementarne wprowadzenie do (języka) teorii kategorii, pozwalającego w pierwszym rzędzie na systematyzację i uzwięzlenie opisu interesujących nas struktur matematycznych, a w dalszej kolejności – także na poszerzenie i pogłębienie zrozumienia strukturalnych relacji między różnymi napotykanymi przez nas bytami formalnymi i fizykalnymi, zawarliśmy we wprowadzeniu do Rozdz. 1.2.

²Patrz: Rozdz. 1.

³Np. strukturą liniową, co prowadzi do podkategorii topologicznych przestrzeni wektorowych z (liniowymi) odwzorowaniami ciągłymi jako morfizmami.

Niechaj $((X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha)), \mathcal{O}_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema przestrzeniami typu \mathcal{C}_1 lokalnie modelowanymi na \mathcal{C}_2 i niech $f : X_1 \rightarrow X_2$ będzie morfizmem z kategorii \mathcal{C}_1 między nimi, przy czym w odniesieniu do obu pokryć $\mathcal{O}_\alpha = \{\mathcal{O}_{\alpha i_\alpha}\}_{i_\alpha \in I_\alpha} \subset \mathcal{T}(X_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ czynimy to założenie, że istnieje odwzorowanie $\phi : I_1 \rightarrow I_2$ pokrywające f w sensie relacji

$$f(\mathcal{O}_{1i}) \subset \mathcal{O}_{2\phi(i)}, \quad i \in I_1,$$

co nie stanowi ograniczenia ogólności naszych rozważań⁴. Morfizm f należy do klasy morfizmów kategorii przestrzeni typu \mathcal{C}_1 lokalnie modelowanych na \mathcal{C}_2 , ilekroć złożenia

$$f_i := \varphi_{2\phi(i)} \circ f \circ \varphi_{1i}^{-1} : Y_{1i} \rightarrow Y_{2\phi(i)},$$

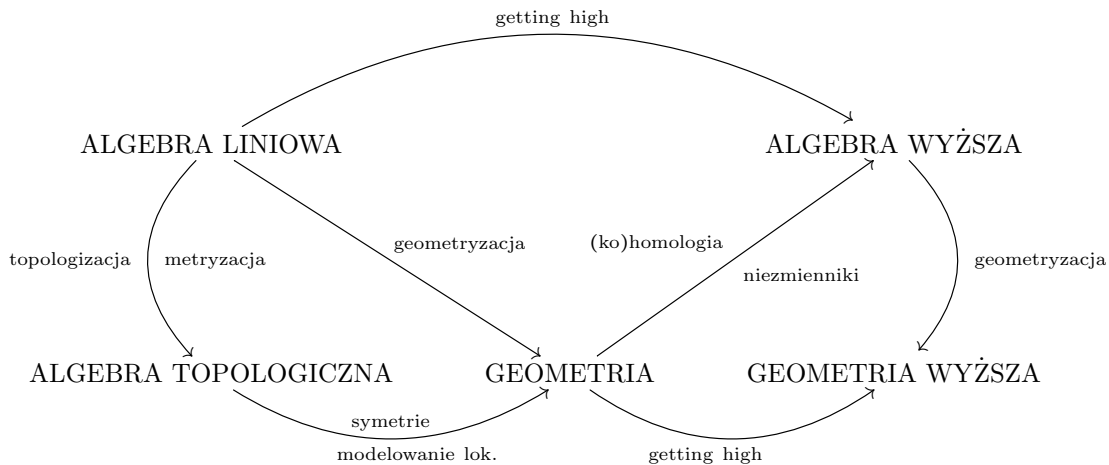
zwane **lokalnymi prezentacjami** odwzorowania f względem obu lokalnych trywializacji, są morfizmami w kategorii \mathcal{C}_2 . ▲

W konkretnych sytuacjach najczęściej \mathcal{Y} stanowi pewien podzbiór topologii ustalonej globalnie przestrzeni topologicznej (np. indeksowaną przez I rodzinę zbiorów otwartych w \mathbb{R}^{x^n} , homeomorficznych z odnośnymi elementami pokrycia X), będącej w istocie lokalnym modelem dla X , o którym mowa w powyższej definicji. Studia nad symetriami pewnych szczególnych (geometrycznych w swej istocie) teorii pola, zw. modelami sigma, prowadzą jednak do bardziej ogólnych struktur, zasadniczo wychodzących poza paradygmat geometrii riemannowskiej, co usprawiedliwia przyjęty przez nas poziom ogólności.

W najniższych rzędach nakreślonej powyżej rekurencji dodatkowa struktura na (modelujących) przestrzeniach topologicznych, o której wspomina Def. 1, jest natury algebraicznej wzgl. korzysta z takowej struktury w bezpośredniej konstrukcji rachunku różniczkowego, oto więc algebra topologiczna staje się wyjściowym źródłem lokalnych modeli przestrzeni topologicznych, które będziemy rozpatrywać w niniejszym kursie, a skonstruowane przy ich użyciu – według schematu nakreślonego w Def. 1 – struktury topologiczne wyższego rzędu możemy często postrzegać jako geometryzacje elementarnych struktur algebraicznych, czyli – mówiąc w sposób z konieczności mało precyzyjny, lecz intuicyjnie zrozumiały – rodziny takich struktur algebraicznych indeksowane przez punkty przestrzeni topologicznej i zależące gładko od punktu (w sensie wymagającym każdorazowo doprecyzowania). Ta konstatacja usprawiedliwia szczegółowy przegląd pojęć i konstrukcji algebry liniowej w Rozdz. 1, poszerzony o istotne konstrukcje z Rozdz. 1.2 i 1.3 leżące poza zakresem merytorycznym standardowego jej kursu. Niezbędnej topologizacji tak określonej bazy algebraicznej naszych rozważań dokonujemy – na gruncie aksjomatyki przypomnianej, wraz z jej elementarnymi konsekwencjami, w Rozdz. 1 – w Rozdz. 2, który daje nam ostatecznie do ręki podstawowy konstrukt algebry topologicznej, odgrywający kluczową rolę w analizie funkcjonalnej (tj. różniczkowej) na przestrzeniach topologicznych ze strukturą, czyli kategorię przestrzeni Banacha. Wreszcie Rozdz. 3

⁴Warunek ten można zawsze spełnić, wychodząc od dowolnej pary pokryć otwartych $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$. Wystarczy dokonać rozdrobnienia \mathcal{O}_1 względem $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ (z racji ciągłości f ta ostatnia rodzina także jest pokryciem otwartym M_1), tj. zastąpić \mathcal{O}_1 pokryciem $\mathcal{O}_1^{(f)} := \{\mathcal{O}_{i_1}^1 \cap f^{-1}(\mathcal{O}_{i_2}^2)\}_{(i_1, i_2) \in I_1^{(f)}}$ o indeksach z podzbioru $I_1^{(f)} := \{(i_1, i_2) \in I_1 \times I_2 \mid \mathcal{O}_{i_1}^1 \cap f^{-1}(\mathcal{O}_{i_2}^2) \neq \emptyset\}$. Na tak zdefiniowanym nowym zbiorze indeksującym możemy już określić pożądane odwzorowanie $\phi : I_1^{(f)} \rightarrow I_2 : (i_1, i_2) \mapsto i_2$.

przynosi pierwsze przykłady zastosowania ZLT, znane z elementarnych kursów geometrii różniczkowej: rozmaitość różniczkowalną, wiązkę styczną i kostyczną, pole wektorowe narozmaitości i jego potok *etc.* W Rozdz. 1.5 rekapitulujemy geometryzację algebraicznego pojęcia grupy i zbioru z działaniem grupy, przygotowując tym samym grunt pod konstrukcje obiektów bardziej złożonych, takich jak wiązki główne i stowarzyszone, przestrzenie symplektyczne z działaniem hamiltonowskim, struktury ekwiwariantne i in., o fundamentalnym znaczeniu fizykalnym. W dalszej części kursu realizowany jest analogiczny schemat – po wprowadzeniu i gruntownym zbadaniu stosownych struktur algebraicznych przechodzimy do lokalnie na nich modelowanych (w sposób opisany powyżej) przestrzeni topologicznych. Z naszych rozważań wylania się ostatecznie schemat pojęciowy i logiczny kursu, który przedstawiamy poniżej w formie diagramu (częściowo przemiennego):



Na zakończenie dodajmy, że na poziomie meta-matematycznym i meta-fizycznym idea wykładu spisane w niniejszym skrypcie (prawie) mieści się w równaniu:

$$\text{Abstract sense} = \text{Abstract nonsense} \triangleright \text{Common sense},$$

przy czym szczerą intencją Autora jest unikanie nonsensownych komunałów, co prowadzi nas do równania poprawionego:

$$\text{Abstract sense} = \text{Abstract } \cancel{\text{nonsense}} \triangleright \cancel{\text{Common}} \text{ sense},$$

pachnącego tautologią i kurkumą. Reszta nie mieści się w głowie.

Rafał R. Suszek
Warszawa, sierpień 2016

Podziękowania

Autor wyraża serdeczną wdzięczność tym wszystkim⁵, bez których powstanie niniejszego skryptu nie byłoby ani potrzebne, ani możliwe, ani satysfakcjonujące. I wszystkim innym – za mądrą powściągliwość w radach.

⁵Potrzebne wstawić.

Część 1

Prolegomena:
Rekwizytornia algebro-analityczna

Qui Bono?

Struktury algebraiczne i ich transport

1. Struktury algebraiczne proste

W schemacie logicznym organizującym nasz dyskurs elementarnym substratem używanym w konstrukcji struktur topologicznych o znaczeniu fizykalnym jest struktura algebraiczna, poddawana następnie geometryzacji, czyli w pierwszym rzędzie – topologizacji, która pozwala uczynić z niej lokalny model konstruowanej przestrzeni topologicznej. Zrealizowanie tak nakreślonego programu w odniesieniu do najprostszych nawet struktur algebraicznych wymaga przywołania i zaadaptowania do naszych celów podstawowych pojęć i stwierdzeń algebry, czemu poświęcamy pierwszą część kursu. Naszą algebraiczną awanturę rozpoczynamy zatem od ustalenia uniwersalnego języka, którego będziemy konsekwentnie używać do opisu konstrukcji i formułowania stwierdzeń w dalszej jego części.

DEFINICJA 2. Niechaj S będzie zbiorem i wprowadźmy oznaczenie

$$S^{\times n} := \prod_{i=1}^n S.$$

Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ **operacja n -argumentowa** na S to odwzorowanie

$$\phi_n : S^{\times n} \longrightarrow S.$$

Pojęcie to rozszerzamy na przypadek $n = 0$ przyjmując konwencję $S^{\times 0} := \{\bullet\}$ (zbiór jednoelementowy, czyli singleton) i określając **operację 0-argumentową**

$$\phi_0 : S^{\times 0} \longrightarrow S,$$

którą w dalszej części wykładu będziemy najczęściej utożsamiać z obrazem elementu \bullet w S względem ϕ_0 ,

$$\phi_0(\bullet) \equiv e_0 \in S,$$

zwanym **stałą**. ▲

Powyższa definicja pozwala wprowadzić pojęcie centralne dla całej naszej dalszej dyskusji.

DEFINICJA 3. W zapisie Def. 2 **struktura algebraiczna prosta o nośniku** S to kolekcja

$$\mathcal{S} := (S, \phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \dots, \phi_{k_N})$$

złożona ze zbioru S oraz – dla pewnych ustalonych liczb naturalnych $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_N \geq 0$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ – z operacji k_i -argumentowych ϕ_{k_i} , $i \in \overline{1, N}$. Własności

operacji współdefiniujących strukturę oraz ich wzajemne relacje są określane przez aksjomatykę struktury¹.

Podstruktura algebraiczna (prosta) na podzbiorze $P \subset S$ to analogiczna do poprzedniej kolekcja

$$(P, \phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \dots, \phi_{k_N})$$

spełniająca **warunki domkniętości**

$$\forall_{i \in \overline{1, N}} : \phi_{k_i}(P^{\times k_i}) \subset P.$$

Homomorfizm struktury algebraicznej prostej $(S_1, \phi_{k_1}^{(1)}, \phi_{k_2}^{(1)}, \dots, \phi_{k_N}^{(1)})$ w strukturę algebraiczną (tego samego typu) $(S_2, \phi_{k_1}^{(2)}, \phi_{k_2}^{(2)}, \dots, \phi_{k_N}^{(2)})$ to odwzorowanie pomiędzy ich nośnikami,

$$\chi : S_1 \longrightarrow S_2,$$

zgodne z obecną na nich strukturą algebraiczną w sensie wyrażanym przez rodzinę diagramów przemiennych:

$$\forall_{i \in \overline{1, N}} : \begin{array}{ccc} S_1^{\times k_i} & \xrightarrow{\phi_{k_i}^{(1)}} & S_1 \\ \times_{i=1}^{k_i} \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ S_2^{\times k_i} & \xrightarrow{\phi_{k_i}^{(2)}} & S_2 \end{array} .$$

Wyróżniamy następujące typy homomorfizmów:

- **monomorfizmy**, czyli homomorfizmy iniektywne² $S_1 \gg S_2$;
- **epimorfizmy**, czyli homomorfizmy suriektywne $S_1 \twoheadrightarrow S_2$;
- **izomorfizmy**, czyli homomorfizmy bijektywne, $S_1 \xrightarrow{\cong} S_2$;
- **endomorfizmy**, czyli homomorfizmy wewnętrzne $S_2 \equiv S_1 \circlearrowleft$;
- **automorfizmy**, czyli bijektywne homomorfizmy wewnętrzne.

▲

O ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy czasem używać nazwy konkretnej struktury algebraicznej w odniesieniu do zbioru będącego jej nośnikiem.

Jedną z najprostszych struktur algebraicznych, jakie napotkamy w dalszej części kursu, jest

DEFINICJA 4. Monoid to trójka (S, ϕ_2, ϕ_0) , w której

- S jest zbiorem;
- $\phi_2 : S^{\times 2} \longrightarrow S$ jest operacją 2-argumentową;

¹Mowa tu o takich własnościach operacji jak łączność, przemienność, neutralność stałej, rozdzielność jednej operacji względem drugiej *etc.*

²Należy w tym miejscu zaznaczyć, że w teorii kategorii, a w szczególności – w rozważaniach wychodzących poza kontekst kategorii konkretnych, pojawia się naturalne uogólnienie stosowanego tu pojęcia epimorfizmu struktur algebraicznych, które obejmuje morfizmy o własności prawostronnego skracania. Mimo wszelkie usiłowania S. Mac Lane'a (który nadał mu odrębne miano „morfizmu epi”) owo szersze pojęcie wpisuje się w tę samą denotację. Analogiczna uwaga dotyczy monomorfizmów kategoryalnych, czyli morfizmów o własności lewostronnego skracania, dla których nie przyjęła się zaproponowana przez S. Mac Lane'a nazwa „morfizmy mono”.

- $\phi_0 : \{\bullet\} \longrightarrow S : \bullet \longmapsto e$ jest operacją 0-argumentową o wartości zwanej **elementem neutralnym**.

Elementy struktury spełniają następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(M1) (łączność operacji binarnej)

$$\begin{array}{ccc}
 S \times S \times S & \xrightarrow{\phi_2 \times \text{id}_S} & S \times S \\
 \text{id}_S \times \phi_2 \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 S \times S & \xrightarrow{\phi_2} & S
 \end{array} \equiv \forall_{a,b,c \in S} : \phi_2(\phi_2(a,b),c) = \phi_2(a,\phi_2(b,c));$$

(M2) (neutralność stałej e względem działania grupowego)

$$\begin{array}{ccc}
 S \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_S \times \phi_0} & S \times S \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \phi_2 \\
 & & S
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{ccc}
 \{\bullet\} \times S & \xrightarrow{\phi_0 \times \text{id}_S} & S \times S \\
 & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & S
 \end{array}$$

$$\equiv \forall_{a \in S} : \phi_2(a,e) = a = \phi_2(e,a).$$

Monoid przeciwny do (S, ϕ_2, ϕ_0) to monoid $(S, \phi_2^{\text{opp}}, \phi_0)$ z operacją binarną daną wzorem

$$\phi_2^{\text{opp}} := \phi_2 \circ \tau_S,$$

patrz: Konw. 2.

Monoid przemienny to taki, w którym operacja binarna jest przemienna, co wyraża diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym)

$$\begin{array}{ccc}
 S \times S & \xrightarrow{\tau_S} & S \times S \\
 & \searrow \phi_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & S
 \end{array} \equiv \forall_{a,b \in S} : \phi_2(a,b) = \phi_2(b,a),$$

a zatem taki, który jest kanonicznie izomorficzny z monoidem do niego przeciwnym,

$$(S, \phi_2, \phi_0) \stackrel{\text{id}_S}{\cong} (S, \phi_2^{\text{opp}}, \phi_0).$$

Podmonoid monoidu (S, ϕ_2, ϕ_0) to trójka $(T, \phi_2 \upharpoonright_{T \times T}, \phi_0)$, w której T jest podzbiorem S o następujących własnościach:

- (SM1) $\phi_2 : T^{\times 2} \longrightarrow T \subset S$;
- (SM2) $S \ni e$.

Mówimy, że operacje monoidu ograniczone do T domykają się w T .

Homomorfizm monoidu $(S_1, \phi_2^{(1)}, \phi_0^{(1)})$ w monoid $(S_2, \phi_2^{(2)}, \phi_0^{(2)})$ to odwzorowanie

$$\chi : S_1 \longrightarrow S_2$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym):

$$\begin{array}{ccc}
 S_1 \times S_1 & \xrightarrow{\phi_2^{(1)}} & S_1 \\
 \downarrow \chi \times \chi & & \downarrow \chi \\
 S_2 \times S_2 & \xrightarrow{\phi_2^{(2)}} & S_2
 \end{array} \equiv \forall_{a,b \in S_1} : \chi \circ \phi_2^{(1)}(a,b) = \phi_2^{(2)}(\chi(a), \chi(b)).$$

Element monoidu $a \in S$ nazwiemy **lewostronnie upraszczalnym** (lub **lewostronnie regularnym**), jeśli spełnia warunek

$$\forall_{b,c \in S} : (\phi_2(a,b) = \phi_2(a,c) \implies b = c).$$

Analogicznie definiujemy **element prawostronnie upraszczalny** (lub **prawostronnie regularny**). Element, który jest zarazem lewostronnie i prawostronnie upraszczalny określamy mianem **elementu upraszczalnego** (lub **regularnego**). ▲

Zwracamy uwagę, że nierzadko narzucenie warunku zachowania niektórych tylko elementów rozważanej struktury algebraicznej pociąga za sobą zachowanie tejże w całości. Przykładu dostarczają tutaj przywołane poniżej homomorfizmy grup.

Przed przejściem do dyskusji przykładów, warto wysławić ogólną i oczywistą, acz ważną obserwację.

STWIERDZENIE 1. *Każdy monomorfizm jest izomorfizmem dziedziny na jej obraz względem tego monomorfizmu.* ■

Dowód: Oczywisty. □

Tytułem ilustracji powyższej abstrakcyjnej i ogólnej definicji przypomnimy teraz szczegółowe definicje podstawowych struktur algebraicznych o kluczowym znaczeniu dla teorii grup i algebry liniowej oraz ich morfizmów.

DEFINICJA 5. **Grupa** to czwórka $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$, w której

- G jest zbiorem;
- $\phi_2 : G^{\times 2} \rightarrow G$ jest operacją 2-argumentową zwaną **działaniem grupowym**;
- $\phi_1 : G \rightarrow G$ jest operacją 1-argumentową;
- $\phi_0 : \{\bullet\} \rightarrow G : \bullet \mapsto e$ jest operacją 0-argumentową o wartości zwanej **elementem neutralnym**.

Elementy struktury spełniają następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemiennie i równoważne zdania logiczne):

(G1) (łączność działania grupowego)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times G & \xrightarrow{\phi_2 \times \text{id}_G} & G \times G \\
 \downarrow \text{id}_G \times \phi_2 & & \downarrow \phi_2 \\
 G \times G & \xrightarrow{\phi_2} & G
 \end{array} \equiv \forall_{g,h,k \in G} : \phi_2(\phi_2(g,h),k) = \phi_2(g,\phi_2(h,k));$$

(G2) (neutralność stałej e względem działania grupowego)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_G \times \phi_0} & G \times G \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \phi_2 \\
 & & G
 \end{array} , \quad
 \begin{array}{ccc}
 \{\bullet\} \times G & \xrightarrow{\phi_0 \times \text{id}_G} & G \times G \\
 & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & G
 \end{array}$$

$$\equiv \forall_{g \in G} : \phi_2(g, e) = g = \phi_2(e, g);$$

(G3) (fundamentalna własność ϕ_1)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times \{\bullet\} & \xrightarrow{(\text{id}_G, \phi_1) \circ \text{pr}_1} & G \times G \\
 & \searrow \phi_0 \circ \text{pr}_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & G
 \end{array} , \quad
 \begin{array}{ccc}
 G \times \{\bullet\} & \xrightarrow{(\phi_1, \text{id}_G) \circ \text{pr}_1} & G \times G \\
 & \searrow \phi_0 \circ \text{pr}_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & G
 \end{array}$$

$$\equiv \forall_{g \in G} : \phi_2(g, \phi_1(g)) = e = \phi_2(\phi_1(g), g).$$

Grupa przeciwna do $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ to grupa $(G, \phi_2^{\text{opp}}, \phi_1, \phi_0)$ z działaniem danym wzorem

$$\phi_2^{\text{opp}} := \phi_2 \circ \tau_G,$$

patrz: Konw. 2.

Grupa przemienna (zwana też **abelową**) to taka, w której działanie grupowe jest przemienne, co wyraża diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{\tau_G} & G \times G \\
 & \searrow \phi_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & G
 \end{array} \equiv \forall_{g, h \in G} : \phi_2(g, h) = \phi_2(h, g),$$

a zatem taka, która jest kanonicznie izomorficzna z grupą do niej przeciwną,

$$(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0) \stackrel{\text{id}_G}{\cong} (G, \phi_2^{\text{opp}}, \phi_1, \phi_0).$$

Podgrupa grupy $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ to czwórka $(H, \phi_2 \upharpoonright_{H \times H}, \phi_1 \upharpoonright_H, \phi_0)$, w której H jest podzbiorem G o następujących własnościach:

(SG1) $\phi_2 : H \times H \rightarrow H \subset G$;

(SG2) $\phi_1 : H \rightarrow H \subset G$.

Mówimy, że operacje grupowe ograniczone do H domykają się w H .

Dzielnik normalny (albo inaczej **podgrupa normalna**) grupy $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ to jej podgrupa (o nośniku) $H \subset G$ o własności

$$\forall_{g \in G} : \phi_2(g, \phi_2(H, \phi_1(g))) = H.$$

Homomorfizm grupy $(G_1, \phi_2^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_0^{(1)})$ **w grupę** $(G_2, \phi_2^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \phi_0^{(2)})$ to odwzorowanie

$$\chi : G_1 \rightarrow G_2$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym):

$$(GH) \quad \begin{array}{ccc} G_1 \times G_1 & \xrightarrow{\phi_2^{(1)}} & G_1 \\ \chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ G_2 \times G_2 & \xrightarrow{\phi_2^{(2)}} & G_2 \end{array} \equiv \forall_{g,h \in G_1} : \chi \circ \phi_2^{(1)}(g,h) = \phi_2^{(2)}(\chi(g), \chi(h)).$$

▲

NOTACJA 1. Dwa najbardziej rozpowszechnione zapisy dla grup to

- zapis mnożeniowy $(\phi_2, \phi_1, e) \equiv (\cdot \equiv M, \text{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \mathbf{1}) = (\text{mnożenie, odwrotność, jedyńska})$, w którym wprowadzamy pojęcie **potęgi**

$$\forall_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \forall_{g \in G} : g^n := \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ razy}} \quad \wedge \quad g^{-n} := \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{n \text{ razy}}, \quad \forall_{g \in G} : g^0 := e,$$

o oczywistych własnościach:

$$\forall_{m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \forall_{g \in G} : g^m \cdot g^n = g^{m+n} \quad \wedge \quad \text{Inv}(g^n) = g^{-n}.$$

- zapis addytywny $(\phi_2, \phi_1, e) \equiv (+ \equiv A, P \equiv -(\cdot), \mathbf{0}) = (\text{przeciwność, dodawanie, zero})$, w którym wprowadzamy pojęcie **krotności**

$$\forall_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \forall_{g \in G} : ng := \underbrace{g + g + \dots + g}_{n \text{ razy}} \quad \wedge \quad -ng := \underbrace{(-g) + (-g) + \dots + (-g)}_{n \text{ razy}},$$

$$(1.1.1) \quad \forall_{g \in G} : 0g := \mathbf{0},$$

o oczywistych własnościach:

$$\forall_{m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \forall_{g \in G} : mg + ng = (m+n)g \quad \wedge \quad P(ng) = -ng.$$

Ten ostatni najczęściej stosuje się w odniesieniu do grup przemiennych. Poniżej będziemy (niemal) konsekwentnie używać zapisu mnożeniowego.

* * *

Nader istotnym obiektem, wykorzystywanym w podstawowych konstrukcjach algebraicznych, jest

DEFINICJA 6. W notacji Def. 5 **warstwa lewostronna względem podgrupy H w grupie G** to zbiór

$$gH := \{ g \cdot h \mid h \in H \}$$

dla pewnego $g \in G$. Analogicznie definiujemy **warstwę prawostronną względem podgrupy H w grupie G** ,

$$Hg := \{ h \cdot g \mid h \in H \}.$$

▲

Mamy tu także przydatną

DEFINICJA 7. Niechaj $(G, \phi_2 \equiv \cdot, \phi_1, \phi_0)$ będzie grupą w rozumieniu Def. 5 i niech $S \subset G$ będzie podzbiorem jej nośnika o własności

$$\forall_{g \in G} \exists \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ x_1, x_2, \dots, x_n \in S \\ k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \end{array} : g = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} .$$

Wówczas S nazywamy **zbiorem generatorów** grupy G , o samej zaś grupie mówimy, że **jest generowana** przez zbiór S , co zapisujemy jako

$$G = \langle S \rangle .$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 1. (Struktury)

- (1) **Grupa trywialna:** $(\{e\}, (e, e) \mapsto e, e \mapsto e, \{\bullet\} \mapsto e)$.
- (2) Czwórka $(\mathfrak{S}_X, \circ, (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto \text{id}_X)$ złożona ze zbioru \mathfrak{S}_X permutacji elementów pewnego zbioru X (tj. bijektywnych odwzorowań $\sigma : X \curvearrowright$), (nieprzemiennej) operacji 2-argumentowej \circ będącej złożeniem (czyli superpozycją) odwzorowań, operacji 1-argumentowej $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ brania odwrotności odwzorowania i operacji 0-argumentowej $\bullet \mapsto \text{id}_X$, której obrazem jest odwzorowanie identycznościowe. Opisana grupa nosi miano **grupy symetrycznej na X** . W przypadku zbioru $X = \overline{1, n}$ stosuje się oznaczenie $\mathfrak{S}_X \equiv \mathfrak{S}_n$. Grupa symetryczna na zbiorze X jest generowana przez zbiór wszystkich **transpozycji**, tj. permutacji postaci

$$\tau_{x_0, y_0} : X \curvearrowright : x \mapsto \begin{cases} x, & \text{gdy } x \notin \{x_0, y_0\} \\ y_0, & \text{gdy } x = x_0 \\ x_0, & \text{gdy } x = y_0 \end{cases} .$$

W świetle Twierdzenia Cayleya grupa symetryczna jest strukturą podstawową w teorii grup.

- (3) Czwórka $(\mathcal{Z}(G), \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ będąca podgrupą (dowolnej) grupy $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ o nośniku

$$\mathcal{Z}(G) := \{ z \in G \mid \forall_{g \in G} : \phi_2(z, g) = \phi_2(g, z) \}$$

zwanym **centrum grupy G** .

- (4) Dla dowolnej grupy przemiennej $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ i dowolnego zbioru niepustego S określamy grupę przemienną $(\mathbf{Map}(S, G), \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_0)$, której nośnikiem jest zbiór odwzorowań z S w G z działaniem 2-argumentowym $\tilde{\phi}_2$ indukowanym przez ϕ_2 wedle formuły:

$$\tilde{\phi}_2(f_1, f_2) : S \longrightarrow G : s \mapsto \phi_2(f_1(s), f_2(s)) ,$$

zapisanej dla dowolnych $f_1, f_2 \in \mathbf{Map}(S, G)$, z działaniem 1-argumentowym $\tilde{\phi}_1$ indukowanym przez ϕ_1 wedle formuły:

$$\tilde{\phi}_1(f) : S \longrightarrow G : s \mapsto \phi_1(f(s)) ,$$

zapisanej dla dowolnego $f \in \mathbf{Map}(S, G)$, oraz z działaniem 0-argumentowym $\tilde{\phi}_0$ indukowanym przez ϕ_0 wedle formuły:

$$\tilde{\phi}_0(\bullet) : S \longrightarrow G : s \mapsto \phi_0(\bullet) .$$

(5) Czwórka

$$(\text{Aut}(G), \circ, (\cdot)^{-1}, \{\bullet\} \mapsto \text{id}_G),$$

w której $\text{Aut}(G)$ jest zbiorem automorfizmów grupy G , jest grupą, określaną mianem **grupy automorfizmów** G . Odwzorowania postaci

$$\text{Ad}_h : G \curvearrowright : g \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1}, \quad h \in G,$$

są automorfizmami G , zwanymi **automorfizmami wewnętrznymi**. Tworzą one podgrupę normalną $\text{Inn}(G) \subset \text{Aut}(G)$ określaną jako **grupa automorfizmów wewnętrznych** G . Każdy automorfizm z $\text{Aut}(G) \setminus \text{Inn}(G)$ określamy mianem **automorfizmu zewnętrznego**.

(6) Niechaj $\chi : G_1 \rightarrow G_2$ będzie homomorfizmem grup. **Jądro homomorfizmu**

$$\text{Ker } \chi := \{ g \in G_1 \mid \chi(g) = e^{(2)} \},$$

wraz z ograniczonymi doń operacjami G_1 jest podgrupą normalną tejże grupy i każda podgrupa normalna jest jądrem pewnego homomorfizmu. Podobnie **obraz homomorfizmu**

$$\text{Im } \chi := \{ g \in G_2 \mid \exists_{h \in G_1} : g = \chi(h) \} \equiv \chi(G_1)$$

wraz z ograniczonymi doń operacjami G_2 jest podgrupą tejże grupy.

(7) **Grupa ilorazowa** grupy $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ względem dzielnika normalnego H to grupa (patrz: [Sus13, Stw. 40])

$$(G/H, \odot, \text{Inv}_{G/H}, \{\bullet\} \mapsto H)$$

o nośniku

$$G/H := \{ gH \mid g \in G \}$$

i operacjach określonych, jak następuje (poniżej $g, g_1, g_2 \in G$ są dowolne)

- mnożenie: $g_1H \odot g_2H := g_1H \cdot g_2H$;
- odwrotność: $\text{Inv}_{G/H}(gH) := g^{-1}H$;
- jedynka: $1_{G/H} := H$.

(8) Przykładem grupy ilorazowej jest **grupa automorfizmów zewnętrznych** (zwana także – bardziej adekwatnie³ – **grupą klas automorfizmów**)

$$\text{Out}(G) := \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G).$$

✓

PRZYKŁAD(Y) 2. (Homomorfizmy)

(1) Przykłady arytmetyczne (opuszczamy oczywiste elementy struktury):

³Należy zauważyć, że elementami $\text{Out}(G)$ nie są automorfizmy zewnętrzne G , lecz ich warstwy w $\text{Aut}(G)$.

$(G_1, \phi_2^{(1)})$	$(G_2, \phi_2^{(2)})$	χ	typ
$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$	$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$	$x \mapsto x^{\frac{p}{q}}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$	injektywny endomorfizm
$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$	$(\mathbb{R}, +)$	$x \mapsto \log x$	izomorfizm
$(\mathbb{R}, +)$	$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$	$x \mapsto e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}^\times$	izomorfizm
$(\mathbb{C}^\times, \cdot_{\mathbb{C}})$	$(\mathbb{C}^\times, \cdot_{\mathbb{C}})$	$z \mapsto \bar{z}$	automorfizm
$(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}})$	$(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}})$	$z \mapsto \bar{z}$	j/w
$(\mathbb{C}^\times, \cdot_{\mathbb{C}})$	$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$	$z \mapsto z $	epimorfizm
$(\mathbb{R}, +)$	$(U(1), \cdot_{\mathbb{C}})$	$x \mapsto e^{i\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}^\times$	epimorfizm

- (2) Znak permutacji $\text{sgn} : \mathfrak{S}_X \rightarrow \{-1, +1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ to jedyny homomorfizm grup spełniający tożsamość $\text{sgn}(\tau_{x_0, y_0}) = -1$ dla dowolnej transpozycji $\tau_{x_0, y_0} \in \mathfrak{S}_X$ (w zapisie Przykł. 1 (2)).
- (3) Każda podgrupa $H \subset G$ zadaje kanoniczny monomorfizm $j_H : H \rightarrow G$, zwany **włożeniem kanonicznym** (lub **standardowym**), który utożsamia elementy H traktowanego jako niezależny zbiór z tymi samymi elementami H traktowanego jako podzbiór G .
- (4) Operacja 1-argumentowa $\phi_1 : G \curvearrowright$ zadaje izomorfizm między grupą G a przeciwną do niej.
- (5) Odwzorowanie

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Inn}(G) : g \mapsto \text{Ad}_g$$

jest epimorfizmem grup.

- (6) Odwzorowanie

$$\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H : g \mapsto gH$$

określamy mianem **homomorfizmu kanonicznego grupy G w jej grupę ilorazową G/H** . Bywa ono też nazywane **rzutem kanonicznym modulo H** .

✓

Poniżej zbieramy elementarne wyniki strukturalne dotyczące homomorfizmów grup.

TWIERDZENIE 1.1.1 (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie (dla grup)). *W notacji Def. 5 oraz Przykł. 1 (6) i (7) $\text{Ker } \chi$ jest dzielnikiem normalnym G_1 , a nadto istnieje kanoniczny izomorfizm grup*

$$G_1/\text{Ker } \chi \cong \text{Im } \chi.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Tw. 5.1]. \square

Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie pozwala nam dokonać kanonicznego rozkładu dowolnego homomorfizmu.

TWIERDZENIE 1.1.2 (O uniwersalności rzutu kanonicznego). *W notacji Def. 5, Przykł. 1 (6) i (7) oraz Przykł. 2 (3) i (6) (dla $H = \text{Ker } \chi$) istnieje dokładnie jeden monomorfizm indukowany*

$$\tilde{\chi} : G_1/\text{Ker } \chi \rightarrow G_2$$

o własności

$$(1.1.2) \quad \chi = \tilde{\chi} \circ \pi_{G_1/\text{Ker } \chi}.$$

Indukuje on – wedle Tw. 1.1.1 – izomorfizm

$$\lambda_\chi : G_1/\text{Ker } \chi \xrightarrow{\cong} \text{Im } \chi,$$

co pozwala rozłożyć χ w postaci

$$\chi = \mathcal{J}_{\text{Im } \chi} \circ \lambda_\chi \circ \pi_{G_1/\text{Ker } \chi},$$

gdzie $\mathcal{J}_{\text{Im } \chi} : \text{Im } \chi \hookrightarrow G_2$ jest standardowym włożeniem. \blacksquare

Dowód: Patrz: [Sus13, Tw. 5.2]. \square

W następnej kolejności rozważymy

DEFINICJA 8. Pierścień to szóstka $(R, A, M, P, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, w której

- R jest zbiorem;
- $A : R^{\times 2} \rightarrow R : (x, y) \mapsto A(x, y) \equiv x +_R y$ jest operacją 2-argumentową zwaną **dotawaniem**;
- $M : R^{\times 2} \rightarrow R : (x, y) \mapsto M(x, y) \equiv x \cdot_R y$ jest operacją 2-argumentową zwaną **mnóżeniem**;
- $P : R \rightarrow R : x \mapsto P(x) \equiv -x$ jest operacją 1-argumentową zwaną **braniem przeciwności**;
- $\mathbf{0} : \{\bullet\} \rightarrow R : \bullet \mapsto 0$ jest operacją 0-argumentową zwaną **zerem**;
- $\mathbf{1} : \{\bullet\} \rightarrow R : \bullet \mapsto 1$ jest operacją 0-argumentową zwaną **jedynką**,

przy czym składowe struktury spełniają następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(R1) (łączność działań)

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times R & \xrightarrow{A \times \text{id}_R} & R \times R \\ \text{id}_R \times A \downarrow & & \downarrow A \\ R \times R & \xrightarrow{A} & R \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x,y,z \in R} : (x +_R y) +_R z = x +_R (y +_R z);$$

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times R & \xrightarrow{M \times \text{id}_R} & R \times R \\ \text{id}_R \times M \downarrow & & \downarrow M \\ R \times R & \xrightarrow{M} & R \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x,y,z \in R} : (x \cdot_R y) \cdot_R z = x \cdot_R (y \cdot_R z);$$

(R2) (przemienność dodawania)

$$\begin{array}{ccc}
 R \times R & \xrightarrow{\tau_R} & R \times R \\
 & \searrow A & \downarrow A \\
 & & R
 \end{array} \equiv \forall_{x,y \in R} : x +_R y = y +_R x ;$$

(R3) (rozdzielność mnożenia względem dodawania)

$$\begin{array}{ccc}
 R \times R \times R & \xrightarrow{\text{id}_R \times A} & R \times R \\
 \downarrow (M \circ \text{opr}_{1,2}, M \circ \text{opr}_{1,3}) & & \downarrow M \\
 R \times R & \xrightarrow{A} & R
 \end{array} \equiv \forall_{x,y,z \in R} : \begin{array}{l} x \cdot_R (y +_R z) \\ = (x \cdot_R y) +_R (x \cdot_R z) \end{array} ;$$

$$\begin{array}{ccc}
 R \times R \times R & \xrightarrow{A \times \text{id}_R} & R \times R \\
 \downarrow (M \circ \text{opr}_{1,3}, M \circ \text{opr}_{2,3}) & & \downarrow M \\
 R \times R & \xrightarrow{A} & R
 \end{array} \equiv \forall_{x,y,z \in R} : \begin{array}{l} (x +_R y) \cdot_R z \\ = (x \cdot_R z) +_R (y \cdot_R z) \end{array} ;$$

(R4) (istnienie elementów neutralnych względem działań)

$$\begin{array}{ccc}
 R \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_R \times \mathbf{0}} & R \times R \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow A \\
 & & R
 \end{array} \equiv \forall_{x \in R} : x +_R \mathbf{0} = x ;$$

$$\begin{array}{ccc}
 R \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_R \times \mathbf{1}} & R \times R \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow M \\
 & & R
 \end{array} , \quad \begin{array}{ccc}
 \{\bullet\} \times R & \xrightarrow{\mathbf{1} \times \text{id}_R} & R \times R \\
 & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow M \\
 & & R
 \end{array}$$

$$\equiv \forall_{x \in R} : x \cdot_R \mathbf{1} = x = \mathbf{1} \cdot_R x ;$$

(R5) (istnienie elementów przeciwnych)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times \{\bullet\} & \xrightarrow{(\text{id}_R, \text{P}) \circ \text{pr}_1} & R \times R \\
 & \searrow \mathbf{0} \circ \text{pr}_2 & \downarrow A \\
 & & R
 \end{array} \equiv \forall_{x \in R} : x +_R (-x) = \mathbf{0} .$$

Pierścień przeciwny do $(R, A, M, \text{P}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ to pierścień $(R, A, M^{\text{opp}}, \text{P}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ z mnożeniem danym wzorem

$$M^{\text{opp}} := M \circ \tau_R .$$

Pierścień przemienny to taki, w którym mnożenie jest operacją przemienną, co wyraża następujący diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym):

$$(CR) \quad \begin{array}{ccc} R \times R & \xrightarrow{\tau_R} & R \times R \\ & \searrow M & \downarrow M \\ & & R \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x,y \in R} : x \cdot_R y = y \cdot_R x.$$

Dziedzina całkowitości to pierścień przemienny o własności

$$(ID) \quad \forall_{x,y \in R} : (x \cdot_R y = 0 \implies (x = 0 \vee y = 0)),$$

która wyraża brak nietrywialnych dzielników zera.

Pierścień z dzieleniem to taki, w którym spełniony jest warunek

$$\forall_{r \in R \setminus \{0\}} \exists_{s \in R} : r \cdot_R s = s \cdot_R r = \mathbf{1}.$$

Podpierścień pierścienia $(R, A, M, P, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ to szóstka $(Q, A \upharpoonright_{Q \times Q}, M \upharpoonright_{Q \times Q}, P \upharpoonright_Q, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, w której Q jest podzbiorem R o następujących własnościach:

$$(SR1) \quad A : Q^{\times 2} \longrightarrow Q \subset R;$$

$$(SR2) \quad M : Q^{\times 2} \longrightarrow Q \subset R;$$

$$(SR3) \quad P : Q \longrightarrow Q \subset R;$$

$$(SR4) \quad Q \ni \mathbf{1}.$$

Podpierścień o własności

$$(I) \quad M : R \times Q \longrightarrow Q \subset R \quad (\text{wzgl. } M : Q \times R \longrightarrow Q \subset R)$$

nazywamy **ideałem lewostronnym** (wzgl. **prawostronnym**) pierścienia R . **Ideał obustronny** to taki, który jest zarówno lewo- jak i prawostronny. **Ideał główny** to ideał spełniający warunek

$$(PI) \quad \exists_{q_* \in R} \forall_{q \in Q} \exists_{r \in R} : q = r \cdot_R q_* \quad (\text{wzgl. } \exists_{q_* \in R} \forall_{q \in Q} \exists_{r \in R} : q = q_* \cdot_R r),$$

co zapisujemy jako

$$Q = \langle q_* \rangle_R.$$

Homomorfizm pierścienia $(R_1, A^{(1)}, M^{(1)}, P^{(1)}, \mathbf{0}^{(1)}, \mathbf{1}^{(1)})$ w pierścień $(R_2, A^{(2)}, M^{(2)}, P^{(2)}, \mathbf{0}^{(2)}, \mathbf{1}^{(2)})$ to odwzorowanie

$$\chi : R_1 \longrightarrow R_2$$

o własnościach wyrażonych przez diagramy przemiennie (wypisane wraz z równoważnymi zdaniami logicznymi):

$$(RH1) \quad \begin{array}{ccc} R_1 \times R_1 & \xrightarrow{A^{(1)}} & R_1 \\ \chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ R_2 \times R_2 & \xrightarrow{A^{(2)}} & R_2 \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x,y \in R_1} : \begin{array}{l} \chi(x +_{(1)} y) \\ = \chi(x) +_{(2)} \chi(y) \end{array};$$

$$(RH2) \quad \begin{array}{ccc} R_1 \times R_1 & \xrightarrow{M^{(1)}} & R_1 \\ \chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ R_2 \times R_2 & \xrightarrow{M^{(2)}} & R_2 \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x,y \in R_1} : \begin{array}{l} \chi(x \cdot_{(1)} y) \\ = \chi(x) \cdot_{(2)} \chi(y) \end{array};$$

$$(RH3) \quad \begin{array}{ccc} \{\bullet\} & \xrightarrow{\mathbf{1}^{(1)}} & R_1 \\ & \searrow \mathbf{1}^{(2)} & \downarrow \chi \\ & & R_2 \end{array} \quad \equiv \quad \chi(\mathbf{1}^{(1)}) = \mathbf{1}^{(2)}.$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 3. (Struktury)

- (1) **Pierścień trywialny:** $(\{0 = 1\}, (0, 0) \mapsto 0, (0, 0) \mapsto 0, 0 \mapsto 0, 0 \mapsto 0, \bullet \mapsto 0, \bullet \mapsto 0)$.
- (2) Szóstka $(\mathbb{Z}, +, \cdot, n \mapsto -n, \bullet \mapsto 0, \bullet \mapsto 1)$ to pierścień przemienny.
- (3) Szóstka $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, ([k]_n, [l]_n) \mapsto [k + l]_n, ([k]_n, [l]_n) \mapsto [k \cdot l]_n, [k]_n \mapsto [n - k]_n, \bullet \mapsto [0]_n, \bullet \mapsto [1]_n)$, określona dla $n := p \cdot q$, gdzie $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ są dowolne, jest pierścieniem przemiennym z nietrywialnymi dzielnikami zera (bo np. iloczyn niezerowych liczb $[p]_n$ i $[q]_n$ jest równy $[0]_n$).
- (4) Szóstka $(\mathcal{Z}(R), A \upharpoonright_{\mathcal{Z}(R) \times 2}, M \upharpoonright_{\mathcal{Z}(R) \times 2}, P \upharpoonright_{\mathcal{Z}(R)}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ będąca podpierścieniem (dowolnego) pierścienia $(R, A, M, P, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ o nośniku

$$\mathcal{Z}(R) := \{ z \in R \mid \forall r \in R : M(z, r) = M(r, z) \}$$

zwanym **centrum pierścienia** R .

- (5) Zbiór $C(S, \mathbb{R})$ funkcji ciągłych na podzbiórze $S \subset \mathbb{R}$ o wartościach rzeczywistych z dodawaniem, mnożeniem i braniem przeciwności zdefiniowanymi punktowo,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad (-f)(x) := -f(x),$$

dla dowolnych $f, g \in C(S, \mathbb{C})$ i $x \in S$, oraz z funkcją zerową

$$0 : S \longrightarrow \{0\} : x \mapsto 0$$

jako elementem neutralnym dodawania, a także funkcją stałą

$$1 : S \longrightarrow \{1\} : x \mapsto 1$$

jako elementem neutralnym mnożenia jest pierścieniem przemiennym nie będącym dziedziną całkowitości, o ile $|S| > 1$ (wystarczy rozważyć funkcje o rozłącznych nośnikach w S , np. dla $S = [0, 1]$ funkcje $f_1 : x \mapsto \max(\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{4}|, 0)$ oraz $f_2 : x \mapsto \max(\frac{1}{4} - |x - \frac{3}{4}|, 0)$).

- (6) **Pierścień endomorfizmów grupy przemienniej** G to pierścień

$$(\text{End}(G), \tilde{\phi}_2, \circ, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_0, \bullet \mapsto \text{id}_G),$$

którego nośnikiem jest zbiór $\text{End}(G) \subset \mathbf{Map}(G, G)$ endomorfizmów grupy G z operacjami $\tilde{\phi}_n$, $n \in \{0, 1, 2\}$ jak w Przykł. 1 (4) dla $S := G$.

(7) **Pierścień wielomianów o współczynnikach z ciała \mathbb{K}** to pierścień

$$(\mathbb{K}[t], \boxplus, \odot, \mathbb{P}_{\mathbb{K}[t]}, \bullet \mapsto \mathbf{0}, \bullet \mapsto 1_{\mathbb{K}} t^0),$$

o nośniku

$$\mathbb{K}[t] := \{ w : T_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : w(t^n) = 0_{\mathbb{K}} \},$$

zapisanym w terminach przemiennej monoidu

$$(T_{\geq 0} = \{t^n\}_{n \in \mathbb{N}}, \odot, \bullet \mapsto t^0)$$

w grupie przemiennej

$$(T = \{t^m\}_{m \in \mathbb{Z}}, \odot : (t^k, t^l) \mapsto t^{k+l}, \text{Inv} : t^m \mapsto t^{-m}, \bullet \mapsto t^0)$$

a zwanym **zbiorem wielomianów o współczynnikach z \mathbb{K}** , oraz operacjach 2-argumentowych

$$\begin{aligned} \boxplus & : \mathbb{K}[t]^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}[t] : \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m t^m, \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n t^n \right) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n +_{\mathbb{K}} \mu_n) t^n, \\ \odot & : \mathbb{K}[t]^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}[t] : \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m t^m, \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n t^n \right) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k,l=0 \\ k+l=n}}^n \lambda_k \cdot_{\mathbb{K}} \mu_l \right) t^n, \end{aligned}$$

i 1-argumentowej

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}[t]} : \mathbb{K}[t] \circlearrowleft : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n) t^n.$$

(8) Niechaj Λ_1, Λ_2 będą zbiorami, $S := \{S^{(\lambda_2, \lambda_1)}\}_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1}$ zaś niech będzie rodziną zbiorów indeksowaną przez zbiór $\Lambda_2 \times \Lambda_1$. **Macierz typu $\Lambda_2 \times \Lambda_1$ o wyrazach ze zbioru**

$$S^{\cup} := \bigcup_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} S^{(\lambda_2, \lambda_1)}$$

to dowolne odwzorowanie

$$M \in \prod_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} S^{(\lambda_2, \lambda_1)},$$

które będziemy identyfikować z jego zbiorem wartości zapisywanym w postaci

$$(M^{\lambda_2}_{\lambda_1} \equiv M(\lambda_2, \lambda_1))_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1}.$$

O zbiorze tym można myśleć jako o „dwuwymiarowym” rozkładzie („tablicy”) elementów zbioru S^{\cup} nad dziedziną $\Lambda_2 \times \Lambda_1$. W tym samym „geometrycznym” duchu podrodzinę

$$M^{\lambda_2}_{\bullet} := (M^{\lambda_2}_{\lambda_1})_{\lambda_1 \in \Lambda_1}$$

określamy mianem **wiersza macierzy M o indeksie λ_2** , natomiast podrodzinę

$$M^{\bullet}_{\lambda_1} := (M^{\lambda_2}_{\lambda_1})_{\lambda_2 \in \Lambda_2}$$

nazywamy **kolumną macierzy M o indeksie λ_1** . Zbiór wszystkich macierzy opisanego rodzaju oznaczamy symbolem

$$\text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1) \equiv \prod_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} S^{(\lambda_2, \lambda_1)},$$

a w przypadku $N_\alpha := |\Lambda_\alpha| < \infty$, $\alpha \in \{1, 2\}$ także symbolem

$$\text{Mat}(S; N_2 \times N_1) \equiv \prod_{(n_2, n_1) \in \overline{1, N_2 \times 1, N_1}} S^{(n_2, n_1)}.$$

Macierz kwadratowa o wyrazach z S^U to macierz typu $\Lambda \times \Lambda$ dla pewnego zbioru indeksów Λ . Podrodzina

$$(M_\lambda^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

wyrazów macierzy kwadratowej M nosi miano **przekątnej** M . Zbiór macierzy kwadratowych zapisujemy jako

$$\text{Mat}(S; \Lambda) \equiv \prod_{\lambda, \mu \in \Lambda} S^{(\lambda, \mu)},$$

a w przypadku $N := |\Lambda| < \infty$ także jako

$$\text{Mat}(S; N) \equiv \prod_{m, n \in \overline{1, N}} S^{(m, n)}.$$

Elementy $\text{Mat}(S; N)$ nazywamy **macierzami kwadratowymi stopnia N o wyrazach z S^U** .

Ilekcją każdy ze zbiorów $S^{(\lambda_2, \lambda_1)}$ jest nośnikiem struktury grupy przemiennej $(S^{(\lambda_2, \lambda_1)}, +_{(\lambda_2, \lambda_1)}, P_{(\lambda_2, \lambda_1)}, \bullet \mapsto 0_{(\lambda_2, \lambda_1)})$, na zbiorze macierzy $\text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1)$ indukowana jest struktura grupy przemiennej

$$(\text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1), \phi_2^\square \equiv \boxplus_S, \phi_1^\square \equiv P_S, \phi_0^\square : \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\Lambda_2 \times \Lambda_1}),$$

którą na zbiorze wartości odwzorowań z $\text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1)$ realizują następujące operacje, określone “wyraz po wyrazie” i zwane **dodawaniem macierzy**

$$\begin{aligned} \boxplus_S & : \text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1)^{\times 2} \longrightarrow \text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1) \\ & : \left((M_{\lambda_1}^{\lambda_2})_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1}, (N_{\mu_1}^{\mu_2})_{(\mu_2, \mu_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \longmapsto (M_{\lambda_1}^{\lambda_2} +_{(\lambda_2, \lambda_1)} N_{\lambda_1}^{\lambda_2})_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \end{aligned}$$

oraz **braniem przeciwności macierzowej**

$$\begin{aligned} P_S & : \text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1) \curvearrowright \\ & : (M_{\lambda_1}^{\lambda_2})_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \longmapsto (P_{(\lambda_2, \lambda_1)}(M_{\lambda_1}^{\lambda_2}))_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1}, \end{aligned}$$

a wraz z nimi element neutralny dla dodawania macierzy \boxplus_S dany przez **macierz zerową**

$$\mathbf{0}_{\Lambda_2 \times \Lambda_1} := (0_{(\lambda_2, \lambda_1)})_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $|\Lambda_\alpha| \equiv N_\alpha < \infty$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ i wszystkie zbiory $S^{(n_3, n_2)}, S^{(n_2, n_1)} \equiv R$ o indeksach $n_\alpha \in \overline{1, N_\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ są nośnikami (tej samej) struktury pierścienia $(R, +_R, \cdot_R, P_R, \bullet \mapsto 0_R)$, możemy określić **mnożenie macierzy**

$$\begin{aligned} \boxtimes_R & : \text{Mat}(R; N_3 \times N_2) \times \text{Mat}(R; N_2 \times N_1) \longrightarrow \text{Mat}(R; N_3 \times N_1) \\ & : \left((M_{m_2}^{m_3})_{(m_3, m_2) \in \overline{1, N_3 \times 1, N_2}}, (N_{n_1}^{n_2})_{(n_2, n_1) \in \overline{1, N_2 \times 1, N_1}} \right) \end{aligned}$$

$$\mapsto \left(\sum_{n_2=1}^{N_2} M_{n_2}^{n_3} \cdot_R N_{n_1}^{n_2} \right)_{(n_3, n_1) \in \overline{1, N_3} \times \overline{1, N_1}},$$

jawnie łączne i rozdzielne względem dodawania \boxplus_R . Odwzorowania te indukują na zbiorze $\text{Mat}(R; N)$ strukturę pierścienia

$$(\text{Mat}(R; N), \boxplus_R, \boxminus_R, P_R, \bullet \mapsto \mathbf{0}_N, \bullet \mapsto \mathbf{1}_N)$$

o jedności danej przez **macierz jednostkową**

$$\mathbf{1}_N := (\delta_{m,n}^R)_{m,n \in \overline{1, N}}.$$

Pierścień ten nosi miano **pierścienia macierzowego stopnia N nad R** .

✓

PRZYKŁAD(Y) 4. (Homomorfizmy)

- (1) Dla dowolnego pierścienia R odwzorowanie $\mathbb{Z} \rightarrow R : n \mapsto \underbrace{1 +_R 1 +_R \cdots +_R 1}_{n \text{ razy}}$ jest homomorfizmem.
- (2) Odwzorowanie ewaluacji $\text{ev}_{\frac{1}{2}} : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(\frac{1}{2})$ jest epimorfizmem pierścienia z Przykł. 3 (5) na pierścień $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, P_{\mathbb{R}}, \bullet \mapsto [(\frac{0}{1})_{n \in \mathbb{N}}]_{\sim}, \bullet \mapsto [(\frac{1}{1})_{n \in \mathbb{N}}]_{\sim})$.
- (3) Odwzorowanie $\mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}(2; \mathbb{R}) : x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ jest monomorfizmem pierścienia $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}, P_{\mathbb{C}}, \mathbf{0}_{\mathbb{C}}, \mathbf{1}_{\mathbb{C}})$ w pierścień z Przykł. 3 (6).

✓

Na koniec naszego przeglądu elementarnych struktur algebraicznych natrafiamy na

DEFINICJA 9. **Ciało** to siódemka $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, w której

- \mathbb{K} jest zbiorem;
- $A : \mathbb{K}^{\times 2} \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto A(x, y) \equiv x +_{\mathbb{K}} y$ jest operacją 2-argumentową zwaną **dodawaniem**;
- $M : \mathbb{K}^{\times 2} \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto M(x, y) \equiv x \cdot_{\mathbb{K}} y$ jest operacją 2-argumentową zwaną **mnożeniem**;
- $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto P(x) \equiv -x$ jest operacją 1-argumentową zwaną **braniem przeciwności**;
- $\text{Inv} : \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}(\bullet)\} \rightarrow \mathbb{K}^{\times} : x \mapsto \text{Inv}(x) \equiv x^{-1}$ jest operacją 1-argumentową (o ograniczonym nośniku) zwaną **braniem odwrotności**;
- $\mathbf{0} : \{\bullet\} \rightarrow \mathbb{K} : \bullet \mapsto 0$ jest operacją 0-argumentową zwaną **zerem**;
- $\mathbf{1} : \{\bullet\} \rightarrow \mathbb{K} : \bullet \mapsto 1$ jest operacją 0-argumentową zwaną **jedynką**,

przy czym składowe struktury spełniają następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(F1) (łączność działań)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{A \times \text{id}_{\mathbb{K}}} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ \text{id}_{\mathbb{K}} \times A \downarrow & & \downarrow A \\ \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{A} & \mathbb{K} \end{array} \quad \equiv \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K} : (x +_{\mathbb{K}} y) +_{\mathbb{K}} z = x +_{\mathbb{K}} (y +_{\mathbb{K}} z);$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{M \times \text{id}_{\mathbb{K}}} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
 \text{id}_{\mathbb{K}} \times M \downarrow & & \downarrow M \\
 \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{M} & \mathbb{K}
 \end{array} \equiv \forall_{x,y,z \in \mathbb{K}} : (x \cdot_{\mathbb{K}} y) \cdot_{\mathbb{K}} z = x \cdot_{\mathbb{K}} (y \cdot_{\mathbb{K}} z);$$

(F2) (przemienność działań)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{K}}} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
 & \searrow A & \downarrow A \\
 & & \mathbb{K}
 \end{array} \equiv \forall_{x,y \in \mathbb{K}} : x +_{\mathbb{K}} y = y +_{\mathbb{K}} x;$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{K}}} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
 & \searrow M & \downarrow M \\
 & & \mathbb{K}
 \end{array} \equiv \forall_{x,y \in \mathbb{K}} : x \cdot_{\mathbb{K}} y = y \cdot_{\mathbb{K}} x;$$

(F3) (rozdzielność mnożenia względem dodawania)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{K}} \times A} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
 (M \circ \text{pr}_{1,2}, M \circ \text{pr}_{1,3}) \downarrow & & \downarrow M \\
 \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}
 \end{array} \equiv \forall_{x,y,z \in \mathbb{K}} : \begin{aligned} & x \cdot_{\mathbb{K}} (y +_{\mathbb{K}} z) \\ & = (x \cdot_{\mathbb{K}} y) +_{\mathbb{K}} (x \cdot_{\mathbb{K}} z) \end{aligned};$$

(F4) (istnienie elementów neutralnych względem działań)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{K}} \times 0} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow A \\
 & & \mathbb{K}
 \end{array} \equiv \forall_{x \in \mathbb{K}} : x +_{\mathbb{K}} 0 = x;$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{K}} \times 1} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow M \\
 & & \mathbb{K}
 \end{array} \equiv \forall_{x \in \mathbb{K}} : x \cdot_{\mathbb{K}} 1 = x;$$

(F5) (istnienie elementów przeciwnych i odwrotnych do niezerowych)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times \{\bullet\} & \xrightarrow{(\text{id}_{\mathbb{K}}, \text{P}) \circ \text{pr}_1} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
 & \searrow 0 \circ \text{pr}_2 & \downarrow A \\
 & & \mathbb{K}
 \end{array} \equiv \forall_{x \in \mathbb{K}} : x +_{\mathbb{K}} (-x) = 0;$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}^\times \times \{\bullet\} & \xrightarrow{(\text{id}_{\mathbb{K}}, \text{Inv}) \circ \text{pr}_1} & \mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}^\times \\
& \searrow \text{pr}_2 & \downarrow M \\
& & \mathbb{K}^\times
\end{array}
\quad \equiv \quad \forall_{x \in \mathbb{K}^\times} : x \cdot_{\mathbb{K}} x^{-1} = 1;$$

(F6) (nietrywialność) $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$.

Podciało ciała $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ to siódemka $(\mathbb{L}, A|_{\mathbb{L} \times \mathbb{L}}, M|_{\mathbb{L} \times \mathbb{L}}, P|_{\mathbb{L}}, \text{Inv}|_{\mathbb{L} \setminus \{0\}}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, w której \mathbb{L} jest podzbiorem \mathbb{K} o następujących własnościach:

(SF1) $A : \mathbb{L}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$;

(SF2) $M : \mathbb{L}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$;

(SF3) $P : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$;

(SF4) $\text{Inv} : \mathbb{L} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$;

(SF5) $\mathbb{L} \ni 1$.

Homomorfizm ciała⁴. $(\mathbb{K}_1, A^{(1)}, M^{(1)}, P^{(1)}, \text{Inv}^{(1)}, \mathbf{0}^{(1)}, \mathbf{1}^{(1)})$ w ciało $(\mathbb{K}_2, A^{(2)}, M^{(2)}, P^{(2)}, \text{Inv}^{(2)}, \mathbf{0}^{(2)}, \mathbf{1}^{(2)})$ to odwzorowanie

$$\chi : \mathbb{K}_1 \longrightarrow \mathbb{K}_2$$

o własnościach

$$\text{(FH1)} \quad \begin{array}{ccc}
\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_1 & \xrightarrow{A^{(1)}} & \mathbb{K}_1 \\
\chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\
\mathbb{K}_2 \times \mathbb{K}_2 & \xrightarrow{A^{(2)}} & \mathbb{K}_2
\end{array}
\quad \equiv \quad \forall_{x, y \in \mathbb{K}_1} : \chi(x +_{(1)} y) = \chi(x) +_{(2)} \chi(y);$$

$$\text{(FH2)} \quad \begin{array}{ccc}
\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_1 & \xrightarrow{M^{(1)}} & \mathbb{K}_1 \\
\chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\
\mathbb{K}_2 \times \mathbb{K}_2 & \xrightarrow{M^{(2)}} & \mathbb{K}_2
\end{array}
\quad \equiv \quad \forall_{x, y \in \mathbb{K}_1} : \chi(x \cdot_{(1)} y) = \chi(x) \cdot_{(2)} \chi(y).$$

Dowolny inwolutywny (anty)automorfizm⁵

$$J : \mathbb{K} \curvearrowright : \lambda \mapsto \bar{\lambda},$$

$$J(\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) = J(\lambda) +_{\mathbb{K}} J(\mu), \quad J(\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \mu) = J(\mu) \cdot_{\mathbb{K}} J(\lambda), \quad J \circ J = \text{id}_{\mathbb{K}}$$

określamy mianem **sprzężenia**.

Jądro homomorfizmu to zbiór

$$\text{Ker } \chi := \{ x \in \mathbb{K}_1 \mid \chi(x) = \mathbf{0}^{(2)} \},$$

natomiast **obraz homomorfizmu** to zbiór

$$\text{Im } \chi := \{ x \in \mathbb{K}_2 \mid \exists_{y \in \mathbb{K}_1} : x = \chi(y) \} \equiv \chi(\mathbb{K}_1).$$

⁴Godzi się w tym miejscu zauważyć, że wszystkie homomorfizmy ciał są monomorfizmami.

⁵Według konwencji przyjętej w tym wykładzie każde ciało jest pierścieniem przemiennym, co usuwa podstawę do rozróżnienia pomiędzy izomorfizmami moltiplikatywnymi i antymoltiplikatywnymi (tj. takimi, które odwracają porządek czynników). Ponieważ jednak niektóre z konstrukcji opisywanych w dalszej części kursu dopuszczają uogólnienia na szerszą klasę pierścieni, zdecydowaliśmy się zachować – tam gdzie jest to możliwe – bardziej ogólny zapis.



PRZYKŁAD(Y) 5. (Struktura)

- (1) Liczby rzeczywiste ze strukturą indukowaną przez tę obecną na zbiorze liczb wymiernych poprzez konstrukcję Cantora–Méraya.
- (2) Siódemka $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, ([k]_p, [l]_p) \mapsto [k+l]_p, ([k]_p, [l]_p) \mapsto [k \cdot l]_p, [k]_p \mapsto [p-k]_p, [k]_p \mapsto [\tilde{k}]_p, \bullet \mapsto [0]_p, \bullet \mapsto [1]_p)$, określona dla dowolnej liczby pierwszej p , o nośniku

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{[0]_p, [1]_p, [2]_p, \dots, [p-1]_p\}$$

będącym zbiorem reszt *modulo* p ($[x]_p$ jest resztą z dzielenia liczby x przez p), w którym każdej reszcie $[k]_p$ odpowiada (dokładnie jedna) reszta $[\tilde{k}]_p$ o własności $[k \cdot \tilde{k}]_p = [0]_p$. Struktura ta nosi miano **ciała reszt modulo** p .

- (3) **Ciało liczb zespolonych** $(\mathbb{C}, A_{\mathbb{C}} \equiv +_{\mathbb{C}}, M_{\mathbb{C}} \equiv \cdot_{\mathbb{C}}, P_{\mathbb{C}}, \text{Inv}_{\mathbb{C}}, \mathbf{0}_{\mathbb{C}}, \mathbf{1}_{\mathbb{C}})$, w którym
- $\mathbb{C} := \mathbb{R}^{\times 2}$;
 - $A_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{\times 2} \rightarrow \mathbb{C} : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$;
 - $M_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{\times 2} \rightarrow \mathbb{C} : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$;
 - $P_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto (-x, -y)$;
 - $\text{Inv}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\} =: \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$;
 - $\mathbf{0}_{\mathbb{C}} : \bullet \mapsto (0, 0)$;
 - $\mathbf{1}_{\mathbb{C}} : \bullet \mapsto (1, 0)$.



PRZYKŁAD(Y) 6. (Homomorfizmy)

- (1) Niechaj $(\mathbb{K}, A \equiv +, M \equiv \cdot, P, \text{Inv}, \bullet \mapsto 0, \bullet \mapsto 1)$ będzie ciałem o **charakterystyce** $\text{char}(\mathbb{K}) = p$ danej przez liczbę pierwszą p , przy czym przez charakterystykę ciała rozumiemy najmniejszą z liczb $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dla których jest spełniona równość

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ razy}} = 0,$$

np. $\text{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$. Odwzorowanie

$$\mathbb{K} \curvearrowright : x \mapsto x^p \equiv \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{p \text{ razy}}$$

jest endomorfizmem ciała \mathbb{K} . Prawdziwość tego stwierdzenia jest prostą konsekwencją twierdzenia o współczynniku dwumianowym dla liczby pierwszej p , które stwierdza, co następuje:

$$\forall_{k \in \overline{1, p-1}} : \binom{p}{k}_p = 0.$$

- (2) Odwzorowanie

$$(1.1.3) \quad \mathcal{J}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$$

jest monomorfizmem ciał.



2. Struktury algebraiczne złożone

Tytułem ustalenia języka dyskursu zaczniemy od ogólnej

DEFINICJA 10. **Struktura algebraiczna złożona** to kolekcja

$$(\mathcal{S}_\alpha, \phi_i)_{(\alpha,i) \in A \times I}$$

(indeksowana przez zbiór $A \times I$) struktur algebraicznych prostych \mathcal{S}_α (w rozumieniu Def. 3) pozostających w relacji określonej przez odwzorowania ϕ_i , których dziedzinami i przeciwdziedzinaami są iloczyny kartezjańskie nośników rzeczonych struktur prostych. Własności operacji współdefiniujących każdą ze struktur składowych oraz ich wzajemne relacje, jak również relacje pomiędzy strukturami składowymi ustanawiane przez odwzorowania ϕ_i są określane przez aksjomatykę struktury.

Homomorfizm struktury algebraicznej $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{S}_{1\alpha}, \phi_i^{(1)})_{(\alpha,i) \in A \times I}$ w **strukturę algebraiczną** $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{S}_{2\alpha}, \phi_i^{(2)})_{(\alpha,i) \in A \times I}$ (tego samego rodzaju) to kolekcja homomorfizmów $\chi_\alpha : S_{1\alpha} \rightarrow S_{2\alpha}$ struktur prostych \mathcal{S}_1 (o nośnikach $S_{1\alpha}$) w struktury proste \mathcal{S}_2 (o nośnikach $S_{2\alpha}$), związanych dodatkowym warunkiem: niechaj $\phi_i^{(1)}$, $i \in I$ będzie dowolnym odwzorowaniem współdefiniującym \mathcal{S}_1 , niech też $\times_{k=1}^{N_1} S_{1\alpha_k}$ i $\times_{l=1}^{N_2} S_{2\alpha_l}$ będą – odpowiednio – dziedziną i przeciwdziedzina $\phi_i^{(1)}$, a wtedy

$$\phi_i^{(2)} \circ \times_{k=1}^{N_1} \chi_{\alpha_k} = \times_{l=1}^{N_2} \chi_{\alpha_l} \circ \phi_i^{(1)}.$$

Częstą praktyką jest ograniczanie rozważań do struktur złożonych, dla których część definiujących struktur prostych jest identyczna, i zarazem do homomorfizmów zachowujących te składowe struktury proste (tj. takich, dla których $\chi_\alpha = \text{id}_{S_{1\alpha}}$ dla wyróżnionego podzbioru zbioru indeksów A), a wtedy zwyczajowo opuszczamy nie tylko odnośne składowe χ_α , lecz także nośniki $S_{1\alpha}$ ustalonych struktur prostych w zapisie struktury złożonej. ▲

Pośród nieskończonych galaktyk struktur złożonych znajdujemy te o wyjątkowym znaczeniu fizykalnym, dla których cechą wspólną jest obecność szczególnego homomorfizmu pewnej wyróżnionej (bazowej) struktury prostej (grupy, pierścienia) w zbiór automorfizmów nośnika struktury złożonej. Sytuację tę porządkuje pojęciowo

DEFINICJA 11. Niechaj X i Ω będą zbiorami. **Realizacja zbioru Ω na zbiorze X** to odwzorowanie

$$\mathcal{R} : \Omega \rightarrow \mathbf{Map}(X, X) : \omega \mapsto \mathcal{R}_\omega.$$

Z powyższym stowarzyszamy **lewostronne działanie zbioru Ω na zbiorze X** dane przez

$$\ell : \Omega \times X \rightarrow X : (\omega, x) \mapsto \mathcal{R}_\omega(x) \equiv \omega \triangleright x,$$

jak również **prawostronne działanie zbioru Ω na zbiorze X** dane przez

$$\rho : X \times \Omega \rightarrow X : (x, \omega) \mapsto \mathcal{R}_\omega(x) \equiv x \triangleleft \omega.$$

Zbiór X określamy mianem **nośnika działania**, natomiast zbiór Ω – mianem **dziedziny operatorów**. ▲

Ilekoć któryś ze zbiorów X, Ω występujących w powyższej definicji sam jest nośnikiem struktury algebraicznej, naturalnym staje się wyróżnienie tych realizacji (a więc także działań), które są w oczywistym znaczeniu zgodne z ową strukturą. Tak właśnie będzie w przypadkach przywołanych poniżej.

Pierwszego ważnego przykładu z tak ogólnie scharakteryzowanej kategorii struktur dostarcza

DEFINICJA 12. Przyjmijmy zapis Def. 5 i Przykł. 1 (2). Niechaj X będzie zbiorem i niech $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ będzie grupą. **Lewostronne działanie grupy G na zbiorze X** to odwzorowanie

$$\lambda : G \times X \longrightarrow X : (g, x) \longmapsto g \triangleright x$$

spełniające następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(IDG1) (homomorficzność działania)

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\text{id}_G \times \lambda} & G \times X \\ \phi_2 \times \text{id}_X \downarrow & & \downarrow \lambda \\ G \times X & \xrightarrow{\lambda} & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{g, h \in G} \forall_{x \in X} : g \triangleright (h \triangleright x) = \phi_2(g, h) \triangleright x;$$

(IDG2) (trywialność działania elementu neutralnego)

$$\begin{array}{ccc} \{\bullet\} \times X & \xrightarrow{\phi_0 \times \text{id}_X} & G \times X \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \lambda \\ & & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x \in X} : e \triangleright x = x.$$

Parę (X, λ) określamy mianem **zbioru z działaniem lewostronnym G** (lub też – z angielska – **G -zbiorem lewostronnym**).

Prawostronne działanie grupy G na zbiorze X to odwzorowanie

$$\varrho : X \times G \longrightarrow X : (x, g) \longmapsto x \triangleleft g$$

spełniające następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(rDG1) (homomorficzność działania)

$$\begin{array}{ccc} X \times G \times G & \xrightarrow{\varrho \times \text{id}_G} & X \times G \\ \text{id}_X \times \phi_2 \downarrow & & \downarrow \varrho \\ X \times G & \xrightarrow{\varrho} & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{g, h \in G} \forall_{x \in X} : (x \triangleleft h) \triangleleft g = x \triangleleft \phi_2(h, g);$$

(rDG2) (trywialność działania elementu neutralnego)

$$\begin{array}{ccc} X \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_X \times \phi_0} & X \times G \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \varrho \\ & & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x \in X} : x \triangleleft e = x.$$

Parę (X, ϱ) określamy mianem **zbioru z działaniem prawostronnym** G (lub też **prawostronnym G -zbiorem**).

Oznaczywszy – dla dowolnego $g \in G$ –

$$\lambda_g : X \longrightarrow X : x \longmapsto g \triangleright x, \quad \varrho_g : X \longrightarrow X : x \longmapsto x \triangleleft g.$$

otrzymujemy homomorfizm

$$\lambda : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X : g \longmapsto \lambda_g$$

grupy G w grupę symetryczną \mathfrak{S}_X zbioru X . Homomorfizm ten określamy mianem **lewostronnej realizacji** (albo inaczej **reprezentacji**) **grupy G na zbiorze X** indukowanej przez działanie λ . Analogicznie homomorfizm

$$\varrho : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X : g \longmapsto \varrho_g$$

grupy G w grupę \mathfrak{S}_X jest określamy mianem **prawostronnej realizacji** (albo inaczej **reprezentacji**) **grupy G na zbiorze X** indukowanej przez działanie ϱ . W przypadku zbiorów z dodatkową strukturą domagamy się zwykle, iżby obraz grupy względem reprezentacji zawierał się w podgrupie $\text{Aut}(X) \subset \mathfrak{S}_X$ automorfizmów rzeczonyj struktury.

Niech $(X_\alpha, \lambda^{(\alpha)})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą zbiorami z działaniem lewostronnym odpowiednich grup G_α . **Odwzorowanie lewostronnie ekwiwariantne** $(X_1, \lambda^{(1)})$ w $(X_2, \lambda^{(2)})$ to para (φ, f) odwzorowań

$$\varphi : G_1 \longrightarrow G_2, \quad f : X_1 \longrightarrow X_2,$$

z których pierwsze jest homomorfizmem grup, drugie zaś spełnia aksjomat (wyrażony przez diagram przemienny i równoważne zdanie logiczne):

$$(1GE) \quad \begin{array}{ccc} G_1 \times X_1 & \xrightarrow{\lambda^{(1)}} & X_1 \\ \varphi \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G_2 \times X_2 & \xrightarrow{\lambda^{(2)}} & X_2 \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{(g,x) \in G_1 \times X_1} : f \circ \lambda_g^{(1)}(x) = \lambda_{\varphi(g)}^{(2)} \circ f(x).$$

Jeśli f jest przy tym bijekcją, to mówimy o **ekwiwariantnym izomorfizmie zbiorów z działaniem lewostronnym**. Ilekroć $G_1 = G_2$ i $\varphi = \text{id}_{G_1}$, mówimy nierzadko o **odwzorowaniu lewostronnie G -ekwiwariantnym**.

Odwzorowanie prawostronnie (G -)ekwiwariantne definiujemy analogicznie. ▲

NOTACJA 2. O ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy czasem używać pojęcia „działanie” w odniesieniu do odwzorowania λ . (wzgl. ϱ).

* * *

PRZYKŁAD(Y) 7. (Struktura)

- (1) **Działanie trywialne:** $\lambda : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X : g \longmapsto \text{id}_X$.
- (2) Naturalne działanie grupy symetrycznej \mathfrak{S}_X na zbiorze X poprzez permutacje jego elementów: $\lambda = \text{id}_{\mathfrak{S}_X}$.

- (3) Działanie grupy \mathbb{Z} (z dodawaniem) na zbiorze \mathbb{R} przez przesunięcia, $\lambda = T : \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{R}} : n \mapsto T_n$, gdzie $T_n : \mathbb{R} \circlearrowright : r \mapsto r + n$. Innym typem działania tej samej grupy \mathbb{Z} na tym samym zbiorze \mathbb{R} jest odwzorowanie $\lambda = (-1)^{\cdot} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{R}} : n \mapsto (-1)^n$, gdzie $(-1)^n : \mathbb{R} \circlearrowright : r \mapsto (-1)^n \cdot r$. Przykłady te dokumentują możliwość istnienia *całkowicie różnych* realizacji *tej samej* grupy na *tym samym* zbiorze.
- (4) **Działanie dołączone** grupy G na sobie: $\lambda = \text{Ad} : G \rightarrow \text{Inn}(G) \subset \mathfrak{S}_G$. Elementy $g, \text{Ad}_h(g) \in G$ nazywamy **(wzajem) sprzężonymi**. Określenie to przenosimy także na podgrupy nazywając podgrupę $\text{Ad}_g(H)$ **podgrupą sprzężoną względem podgrupy $H \subset G$** .
- (5) **Działanie regularne lewostronne** grupy G na sobie: $\lambda = \ell : G \rightarrow \mathfrak{S}_G : g \mapsto \ell_g$, gdzie $\ell_g : G \circlearrowright : h \mapsto g \cdot h$. **Działanie regularne prawostronne** grupy G na sobie: $\rho = \wp : G \rightarrow \mathfrak{S}_G : g \mapsto \wp_g$, gdzie $\wp_g : G \circlearrowright : h \mapsto h \cdot g$.
- (6) Działanie grupy symetrycznej \mathfrak{S}_X na $\text{Map}(X, Y)$, dla dowolnej pary zbiorów X, Y , poprzez **cofnięcie** względem odwrotności permutacji,

$$(\cdot)^* \circ \text{Inv} : \mathfrak{S}_X \rightarrow \mathfrak{S}_{\text{Map}(X, Y)} : \sigma \mapsto (\sigma^{-1})^* ,$$

$$(\sigma^{-1})^* : \text{Map}(X, Y) \circlearrowright : f \mapsto f \circ \sigma^{-1} .$$

Jego złożenie z działaniem dowolnej grupy G na X prowadzi do realizacji tejże grupy na $\text{Map}(X, Y)$, szczególnie istotnej w kontekście fizykalnym (w którym najczęściej zbiór X jest nośnikiem dodatkowej struktury, np. struktury topologicznej lub różniczkowej, jak to ma miejsce choćby w przypadku czasoprzestrzeni, na której działa grupą izometrii, albo też wiązki pól rozważanego modelu dynamiki, na której to wiązce działa grupa symetrii teorii pola).

- (7) Naturalne działanie grupy obrotów w przestrzeni \mathbb{R}^3 o środku w punkcie o współrzędnych $(0, 0, 0)$ ogranicza się do dowolnej 2-sfery o środku w tymże punkcie.

✓

PRZYKŁAD(Y) 8. (Homomorfizmy)

- (1) Niechaj $\Delta_{(0,0)}$ będzie zbiorem trójkątów na płaszczyźnie o jednym z wierzchołków w punkcie $(0, 0)$. Na zbiorze tym grupa $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ odwracalnych przekształceń liniowych punktów płaszczyzny działa w naturalny sposób: obrazem punktu trójkąta o współrzędnych (x, y) względem działania macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ jest punkt płaszczyzny o współrzędnych $(a \cdot x + b \cdot y, c \cdot x + d \cdot y)$. Odwzorowanie $A : \Delta_{(0,0)} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ przyporządkowujące trójkątowi jego pole powierzchni jest $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ -ekwiwariantne względem rzeczonożego działania na $\Delta_{(0,0)}$ i następującego działania na $\mathbb{R}_{>0}$:

$$\text{GL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, r \right) \mapsto (a \cdot d - b \cdot c) \cdot r .$$

- (2) Dla pary grup $(G_\alpha, \phi_2^{(\alpha)}, \phi_1^{(\alpha)}, \phi_0^{(\alpha)})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ dowolny homomorfizm $\chi : G_1 \rightarrow G_2$ jest odwzorowaniem G_1 -ekwiwariantnym względem działania dołączonego,

$$\chi : (G_1, \text{Ad}) \rightarrow (G_2, \text{Ad} \circ (\chi \times \text{id}_{G_2})) ,$$

przy czym

$$\text{Ad} : G_1 \times G_1 \longrightarrow G_1 : (g, h) \longmapsto \text{Ad}_g(h),$$

jak również względem działania lewostronnego regularnego,

$$\chi : (G_1, \ell) \longrightarrow (G_2, \ell \circ (\chi \times \text{id}_{G_2})),$$

przy czym

$$\ell : G_1 \times G_1 \longrightarrow G_1 : (g, h) \longmapsto g \cdot h,$$

por. Przykł. 7(5). W tym ostatnim przypadku konkretnym przykładem jest automorfizm antypodalny $\alpha : \text{U}(1) \curvearrowright : u \longmapsto -u$ na okręgu jednostkowym $\text{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$.

- (3) Niechaj $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ będzie grupą, $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ zaś – dowolnym ciałem, traktowanym jako zbiór z trywialnym działaniem $\lambda_0 : G \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : (g, k) \longmapsto k$. **Funkcje klas grupy G o wartościach z ciała \mathbb{K}** są definiowane jako odwzorowania G -ekwiwariantne

$$f : (G, \text{Ad}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \lambda_0).$$

Konkretnym przykładem jest tutaj znak permutacji.

✓

Przypomnijmy też istotne elementy anatomii działania grupy na zbiorze, pozwalające sklasyfikować w naturalny sposób typy działań.

DEFINICJA 13. W notacji Def. 5 i 12 **stabilizator** (lub **grupa izotropii**) **elementu** $x \in X$ nośnika działania grupy G to zbiór

$$G_x := \{ g \in G \mid g \triangleright x = x \}.$$

Orbita elementu $x \in X$ **względem działania** λ to zbiór

$$G \triangleright x := \{ \lambda_g(x) \mid g \in G \}.$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 9.

- (1) Orbitą $x \in X$ wzgl. działania trywialnego grupy G na X jest $\{x\}$.
- (2) Orbitą $x \in X$ wzgl. naturalnego działania \mathfrak{S}_X na X jest X .
- (3) Zbiór $\{-r, r\}$ jest orbitą działania (-1) grupy \mathbb{Z} na \mathbb{R} z Przykł. 7(3).
- (4) Orbitę $g \in G$ wzgl. działania dołączonego grupy G na sobie (Przykł. 7(4)) określamy mianem **klasy sprzężoności** g i oznaczamy

$$C(g) := \{ \text{Ad}_h(g) \mid h \in G \}.$$

- (5) Orbitą $g \in G$ wzgl. działania regularnego grupy G na sobie (Przykł. 7(5)) jest G . Orbitą wzgl. tegoż działania ograniczonego do podgrupy H ,

$$\ell : H \times G \longrightarrow G : (h, g) \longmapsto h \cdot g,$$

jest warstwa prawostronna Hg .

- (6) Orbitą $z \in \mathbb{C}$ wzgl. działania R grupy $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ z Przykł. 7(7) jest okrąg $|z| \in \text{U}(1)$.

✓

Podstawową własność orbit opisuje

STWIERDZENIE 2. *Przyjmijmy zapis Def. 13. Relacja na zbiorze $X \ni x, y$ będącym nośnikiem działania grupy G zadana, jak następuje:*

$$x \sim_\lambda y \iff x \in G \triangleright y,$$

jest relacją równoważności. Działanie grupy zadaje zatem rozkład nośnika na sumę rozłączną orbit względem tego działania.

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 53].

□

W odwołaniu do wprowadzonych powyżej pojęć możemy wysłowić

DEFINICJA 14. W notacji Def. 5, 12, 13 działanie λ nazywamy

- **trywialnym**, jeśli $\forall_{g \in G} : \lambda_g = \text{id}_X$, tj. wszystkie orbity działania są jednoelementowe;
- **przechodnim** (lub **tranzytywnym**), jeśli $\forall_{x, y \in X} : x \sim_\lambda y$, tj. zbiór X jest pojedynczą orbitą $G \triangleright x = X$ (dowolnego) swojego elementu $x \in X$;
- **wolnym**, jeśli $\forall_{g, h \in G} : g \triangleright x = h \triangleright x \implies g = h$, tj. $\forall_{x \in X} : G_x = \{e\}$, co oznacza, że odwzorowanie λ_g nie ma punktów stałych dla $g \in G \setminus \{e\}$, a wtedy określamy X mianem **przestrzeni jednorodnej**;
- **wiernym** (lub **efektywnym**), jeśli $\forall_{g, h \in G} : (g \neq h \implies \exists_{x \in X} : g \triangleright x \neq h \triangleright x)$, czyli $\text{Ker } \lambda = \{e\}$, a wtedy grupa G jest kanonicznie izomorficzna z podgrupą $\text{Im } \lambda \subset \mathfrak{S}_X$;
- **regularnym**, jeśli jest ono przechodnie i wolne, a wtedy określamy X mianem **G -torsora** lub **głównej przestrzeni jednorodnej**.

▲

PRZYKŁAD(Y) 10.

- (1) Ograniczenie działania grupy na zbiorze do jądra tego działania jest działaniem trywialnym.
- (2) Działanie grupy diedralnej rzędu $2n$ na zbiorze wierzchołków n -kąta foremego oraz (indukowane) działanie lewostronne grupy G na zbiorze warstw G/H wzgl. podgrupy $H \subset G$ są przechodnie.
- (3) Antypodalne działanie grupy odbić wzgl. punktu $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ (izomorficznej z \mathbb{Z}_2) na dowolnej 2-sferze o środku w tym punkcie jest wolne, tak samo – działanie regularne dowolnej grupy na sobie.
- (4) Działanie dołączone grupy G na sobie z Przykł. 7 (4) jest wierne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{Z}(G) = \{e\}$. Podobnie, (indukowane) działanie lewostronne grupy G na zbiorze warstw G/H wzgl. podgrupy $H \subset G$ jest tego typu wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$.
- (5) Zbiór izomorfizmów $\text{Iso}(G_1, G_2)$ pomiędzy grupami G_1 i G_2 jest torsorem grupy $\text{Aut}(G_1)$ wzgl. działania prawostronnego

$$\varrho : \text{Iso}(G_1, G_2) \times \text{Aut}(G_1) \longrightarrow \text{Iso}(G_1, G_2) : (\chi, \alpha) \longmapsto \chi \circ \alpha.$$

Jest on zarazem torsorem grupy $\text{Aut}(G_2)$ wzgl. działania lewostronnego

$$\lambda : \text{Aut}(G_2) \times \text{Iso}(G_1, G_2) \longrightarrow \text{Iso}(G_1, G_2) : (\alpha, \chi) \longmapsto \alpha \circ \chi.$$

✓

Zbiory (z dodatkową strukturą taką jak, np., struktura topologiczna, różniczkowa, metryczna, liniowa itp.) z działaniem grupy (także – bywa – wyposażonej w zgodną ze strukturą algebraiczną strukturę analityczno-geometryczną) pojawiają się w niniejszym kursie w szczególności w kontekście geometrycznej konstrukcji spinorów (à la Cartan), wiązek spinorowych oraz dyskusji anomalii cechowania. Wtedy też rozwiniemy nieco opis zbiorów z działaniem w sposób podyktowany przez konkretne zagadnienia fizyczne. Teraz natomiast przejdziemy do przypomnienia istotnych (dla dalszych naszych rozważań) aspektów teorii modułów nad pierścieniem oraz przestrzeni wektorowych, będących jednymi z najbardziej fundamentalnych i zarazem pojemnych struktur algebraicznych zbudowanych na relacji działania. Obiekty te łączą w swej definicji struktury elementarne: grupy przemiennej oraz pierścienia, dając nam z jednej strony wgląd w metody algebry liniowej na dowolnych grupach przemiennej, a z drugiej – wyposażając nas w aparat pojęciowy przydatny w dyskusji elementów geometrii różniczkowej (patrz: struktura modułu nad pierścieniem funkcji gładkich na bazie wiązki wektorowej na przestrzeni gładkich cięć tejże wiązki) oraz algebry homologicznej, które znajdują szerokie zastosowanie w klasycznej i kwantowej teorii pól, o czym będziemy mieli okazję przekonać się niebawem. Zaczynamy od pojęcia podstawowego

DEFINICJA 15. Przyjmijmy zapis Def. 5 i 8. **Moduł lewostronny nad pierścieniem** R (zwany też z angielska **R -modułem lewostronnym**) to para $((G, \phi_2 = +_G, \phi_1 = -(\cdot), \phi_0 : \bullet \mapsto 0_G), \ell)$ złożona z grupy przemiennej $(G, \phi_2 = +_G, \phi_1 = -(\cdot), \phi_0 : \bullet \mapsto 0_G)$ oraz z **lewostronnego działania pierścienia** R , o elementach określanych mianem **skalarów, na grupie** G

$$\ell : R \times G \longrightarrow G : (r, g) \longmapsto r \triangleright g$$

spełniającego następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(IRM1) (G, ℓ) jest zbiorem z lewostronnym działaniem monoidu (R, M, ϕ_0^M) , tj.

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times G & \xrightarrow{\text{id}_R \times \ell} & R \times G \\ M \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow \ell \\ R \times G & \xrightarrow{\ell} & G \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{r,s \in R} \forall_{g \in G} : r \triangleright (s \triangleright g) = (r \cdot_R s) \triangleright g$$

oraz

$$\begin{array}{ccc} \{\bullet\} \times G & \xrightarrow{\phi_0^M \times \text{id}_G} & R \times G \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \ell \\ & & G \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{g \in G} : 1_R \triangleright g = g;$$

(IRM2) (rozdzielność działania względem dodawania skalarów)

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times G & \xrightarrow{(\ell \circ \text{pr}_{1,3}, \ell \circ \text{pr}_{2,3})} & G \times G \\ A \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\ R \times G & \xrightarrow{\ell} & G \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{r,s \in R} \forall_{g \in G} : \begin{aligned} (r +_R s) \triangleright g \\ = (r \triangleright g) +_G (s \triangleright g) \end{aligned} ;$$

(LRM3) (rozdzielność działania względem dodawania grupowego)

$$\begin{array}{ccc}
 R \times G \times G & \xrightarrow{(\ell \circ \text{pr}_{1,2}, \ell \circ \text{pr}_{1,3})} & G \times G \\
 \text{id}_R \times \phi_2 \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 R \times G & \xrightarrow{\ell} & G
 \end{array} \equiv \forall_{r \in R} \forall_{g, h \in G} : \begin{array}{l} r \triangleright (g +_G h) \\ = (r \triangleright g) +_G (r \triangleright h) \end{array} .$$

Równoważnie⁶ możemy określić lewostronne działanie pierścienia R na grupie G jako homomorfizm R w pierścień endomorfizmów G .

Analogicznie, **moduł prawostronny nad pierścieniem** R (zwany też R -**modułem prawostronnym**) to para $((G, \phi_2 = +_G, \phi_1, \phi_0 : \bullet \mapsto 0_G), \wp)$, w której \wp jest odwzorowaniem

$$\wp : G \times R \longrightarrow G : (g, r) \mapsto g \triangleleft r,$$

zwanym **prawostronnym działaniem pierścienia** skalarów R na grupie G i spełniającym oczywiste prawostronne odpowiedniki powyższych aksjomatów:

(rRM1) (G, \wp) jest zbiorem z prawostronnym działaniem monoidu (R, M, ϕ_0^M) , tj.

$$\begin{array}{ccc}
 G \times R \times R & \xrightarrow{\wp \times \text{id}_R} & G \times R \\
 \text{id}_G \times M \downarrow & & \downarrow \wp \\
 G \times R & \xrightarrow{\wp} & G
 \end{array} \equiv \forall_{r, s \in R} \forall_{g \in G} : (g \triangleleft r) \triangleleft s = g \triangleleft (r \cdot_R s)$$

oraz

$$\begin{array}{ccc}
 G \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_G \times \phi_0^M} & G \times R \\
 \text{pr}_1 \searrow & & \downarrow \wp \\
 & & G
 \end{array} \equiv \forall_{g \in G} : g \triangleleft 1_R = g;$$

(rRM2)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times R \times R & \xrightarrow{(\wp \circ \text{pr}_{1,2}, \wp \circ \text{pr}_{1,3})} & G \times G \\
 \text{id}_G \times A \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 G \times R & \xrightarrow{\wp} & G
 \end{array} \equiv \forall_{r, s \in R} \forall_{g \in G} : \begin{array}{l} g \triangleleft (r +_R s) \\ = (g \triangleleft r) +_G (g \triangleleft s) \end{array} ;$$

(rRM3)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times R & \xrightarrow{(\wp \circ \text{pr}_{1,3}, \wp \circ \text{pr}_{2,3})} & G \times G \\
 \phi_2 \times \text{id}_R \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 G \times R & \xrightarrow{\wp} & G
 \end{array} \equiv \forall_{r \in R} \forall_{g, h \in G} : \begin{array}{l} (g +_G h) \triangleleft r \\ = (g \triangleleft r) +_G (h \triangleright r) \end{array} .$$

⁶Obraz odwzorowania $\ell : R \rightarrow \mathbf{Map}(G, G) : r \mapsto \ell_r$, gdzie $\ell_r(g) := r \triangleright g$, jest zawarty w podzbiórze $\text{End}(G) \subset \mathbf{Map}(G, G)$.

Równoważnie prawostronne działanie pierścienia R na grupie G możemy określić jako homomorfizm pierścienia przeciwnego do R w pierścień endomorfizmów G .

Podmoduł modułu lewostronnego $((G, \phi_2, \phi_1, \phi_0), \ell)$ nad pierścieniem R to para $((H, \phi_2, \phi_1, \phi_0), \ell)$, w której H jest podgrupą G o własności

$$(IPM) \quad \ell : R \times H \longrightarrow H \subset G.$$

Mówimy, że działanie pierścienia R zachowuje H . Podmoduł modułu prawostronnego definiujemy analogicznie.

Dla pary pierścieni R_1, R_2 określamy ponadto w naturalny sposób przydatne pojęcie (R_1, R_2) -**bimodułu**, – jest to grupa przemienną ze strukturą modułu lewostronnego nad R_1 oraz modułu prawostronnego nad R_2 uzgodnionymi wzajemnie w sensie wyrażonym przez diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym)

$$\begin{array}{ccc} R_1 \times G \times R_2 & \xrightarrow{\text{id}_{R_1} \times \varphi} & R_1 \times G \\ \ell \times \text{id}_{R_2} \downarrow & & \downarrow \ell \\ G \times R_2 & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array} \equiv \forall_{(r,g,s) \in R_1 \times G \times R_2} : \begin{array}{l} (r \triangleright g) \triangleleft s \\ = r \triangleright (g \triangleleft s) \end{array}.$$

Homomorfizm R -modułu lewostronnego $((G_1, \phi_2^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_0^{(1)}), \ell^{(1)})$ w R -**moduł lewostronny** $((G_2, \phi_2^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \phi_0^{(2)}), \ell^{(2)})$ to R -ekwiwariantny homomorfizm grup przemiennych

$$\chi : (G_1, \phi_2^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_0^{(1)}) \longrightarrow (G_2, \phi_2^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \phi_0^{(2)}),$$

tj. taki ich homomorfizm, który spełnia aksjomat (wyrażony przez diagram przemienny i równoważne zdanie logiczne):

$$(IRMH) \quad \begin{array}{ccc} R \times G_1 & \xrightarrow{\ell^{(1)}} & G_1 \\ \text{id}_R \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ R \times G_2 & \xrightarrow{\ell^{(2)}} & G_2 \end{array} \equiv \forall_{(r,g) \in R \times G_1} : \begin{array}{l} \chi \circ \ell_r^{(1)}(g) \\ = \ell_r^{(2)} \circ \chi(g) \end{array}.$$

Bijektywny homomorfizm R -modułów lewostronnych, którego odwrotność jest homomorfizmem R -modułów lewostronnych, nazywamy **izomorfizmem R -modułów lewostronnych**. **Homomorfizmy R -modułów prawostronnych** oraz **homomorfizmy (R_1, R_2) -bimodułów** są zdefiniowane analogicznie.

Opisane homomorfizmy noszą miano **odwzorowań R -liniowych**. Wprowadzamy oznaczenie

$$\text{Hom}_R(G_1, G_2) := \{ \chi : G_1 \longrightarrow G_2 \mid \chi \text{ } R\text{-liniowe} \}$$

dla zbioru wszystkich odwzorowań R -liniowych z R -modułu G_1 w R -moduł G_2 i odrębne:

$$\text{Iso}_R(G_1, G_2) := \{ \chi \in \text{Hom}_R(G_1, G_2) \mid \chi \text{ bijektywne} \}$$

dla homomorfizmów odwracalnych (izomorfizmów). W szczególnym przypadku $G_1 = G_2 =: G$, będziemy pisać

$$\text{End}_R(G) := \text{Hom}_R(G, G),$$

wyróżniając dodatkowo endomorfizmy (obustronnie) odwracalne, czyli automorfizmy,

$$\text{Aut}_R(G) := \{ \chi \in \text{End}_R(G) \mid \chi \text{ bijectywne} \}.$$

W szczególności jeśli $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ jest ciałem, to moduł nad pierścieniem $(\mathbb{K}, A, M, P, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ określamy mianem **przestrzeni wektorowej nad ciałem** \mathbb{K} (wzgl. **przestrzeni \mathbb{K} -liniowej**). Elementy nośnika tej struktury to **wektory**. Podmoduł określamy w tym przypadku mianem **podprzestrzeni (wektorowej)**.

▲

Wzajemnie jednoznaczłą relację między modułami lewo- i prawostronnymi, pozwalającą bez jakiegokolwiek straty ogólności ograniczyć nasze rozważania (tymczasowo) do modułów lewostronnych, ustala proste

STWIERDZENIE 3. *Przyjmijmy zapis Def. 8 i 15. Struktura modułu lewostronnego nad pierścieniem R na grupie G indukuje na tej ostatniej w kanoniczny sposób strukturę modułu prawostronnego nad pierścieniem przeciwnym do R i vice versa.*

■

Dowód: Niechaj $\ell \equiv \triangleright$ będzie działaniem lewostronnym R na G . Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowanie

$$\varphi : G \times R^{\text{opp}} \longrightarrow G : (g, r) \longmapsto r \triangleright g \equiv g \triangleleft_{\text{opp}} r$$

jest prawym działaniem R^{opp} na G , oto bowiem – dla dowolnych $r, s \in R^{\text{opp}}$ i $g \in G$ – zachodzi równość

$$g \triangleleft_{\text{opp}} (r \cdot_{\text{opp}} s) = g \triangleleft_{\text{opp}} (s \cdot r) \equiv (s \cdot r) \triangleright g = s \triangleright (r \triangleright g) \equiv (g \triangleleft_{\text{opp}} r) \triangleleft_{\text{opp}} s.$$

□

PRZYKŁAD(Y) 11. (Struktura)

- (1) Grupa trywialna niesie strukturę modułu nad dowolnym pierścieniem. Jest to tzw. **moduł trywialny**, który będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{0}$.
- (2) Grupa przemienna (R, A, P, ϕ_0^A) definiowana przez dowolny pierścień $(R, A = +, M = \cdot, P = -(\cdot), \phi_0^A : \bullet \mapsto 0_R, \phi_0^M : \bullet \mapsto 1_R)$ jest modułem lewostronnym nad R z działaniem $\ell : R \times R \longrightarrow R : (r, s) \longmapsto r \cdot s$. Ogólniej, dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ grupa $(R^{\times n}, A^n, P^n, \phi_0^{A^n})$ zdefiniowana przez pierścień R , z operacjami określonymi „współrzędna po współrzędnej”:

$$A^n((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$P^n(x_1, x_2, \dots, x_n) := (-x_1, -x_2, \dots, -x_n),$$

$$\phi_0^{A^n}(\bullet) := (0_R, 0_R, \dots, 0_R),$$

dla $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^{\times n}$, niesie naturalną strukturę modułu lewostronnego nad R z działaniem

$$\ell^n : R \times R^{\times n} \longrightarrow R^{\times n} : (r, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \longmapsto (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n),$$

dla którego będziemy używać oznaczenia \triangleright_n . Oczywiście zbiór $R^{\times n}$ jest także nośnikiem naturalnej struktury R -modułu prawostronnego, zadawanej przez mnożenie („współrzędna po współrzędnej”) z prawej strony przez elementy pierścienia R . Dla jawnego rozróżnienia – ważnego w dalszej części kursu – tych dwóch struktur na $R^{\times n}$ będziemy ich nośniki zapisywać odpowiednio jako ${}_R R^{\times n}$ (R -moduł lewostronny) i $R_R^{\times n}$ (R -moduł prawostronny).

- (3) Z dowolnym zbiorem S można stowarzyszyć **R -moduł wolny na S**

$$((\langle S \rangle_R, \phi_2^{\langle S \rangle_R} \equiv +_{\langle S \rangle_R}, \phi_1^{\langle S \rangle_R} \equiv \mathbf{P}_{\langle S \rangle_R}, \phi_0^{\langle S \rangle_R}), \ell^{\langle S \rangle_R}),$$

o nośniku

$$\langle S \rangle_R := \{ f \in R^S \mid |f^{-1}(R \setminus \{0_R\})| < \infty \},$$

punktowo zdefiniowanej strukturze grupy przemiennej, jak w Przykł. 1 (4), oraz działaniu pierścienia R

$$\forall_{(r,f) \in R \times \langle S \rangle_R} : (r \triangleright_{\langle S \rangle_R} f)(s) := r \cdot_R f(s).$$

- (4) Dowolny homomorfizm $\chi : R_1 \rightarrow R_2$ pierścieni $(R_\alpha, M^{(\alpha)}, A^{(\alpha)}, \mathbf{P}^{(\alpha)}, \phi_0^{M^{(\alpha)}}, \phi_0^{A^{(\alpha)}})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ indukuje na grupie $(R_2, A^{(2)}, \mathbf{P}^{(2)}, \phi_0^{A^{(2)}})$ strukturę modułu lewostronnego nad R_1 z działaniem $\ell : R_1 \times R_2 \rightarrow R_2 : (r, s) \mapsto M^{(2)}(\chi(r), s)$.
- (5) Odwzorowanie Inv .
- (6) Grupa przemienna $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ jest nośnikiem kanonicznej struktury modułu lewostronnego nad pierścieniem endomorfizmów z Przykł. 3 (6), przy czym działanie $\text{End}(G)$ jest tu zadawane przez odwzorowanie ewaluacji $\ell : \text{End}(G) \times G \rightarrow G : (\chi, g) \mapsto \chi(g) =: \text{ev}_\chi(g)$.
- (7) Grupa przemienna jest też nośnikiem struktury modułu lewostronnego nad pierścieniem \mathbb{Z} z Przykł. 2, przy czym działanie \mathbb{Z} jest określone przez branie krotności jak w (1.1.1).
- (8) Struktura modułu lewostronnego nad pierścieniem R na grupie przemiennej $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ indukuje na grupie $(\mathbf{Map}(S, G), \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_0)$ z Przykł. 1 (4) naturalną strukturę modułu lewostronnego nad R z działaniem $\ell : R \times \mathbf{Map}(S, G) \rightarrow \mathbf{Map}(S, G) : (r, f) \mapsto r \triangleright f$, przy czym dla dowolnego $x \in S$ jest $(r \triangleright f)(x) := r \triangleright f(x)$.
- (9) Grupa trywialna jest nośnikiem struktury przestrzeni wektorowej nad dowolnym ciałem. Jest to tzw. **przestrzeń trywialna** (lub **zerowa**), którą będziemy oznaczać wprowadzonym wcześniej symbolem $\mathbf{0}$.
- (10) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ grupa przemienna $(\mathbb{K}^{\times n}, A^n, \mathbf{P}^n, \mathbf{0}^n)$ definiowana przez dowolne ciało $(\mathbb{K}, A, M, \mathbf{P}, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ na sposób opisany w Przykł. 11 (2) niesie naturalną strukturę przestrzeni wektorowej. W szczególności grupa $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \bullet \mapsto 0)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{R} .
- (11) Uogólnieniem struktury opisanej w ostatnim punkcie jest struktura przestrzeni wektorowej nad \mathbb{K} na zbiorze $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ciągów o wartościach w \mathbb{K} z operacjami zdefiniowanymi “wyraz po wyrazie”.
- (12) Grupa przemienna $(\mathbb{K}[t], +, -(\cdot), \bullet \mapsto 0)$ definiowana przez pierścień wielomianów $\mathbb{K}[t]$ o współczynnikach z ciała \mathbb{K} jest przestrzenią wektorową nad \mathbb{K} z działaniem

$$\ell^{n+1} : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[t] \rightarrow \mathbb{K}[t]$$

$$: (r, r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \dots + r_n t^n) \mapsto r \cdot r_0 + r \cdot r_1 t + r \cdot r_2 t^2 + \dots + r \cdot r_n t^n.$$

- (13) Jądro homomorfizmu modułów lewostronnych nad dowolnym pierścieniem jest podmodułem dziedziny tegoż homomorfizmu, natomiast jego obraz jest podmodułem przeciwdziedziny.
- (14) Struktura modułu lewostronnego nad pierścieniem R na grupie G indukuje kanoniczną strukturę modułu lewostronnego nad R na grupie ilorazowej $(G/H, +_{G/H}, P_{G/H}, H)$ względem podmodułu $H \subset G$ z operacjami (zdefiniowanymi dla dowolnych $g, g_1, g_2 \in G$)

$$(g_1 +_G H) +_{G/H} (g_2 +_G H) := (g_1 +_G H) +_G (g_2 +_G H) = (g_1 +_G g_2) +_G H,$$

$$P_{G/H}(g +_G H) := (-g) +_G H.$$

Struktura ta jest określona przez działanie

$$\ell^{G/H} : R \times (G/H) \longrightarrow G/H : (r, g +_G H) \mapsto (r \triangleright g) +_G H$$

i nosi nazwę **modułu ilorazowego** (wzgl. **przestrzeni ilorazowej**, gdy R jest ciałem).

✓

PRZYKŁAD(Y) 12. (Homomorfizmy)

- (1) Odwzorowanie identycznościowe na dowolnym module lewostronnym.
- (2) Rzut kanoniczny $pr_i : R^{x^n} \longrightarrow R$ na i -ty czynnik kartezjański modułu z Przykł. 11 (2), traktowany jako nośnik kanonicznej struktury modułu nad R dla $n = 1$.
- (3) Odwzorowanie grupy przemiennej G_1 będącej nośnikiem struktury modułu lewostronnego nad pierścieniem R w grupę przemienną G_2 dane wzorem $\mathbf{0} : G_1 \longrightarrow G_2 : g \mapsto \phi_0^{(2)}(\bullet)$ jest odwzorowaniem R -liniowym (względem trywialnej struktury R -modułu lewostronnego na grupie trywialnej $\{\phi_0^{(2)}(\bullet)\}$). Odwzorowanie to nazywamy **homomorfizmem zerowym**.
- (4) Włożenie kanoniczne $j_H : H \longrightarrow G$ (nośnika struktury) dowolnego podmodułu $H \subset G$ w zawierający go moduł lewostronny nad pierścieniem R (patrz: Przykł. 2 (3)).
- (5) Rzut kanoniczny $\pi_{G/H} : G \longrightarrow G/H$ (nośnika struktury) modułu lewostronnego nad pierścieniem R na moduł ilorazowy G/H względem dowolnego podmodułu $H \subset G$ (patrz: Przykł. 2 (6)).
- (6) Dowolny homomorfizm grup przemiennych traktowanych jako moduły lewostronne nad pierścieniem \mathbb{Z} (jak w Przykł. 11 (4)) jest odwzorowaniem \mathbb{Z} -liniowym.
- (7) Automorfizmy dowolnej przestrzeni wektorowej V nad ciałem \mathbb{K} tworzą grupę (z superpozycją jako operacją binarną) zwaną **grupą liniową główną przestrzeni** i oznaczaną symbolem

$$GL(V; \mathbb{K}) \equiv \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V).$$

W szczególności w przypadku przestrzeni $V := \mathbb{K}^{x^N}$, $N \in \mathbb{N}$ otrzymujemy w ten sposób **grupę liniową główną stopnia N o współczynnikach**

z \mathbb{K} , oznaczaną symbolem

$$\mathrm{GL}(N; \mathbb{K}) \equiv \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(N).$$

✓

Pojęcie odwzorowania R -liniowego ma swoje naturalne, a istotne uogólnienie, które przypominamy w poniższej

DEFINICJA 16. Przyjmijmy zapis Def. 15 i niechaj G_A , $A \in \overline{1, N}$ oraz G będą modułami nad pierścieniem przemiennym R . **Odwzorowanie N -liniowe nad R** to dowolne odwzorowanie

$$\varphi : G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_N \longrightarrow G,$$

które jest R -liniowe (tj. \mathbb{Z} -liniowe i R -jednorodne) względem każdego swojego argumentu, czyli spełnia warunek

$$\forall_{i \in \overline{1, N}} \forall_{(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_N) \in \times_{A \in \overline{1, N} \setminus \{i\}} G_A}$$

$$: \varphi(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, \cdot, g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_N) \in \mathrm{Hom}_R(G_i, G).$$

Zbiór wszystkich takich odwzorowań oznaczamy symbolem

$$\mathbb{L}_R(G_1, G_2, \dots, G_N; G).$$

W przypadku, gdy $\forall_{A \in \overline{1, N}} : G_A = H$, mówimy o **odwzorowaniu N -liniowym na H** , a odnośny zbiór zapisujemy jako

$$\mathbb{L}_R^N(H; G) \equiv \mathbb{L}_R(\underbrace{H, H, \dots, H}_N; G).$$

Jeśli ponadto $G = R$, to mamy do czynienia z **formami N -liniowymi** oznaczanymi – odpowiednio – jako

$$\mathbb{L}_R(G_1, G_2, \dots, G_N) \quad \text{lub} \quad \mathbb{L}_R^N(H).$$

W szczególności **forma liniowa** (lub inaczej **funkcjonał liniowy**) na G to dowolny element zbioru $\mathrm{Hom}_R(G, R)$. Ten ostatni jest nośnikiem naturalnej struktury R -modułu opisanej w Przykł. 11 (8) (w połączeniu z Przykł. 11 (2)). Owa struktura nosi miano **modułu sprzężonego do G** , wzgl. **przestrzeni sprzężonej** w przypadku, gdy $R = \mathbb{K}$ jest ciałem. W tym kontekście stosujemy oznaczenie

$$G^* := \mathrm{Hom}_R(G, R).$$

Niech \mathfrak{S}_N oznacza grupę symetryczną zbioru N -elementowego, działającą w naturalny sposób na $H^{\times N}$. Odwzorowanie $\varphi \in \mathbb{L}_R^N(H; G)$ (wzgl. $\varphi \in \mathbb{L}_R^N(H)$) nazywamy

- **symetrycznym**, jeśli $\forall_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} : \varphi \circ \sigma = \varphi$ – ich zbiór oznaczamy symbolem $\mathbb{L}_R^{N, \mathrm{sym}}(H; G)$ (wzgl. $\mathbb{L}_R^{N, \mathrm{sym}}(H)$);
- **skośnie symetrycznym** (lub **antysymetrycznym**), jeśli $\forall_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} : \varphi \circ \sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) \varphi$ – ich zbiór oznaczamy symbolem $\mathbb{L}_R^{N, \mathrm{antysym}}(H; G)$ (wzgl. $\mathbb{L}_R^{N, \mathrm{antysym}}(H)$);
- **alternującym**, jeśli

$$\forall_{\substack{i, j \in \overline{1, N} \\ i < j}} : (g_i = g_j \implies \varphi(g_1, g_2, \dots, g_N) = 0_G);$$

ich zbiór oznaczamy symbolem $\mathbb{L}_R^{N, \mathrm{alt}}(H; G)$ (wzgl. $\mathbb{L}_R^{N, \mathrm{alt}}(H) \equiv \wedge^N H^*$).

Dowolne odwzorowanie 2-liniowe $\varphi \in L_R(G_1, G_2; G)$ określa **odwzorowanie lewostronnie stowarzyszone z φ** ,

$$l_\varphi : G_1 \longrightarrow \text{Hom}_R(G_2, G) : g \longmapsto \varphi(g, \cdot),$$

oraz **odwzorowanie prawostronnie stowarzyszone z φ** ,

$$r_\varphi : G_2 \longrightarrow \text{Hom}_R(G_1, G) : g \longmapsto \varphi(\cdot, g),$$

oba jawnie R -liniowe. Ilekroć oba odwzorowania stowarzyszone są iniektywne, φ określamy mianem **odwzorowania 2-liniowego niezwyrodniałego**, w przeciwnym razie mówimy o **odwzorowaniu 2-liniowym zwyrodniałym**. Odwzorowanie 2-liniowe o bijektywnych odwzorowaniach stowarzyszonych (obu) nazywamy **odwzorowaniem 2-liniowym nieosobliwym**. Nieosobliwa forma 2-liniowa $\Delta : G_1 \times G_2 \longrightarrow R$ to **dwoistość** (lub inaczej **dualność**), a odnośna dwójka (G_1, G_2) bywa nazywana **parą dwoistą** (lub inaczej **parą dualną**). ▲

Ilekroć mamy do czynienia z modułami wolnymi, opis odwzorowań wieloliniowych alternujących ulega istotnemu uproszczeniu, o czym orzeka

STWIERDZENIE 4. *Przyjmijmy notację Def. 18 oraz 16. Niechaj G będzie modulem wolnym (skończonego rzędu) nad pierścieniem R o bazie $\{g_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ i niech $\varphi \in L_R^{N, \text{alt}}(G)$. Wówczas $\varphi \equiv 0$, jeśli $N > n$, gdy zaś $N \leq n$, to forma φ jest jednoznacznie określona przez wartości przyjmowane przezeń na $\binom{n}{N}$ układach $(g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_N})$ uporządkowanych przez relację $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq n$. W szczególności przy $N = n$ formę φ zadaje pojedynczy skalar $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_n)$.* ■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 110]. □

Suma prosta modułów form alternujących $\wedge^N G^*$ na dowolnym module G nad pierścieniem przemiennym R jest nośnikiem naturalnej operacji binarnej, o której mówi

DEFINICJA 17. Przyjmijmy zapis Def. 16 i niechaj G będzie modulem nad pierścieniem przemiennym R . **Iloczyn zewnętrzny form alternujących** $\omega_1 \in \wedge^{N_1} G^*$, $N_1 \in \mathbb{N}^\times$ i $\omega_2 \in \wedge^{N_2} G^*$, $N_2 \in \mathbb{N}^\times$ to forma alternująca z $\wedge^{N_1+N_2} G^*$ dana wzorem

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge_{N_1, N_2} \omega_2 & : G^{\times N_1+N_2} \longrightarrow R : (g_1, g_2, \dots, g_{N_1+N_2}) \longmapsto \\ & \frac{1}{N_1! \cdot N_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{N_1+N_2}} \text{sgn}(\sigma) \omega_1(g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \dots, g_{\sigma(N_1)}) \\ & \quad \cdot \mathbb{K} \omega_2(g_{\sigma(N_1+1)}, g_{\sigma(N_1+2)}, \dots, g_{\sigma(N_1+N_2)}). \end{aligned}$$
▲

Podstawowe własności powyższej operacji opisuje

STWIERDZENIE 5. *Przyjmijmy zapis Def. 17. Odwzorowanie*

$$\wedge_{N_1, N_2} : \wedge^{N_1} G^* \wedge \wedge^{N_2} G^* \longrightarrow \wedge^{N_1+N_2} G^* : (\omega_1, \omega_2) \longmapsto \omega_1 \wedge_{N_1, N_2} \omega_2$$

jest dwu- \mathbb{R} -liniowe, a nadto zachodzi tożsamość

$$\omega_2 \wedge_{N_1, N_2} \omega_1 = (-1)^{N_1 \cdot N_2} \omega_1 \wedge_{N_2, N_1} \omega_2.$$

W tych samych oznaczeniach i dla dowolnej formy $\omega_3 \in \wedge^{N_3} G^*$, $N_3 \in \mathbb{N}^\times$ prawdziwa jest także równość

$$(\omega_1 \wedge_{N_1, N_2} \omega_2) \wedge_{N_1+N_2, N_3} \omega_3 = \omega_1 \wedge_{N_1, N_2+N_3} (\omega_2 \wedge_{N_2, N_3} \omega_3).$$

■

Dowód: Oczywisty. □

Mamy także proste, acz istotne

STWIERDZENIE 6. *Przyjmijmy zapis Def. 16. Dowolna dwoistość*

$$\Delta : G_1 \times G_2 \longrightarrow R$$

zadaje parę izomorfizmów R -modułów

$$l_\Delta : G_1 \xrightarrow{\cong} G_2^*, \quad r_\Delta : G_2 \xrightarrow{\cong} G_1^*.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Cor. 16]. □

Na zakończenie wstępnej części wykładu, poświęconej przypomnieniu podstawowych pojęć z pierwszorocznego kursu algebry i stosownemu ich przeformułowaniu w języku niniejszego wykładu, przedstawimy kilka istotnych twierdzeń charakteryzujących moduły nad pierścieniami. Zaczniemy od uzupełnienia bazy pojęciowej.

DEFINICJA 18. Niechaj Λ i S będą zbiorami. **Rodzina elementów zbioru S indeksowana przez zbiór Λ** to odwzorowanie $x : \Lambda \longrightarrow S : \lambda \longmapsto x_\lambda$, przy czym element $\lambda \in \Lambda$ określamy mianem **indeksu**, zbiór Λ zaś – mianem **zbioru indeksów**. Rodzinę taką zapisujemy w postaci $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Ilekroć S jest nośnikiem struktury monoidu o elemencie neutralnym e , wprowadzamy pojęcie **nośnika rodziny** $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ danego wzorem

$$\text{supp } \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} := \{ \lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \neq e \}.$$

Rodzina o nośniku skończonym to taka, której nośnik ma moc skończoną. Zbiór wszystkich takich rodzin będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{R}_0(S; \Lambda)$.

Przyjmując notację Def. 15, a dla dowolnego podzbioru $S \subset G$ modułu G , **kombinacja liniowa elementów zbioru S o współczynnikach z pierścienia R** to dowolna suma (w sensie dodawania $+_G$ w grupie przemiennej G)

$$\sum_{g \in S} r_g \triangleright g,$$

wyznaczona przez rodzinę $\{r_g\}_{g \in S}$ elementów z R indeksowaną przez S , o nośniku skończonym. Elementy tej rodziny określamy mianem **współczynników kombinacji liniowej**.

Podmoduł

$$\langle S \rangle_R := \left\{ \sum_{g \in S} r_g \triangleright g \mid \{r_g\}_{g \in S} \in \mathcal{R}_0(R; S) \right\} \subset G,$$

będący najmniejszym podmodułem G zawierający S , określamy mianem **(pod)modułu generowanego** (albo **rozpinanego**) **przez zbiór S** (albo inaczej **powłoki liniowej zbioru S nad R** czy wreszcie **powłoki R -liniowej zbioru S**), ten ostatni zaś nazywamy **zbiorem generatorów** (lub **generującym podmodułem**) $\langle S \rangle_R$. Jeśli $S = \{g\}$ (jest singletonem), to odnośny moduł oznaczamy przez

$\langle S \rangle_R \equiv \langle g \rangle_R$ i nazywamy **modułem cyklicznym**. Moduł o skończonej liczbie generatorów, tj. taki, dla którego $|S| < \infty$, nosi miano **modułu skończenie generowanego**.

Rodzina $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ elementów modułu G jest **liniowo niezależna nad pierścieniem** R , jeśli spełnia warunek

$$\forall_{\{r_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{R}_0(R; \Lambda)} : \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright g_\lambda = 0_G \implies \forall_{\lambda \in \Lambda} : r_\lambda = 0_R \right).$$

Podzbiór $S \subset G$ nazywamy **liniowo niezależnym nad pierścieniem** R , jeśli jako rodzina elementów z R indeksowana przez S jest liniowo niezależny nad R , tj. jeśli znikanie dowolnej kombinacji liniowej $\sum_{g \in S} r_g \triangleright g = 0_G$ implikuje równość $r_g = 0_R$ dla każdego $g \in S$.

Rodzinę $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (wzgl. podzbiór $S \subset G$) nazywamy **liniowo zależną(-nym)**, jeśli nie jest liniowo niezależna(-ny).

Rodzinę $\mathcal{B} = \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ elementów modułu G nad pierścieniem R nazwiemy **bazą modułu** G , jeśli jest ona niepusta, liniowo niezależna nad R i generuje G . Podzbiór $S \subset G$ o tych samych własnościach określimy w ten sam sposób. Równoważnie powiemy, że podzbiór $\mathcal{B} \subset G$ jest bazą modułu G , gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{g \in G} \exists!_{\{r_h\}_{h \in \mathcal{B}} \in \mathcal{R}_0(R; \mathcal{B})} : g = \sum_{h \in \mathcal{B}} r_h \triangleright h,$$

tj. gdy każdy element modułu ma jednoznaczne przedstawienie w postaci kombinacji liniowej elementów tego podzbioru.

Moduł wolny (na zbiorze \mathcal{B}) to moduł trywialny lub taki, który posiada bazę \mathcal{B} .

▲

Poniższe przykłady ilustrują (m.in.) pewne istotne różnice między modułami nad ogólnymi (choćby nawet "najbanalniejszymi") pierścieniami i przestrzeniami wektorowymi w kontekście wprowadzonych pojęć.

PRZYKŁAD(Y) 13.

- (1) W \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}^{\times 2}$ z Przykł. 11 (2) zbiór $\{(2, 0), (3, 0)\}$ jest liniowo zależny, bo

$$3 \triangleright (2, 0) + (-2) \triangleright (3, 0) = (0, 0),$$

ale zarazem nie istnieje $n \in \mathbb{Z}$ o własności $(2, 0) = n \triangleright (3, 0)$.

- (2) W \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ z Przykł. 11 (6) dowolny singleton $\{[k]_n\}$ jest liniowo zależny (każdy element $[k]_n$ tego modułu jest liniowo zależny). W konsekwencji moduł ten, choć cykliczny, nie posiada bazy.
- (3) W kanonicznym \mathbb{Z} -module \mathbb{Z} (patrz: Przykł. 11 (2)) podzbiór $\{2\}$ jest w oczywisty sposób maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym, ale nie generuje całego modułu (bo np. $1 \notin \langle 2 \rangle_{\mathbb{Z}}$).
- (4) Element neutralny 1_R jest bazą modułu R z Przykł. 11 (2).
- (5) Rodzina elementów $\{e_i\}_{i \in \overline{1, n}}$, $e_i = (\delta_{i, j}^R)_{j \in \overline{1, n}}$, gdzie

$$\delta_{i, j}^R = \begin{cases} 1_R & \text{dla } j = i \\ 0_R & \text{dla } j \neq i \end{cases}$$

jest **symbolem Kroneckera** (zwanym też **delta Kroneckera**), jest **bazą standardową** modułu wolnego $R^{\times n}$ z Przykł. 11 (2). W przypadku pierścienia $R = \mathbb{K}$ o strukturze ciała ta sama rodzina elementów (wektorów) jest bazą standardową przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}^{\times n}$.

- (6) R -moduł wolny z Przykł. 11 (3) jest wolny w rozumieniu Def. 18, a jego bazą jest, np., układ $\{\delta_s\}_{s \in S}$ odwzorowań

$$\delta_s : S \longrightarrow R : t \longmapsto \begin{cases} 1_R & \text{dla } t = s \\ 0_R & \text{dla } t \neq s \end{cases} .$$

✓

Istnienie skończonej bazy w module nad pierścieniem (o cesze IBN) można wykorzystać do uporządkowania struktury izomorficznego z nim modułu sprzężonego.

STWIERDZENIE 7. *Przyjmijmy notację Def. 18 oraz 16 i niechaj G będzie lewostronnym modułem wolnym nad pierścieniem R , o bazie $\mathcal{B} = \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. W module G^* doń sprzężonym istnieje układ liniowo niezależny $\mathcal{B}^* := \{g_\lambda^*\}_{\lambda \in \Lambda}$ o własności*

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda : g_\lambda^*(g_\mu) = \delta_{\lambda, \mu}^R .$$

*Jego elementy określamy mianem **form współrzędniowych** (lub **funkcjonałów współrzędniowych**, wzgl. **współrzędnych**) na G względem \mathcal{B} . Jeśli $|\Lambda| < \infty$, to \mathcal{B}^* jest bazą modułu sprzężonego, zwaną **bazą dualną do \mathcal{B}** .*

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 140].

□

Bazę dualną możemy następnie wykorzystać w połączeniu z konstrukcją iloczynu zewnętrznego z Def. 17 w celu wyprowadzenia niezwykle przydatnego konkretnego opisu baz modułów $\wedge^N G^*$, $N \in \mathbb{N}^{\times}$ dla modułu wolnego G skończonego rzędu.

STWIERDZENIE 8. *Przyjmijmy zapis Def. 17 i 18 oraz Stw. 7, ustalmy (dowolnie) $N \in \overline{1, n}$ i niechaj G będzie modułem nad pierścieniem przemiennym R o bazie $\{g_i\}_{i \in \overline{1, n}}$. Wówczas rodzina form N -liniowych*

$$\mathcal{B}_N := \{g_{i_1}^* \wedge g_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge g_{i_N}^*\}_{i_k \in \overline{1, n}, k \in \overline{1, N}, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leq n}$$

jest bazą modułu $\wedge^N G^$.*

■

Dowód: W świetle Stw. 4 dowolną formę φ można zapisać w postaci

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leq n} \varphi(g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_N}) \triangleright g_{i_1}^* \wedge g_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge g_{i_N}^* ,$$

skąd wniosek, że \mathcal{B}_N jest układem generującym dla $\wedge^N G^*$. Przy tym ilekroć

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leq n} \lambda_{i_1 i_2 \dots i_N} \triangleright g_{i_1}^* \wedge g_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge g_{i_N}^* = 0, \quad \lambda_{i_1 i_2 \dots i_N} \in R,$$

ewaluacja obu stron powyższej równości na układzie $(g_{j_1}, g_{j_2}, \dots, g_{j_N})$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_N \leq n$ daje tożsamość

$$\lambda_{j_1 j_2 \dots j_N} = 0_R,$$

zatem \mathcal{B}_N jest też układem liniowo niezależnym, czyli bazą.

□

Prostą praktyczną konsekwencją istnienia baz w modułach nad pierścieniem jest dostępność opisu macierzowego odwzorowań R -liniowych między nimi, który przypomina

DEFINICJA 19. Przyjmijmy zapis Def. 18. Niechaj G_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ będą R -modułami lewostronnymi nad pierścieniem R , o odnośnych bazach $\mathcal{B}_\alpha = \{g_{\lambda_\alpha}^{(\alpha)}\}_{\lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha}$ i niech $\chi \in \text{Hom}_R(G_1, G_2)$ będzie oddwzorowaniem R -liniowym określonym wzorami

$$\chi(g_{\lambda_1}^{(1)}) = \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \chi_{\lambda_1}^{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}^{(2)},$$

słusznymi dla wszystkich $\lambda_1 \in \Lambda_1$. Odwzorowanie

$$(1.1.4) \quad [\chi]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} : \Lambda_2 \times \Lambda_1 \longrightarrow R : (\lambda_2, \lambda_1) \longmapsto \chi_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

nosi miano **macierzy odwzorowania R -liniowego χ względem baz \mathcal{B}_1 i \mathcal{B}_2** . ▲

Użytecznego alternatywnego spojrzenia na pojęcie bazy dostarcza

DEFINICJA 20. Przyjmijmy zapis Def. 16 i 19 oraz Przykł. 3 (8). Niechaj G będzie modulem wolnym rzędu $\text{rk}_R G := N \in \mathbb{N}$ nad pierścieniem przemiennym R . **Wyznacznik na module G** to dowolna alternująca forma N -liniowa $\Delta_{\mathcal{B}}$ spełniająca warunek

$$\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) := \Delta_{\mathcal{B}}(g_1, g_2, \dots, g_N) := \mathbf{1}_R$$

dla pewnej bazy $\mathcal{B} := \{g_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ modułu G , przy czym w świetle Def. 16 zapis powyższy *implicite* wyróżnia porządek na \mathcal{B} wyznaczony przez ustaloną numerację jej elementów. W szczególności wyznacznik $\Delta_{\mathcal{E}}$ na module $R^{\times N}$ z Przykł. 11 (2) stowarzyszony z bazą standardową $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ z Przykł. 13 (5), uporządkowaną według wzrostu wartości indeksu i określamy mianem **wyznacznika macierzowego stopnia N (o wyrazach z R)** i oznaczamy symbolem

$$\Delta_{\mathcal{E}} \equiv \det_{(N)}.$$

Na tej podstawie definiujemy **wyznacznik endomorfizmu $\chi \in \text{End}_R(G)$** jako skalar

$$\det \chi := \det_{\text{rk}_R G}([\chi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}),$$

określony dla dowolnego wyboru bazy \mathcal{B} modułu G .

Rozważmy na koniec przestrzeń \mathbb{R} -liniową V . Niech \mathfrak{B}_V będzie zbiorem (wszystkich) baz modułu V . **Orientacja przestrzeni \mathbb{R} -liniowej** to klasa abstrakcji baz względem relacji równoważności

$$\forall_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathfrak{B}_V} : (\mathcal{B}_1 \sim_o \mathcal{B}_2 \iff \det_{(N)}([\text{id}_G]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}) > 0).$$

▲

Mamy fundamentalne

STWIERDZENIE 9. *Wyznacznik na dowolnym module nad dowolnym pierścieniem przemiennym istnieje, wyznacznik endomorfizmu natomiast nie zależy od wyboru bazy modułu.* ■

Dowód: Patrz: [Sus13, Tw. 8.12 oraz Stw. 115 i 116]. □

Jedną z podstawowych własności algebraicznych wyznacznika opisuje

STWIERDZENIE 10 (Wzór wyznacznikowy Cauchy’ego). *Przyjmijmy notację Def. 20. Dla dowolnych dwóch macierzy $M_1, M_2 \in \text{Mat}(R; N)$ zachodzi **wzór Cauchy’ego***

$$\det_{(N)}(M_1 \boxplus M_2) = \det_{(N)}(M_1) \cdot_R \det_{(N)}(M_2),$$

tj. wyznacznik jest odwzorowaniem mnożliwym.

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 114]. □

Prosty związek między wyznacznikiem endomorfizmu modułu wolnego i (dowolnym) wyznacznikiem na tymże module opisuje poniższe

STWIERDZENIE 11. *Przyjmijmy zapis Def. 20. Niechaj G będzie modulem wolnym rzędu $\text{rk}_R G := N \in \mathbb{N}$ nad pierścieniem przemiennym R , niech $\Delta_{\mathcal{B}} \in \mathbb{L}_R^{N, \text{alt}}(G)$ będzie wyznacznikiem na G stowarzyszonym z (dowolną) bazą \mathcal{B} modułu G i niech $\chi \in \text{End}_R(G)$ będzie jego endomorfizmem. **Cofnięcie wyznacznika $\Delta_{\mathcal{B}}$ wzdłuż endomorfizmu χ** , zdefiniowane wzorem*

$$\chi^* \Delta_{\mathcal{B}} := \Delta_{\mathcal{B}} \circ (\chi \times \chi \times \cdots \times \chi) \in \mathbb{L}_R^{N, \text{alt}}(G),$$

spełnia tożsamość

$$(1.1.5) \quad \chi^* \Delta_{\mathcal{B}} = \det \chi \triangleright \Delta_{\mathcal{B}}.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 117]. □

Możemy już teraz wysłowić kilka istotnych wyników ogólnych z teorii modułów. Zaczniemy od twierdzenia, które w sposób fundamentalny wyróżnia przestrzenie wektorowe spośród modułów nad pierścieniami (por.: Przykł. 13 (2)).

TWIERDZENIE 1.1.3 (O istnieniu bazy przestrzeni wektorowej). *Przyjmijmy zapis Def. 9 oraz 18 i założmy, że V jest nietrywialną przestrzenią wektorową. Jeśli Γ jest dowolnym zbiorem generatorów V nad \mathbb{K} , a S – pewnym liniowo niezależnym (nad \mathbb{K}) podzbiorem Γ , to wtedy istnieje w V baza \mathcal{B} o własności $S \subset \mathcal{B} \subset \Gamma$.*

■

Dowód: Twierdzenie to ma status logicznego równoważnika Aksjomatu Wyboru, gdyż niekonstruktywny dowód istnienia bazy \mathcal{B} , zwanej często **bazą Hamela** lub **bazą algebraiczną** (w kontekście nieskończeniowym, a przy braku dodatkowej struktury na V), odwołuje się wprost do Lematu Kuratowskiego–Zorna. Dowód taki został przedstawiony w notatkach wykładowych [Sus13, Tw. 8.5]. □

Należy podkreślić, że powyższe twierdzenie orzeka twierdząco o istnieniu bazy w dowolnej przestrzeni wektorowej – istotnie, każda przestrzeń V ma zbiór generujący, np. V . Przedstawiony jego dowód, jakkolwiek szalenie elegancki, nie niesie najskromniejszej nawet sugestii odnośnie do *konstrukcji* bazy przestrzeni wektorowej. W przypadku przestrzeni skończonej generowanej (tj. takiej, w której $|\Gamma| < \infty$) niezręczność tę usuwa konstruktywny dowód poniższego

STWIERDZENIE 12. (Lemat Steinitza o wymianie) *Dowolny podzbiór liniowo niezależny skończenie generowanej przestrzeni wektorowej V nad ciałem \mathbb{K} ma moc mniejszą od mocy zbioru generującego lub jej równą, a ponadto można go uzupełnić do bazy tej przestrzeni wektorami ze zbioru generującego.* ■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 78]. □

Tę część wykładu zakończymy podsumowaniem własności bazy modułu wolnego.

STWIERDZENIE 13. *Przyjmijmy zapis Def. 18 i 15. W dowolnym module G nad pierścieniem R poniższe zdania*

- (i) \mathcal{B} jest bazą G .
- (ii) \mathcal{B} jest maksymalnym (w sensie \subset) podzbiorem liniowo niezależnym G .
- (iii) \mathcal{B} jest minimalnym (w sensie \subset) podzbiorem generującym G .

pozostają w relacji

$$(i) \implies (ii) \quad (\text{BL})$$

oraz

$$(i) \implies (iii). \quad (\text{BG})$$

Jeśli $R = \mathbb{K}$ jest ciałem, to także

$$(ii) \implies (i) \quad (\text{K-LB})$$

oraz

$$(iii) \implies (i). \quad (\text{K-GB})$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 79]. □

Przykładem modułu nad pierścieniem, w którym nie jest spełnione wynikanie (K-LB) jest kanoniczny \mathbb{Z} -moduł \mathbb{Z} (patrz: Przykł. 11 (2)), w którym podzbiór $\{2\}$ jest w oczywisty sposób maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym, ale nie generuje całego modułu (bo np. $1 \notin \langle 2 \rangle_{\mathbb{Z}}$). Zdanie (K-GB) traci słuszność np. w przypadku \mathbb{Z} -modułu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (patrz: Przykł. 11 (6)), w którym minimalny zbiór generujący $\{[1]_n\}$ nie jest liniowo niezależny (patrz: Przykł. 13 (2)).

Chwila zastanowienia pozwala stwierdzić, że wybór bazy – ilekroć jest możliwy – nie jest w ogólności jednoznaczny. Pozostaje jednak intuicyjne pytanie o istnienie niezmiennika takiego wyboru określonego jako moc dowolnego podzbioru bazowego. Do sformułowania pierwszej odpowiedzi w tym kontekście prowadzi nas

STWIERDZENIE 14. *Przyjmijmy zapis Def. 15 i 18. Niechaj $\Lambda \neq \emptyset$ będzie zbiorem (indeksów) i niech rodzina $\mathcal{B}_1 := \{g_\lambda^{(1)}\}_{\lambda \in \Lambda} \subset G_1$ będzie bazą modułu G_1 . Dla dowolnej rodziny $\{g_\lambda^{(2)}\}_{\lambda \in \Lambda} \subset G_2$ istnieje jedyny homomorfizm R -modułów*

$$\chi : G_1 \longrightarrow G_2$$

o własności

$$(1.1.6) \quad \forall_{\lambda \in \Lambda} : \chi(g_\lambda^{(1)}) = g_\lambda^{(2)}.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 80]. □

Powyższe stwierdzenie można wysłowić w sposób przemawiający do wyobraźni bardziej bezpośrednio: Oto każde odwzorowanie R -liniowe $\chi : G_1 \rightarrow G_2$ jest jednoznacznie zadane przez wartości, jakie przyjmuje na elementach bazy \mathcal{B} swej dziedziny, a zarazem dowolne odwzorowanie $\mathcal{B} \rightarrow G_2$ można rozszerzyć do odwzorowania R -liniowego o dziedzinie $G_1 \supset \mathcal{B}$.

Jako istotny wniosek z tego stwierdzenia wyprowadzamy

COROLLARIUM 1. *W notacji Stw. 14 χ jest izomorfizmem R -modułów, jeśli rodzina $\{g_\lambda^{(2)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest bazą modułu G_2 .* ■

Stąd też oczywiste

COROLLARIUM 2. *Dowolne dwa moduły nad tym samym pierścieniem mające bazy jednakowej mocy są izomorficzne.* ■

Powyższa analiza skłania do postawienia pytania o słuszność implikacji odwrotnej. Odpowiedź dla przypadku modułu nieskończenie generowanego zawiera

STWIERDZENIE 15. *Przyjmijmy zapis Def. 15 i niech Γ_0 będzie minimalnym podzbiorem generującym R -modułu G , przy czym zakładamy, że moc $|\Gamma_0| =: \kappa_0$ jest nieskończona (κ_0 jest stosowną liczbą kardynalną). Każdy podzbiór generujący G ma moc nie mniejszą niż κ_0 . W szczególności G nie jest skończenie generowany. Ponadto dowolne dwa minimalne zbiory generujące mają jednaką moc.* ■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 81]. □

Okazuje się, że równoliczność dowolnych dwóch baz modułu nad pierścieniem nie jest cechą uniwersalną. Ta konstatacja uzasadnia

DEFINICJA 21. **Pierścień o cesze IBN⁷** R to taki, dla którego każde dwie bazy dowolnego modułu (wolnego) G nad tymże pierścieniem mają tę samą moc. Tę ostatnią określamy wtedy mianem **rzędu modułu** i oznaczamy symbolem $\text{rk}_R G$. ▲

Brak cechy IBN jest uznawany za patologię w kategorii pierścieni, są jednak znane przykłady struktur tego rodzaju, a nawet całe ich rodziny, patrz: prace Leavitt(-Forgetitta) [Lea56, Lea57]. Określoność rzędu jest kolejną cechą wyróżniającą przestrzenie wektorowe spośród modułów. Oto bowiem zachodzi

TWIERDZENIE 1.1.4 (O wymiarze przestrzeni wektorowej). *Dowolne ciało ma cechę IBN, tj. dowolna przestrzeń wektorowa ma dobrze określony rząd.* ■

Dowód: Patrz: [Sus13, Tw. 8.8]. □

Powyższy wynik uzasadnia

⁷Z jęz. ang., w którym akronim IBN pochodzi od wyrażenia „Invariant Basis Number”, które w wolnym tłumaczeniu oznacza „niezmienniczą moc bazy”.

DEFINICJA 22. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz 21. Rząd przestrzeni wektorowej V nad ciałem \mathbb{K} określamy mianem **wymiaru** (\mathbb{K} -liniowego) tej przestrzeni i oznaczamy symbolem

$$\dim_{\mathbb{K}} V := \text{rk}_{\mathbb{K}} V.$$

▲

Wprowadzony niezmiennik jest stały na klasach izomorfizmu przestrzeni wektorowych.

STWIERDZENIE 16. *Izomorficzne przestrzenie wektorowe mają ten sam wymiar.*

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 82].

□

Ma on też (intuicyjnie) oczekiwaną cechę monotoniczności

STWIERDZENIE 17 (Bilans wymiarów). *Przyjmijmy zapis Def. 22. Niechaj V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} i niech $W \subset V$ będzie jej podprzestrzenią. Wówczas*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} V/W.$$

W szczególności więc

$$\dim_{\mathbb{K}} W \leq \dim_{\mathbb{K}} V,$$

przy czym ilekroć $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $W = V$.

Ogólniej, niech $\chi : V_1 \rightarrow V_2$ będzie odwzorowaniem \mathbb{K} -liniowym, a wtedy

$$\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \chi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \chi.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 83].

□

Pojęcie wymiaru pozwala nam wysłowić istotną obserwację porządkującą dotyczącą reprezentacji macierzowej odwzorowań \mathbb{K} -liniowych między przestrzeniami wektorowymi nad ciałem \mathbb{K} , opisanej w Def. 19. Oto okazuje się, że wszelka nietrywialna struktura macierzy (dowolnego) odwzorowania \mathbb{K} -liniowego jest związana z wyborem baz w dziedzinie oraz w przeciwdziedzinie (a ściślej – w obrazie) tegoż odwzorowania. Obserwację tę precyzuje

STWIERDZENIE 18 (O postaci kanonicznej (macierzy) odwzorowania \mathbb{K} -liniowego). *Przyjmijmy notację Def. 19 i 22 oraz Przykł. 1 (6). Dla dowolnych dwóch skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych V_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ nad ciałem \mathbb{K} , i dla dowolnego odwzorowania \mathbb{K} -liniowego $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ istnieje taki wybór odnośnych baz \mathcal{B}_α , przy którym macierz χ przyjmuje kanoniczną postać blokową*

$$[\chi]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0}_{r \times k} \\ \mathbf{0}_{(D_2-r) \times r} & \mathbf{0}_{(D_2-r) \times k} \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathbf{0}_{m \times n} \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$, $m, n \in \mathbb{N}^\times$ jest macierzą (rozmiaru $m \times n$ o współczynnikach z \mathbb{K}) o wszystkich wyrazach równych $0_{\mathbb{K}}$ i gdzie

$$r := \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \chi, \quad k := \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \chi, \quad D_2 := \dim_{\mathbb{K}} V_2.$$

Wymiar r obrazu odwzorowania liniowego χ określamy mianem **rzędu odwzorowania liniowego** χ i oznaczamy symbolem

$$\text{rk } \chi := \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \chi.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw.102]. □

Wiele pojęć wprowadzanych w kontekście rozważań nad grupami przemiennymi przenosi się w naturalny sposób do obecnego kontekstu dyskusji struktury modułu nad ustalonym pierścieniem. To samo dotyczy niektórych fundamentalnych konstrukcji homomorfizmów kanonicznych oraz indukowanych, z których dwie przytaczamy poniżej bez dowodu⁸ po ich uprzednim przeformułowaniu.

STWIERDZENIE 19. *Jądro homomorfizmu modułów lewostronnych nad dowolnym pierścieniem jest podmodułem dziedziny tegoż homomorfizmu, natomiast jego obraz jest podmodułem przeciwdziedziny.*

■

Wprowadzamy wygodną

DEFINICJA 23. W notacji Def. 15, Przykł. 1 (6) i (7) oraz 11 (14) **koobraz homomorfizmu χ modułów nad pierścieniem** to moduł ilorazowy

$$\text{Coim } \chi := G_1 / \text{Ker } \chi,$$

natomiast jego **kojądro** to moduł ilorazowy

$$\text{Coker } \chi := G_2 / \text{Im } \chi.$$

▲

TWIERDZENIE 1.1.5 (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie (dla modułów)).
W notacji Def. 15 i 23 oraz Przykł. 12 (4) i (5) $\text{Ker } \chi$ jest podmodułem G_1 , a nadto istnieje kanoniczny izomorfizm modułów

$$\lambda_\chi : \text{Coim } \chi \xrightarrow{\cong} \text{Im } \chi,$$

który czyni przemiennym następujący diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \text{Ker } \chi & \xrightarrow{j_{\text{Ker } \chi}} & G_1 & \xrightarrow{\chi} & G_2 & \xrightarrow{\pi_{\text{Coker } \chi}} & \text{Coker } \chi & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & & & & \downarrow \pi_{\text{Coim } \chi} & & \uparrow j_{\text{Im } \chi} & & & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \text{Coim } \chi & \xrightarrow{\lambda_\chi} & \text{Im } \chi & \longrightarrow & \mathbf{0} & & & & \\ & & \downarrow & & \uparrow & & & & & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & & & & & \end{array}$$

o wierszach i kolumnach **dokładnych**, tj. o tej własności, że dla każdej pary następujących po sobie homomorfizmów jądro następnika jest obrazem poprzednika. Diagram ten opisuje kanoniczny rozkład homomorfizmu χ jak w Tw. 1.1.2.

⁸W każdym z przypadków dowód sprowadza się do bezpośredniego sprawdzenia R -liniowości stosownych homomorfizmów grup skonstruowanych w dowodach odpowiedników wypisanych twierdzeń zamieszczonych w części poświęconej grupom przemienным.

■

W dalszych naszych studiach natrafimy na przestrzenie wektorowe z dodatkową strukturą, która będzie odgrywać centralną rolę w dyskutowanych konstrukcjach i dowodach omawianych twierdzeń. Fakt ten usprawiedliwia zwięzłą rekapitulację elementów teorii ogólnej owych struktur znanych z wykładu algebry liniowej. Zaczniemy od

DEFINICJA 24. Przyjmijmy zapis Def. 16 i 18 oraz Przykł. 6 (1) i niechaj \mathbb{K} będzie ciałem o charakterystyce $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, a V – przestrzenią wektorową nad \mathbb{K} . **Forma kwadratowa** na V to odwzorowanie

$$Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

jednorodnego stopnia 2, tj. spełniające warunek

$$\forall_{(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V} : Q(\lambda \triangleright_V v) = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v),$$

i o tej własności, że odwzorowanie

$$\Phi_Q : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} : (v, w) \longmapsto 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} (Q(v +_V w) - Q(v) - Q(w)),$$

zapisane z użyciem $2_{\mathbb{K}} := 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}$, jest formą dwuliniową na V . Formę tę, jawnie symetryczną, określamy mianem **formy dwuliniowej stowarzyszonej z Q** . **Jądro formy kwadratowej** to jądro odwzorowania lewostronnie stowarzyszonego z Φ_Q , tj. odwzorowania \mathbb{K} -liniowego

$$l_{\Phi_Q} : V \longrightarrow V^* : v \longmapsto \Phi_Q(v, \cdot),$$

a zatem

$$\text{Ker } Q := \text{Ker } l_{\Phi_Q} \subset V.$$

Formę kwadratową Q nazywamy **niezwyrodniałą**, jeśli $\text{Ker } Q = \{0_V\}$, i **zwyrodniałą** w przeciwnym przypadku. Te same określenia odnosimy do przestrzeni wektorowej, na której określona jest forma kwadratowa.

Macierz formy kwadratowej Q względem bazy $\mathcal{B} = \{v_n\}_{n \in \overline{1, N}}$ przestrzeni V (wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N$), to macierz stowarzyszonej z nią formy dwuliniowej, tj.

$$[Q]_{\mathcal{B}} : \overline{1, N} \times \overline{1, N} \longrightarrow \mathbb{K} : (m, n) \longmapsto \Phi_Q(v_m, v_n).$$

Przestrzeń kwadratowa to para $\left(((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V), Q \right)$ złożona z przestrzeni wektorowej $((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V)$ nad ciałem \mathbb{K} oraz formy kwadratowej Q na niej określonej.

Homomorfizm przestrzeni kwadratowej $\left(((V_1, +_1, P_1, \bullet \longmapsto 0_1), \ell_1), Q_1 \right)$ w przestrzeń kwadratową $\left(((V_2, +_2, P_2, \bullet \longmapsto 0_2), \ell_2), Q_2 \right)$, zwany także **izometrią** lub **odwzorowaniem ortogonalnym** między tymi przestrzeniami, to odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ o własności

$$Q_2 \circ \chi = Q_1.$$

W szczególności automorfizmy danej przestrzeni kwadratowej $\left(((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V), Q \right)$ określamy mianem **automorfizmów ortogonalnych** (lub **transformacji ortogonalnych**), generowaną zaś przez nie grupę

$$\text{O}(V, Q) := \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V, Q)$$

nazywamy **grupą ortogonalną stowarzyszoną z Q** . W szczególności w przypadku przestrzeni $V := \mathbb{K}^{\times N}$, $N \in \mathbb{N}$ wyposażonej w formę symetryczną o macierzy

względem bazy standardowej danej przez macierz jednostkową stopnia N otrzymujemy w ten sposób **grupę ortogonalną stopnia N o współczynnikach z \mathbb{K}** , oznaczaną symbolem

$$O(N; \mathbb{K}) \equiv O_{\mathbb{K}}(N).$$

Macierz transformacji ortogonalnej $O \in O(N; \mathbb{K})$ względem bazy standardowej nazywamy **macierzą ortogonalną (stopnia N)**. ▲

PRZYKŁAD(Y) 14.

- (1) Szczególnie prostym i zarazem ważnym przykładem przestrzeni kwadratowej jest przestrzeń \mathbb{R} -liniowa \mathbb{R}^{p+q} , $p, q \in \mathbb{N}$ z (pseudo)euklidesową formą kwadratową

$$\delta_{\mathbb{E}}^{(p,q)} := \delta_{\mathbb{E}}^{(p)} \oplus (-\delta_{\mathbb{E}}^{(q)}) : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{K} : (x_1, x_2, \dots, x_{p+q}) \longmapsto \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=1}^q x_{p+j}^2,$$

gdzie

$$\delta_{\mathbb{E}}^{(p)} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_p) \longmapsto \sum_{i=1}^p x_i^2$$

jest standardową **euklidesową formą kwadratową**. Przestrzeń kwadratową wyposażoną w pierwszą z tych form będziemy oznaczać symbolem $\mathbb{R}^{p,q}$, a odnośną grupę ortogonalną – symbolem

$$O_{\mathbb{R}}(p, q) \equiv O(\mathbb{R}^{p,q}).$$

- (2) Niezwyrodniała dwuwymiarowa przestrzeń kwadratowa V nad ciałem \mathbb{K} , w której istnieje niezerowy wektor izotropowy $v \in V$,

$$v \neq 0_V \quad \wedge \quad Q(v) = 0_{\mathbb{K}},$$

jest nazywana **płaszczyzną hiperboliczną**. Bazę $\{v, w\}$ płaszczyzny hiperbolicznej V spełniającą układ warunków

$$(1.1.7) \quad Q(v) = 0_{\mathbb{K}} = Q(w) \quad \wedge \quad \Phi_Q(v, w) = 1_{\mathbb{K}}$$

nazywamy **parą hiperboliczną**. Łatwo stwierdzamy, że baza taka istnieje w dowolnej płaszczyźnie hiperbolicznej. ✓

Mamy oczywiste

STWIERDZENIE 20. *Przyjmijmy zapis Def. 19, 20, 22 i 24. Niechaj $((V, +_V, \mathbf{P}_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q)$ będzie przestrzenią kwadratową wymiaru $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ nad \mathbb{K} i niech \mathcal{B}_{α} , $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema bazami przestrzeni V . Wówczas zachodzi tożsamość (\square jest mnożeniem macierzowym)*

$$[Q]_{\mathcal{B}_2} = [\text{id}_V]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1 T} \square [Q]_{\mathcal{B}_1} \square [\text{id}_V]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}.$$

W szczególności więc dowolna macierz ortogonalna $O \in \text{Mat}(N; \mathbb{K})$, $N \in \mathbb{N}$ spełnia równość

$$O^T \circ O = \mathbf{1}_N,$$

z której wynika, że jest ona macierzą odwracalną.

Ponadto dla dowolnej niezwyrodniałej formy kwadratowej spełniona jest relacja

$$\forall_{\chi \in \mathcal{O}(V, Q)} : \det \chi \in \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\},$$

przy czym podgrupę

$$\mathrm{SO}(V, Q) := \mathrm{Ker} \det \upharpoonright_{\mathcal{O}(V, Q)}$$

określamy mianem **grupy specjalnej ortogonalnej stowarzyszonej z Q** , a jej elementy – **obrotami (uogólnionymi)**. W szczególności odnośną podgrupę grupy $\mathcal{O}(N; \mathbb{K})$ nazywamy **grupą specjalną ortogonalną stopnia N o współczynnikach z \mathbb{K}** i oznaczamy symbolem

$$\mathrm{SO}(N; \mathbb{K}) \equiv \mathrm{SO}_{\mathbb{K}}(N).$$

■

Struktura przestrzeni kwadratowej na dziedzinie i przeciwdziedzinie odwzorowania \mathbb{K} -liniowego pozwala wprowadzić przydatną konstrukcję opisywaną w

DEFINICJA 25. Przyjmijmy zapis Def. 24 i niechaj $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ będzie dowolnym odwzorowaniem \mathbb{K} -liniowym między przestrzeniami kwadratowymi V_1 i V_2 . **Odwzorowanie hermitowsko sprzężone** do χ to odwzorowanie $\chi^\dagger \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_2, V_1)$ określone warunkiem

$$\forall_{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2} : \Phi_{Q_1}(\chi^\dagger(v_2), v_1) := \Phi_{Q_2}(v_2, \chi(v_1)).$$

Przyporządkowanie odwzorowaniu \mathbb{K} -liniowemu odwzorowania hermitowsko sprzężonego do niego nosi miano **sprzężenia hermitowskiego**.

▲

Mamy też wygodne pojęcia pochodne

DEFINICJA 26. Przyjmijmy zapis Def. 18 oraz 24 i niech $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V, Q)$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem \mathbb{K} . Mówimy, że wektor $w \in V$ jest **(Q -)ortogonalny** (lub **(Q -)prostopadły**) do wektora $v \in V$, co zapisujemy symbolem

$$w \perp_Q v,$$

ilekroć spełniony jest warunek

$$\Phi_Q(v, w) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Analogicznie, dla dowolnej podprzestrzeni $W \subset V$ określamy **przestrzeń (Q -)ortogonalną** (lub **(Q -)prostopadłą**) do W jako podprzestrzeń

$$W^{\perp_Q} := \{ v \in V \mid \forall_{w \in W} : v \perp_Q w \}.$$

Idąc dalej, powiemy, że podprzestrzeń $W_1 \subset V$ jest **(Q -)ortogonalna** (lub **(Q -)prostopadła**) do podprzestrzeni $W_2 \subset V$, co zapiszemy symbolem

$$W_1 \perp_Q W_2,$$

jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2} : w_1 \perp_Q w_2.$$

Wektor (Q -)izotropowy (lub **(Q -)zerowy**) $v \in V$ w przestrzeni kwadratowej V to taki, który spełnia warunek

$$Q(v) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Wektory, które nie są izotropowe, nazywamy **nieizotropowymi** (lub **anizotropowymi**). Dowolna podprzestrzeń $W \subset V$ zawierająca wektor (Q -)izotropowy $v \in W$ o własności

$$\forall w \in W : \Phi_Q(v, w) = 0_{\mathbb{K}}$$

jest określana mianem **(pod)przestrzeni (Q -)izotropowej**. I wreszcie podprzestrzeń $W \subset V$, na której

$$\Phi_Q|_{W \times W} = 0,$$

nazywamy **(pod)przestrzenią całkowicie (Q -)izotropową** (lub **(Q -)zerową**). Przestrzeń, na której forma kwadratowa jest niezwyrodniała, bywa nazywana **przestrzenią niezwyrodniałą** (lub **nieizotropową** wzgl. **anizotropową**).

Baza (Q -)ortogonalna przestrzeni kwadratowej V to taka jej baza $\mathcal{B} := \{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, której elementy spełniają relacje

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda : (\lambda \neq \mu \implies \Phi_Q(v_\lambda, v_\mu) = 0_{\mathbb{K}}).$$

Jeśli dodatkowo

$$\forall \lambda \in \Lambda : Q(v_\lambda) \equiv \Phi_Q(v_\lambda, v_\lambda) = 1_{\mathbb{K}},$$

to bazę taką określamy mianem **bazy ortonormalnej**.

Z wektorami nieizotropowymi,

$$v \in V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\}) \equiv V^\times,$$

stowarzyszamy klasę automorfizmów ortogonalnych zwanych **odbiciami elementarnymi** (lub inaczej **transformacjami Householdera**) – są to odbicia Q -ortogonalne w hiperpłaszczyznach $\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}$ będących Q -ortogonalnymi dopełnieniami powłok tychże wektorów, wyrażają się przeto formułami

$$(1.1.8) \quad P_v : V \curvearrowright : w \longmapsto w - \frac{2\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \triangleright v.$$

▲

Związek między symetrycznymi formami dwuliniowymi a formami kwadratowymi, zasygnalizowany już w samej definicji tych ostatnich, ustala⁹

STWIERDZENIE 21. *Przyjmijmy zapis Def. 9 oraz Przykł. 6 (1) i niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} . Jeśli $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, to istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między formami kwadratowymi i symetrycznymi formami dwuliniowymi na V .*

■

⁹W przypadku $\text{char } \mathbb{K} = 2$ także można określić relację między formami kwadratowymi a symetrycznymi formami dwuliniowymi, patrz: Ref. [Bou07b, § 3, n^o 4, Prop. 2]. Odpowiedniość ta nie jest jednak wzajemnie jednoznaczna.

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 162]. □

O patologicznej naturze przypadku $\text{char } \mathbb{K} = 2$ zaświadcza następująca elementarna obserwacja: dla *każdej* formy kwadratowej Q na przestrzeni wektorowej V nad ciałem \mathbb{K} forma dwuliniowa stowarzyszona z Q jest alternująca,

$$\forall_{v \in V} : \Phi_Q(v, v) = 0_{\mathbb{K}},$$

a zatem skośnie symetryczna. Oczywiście nie oznacza to jeszcze, że (będąc zarazem formą symetryczną) jest ona koniecznie zerowa.

Absolutnie podstawowe znaczenie praktyczne dla wszelkich rozważań strukturalnych dotyczących przestrzeni kwadratowych ma poniższe

STWIERDZENIE 22 (Twierdzenie Lagrange'a o diagonalizacji formy kwadratowej). *W notacji Def. 9 oraz Przykł. 6 (1) każda forma kwadratowa na przestrzeni wektorowej nad ciałem \mathbb{K} o charakterystyce $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ ma **bazę diagonalizującą**, tj. taką, względem której macierz tej formy jest diagonalna.* ■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 163]. □

Jako proste, a przydatne zastosowanie Twierdzenia Lagrange'a podamy

STWIERDZENIE 23. *Dowolne dwie niezwyrodniałe przestrzenie kwadratowe nad \mathbb{C} tego samego (skończonego) wymiaru są izometrycznie izomorficzne.* ■

Dowód: W świetle Tw. 22 forma kwadratowa na dowolnej zespolonej przestrzeni kwadratowej ma bazę diagonalizującą. Działając na każdy z jej elementów pierwiastkiem odnośnego elementu naprzekątniowego macierzy formy kwadratowej względem tejże bazy diagonalizującej (co jest dobrze określoną odwracalną operacją \mathbb{C} -liniową wobec niezwyrodnienia formy kwadratowej i domkniętości algebraicznej ciała \mathbb{C}) otrzymujemy bazę ortonormalną. □

Zachodzi także

STWIERDZENIE 24. *Przyjmijmy zapis Def. 26, przy czym zakładamy, że przestrzeń wektorowa V jest niezwyrodniała. Niechaj $W \subset V$ będzie podprzestrzenią, a wówczas $\dim_{\mathbb{K}} W < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim_{\mathbb{K}} (V/W^{\perp Q}) < \infty$. W tej sytuacji zachodzi równość*

$$\dim_{\mathbb{K}} (V/W^{\perp Q}) = \dim_{\mathbb{K}} W,$$

czyli też

$$(1.1.9) \quad \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W^{\perp Q},$$

a nadto

$$(W^{\perp Q})^{\perp Q} = W.$$
■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 128]. □

Wreszcie na koniec sformułujemy stwierdzenie ustalające prostą relację między formą kwadratową na przestrzeni wektorowej i dowolnym (niezerowym) wyznacznikiem na tej ostatniej, do którego będziemy się odwoływać w trakcie badań nad anatomią algebr Clifforda.

STWIERDZENIE 25. Przyjmijmy zapis Def. 20 oraz 24 i niechaj V będzie przestrzenią (kwadratową) wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N < \infty$. Dowolny wyznacznik $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$ określa jednoznacznie skalar $\lambda_{\Delta} \in \mathbb{K}$ spełniający – dla dowolnych $v_i, w_i \in V$, $i \in \overline{1, N}$ – tożsamości

$$\det_{(N)}(\Phi_Q(v_i, w_j))_{i, j \in \overline{1, N}} = \lambda_{\Delta} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \dots, w_N).$$

■

Dowód: Przy ustalonych (dowolnie) wektorach w_i , $i \in \overline{1, N}$ odwzorowanie $\delta(w_1, w_2, \dots, w_N) : V^{\times N} \longrightarrow \mathbb{K} : (v_1, v_2, \dots, v_N) \longmapsto \det_{(N)}(\Phi_Q(v_i, w_j))_{i, j \in \overline{1, N}}$ jest jawnie N -liniowe i alternujące, przeto

$$\delta(w_1, w_2, \dots, w_N) \in \bigwedge^N V^*,$$

co wobec oczywistej równości

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^N V^* = \binom{N}{N} = 1$$

implikuje dla ustalonego (dowolnie) wyznacznika $\Delta \in \bigwedge^N V^*$ istnienie skalaru $\lambda_{\Delta}(w_1, w_2, \dots, w_N)$ spełniającego relację

$$\delta(w_1, w_2, \dots, w_N) = \lambda_{\Delta}(w_1, w_2, \dots, w_N) \triangleright \Delta.$$

Symetryzacja powyższej obserwacji prowadzi wprost do tezy dowodzonego stwierdzenia. □

Uniwersalność i internalizacja

Po przywołaniu elementarnych aspektów „anatomii” podstawowych struktur algebraicznych, ze szczególnym uwzględnieniem specyfiki modułów nad pierścieniem i – w tej liczbie – przestrzeni wektorowych nad ciałem, przejdziemy obecnie do dyskusji rozmaitych naturalnych operacji na modułach takich jak produkt, suma prosta oraz iloczyn tensorowy. Jako miarę naturalności przedstawianych konstrukcji, pozwalającą uniknąć konieczności uzasadniania rozważań nad nimi *a posteriori*, w odwołaniu do konkretnych sytuacji o znaczeniu matematycznym lub fizycznym, w których występują i odgrywają znaczącą rolę, przyjmujemy ich uniwersalność – definicję tego konstruktów, przykrojoną do (algebraicznych) ram niniejszego kursu, podajemy poniżej. Gwoli uczynienia rzeczonyj definicji możliwie zwięzłą i przejrzystą, wprowadzimy obecnie pojęcie, którego rola w dalszej części kursu okaże się wykraczać poza trywialne porządkowanie języka – w istocie, żywimy nadzieję, podpartą doświadczeniem osobistym, że rolą tą będzie z czasem uporządkowanie myślenia (w szczególności rewizja dotychczas stosowanych schematów) o strukturach matematycznych i fizycznych *sensu largo*, a wszystko to w ramach nadrzędnego paradygmatu teorii kategorii, o której więcej w Cz. 8, patrz także: App. A dla lepszego zrozumienia tego, w jakim sensie teoria kategorii stanowi naturalne uogólnienie teorii grup.

DEFINICJA 27. **Kategorię \mathcal{C}** tworzą następujące klasy¹:

- **klasa obiektów** $\text{Obj } \mathcal{C}$,
- **klasa morfizmów** $\text{Mor } \mathcal{C}$, której elementy zwiemy **morfizmami**, przy czym dla dowolnych $A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}$ klasę morfizmów z A do B oznaczamy symbolem $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$,

na których określone są następujące odwzorowania:

- **początek morfizmu** $s : \text{Mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{Obj } \mathcal{C}$ i **koniec morfizmu** $t : \text{Mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{Obj } \mathcal{C}$, przy czym

$$\forall_{A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)} : (s, t)(f) = (A, B),$$

- **identyczność** $\text{id} : \text{Obj } \mathcal{C} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C} : A \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$,
- **złożenie morfizmów**

$$\circ_{\mathcal{C}} : \text{Mor } \mathcal{C}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{C} \equiv \{ (f, g) \in \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2} \mid s(f) = t(g) \} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C}$$

$$: (f, g) \mapsto f \circ_{\mathcal{C}} g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(s(g), t(f))$$

¹**Klasa** to wszystkie obiekty (np. zbiory) u wspólniające ustaloną cechę definiującą (np. ”bycie zbiorem”). Pojęcie to stanowi takie uogólnienie pojęcia zbioru, które pozwala mówić o mnogości obiektów określonego typu bez popadania w antynomie, jak to ma miejsce choćby w przypadku próby opisanego mnogości wszystkich zbiorów przy użyciu pojęcia zbioru (więc także obiektu definiowanej tym sposobem mnogości).

spełniające warunki:

$$\forall_{A,B \in \text{Obj } \mathcal{C}} \forall_{(f,g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)} : (f \circ_{\mathcal{C}} \text{id}_A = f \quad \wedge \quad \text{id}_A \circ_{\mathcal{C}} g = g),$$

$$\forall_{(f,g,h) \in \text{Mor } \mathcal{C}_{s \times t} \text{Mor } \mathcal{C}_{s \times t} \text{Mor } \mathcal{C}} : (f \circ_{\mathcal{C}} g) \circ_{\mathcal{C}} h = f \circ_{\mathcal{C}} (g \circ_{\mathcal{C}} h).$$

Ilekoć klasa $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ jest zbiorem dla każdej pary $A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}$, kategorię \mathcal{C} nazywamy **lokalnie małą**. Jeśli natomiast zarówno $\text{Obj } \mathcal{C}$, jak i $\text{Mor } \mathcal{C}$ są zbiorami, \mathcal{C} określamy mianem **małej kategorii**. Kategorię, która nie jest mała, nazywamy **wielką**.

Funktor kowariantny z kategorii \mathcal{C}_1 w kategorię \mathcal{C}_2 to odwzorowanie o składowych, zwyczajowo oznaczanych tym samym symbolem,

- obiektowej $F : \text{Obj } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Obj } \mathcal{C}_2$,
- morfizmowej $F : \text{Mor } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C}_2$,

które spełniają następujące warunki:

- $s \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ s$ oraz $t \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ t$, czyli

$$\forall_{A,B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A,B)} : F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B)),$$
- $\text{id} \circ F \upharpoonright_{\text{Obj } \mathcal{C}_1} = F \circ \text{id}$, czyli

$$\forall_{A \in \text{Obj } \mathcal{C}_1} : F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)},$$
- $\circ_{\mathcal{C}} \circ (F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} \times F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1}) = F \circ \circ_{\mathcal{C}}$, czyli

$$\forall_{(f,g) \in \text{Mor } \mathcal{C}_1 \times \text{Mor } \mathcal{C}_1} : F(f \circ_{\mathcal{C}_1} g) = F(f) \circ_{\mathcal{C}_2} F(g).$$

W kontekście konstrukcji uniwersalnych funktorów $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ określamy często mianem **diagramu w kategorii \mathcal{C}_2 modelowanego na kategorii \mathcal{C}_1** .

Funktor kontrawariantny z kategorii \mathcal{C}_1 w kategorię \mathcal{C}_2 to odwzorowanie o składowych, oznaczanych jak wyżej,

- obiektowej $F : \text{Obj } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Obj } \mathcal{C}_2$,
- morfizmowej $F : \text{Mor } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C}_2$,

które spełniają następujące warunki:

- $s \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ t$ oraz $t \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ s$, czyli

$$\forall_{A,B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A,B)} : F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(B), F(A)),$$
- $\text{id} \circ F \upharpoonright_{\text{Obj } \mathcal{C}_1} = F \circ \text{id}$, czyli

$$\forall_{A \in \text{Obj } \mathcal{C}_1} : F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)},$$
- $\circ_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ (F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} \times F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1}) = F \circ \circ_{\mathcal{C}}$, gdzie τ jest transpozycją, czyli

$$\forall_{(f,g) \in \text{Mor } \mathcal{C}_1 \times \text{Mor } \mathcal{C}_1} : F(f \circ_{\mathcal{C}_1} g) = F(g) \circ_{\mathcal{C}_2} F(f).$$

Transformacja naturalna między funktorami kowariantnymi $F_1, F_2 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ to rodzina morfizmów $\eta : \text{Obj } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C}_2 : A \longmapsto \eta_A$ o własności wyrażonej przez diagramy przemienne

$$(1.2.1) \quad \forall_{\substack{A,B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1 \\ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A,B)}} : \quad \begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ F_2(A) & \xrightarrow{F_2(f)} & F_2(B) \end{array} .$$

Transformację naturalną będziemy (najczęściej) zapisywać symbolicznie w postaci

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ \curvearrowright & \Downarrow \eta & \curvearrowleft \\ \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_2 \\ \curvearrowleft & & \curvearrowright \\ & F_2 & \end{array}$$

Jeśli wszystkie morfizmy tworzące rodzinę η są izomorfizmami, transformację naturalną określamy mianem **izomorfizmu naturalnego**. Jedyną różnicą w definicji transformacji naturalnej w przypadku funktorów kontrawariantnych polega na tym, że rodzina morfizmów w kategorii-przeciwdziedzinie indeksowanych przez morfizmy z kategorii-dziedziny spełnia warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$(1.2.2) \quad \forall_{\substack{A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1 \\ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B)}} : \quad \begin{array}{ccc} F_1(A) & \xleftarrow{F_1(f)} & F_1(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ F_2(A) & \xleftarrow{F_2(f)} & F_2(B) \end{array} .$$

Kategorię, której obiektami są funktory $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ między dwiema ustalonymi kategoriami, a morfizmami – transformacje naturalne między nimi, oznaczamy symbolami

$$\mathcal{C}_2^{\mathcal{C}_1} \equiv [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$$

i nazywamy **kategorią funktorów z \mathcal{C}_1 do \mathcal{C}_2** lub – we wspomnianym wcześniej kontekście – **kategorią diagramów w \mathcal{C}_2 modelowanych na \mathcal{C}_1** .

Dowolna skończona rodzina kategorii $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ określa **kategorię produktową** $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \dots \times \mathcal{C}_N$, której klasa obiektów jest iloczynem klas (czyli klasą N -tek obiektów) $\text{Obj}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \dots \times \mathcal{C}_N) = \text{Obj } \mathcal{C}_1 \times \text{Obj } \mathcal{C}_2 \times \dots \times \text{Obj } \mathcal{C}_N$, a klasa morfizmów jest iloczynem klas (czyli klasą N -tek morfizmów) $\text{Hom}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \dots \times \mathcal{C}_N) = \text{Hom } \mathcal{C}_1 \times \text{Hom } \mathcal{C}_2 \times \dots \times \text{Hom } \mathcal{C}_N$, przy czym składanie morfizmów jest zdefiniowane wzorem

$$(g_1, g_2, \dots, g_N) \circ (f_1, f_2, \dots, f_N) := (g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2, \dots, g_N \circ f_N),$$

słusznym dla dowolnych $A_i, B_i, C_i \in \text{Obj } \mathcal{C}_i$ i $(f_i, g_i) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_i}(A_i, B_i) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}_i}(B_i, C_i)$, gdzie $i \in \overline{1, N}$.

▲

UWAGA 1. Funktory kowariantne (wzgl. kontrawariantne) między dwiema ustalonymi (dowolnie) kategoriami tworzą kategorię, której morfizmami są transformacje naturalne. Fundamentalna i zarazem naturalna rola tej kategorii jest eksponowana przez Lemat Yonedy, będący kategoryfikacją Twierdzenia Cayleya, o czym więcej można przeczytać w App. A.

PRZYKŁAD(Y) 15. (Kategorie)

- (1) Zbiory wraz z odwzorowaniami między nimi (dla których złożeniem jest superpozycja odwzorowań) tworzą wielką kategorię **Set**.

- (2) Struktury algebraiczne określonego typu tworzą kategorie wraz z odpowiednimi homomorfizmami jako morfizmami. Mamy więc kategorie **Grp** (grupy), **AbGrp** (grup przemiennych), **Ring** (pierścieni), **AbRing** (pierścieni przemiennych), **Field** (ciał), **Mod_R** (lewych modułów nad pierścieniem R), **Mod_{R^{opp}}** (prawych modułów nad pierścieniem R), **Mod_(R₁, R₂^{opp})** ((R_1, R_2^{opp}) -bimodułów nad parą pierścieni (R_1, R_2)), **Vect_K** (przestrzeni wektorowych nad ciałem \mathbb{K}), **Vect_K^(<∞)** (skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem \mathbb{K}), **□Vect_K** (przestrzeni kwadratowych nad ciałem \mathbb{K}), **Alg_R** (algebr nad pierścieniem przemiennym R), **uAlg_R** (unitalnych algebr nad pierścieniem przemiennym R), **AssAlg_R** (algebr przemiennych nad pierścieniem przemiennym R) *etc.*
- (3) Graf skierowany kanonicznie określa małą kategorię, której obiektami są wierzchołki grafu, morfizmami zaś – ścieżki w grafie (ich konkatenacja jest złożeniem morfizmów).
- (4) Grupa kanonicznie określa małą kategorię o jednoelementowym zbiorze obiektów (dowolny singleton) i zbiorze morfizmów tożsamym z grupą (w szczególności wszystkie morfizmy są odwracalne), patrz: Dodatek A.
- (5) Dowolny zbiór S określa następujące trzy (małe) kategorie:
- kategorię S (oznaczaną z oczywistych powodów tym samym symbolem co zbiór) o zbiorze obiektów S i zbiorach morfizmów (jedynych niepustych) $\text{Hom}_S(x, x) = \{x \rightarrow x\}$, $x \in S$ – kategorię tę nazwiemy **kategorią zbioru S** ;
 - kategorię \hat{S} o zbiorze obiektów $\text{Obj } \hat{S} := S \cup \{\bullet\}$, w którym singleton $\{\bullet\}$ jest jedynym obiektem inicjalnym, oraz o jednoelementowych zbiorach morfizmów (jedynych niepustych) $\text{Hom}_{\hat{S}}(\bullet, s) = \{\bullet \rightarrow s\}$, $s \in S$ i $\text{Hom}_{\hat{S}}(x, x) = \{x \rightarrow x\}$, $x \in S \cup \{\bullet\}$ – kategorię tę nazwiemy **rozpięciem S** ;
 - kategorię \check{S} o zbiorze obiektów $\text{Obj } \check{S} := S \cup \{\bullet\}$, w którym singleton $\{\bullet\}$ jest jedynym obiektem terminalnym, oraz o jednoelementowych zbiorach morfizmów (jedynych niepustych) $\text{Hom}_{\check{S}}(s, \bullet) = \{s \rightarrow \bullet\}$, $s \in S$ i $\text{Hom}_{\check{S}}(x, x) = \{x \rightarrow x\}$, $x \in S \cup \{\bullet\}$ – kategorię tę nazwiemy **korozpięciem S** .

Powyżej morfizmy są dowolnymi singletonami, które dla przejrzystości oznaczyliśmy symbolami ich początku i końca. Obie kategorie występują jako modele diagramów używanych w konstrukcjach uniwersalnych.

Kategorię \mathcal{C}^S funktorów z kategorii zbioru S w (dowolnie ustaloną) kategorię \mathcal{C} określamy mianem **kategorii ciągów (uogólnionych) w \mathcal{C} indeksowanych przez S** . Kategorię \mathcal{C} zanurzamy w \mathcal{C}^Λ przy użyciu funktora kowariantnego (ciągi stałe) $\Delta_{\mathcal{C};\Lambda} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\Lambda$ o składowych: obiektowej

$$\Delta_{\mathcal{C};\Lambda} : \text{Obj } \mathcal{C} \rightarrow \text{Obj } \mathcal{C}^\Lambda : X \mapsto (\Lambda \rightarrow \text{Obj } \mathcal{C} : \lambda \mapsto X)$$

i morfizmowej

$$\Delta_{\mathcal{C};\Lambda} : \text{Mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda : \xi \mapsto (\Lambda \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C} : \lambda \mapsto \xi).$$

✓

PRZYKŁAD(Y) 16. (Funktory)

- (1) **Funktor identycznościowy** $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \circlearrowleft$ o składowej obiektowej $\text{id}_{\mathcal{C}} : \text{Obj } \mathcal{C} \circlearrowleft : A \mapsto A$ i morfizmowej $\text{id}_{\mathcal{C}} : \text{Mor } \mathcal{C} \circlearrowleft : f \mapsto f$.
- (2) **Funktor stały** $X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, zwany też **stałą**, określony przez obiekt $X \in \text{Obj } \mathcal{D}$, o składowej obiektowej $X : \text{Obj } \mathcal{C} \rightarrow \text{Obj } \mathcal{D} : A \mapsto X$ i morfizmowej $X : \text{Mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{D} : f \mapsto \text{id}_X$.
- (3) Reprezentacja $R : G \rightarrow \text{GL}(V; \mathbb{K})$ grupy $G \in \text{Obj } \mathbf{Grp}$ na przestrzeni wektorowej $V \in \text{Obj } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ nad ciałem \mathbb{K} określa functor kowariantny w rozumieniu Przykł. 15 (3), patrz: App. A.
- (4) Dualność modułów nad pierścieniem przemiennym R określa (endo)funktor kontrawariantny $*$: $\mathbf{Mod}_R \circlearrowleft$ o składowej obiektowej $*$: $\text{Obj } \mathbf{Mod}_R \circlearrowleft : G \mapsto G^*$ i morfizmowej $*$: $\text{Mor } \mathbf{Mod}_R \circlearrowleft : \chi \mapsto \chi^*$, gdzie dla dowolnego $\chi \in \text{Hom}_R(G_1, G_2)$ jest $\chi^* : G_2^* \rightarrow G_1^* : \varphi \mapsto \varphi \circ \chi$.
- (5) Konstrukcja zbioru potęgowego określa (endo)funktor kowariantny 2^{\cdot} : $\mathbf{Set} \circlearrowleft$, o składowej obiektowej $2^{\cdot} : \text{Obj } \mathbf{Set} \circlearrowleft : X \mapsto 2^X$ i morfizmowej $2^{\cdot} : \text{Mor } \mathbf{Set} \circlearrowleft : (X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (2^X \ni O \mapsto f(O) \in 2^Y)$.

✓

PRZYKŁAD(Y) 17. (Transformacje naturalne)

- (1) Rodzina izomorfizmów grup $\text{Inv.} : \text{Obj } \mathbf{Grp} \rightarrow \text{Mor } \mathbf{Grp} : G \mapsto \text{Inv}_G$, z których każdy traktujemy jako odwzorowanie z (odnośnej) grupy G w grupę do niej przeciwną, G^{opp} , określa izomorfizm naturalny między funktorem identycznościowym na kategorii \mathbf{Grp} a funktorem „brania przeciwności”, który dowolnej grupie przyporządkowuje grupę do niej przeciwną i każdemu homomorfizmowi grup – *tenże* homomorfizm.
- (2) Rodzina monomorfizmów przestrzeni wektorowych (nad ustalonym ciałem \mathbb{K}) $\text{ev.}^V : \text{Obj } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} : V \mapsto \text{ev.}^V$, z których każdy przyporządkowuje (odnośnej) przestrzeni wektorowej V odwzorowanie (\mathbb{K} -liniowe) ewaluacji $\text{ev.}^V : V \rightarrow V^{**} : v \mapsto \text{ev.}^V_v$ określone wzorem $\text{ev.}^V_v : V^* \rightarrow \mathbb{K} : \varphi \mapsto \varphi(v)$, określa transformację naturalną między funktorem identycznościowym na kategorii $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ a funktorem bidualizacji, który dowolnej przestrzeni przyporządkowuje bidualną do niej i każdemu odwzorowaniu \mathbb{K} -liniowemu – odwzorowanie bidualne.

✓

Do precyzyjnego sformułowania pojęcia uniwersalności będziemy jeszcze potrzebować

DEFINICJA 28. Przyjmijmy zapis Def. 27. Obiekt T kategorii \mathcal{C} nazywamy **końcowym** (albo **terminalnym**), jeżeli dla każdego $X \in \text{Obj } \mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$. Analogicznie, obiekt I kategorii \mathcal{C} nazywamy **początkowym** (albo **inicjalnym**), jeżeli dla każdego $X \in \text{Obj } \mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$. Obiekt kategorii będący zarazem końcowym i początkowym nosi miano **zerowego**.

▲

PRZYKŁAD(Y) 18. (Obiekty końcowe i początkowe)

- (1) W kategorii **Set** z Przykł. 15 (1) obiektem końcowym jest (dowolny) singleton, początkowym zaś (jedynym) – zbiór pusty. Nie ma w niej obiektów zerowych.
- (2) W kategoriach **Grp**, **AbGrp** i pochodnych \mathbf{Mod}_R , \mathbf{Vect}_K z Przykł. 15 (2) obiektem zerowym jest (dowolna) struktura trywialna.
- (3) W kategorii **AbRing** z Przykł. 15 (2) obiektem końcowym jest pierścień trywialny z Przykł. 3 (1), początkowym zaś – pierścień \mathbb{Z} z Przykł. 3 (2).
- (4) Kategoria **Field** nie zawiera obiektów końcowych ani początkowych.

✓

O wyjątkowości obiektów terminalnych i inicjalnych przesądza

TWIERDZENIE 1.2.1 (O jednoznaczności obiektów terminalnych i inicjalnych). *Przyjmijmy notację Def. 28. Niechaj T_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwoma obiektami terminalnymi w kategorii \mathcal{C} i niech I_β , $\beta \in \{1, 2\}$ będą dwoma obiektami inicjalnymi w tejże kategorii. Istnieją jednoznacznie określone izomorfizmy (w kategorii \mathcal{C})*

$$\tau_{1,2} : T_1 \xrightarrow{\cong} T_2, \quad \iota_{1,2} : I_1 \xrightarrow{\cong} I_2.$$

■

Dowód: Rozważmy parę T_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ obiektów terminalnych w \mathcal{C} . Terminalność T_1 implikuje istnienie dokładnie jednego morfizmu $\tau_{2,1} : T_2 \rightarrow T_1$, a terminalność T_2 – dokładnie jednego morfizmu $\tau_{1,2} : T_1 \rightarrow T_2$. Ich złożenie $\tau_{2,1} \circ \tau_{1,2}$ jest endomorfizmem T_1 , ale endomorfizmem takim jest też id_{T_1} , co wobec terminalności T_1 oznacza, że koniecznie

$$\tau_{2,1} \circ \tau_{1,2} = \text{id}_{T_1}.$$

Podobnie dowodzimy równości

$$\tau_{1,2} \circ \tau_{2,1} = \text{id}_{T_2},$$

która w połączeniu z poprzednią przesądza o izomorficznym charakterze $\tau_{1,2}$. W przypadku obiektów inicjalnych I_β , $\beta \in \{1, 2\}$ rozumowanie przebiega w pełni analogicznie. □

Możemy już obecnie zwięźle wysłowić

DEFINICJA 29. Przyjmijmy zapis Def. 28. Niechaj \mathcal{C}_α , $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ będą kategoriami i niech $F_\beta : \mathcal{C}_\beta \rightarrow \mathcal{C}_3$, $\beta \in \{1, 2\}$ będą funktorami kowariantnymi, X zaś – (dowolnym) obiektem kategorii \mathcal{C}_1 . Wreszcie też niech $P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi)$ będzie pewnym zdaniem logicznym określającym własność $\varphi \in \text{Mor } \mathcal{C}_3$ w odwołaniu do struktury $(X; F_1, F_2)$ oraz $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}_2$, dla którego jest dobrze określona kategoria $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$ o klasie obiektów

$$\begin{aligned} \text{Obj } \mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}] &:= \{ (Y, \varphi) \in \text{Obj } \mathcal{C}_2 \times \text{Mor } \mathcal{C}_3 \mid \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_3}(F_2(Y), F_1(X)) \\ &\quad \wedge P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi) \} \end{aligned}$$

i zbiorach morfizmów²

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]}\left((Y_1, \varphi_1), (Y_2, \varphi_2)\right) := \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(Y_1, Y_2) \mid \varphi_2 \circ F_2(\chi) = \varphi_1 \},$$

²Obecność identyczności (na dowolnym obiekcie \mathcal{C}_2) w klasie morfizmów, jak również możliwość składania morfizmów są zagwarantowane przez funktorialność F_2 .

ze złożeniem dziedzicznym z \mathcal{C}_2 , lub kategorią $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$ o klasie obiektów

$$\text{Obj } \mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}] := \left\{ (Y, \varphi) \in \text{Obj } \mathcal{C}_2 \times \text{Mor } \mathcal{C}_3 \mid \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_3}(F_1(X), F_2(Y)) \right. \\ \left. \wedge P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi) \right\}$$

i zbiorach morfizmów

$$\text{Hom}_{\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]}((Y_1, \varphi_1), (Y_2, \varphi_2)) := \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(Y_1, Y_2) \mid F_2(\chi) \circ \varphi_1 = \varphi_2 \},$$

ze złożeniem dziedzicznym z \mathcal{C}_2 . Jak łatwo widać, $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$ jest podkategorią kategorii $\mathcal{T}_{F_1(X)}\mathcal{C}_3^{\{\mathbf{1}\}} \subset \mathcal{C}_3^{\{\mathbf{1}\}}$ diagramów w \mathcal{C}_3 modelowanych na korozpięciu singletonu $\{\mathbf{1}\}$, o obrazie \bullet ustalonym w postaci $F_1(X)$ (z transformacjami naturalnymi η o składowej $\eta_\bullet = \text{id}_{F_1(X)}$), a $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$ jest podkategorią kategorii $\mathcal{I}^{F_1(X)}\mathcal{C}_3^{\{\mathbf{1}\}} \subset \mathcal{C}_3^{\{\mathbf{1}\}}$ diagramów w \mathcal{C}_3 modelowanych na rozpięciu singletonu $\{\mathbf{1}\}$, o identycznie ustalonym obrazie \bullet (i z identycznie ograniczonymi transformacjami naturalnymi) – patrz: Przykł. 15 (5). W obu przypadkach „wolne zmienne” bierzemy z obrazu kategorii \mathcal{C}_2 względem funktora F_2 , a nadto – wiążemy je warunkiem $P_{X;F_1,F_2}$.

Struktura końcowa (lub **terminalna**) dla $P_{X;F_1,F_2}$ to obiekt końcowy (T, τ) w kategorii $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$. Definiującą własność tego obiektu, zwaną **własnością końcową** (lub **terminalną**), opisuje diagram przemienny

$$(1.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & F_2(Y) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{pr}_1} & (Y, \varphi) \\ & \nearrow \varphi & \downarrow F_2(\Psi) & & \downarrow \Psi \\ X & \xrightarrow{F_1} & F_1(X) & \xleftarrow{\tau} & F_2(T) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{pr}_1} & (T, \tau) \\ \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_3 & & \mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}] \end{array},$$

w którym (Y, φ) jest dowolnym obiektem w kategorii $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$, a przerywana cięciwa strzałki symbolizuje „istnienie i jedyność” odpowiedniego morfizmu.

Struktura początkowa (lub **inicjalna**) dla $P_{X;F_1,F_2}$ to obiekt początkowy (I, ι) w kategorii $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$. Definiującą własność tego obiektu, zwaną **własnością początkową** (lub **inicjalną**), opisuje diagram przemienny

$$(1.2.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & F_2(Y) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{pr}_1} & (Y, \varphi) \\ & \nearrow \varphi & \uparrow F_2(\Phi) & & \uparrow \Phi \\ X & \xrightarrow{F_1} & F_1(X) & \xrightarrow{\iota} & F_2(I) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{pr}_1} & (I, \iota) \\ \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_3 & & \mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}] \end{array},$$

w którym (Y, φ) jest dowolnym obiektem w kategorii $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$.

Struktury terminalne i inicjalne noszą wspólne miano **struktur uniwersalnych**. ▲

Sens uniwersalności łatwo wysławić w języku potocznym: oto dowolne odwzorowanie transportujące strukturę rodzaju \mathcal{C}_3 z $F_1(X)$ (wzgl. do $F_1(X)$), a przy tym spełniające warunek $P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi)$, jest przeprowadzane, za pośrednictwem F_2 -obrazu jedyne homomorfizmu indukowanego, przez F_2 -obraz (obiektovej składowej) struktury inicjalnej (wzgl. terminalnej). Na pytanie o istnienie struktur uniwersalnych nie ma uniwersalnej odpowiedzi – tej trzeba każdorazowo poszukiwać w interesującym nas kontekście (np. algebraicznym). Można natomiast bardzo konkretnie skwantyfikować swobodę ich wyboru (będącą miarą ich jednoznaczności), co czyni poniższe

TWIERDZENIE 1.2.2 (O jednoznaczności struktur uniwersalnych). *Przyjmijmy notację Def. 29. Niechaj (T_α, τ_α) , $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema strukturami terminalnymi dla $P_{X;F_1,F_2}$ i niech (I_β, ι_β) , $\beta \in \{1, 2\}$ będą dwiema strukturami inicjalnymi dla $P_{X;F_1,F_2}$. Istnieją jednoznacznie określone izomorfizmy (w kategorii \mathcal{C}_2)*

$$\tau_{1,2} : T_1 \xrightarrow{\cong} T_2, \quad \iota_{1,2} : I_1 \xrightarrow{\cong} I_2.$$

■

Dowód: Natychmiastowa konsekwencja Def. 29 i Tw. 1.2.1. □

Praktyczny sens udowodnionego twierdzenia jest oczywisty: każde dwie struktury uniwersalne możemy utożsamiać, i to w jednoznaczny sposób, za pośrednictwem stosownego izomorfizmu $\tau_{1,2}$ (wzgl. $\iota_{1,2}$).

1. Produkt i koprodukt

Dotychczasowa nasza dyskusja daje nam do ręki narzędzia formalne konstrukcji użytecznych i powszechnych w modelowaniu fizykalnym struktur algebraicznych, pozwalając nam zarazem precyzyjnie nazwać i zrozumieć ich wyjątkowość pośród miriad bytów formalnych. Ich wykorzystanie zaczniemy od przerzucenia pomostu pomiędzy konstrukcjami znanymi z elementarnego kursu algebry liniowej a uniwersum algebry wyższej. Na tej drodze spotkamy obiekty obecne w opisie klasycznej geometrii różniczkowej oraz klasycznych układów fizykalnych, jak choćby – w lokalnym modelowaniu przestrzeni totalnych wiązek włóknistych i powiązań Ehresmana na wiązkach stycznych nad nimi, jak również w modelowaniu przestrzeni stanów (klasycznych) złożonych układów fizycznych przy użyciu przestrzeni stanów podukładów, ale też znajdujące zastosowanie w modelowaniu zjawisk kwantowych, gdzie opisują – m.in. – rozkład przestrzeni stanów kwantowych układu na sektory nadwyboru (np. w kontekście kwantowania ekwiwariantnego względem działania grupy symetrii zjawisk).

DEFINICJA 30. Przyjmijmy zapis Def. 18, 27 i 29 oraz Przykł. 15 (5) i ustalmy zbiór Λ oraz kategorię \mathcal{C} , z którymi stowarzyszymy kategorię \mathcal{C}^Λ ciągów uogólnionych w \mathcal{C} indeksowanych przez Λ , zawierającą funktorialny obraz \mathcal{C} w postaci ciągów stałych.

Produkt rodziny $X \in \text{Obj } \mathcal{C}^\Lambda$ to struktura terminalna

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

dla warunku tautologicznego $P_{X; \text{id}_{\mathcal{C}^\Lambda}, \Delta_{\mathcal{C}^\Lambda}} \equiv 1$ na $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda$. Innymi słowy, produkt rodziny X to obiekt terminalny w podkategorii $\mathcal{T}_X \mathcal{C}^\Lambda \subset \mathcal{C}^\Lambda$ kategorii

$\mathcal{C}^{\hat{\Lambda}}$ diagramów w \mathcal{C} modelowanych na rozpięciu Λ utworzonej przez funktory (tj. diagramy) $F : \hat{\Lambda} \rightarrow \mathcal{C}$ o składowej obiektowej $F|_{\Lambda} = X$. oraz transformacje naturalne η . między nimi o składowych $\eta_{\lambda} = \text{id}_{X_{\lambda}}$, $\lambda \in \Lambda$. Morfizm π_{λ} określamy przy tym mianem **rzutu kanonicznego na (składową) X_{λ}** . Kategorię, w której istnieją produkty, określamy mianem **kategorii z produktami**. Przy tym ilekroć $|\Lambda| < \infty$, będziemy wymiennie używać symboli \prod i \times .

Koprodukt rodziny $X. \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\Lambda}$ to struktura inicjalna

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}, \{j_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

dla tautologicznego warunku $P_{X., \text{id}_{\mathcal{C}^{\Lambda}}, \Delta_{\mathcal{C}, \Lambda}} \equiv 1$ na $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^{\Lambda}$. Innymi słowy, koprodukt rodziny $X.$ to obiekt inicjalny w podkategorii $\mathcal{I}_X \mathcal{C}^{\hat{\Lambda}} \subset \mathcal{C}^{\hat{\Lambda}}$ kategorii $\mathcal{C}^{\hat{\Lambda}}$ diagramów w \mathcal{C} modelowanych na rozpięciu Λ utworzonej przez funktory (tj. diagramy) $F : \hat{\Lambda} \rightarrow \mathcal{C}$ o składowej obiektowej $F|_{\Lambda} = X$. oraz transformacje naturalne η . między nimi o składowych $\eta_{\lambda} = \text{id}_{X_{\lambda}}$, $\lambda \in \Lambda$. Morfizm j_{λ} określamy przy tym mianem **włożenia kanonicznego (składowej) X_{λ}** . Kategorię, w której istnieją koprodukty, określamy mianem **kategorii z koproduktami**.

Koprodukt w kategoriach $\mathcal{C} \in \{\mathbf{AbGrp}, \mathbf{AbRing}, \mathbf{Mod}_R, \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}\}$ i \mathbf{Alg}_R (dla pierścienia R i ciała \mathbb{K}) jest najczęściej określamy mianem **sumy prostej** i oznaczany symbolem $\prod \equiv \oplus$.

▲

Wprost z definicji wynika naturalne rozszerzenie konstrukcji produktu i koproduktu na klasy morfizmów kategorii \mathcal{C} – obserwację tę precyzujemy poniżej.

STWIERDZENIE 26. *Przyjmijmy zapis Def. 30 i niechaj*

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}^{\alpha}, \{\pi_{\lambda}^{\alpha}\}_{\lambda \in \Lambda} \right), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

będą dwoma produktami odnośnych rodzin $X.^{\alpha}$. Dla dowolnej rodziny morfizmów $\chi. \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\Lambda}}(X.^1, X.^2)$ istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_{\lambda} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\prod_{\mu \in \Lambda} X_{\mu}^1, \prod_{\nu \in \Lambda} X_{\nu}^2\right),$$

który czyni poniższy diagram przemiennym

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\mu \in \Lambda} X_{\mu}^1 & \xrightarrow{\pi_{\rho}^1} & X_{\rho}^1 \\ \prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_{\lambda} \downarrow & & \downarrow \chi_{\rho} \\ \prod_{\nu \in \Lambda} X_{\nu}^2 & \xrightarrow{\pi_{\rho}^2} & X_{\rho}^2 \end{array}$$

*Morfizm ten określamy mianem **produktu rodziny morfizmów $\chi. \in \text{Mor } \mathcal{C}^{\Lambda}$** .*

Jeśli ponadto dany jest trzeci produkt

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda}^3, \{\pi_{\lambda}^3\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

oraz rodzina morfizmów $\tilde{\chi}_\lambda \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X^2, X^3)$, to dla zdefiniowanego przez nią produktu morfizmów $\prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda$ oraz dla $\prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda$ zachodzi tożsamość

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda \right) \circ \left(\prod_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu \right) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (\tilde{\chi}_\lambda \circ \chi_\lambda).$$

■

Dowód: Teza jest prostą konsekwencją terminalnej natury produktu $(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^2, \{\pi_\lambda^2\}_{\lambda \in \Lambda})$, oto bowiem mamy do czynienia z rodziną morfizmów

$$\chi_\rho \circ \pi_\rho^1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1, X_\rho\right).$$

Słuszność reguły superpozycji produktów morfizmów staje się oczywista, kiedy złożyć odnośne diagramy przemienne w jeden:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1 & \xrightarrow{\pi_\rho^1} & X_\rho^1 \\ \downarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda & & \downarrow \chi_\rho \\ \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2 & \xrightarrow{\pi_\nu^2} & X_\rho^2 \\ \downarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda & & \downarrow \tilde{\chi}_\rho \\ \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^3 & \xrightarrow{\pi_\nu^3} & X_\rho^2 \end{array}$$

stwierdzając tym sposobem, że superpozycja morfizmów $(\prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda) \circ (\prod_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu)$ spełnia warunki definiujące morfizm $\prod_{\lambda \in \Lambda} (\tilde{\chi}_\lambda \circ \chi_\lambda)$, więc też w świetle jedyności tego ostatniego jest z nim tożsamą. □

Ostatnie stwierdzenie naturalnie uzupełnia

STWIERDZENIE 27. *Przyjmijmy zapis Def. 30 i niechaj*

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^\alpha, \{j_\lambda^\alpha\}_{\lambda \in \Lambda} \right), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

będą dwoma koproduktami odnośnych rodzin X^α . Dla dowolnej rodziny morfizmów $\chi_\cdot \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X^1, X^2)$ istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1, \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2\right),$$

który czyni poniższy diagram przemiennym

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1 & \xleftarrow{j_\rho^1} & X_\rho^1 \\ \downarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda & & \downarrow \chi_\rho \\ \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2 & \xleftarrow{j_\rho^2} & X_\rho^2 \end{array}$$

Morfizm ten określamy mianem **koproduktu rodziny morfizmów** $\chi. \in \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda$.
Jeśli ponadto dany jest trzeci koprodukt

$$\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^3, \{J_\lambda^3\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

oraz rodzina morfizmów $\tilde{\chi}. \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X_\lambda^2, X_\lambda^3)$, to dla zdefiniowanego przez nią koproduktu morfizmów $\coprod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda$ oraz dla $\coprod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda$ zachodzi tożsamość

$$\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda \right) \circ \left(\coprod_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu \right) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} (\tilde{\chi}_\lambda \circ \chi_\lambda).$$

■

Dowód: W pełni analogiczny do poprzedniego. □

Ilustracji wprowadzonych dotychczas pojęć i konstrukcji abstrakcyjnych dostarcza poniższy przykład, którego dokładne zrozumienie w części początkowej dotyczącej produktu stanowi podstawę dalszych naszych rozważań poświęconych modułom.

PRZYKŁAD(Y) 19. Rozważmy strukturę algebraiczną rodzaju trywialnego (tj. „pustego”), której nośnikiem są zbiory bez jakichkolwiek wyróżnionych operacji wieloargumentowych i dla której homomorfizmami są dowolne odwzorowania między zbiorami. W tym szczególnym przypadku produktem zbiorów z rodziny indeksowanej $S. \in \text{Obj } \mathbf{Set}^\Lambda$ jest **produkt kartezjański** [KM76, Rozdz. IV § 6]

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda := \left\{ f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda : f(\lambda) \in S_\lambda \right\}$$

wraz z rodziną $\{\varpi_\lambda := \text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ rzutów kanonicznych na składowe S_λ ,

$$\text{pr}_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \longrightarrow S_\mu : f \longmapsto f(\mu).$$

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku skończonego zbioru indeksów $\Lambda \equiv \overline{1, n}$ produkt kartezjański sprowadza się do standardowego iloczynu kartezjańskiego³ i zapisuje w postaci

$$\times_{k=1}^n S_k = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall_{k \in \overline{1, n}} : x_k \in S_k \right\},$$

przy czym

$$\text{pr}_l : \times_{k=1}^n S_k \longrightarrow S_l : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto x_l.$$

Dla dowolnej rodziny odwzorowań

$$\{f_\lambda : X \longrightarrow S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

znajdujemy jedyne odwzorowanie

$$\Phi : X \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$$

o własności (1.2.3), a mianowicie

$$x \longmapsto \Phi(x), \quad \Phi(x)(\lambda) := f_\lambda(x).$$

Koproduktem jest tutaj natomiast **suma rozłączna**⁴

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda := \left\{ (x, \lambda) \mid x \in S_\lambda \wedge \lambda \in \Lambda \right\}$$

³Por. uwagi pod definicją w traktacie Kuratowskiego i Mostowskiego, jak również Konw. 1.

⁴N.B. Ilekroć $x \in S_\lambda \cap S_\mu$, $\lambda \neq \mu$, wówczas $(x, \lambda) \neq (x, \mu)$.

wraz z injekcjami (włączeniami) kanonicznymi

$$J_\mu : S_\mu \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda : x \longmapsto (x, \mu).$$

Z dowolną rodziną odwzorowań

$$\{g_\lambda : S_\lambda \longrightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$$

stowarzyszymy jedyne odwzorowanie

$$\Psi : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \longrightarrow Y$$

o własności (1.2.4), a mianowicie

$$(x, \lambda) \longmapsto \Psi(x, \lambda) := g_\lambda(x).$$

✓

Zwieńczeniem obecnej dyskusji jest szczegółowe *wyprowadzenie* postaci produktu i koproduktu w kategorii modułów nad pierścieniem przemiennym R .

DEFINICJA 31. Przyjmijmy zapis Def. 15 i 30 oraz Przykł. 19. Niechaj $G. \in \text{Obj Mod}_R^\Lambda$ będzie rodziną modułów nad pierścieniem R . **Produkt modułów z rodziny G .** to para

$$(\mathcal{M}^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}), \quad \mathcal{M}^\square := \left(\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \phi_2^\square, \phi_1^\square, \phi_0^\square \right), \ell^\square \right),$$

w której ϕ_n^\square , $n \in \{0, 1, 2\}$ to *kanonicznie indukowane* operacje grupowe, ℓ^\square zaś to *kanonicznie indukowane* działanie R na produkcie kartezjańskim $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, które czynią z $(\mathcal{M}^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ produkt rodziny G . w rozumieniu Def. 30.

▲

Poświęcimy obecnie trochę czasu na bezpośrednie uzasadnienie i wyjaśnienie powyższej definicji w odwołaniu do wcześniejszej definicji produktu jako morfizmu terminalnego. Oto więc rozważamy zbiór $G^\square := \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ z rzutami kanonicznymi $\text{pr}_\lambda : G^\square \longrightarrow G_\lambda$. Dodawania grupowe⁵

$$+_\lambda := \phi_2^{(\lambda)} : G_\lambda \times G_\lambda \longrightarrow G_\lambda$$

zadają – dla dowolnego indeksu $\lambda \in \Lambda$ – odwzorowania

$$\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) : G^\square \times G^\square \longrightarrow G_\lambda,$$

co wobec terminalności pary $(G^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$, w której G^\square traktowane jest jako struktura trywialna (czyli obiekt **Set**), oznacza istnienie jedyne odwzorowania (*a priori* bez dodatkowych własności względem operacji grupowych i działań określonych dla poszczególnych składowych rodziny)

$$\phi_2^\square : G^\square \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

o własności

$$(1.2.5) \quad \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda).$$

Zauważmy, że jeśli tylko ϕ_2^\square jest poprawnie określonym dodawaniem na G^\square a rzuty pr_λ są homomorfizmami grup transportującymi owo dodawanie w dodawanie w

⁵Opisywana konstrukcja produktu po opuszczeniu działań składowych $\ell^{(\lambda)}$ stosuje się także do grup nieprzemiennech.

poszczególnych składowych G_λ , czego mozolnie dowodzimy poniżej, to tożsamość (1.2.5) identyfikuje operację ϕ_2^\square jako „dodawanie po współrzędnych”. Łatwo przy tym stwierdzamy, że homomorficzność rzutów wynika bezpośrednio z założenia, że $\phi_2^\square =: +_\square$ jest pożądaną operacją grupową, oto bowiem (1.2.5) implikuje równość

$$\text{pr}_\lambda(g +_\square h) = \text{pr}_\lambda(g) +_\lambda \text{pr}_\lambda(h),$$

słuszną dla dowolnych dwóch elementów $g, h \in G^\square$ a oznaczającą właśnie, że pr_λ są homomorfizmami grup. Wystarczy zatem sprawdzić definiujące własności dodawania grupowego w odniesieniu do odwzorowania ϕ_2^\square . W pierwszej kolejności zbadamy jego łączność. Biorąc dowolne $g, h, k \in G^\square$, obliczamy – wykorzystując po drodze (przy przejściu z linii 2. do linii 3.) łączność operacji $\phi_2^{(\lambda)}$ –

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(\phi_2^\square(g, h), k) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(\phi_2^\square(g, h), k) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, h), \text{pr}_\lambda(k)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}\left(\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(g, h), \text{pr}_\lambda(k)\right) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)}\left(\phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(h)), \text{pr}_\lambda(k)\right) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}\left(\text{pr}_\lambda(g), \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(h), \text{pr}_\lambda(k))\right) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)}\left(\text{pr}_\lambda(g), \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(h, k)\right) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(h, k)) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(g, \phi_2^\square(h, k)) \\ &= \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, \phi_2^\square(h, k)). \end{aligned}$$

Tym sposobem otrzymujemy dwa odwzorowania

$$G^\square \times G^\square \times G^\square \xrightarrow[\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square)]{\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square})} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

których obrazy pokrywają się, dając odwzorowanie $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{id}_{G_\lambda} \times \phi_2^{(\lambda)}) \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$. Raz jeszcze przywołując terminalność pary $(G^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$, wnioskujemy, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie

$$\alpha^\square : G^\square \times G^\square \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

przez nie indukowane, które spełnia tożsamość

$$\text{pr}_\lambda \circ \alpha^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{id}_{G_\lambda} \times \phi_2^{(\lambda)}) \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda),$$

a ponieważ zarówno $\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square})$, jak i $\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square)$ spełniają ten warunek, przeto konieczne

$$\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square}) = \alpha^\square = \phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square),$$

co dowodzi łączności ϕ_2^\square .

Analogicznie wykazujemy przemienność ϕ_2^\square , korzystając z przemienności $\phi_2^{(\lambda)}$. Oto bowiem, dla dowolnych $g, h \in G^\square$,

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ (\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square}(g, h)) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(h, g) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(h), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(h)) \equiv \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(g, h) \\ &= \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, h), \end{aligned}$$

skąd równość odwzorowań

$$G^\square \times G^\square \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square}} \\ \xrightarrow{\phi_2^\square} \end{array} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

tożsamy z $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$, czyli wobec jednoznaczności określenia indukowanego przezeń odwzorowania

$$\beta^\square : G^\square \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \beta^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$$

mamy pożądaną identyczność

$$\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square} = \beta^\square = \phi_2^\square.$$

Następnie rozważamy elementy neutralne w każdej z grup składowych,

$$\phi_0^{(\lambda)} : \{\bullet\} \longrightarrow G_\lambda : \bullet \longmapsto e_\lambda,$$

i zapominając jak uprzednio o strukturze algebraicznej na rozważanych zbiorach, stowarzyszymy z nimi jedyne odwzorowanie

$$\phi_0^\square : \{\bullet\} \longrightarrow G^\square : \bullet \longmapsto e^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square = \phi_0^{(\lambda)}.$$

W ten sposób wyróżniamy element e^\square zbioru G^\square , o sugestywnej postaci uogólnionego ciągu (o indeksach z Λ) elementów neutralnych z grup składowych. Jego własności względem dodawania ϕ_2^\square sprawdzamy w bezpośrednim rachunku. Biorąc dowolny element $g \in G^\square$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(e^\square, g) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(e^\square, g) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square(\bullet), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\phi_0^{(\lambda)}(\bullet), \text{pr}_\lambda(g)) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(e_\lambda, \text{pr}_\lambda(g)) = \text{pr}_\lambda(g) \\ &\equiv \text{pr}_\lambda \circ \text{pr}_2(e^\square, g), \end{aligned}$$

stąd zaś równość odwzorowań

$$\{\bullet\} \times G^\square \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_2^\square \circ (\phi_0^\square \times \text{id}_{G^\square})} \\ \xrightarrow{\text{pr}_2} \end{array} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

pokrywających się z $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\phi_0^{(\lambda)} \times \text{pr}_\lambda)$. Znowu więc znajdujemy jedyne odwzorowanie

$$\varepsilon^\square : \{\bullet\} \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

spełniające warunek

$$\text{pr}_\lambda \circ \varepsilon^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\phi_0^{(\lambda)} \times \text{pr}_\lambda),$$

a zatem

$$\phi_2^\square \circ (\phi_0^\square \times \text{id}_{G^\square}) = \varepsilon^\square = \text{pr}_2.$$

Podobnie dowodzimy tożsamości

$$\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_0^\square) = \text{pr}_1,$$

co w sumie pokazuje dowodnie, że e^\square jest elementem neutralnym dodawania ϕ_2^\square .

Bez trudu rekonstruujemy też operację brania przeciwności w G^\square , biorąc za punkt wyjścia odnośne operacje w składowych

$$\phi_1^{(\lambda)} : G_\lambda \curvearrowright.$$

Rozumując jak wcześniej, tworzymy rodzinę odwzorowań

$$\phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda : G^\square \longrightarrow G_\lambda,$$

z którymi możemy związać jedyne odwzorowanie

$$\phi_1^\square : G^\square \curvearrowright$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \phi_1^\square = \phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda,$$

która identyfikuje ϕ_1^\square jako „branie przeciwności po współrzędnych”. Trzeba jeszcze tylko upewnić się, że odwzorowanie to nadaje monoidowi przemienemu $(G^\square, \phi_2^\square, \phi_0^\square)$ strukturę grupy przemiennej. Z rachunku

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square (\phi_1^\square(g), g) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) (\phi_1^\square(g), g) \equiv \phi_2^{(\lambda)} (\text{pr}_\lambda \circ \phi_1^\square(g), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} (\phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(g)) = e^{(\lambda)} = \phi_0^{(\lambda)}(\bullet) = \text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square(\bullet), \end{aligned}$$

wykonanego dla dowolnego $g \in G^\square$ a wskazującego na równość odwzorowań

$$\{\bullet\} \times G^\square \xrightarrow[\phi_0^\square \circ \text{pr}_1]{\phi_2^\square \circ (\phi_1^\square, \text{id}_{G^\square}) \circ \text{pr}_2} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

identycznych z $\phi_0^{(\lambda)} \circ \text{pr}_1$, wywodzimy wniosek o istnieniu jedyne odwzorowania

$$\mu^\square : \{\bullet\} \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \mu^\square = \phi_0^{(\lambda)} \circ \text{pr}_1.$$

Ostatecznie więc stwierdzamy słuszność tożsamości

$$\phi_2^\square \circ (\phi_1^\square, \text{id}_{G^\square}) \circ \text{pr}_2 = \mu^\square = \phi_0^\square \circ \text{pr}_1.$$

Analogiczne wnioskowanie prowadzi do jej symetrycznego odpowiednika

$$\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square}, \phi_1^\square) \circ \text{pr}_2 = \mu^\square = \phi_0^\square \circ \text{pr}_1,$$

co potwierdza identyfikację ϕ_1^\square jako operacji brania przeciwności.

Na koniec wreszcie indukujemy na zrekonstruowanej powyżej grupie przemiennej strukturę modułu nad pierścieniem R ze struktur składowych. W tym celu z każdego z działań

$$\ell^{(\lambda)} : R \times G_\lambda \longrightarrow G_\lambda$$

budujemy odwzorowanie

$$\ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda) : R \times G^\Gamma \longrightarrow G_\lambda,$$

co daje nam jedyne odwzorowanie

$$\ell^\Gamma : R \times G^\Gamma \longrightarrow G^\Gamma$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \ell^\Gamma = \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda).$$

Z tej ostatniej odczytujemy definicję ℓ^Γ jako „działania po współrzędnych”. W żmudnym, lecz poza tym absolutnie trywialnym rachunku przekonujemy się, że tak zdefiniowane odwzorowanie spełnia aksjomaty działania, i tym samym zamykamy kanoniczną konstrukcję modułu na produkcie kartezjańskim G^Γ .

O ile konstrukcja produktu modułów postępuje automatycznie po dokonaniu narzucającego się wyboru nośnika G^Γ , o tyle konstrukcja koproduktu, który będziemy w dalszej części kursu nazywać sumą prostą modułów, wymaga pewnej dozy inwencji oraz rozlicznych sprawdzeń (jednoznaczności konstrukcji). Zaznaczamy zawnazu, że poniższa konstrukcja stosuje się wyłącznie do grup przemiennej, co będziemy podkreślać pisząc e_λ w notacji addytywnej jako 0_λ .

DEFINICJA 32. Przyjmijmy zapis Def. 30 i 31. **Suma prosta modułów z rodziny G .** to para

$$(\mathcal{M}^\sqcup, \{j_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}), \quad \mathcal{M}^\oplus := \left(\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \phi_2^\Gamma, \phi_1^\Gamma, \phi_0^\Gamma \right), \ell^\Gamma \right),$$

w której \mathcal{M}^\oplus jest podmodulem produktu modułów \mathcal{M}^Γ z rodziny G o nośniku

$$(1.2.6) \quad \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda := \{ g \in G^\Gamma \mid |\{ \lambda \in \Lambda \mid \text{pr}_\lambda(g) \neq 0_\lambda \}| < \infty \}$$

(czyli $\text{pr}_\lambda(g)$ jest elementem neutralnym dla prawie wszystkich indeksów) i w której $j_\lambda : G_\lambda \longrightarrow G^\Gamma$ są injekcjami kanonicznymi spełniającymi warunki

$$(1.2.7) \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda \quad \forall g_\mu \in G_\mu : \text{pr}_\lambda \circ j_\mu(g_\mu) := \begin{cases} g_\mu & \text{dla } \lambda = \mu \\ \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}.$$

▲

Pokażemy najpierw, że odwzorowania j_λ są homomorfizmami oraz że mają cechę uniwersalności. Na początku ustalmy (dowolnie) indeks $\mu \in \Lambda$ i obliczmy – dla dowolnych $g_\mu, h_\mu \in G_\mu$ –

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\Gamma \circ (j_\mu \times j_\mu)(g_\mu, h_\mu) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) \circ (j_\mu \times j_\mu)(g_\mu, h_\mu) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} \circ ((\text{pr}_\lambda \circ j_\mu) \times (\text{pr}_\lambda \circ j_\mu))(g_\mu, h_\mu) \\ &= \begin{cases} \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ \phi_2^{(\lambda)}(\mathbf{0}_\lambda, \mathbf{0}_\lambda) = \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \text{pr}_\lambda \circ J_\mu \circ \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu),$$

dowodząc tym samym równości dwóch rodzin odwzorowań

$$G_\mu \times G_\mu \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_2^\square \circ (J_\mu \times J_\mu)} \\ \xrightarrow{J_\mu \circ \phi_2^{(\mu)}} \end{array} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda$$

identycznych z $\psi_\lambda : (g_\mu, h_\mu) \mapsto \begin{cases} \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$. W konsekwencji terminalności pary $(G^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ równość ta implikuje istnienie jedynej rodziny odwzorowań

$$\alpha_\mu : G_\mu \times G_\mu \longrightarrow G^\square, \quad \mu \in \Lambda$$

o własności

$$\forall \lambda \in \Lambda : \text{pr}_\lambda \circ \alpha_\mu = \psi_\lambda.$$

Na tej podstawie wnioskujemy o równości

$$\phi_2^\square \circ (J_\mu \times J_\mu) = J_\mu \circ \phi_2^{(\mu)},$$

która wyraża homomorficzny charakter J_μ . Dowód uniwersalności J_λ wymaga, iż-
byśmy z dowolną rodziną homomorfizmów grup (przemiennych)

$$\chi_\lambda : G_\lambda \longrightarrow Y, \quad \lambda \in \Lambda$$

określoną dla dowolnej grupy przemiennej Y potrafili stowarzyszyć odwzorowanie

$$H : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \longrightarrow Y$$

spełniające relacje

$$(1.2.8) \quad \forall \lambda \in \Lambda : H \circ J_\lambda = \chi_\lambda$$

oraz udowodnić, że odwzorowanie o tej własności jest dane jednoznacznie. Postu-
lujemy, dla dowolnego $g \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$,

$$H(g) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g).$$

Zauważmy, że suma w powyższej definicji jest skończona, por. (1.2.6), zatem de-
finicja ma sens. Sprawdzamy też bez trudu relację (1.2.8), wybrawszy dowolnie
 $g_\lambda \in G_\lambda$,

$$\begin{aligned} H \circ J_\lambda(g_\lambda) &= \sum_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu \circ \text{pr}_\mu \circ J_\lambda(g_\lambda) \\ &\equiv \chi_\lambda \circ \text{pr}_\lambda \circ J_\lambda(g_\lambda) +_Y \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \chi_\mu \circ \text{pr}_\mu \circ J_\lambda(g_\lambda) \\ &= \chi_\lambda(g_\lambda) +_Y \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \chi_\mu(\mathbf{0}_\mu) = \chi_\lambda(g_\lambda). \end{aligned}$$

Dowodzimy następnie jedności H . Niechaj $\tilde{H} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \longrightarrow Y$ będzie dowolnym
innym takim odwzorowaniem, a wtedy różnica odwzorowań

$$H - \tilde{H} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \longrightarrow Y : g \mapsto H(g) +_Y \text{Pr}_Y \circ \tilde{H}(g),$$

będąca homomorfizmem grup przemiennych (przypomnijmy, że rzuty kanoniczne są homomorfizmami grup przemiennych), spełnia tożsamości

$$\begin{aligned} (H - \tilde{H}) \circ j_\lambda(g_\lambda) &= H \circ j_\lambda(g_\lambda) +_Y P_Y (\tilde{H} \circ j_\lambda(g_\lambda)) = \chi_\lambda(g_\lambda) +_Y P_Y (\chi_\lambda(g_\lambda)) \\ &= \mathbf{0}_Y. \end{aligned}$$

Możemy stąd wyciągnąć prosty wniosek:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda(G_\lambda) \subset \text{Ker}(H - \tilde{H}).$$

Jednakowoż $\text{Ker}(H - \tilde{H})$ jest podgrupą $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, tj. podzbiorem domkniętym ze względu na operację brania skończonych sum jego elementów, każdy zaś element $g \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ jest taką właśnie sumą skończoną elementów z różnych $j_\lambda(G_\lambda)$. Ażeby się o tym przekonać, rozważmy odwzorowanie

$$\iota^\oplus : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \curvearrowright : g \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g),$$

które jest dobrze określone z tych samych powodów co H i które wobec homomorficzności rzutów kanonicznych spełnia tożsamości

$$\text{pr}_\lambda \circ \iota^\oplus(g) \equiv \text{pr}_\lambda \circ \sum_{\mu \in \Lambda} j_\mu \circ \text{pr}_\mu(g) = \sum_{\mu \in \Lambda} (\text{pr}_\lambda \circ j_\mu)(\text{pr}_\mu(g)) = \text{pr}_\lambda(g).$$

Te ostatnie – jak w poprzednio dyskutowanych przypadkach (tj. w konsekwencji terminalności produktu kartezjańskiego) – prowadzą do równości

$$(1.2.9) \quad \iota^\oplus = \text{id}_{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda},$$

zadającej rzeczony rozkład g na skończoną sumę

$$(1.2.10) \quad g = \sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g).$$

Wracając do zasadniczego wywodu, stwierdzamy, że jedynym podzbiorem $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ zawierającym $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda(G_\lambda)$ i domkniętym względem operacji brania sum skończonych jest cały zbiór $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$,

$$\text{Ker}(H - \tilde{H}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda,$$

czyli też ostatecznie

$$H = \tilde{H}.$$

Należy podkreślić, że nigdzie w dotychczasowej dyskusji koproduktu nie brałimy pod uwagę dodatkowej struktury R -modułu na nośniku grupy przemiennej, możemy przeto podsumować tę jej część stwierdzeniem, że oto czwórka

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \phi_2^\square, \phi_1^\square, \phi_0^\square \right)$$

stanowi spójną definicję sumy prostej grup przemiennych. Jako że działanie pierścienia R w jawny sposób zachowuje podgrupę $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \subset G^\square$, dla naszych celów wystarczy jeszcze tylko upewnić się, że zarówno iniekcje kanoniczne j_λ , jak też jedyny homomorfizm grup H są odwzorowaniami R -liniowymi. W tym drugim przypadku własność ta jest bezpośrednim następstwem R -liniowości rzutów kanonicznych pr_λ oraz odwzorowań $\chi^{(\lambda)}$. W przypadku pierwszym R -liniowości stwierdzamy na gruncie terminalności produktu kartezjańskiego oraz dowiedzionych

własności odwzorowań ℓ^Γ i $\ell^{(\lambda)}$, stosując sprawdzoną strategię rozważań wcześniejszych. Punktem wyjścia jest obserwacja (wysłowiona dla dowolnych $\lambda, \mu \in \Lambda$ oraz $(r, g_\mu) \in R \times G_\mu$)

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \ell^\Gamma \circ (\text{id}_R \times J_\mu)(r, g_\mu) &= \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda) \circ (\text{id}_R \times J_\mu)(r, g_\mu) \\ &\equiv \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda \circ J_\mu)(r, g_\mu) = (\text{pr}_\lambda \circ J_\mu) \circ \ell^{(\mu)}(r, g_\mu), \end{aligned}$$

wskazująca na równość dwóch rodzin odwzorowań

$$R \times G_\mu \xrightarrow[\text{pr}_\lambda \circ J_\mu \circ \ell^{(\mu)}]{\ell^\Gamma \circ (\text{id}_R \times J_\mu)} \bigoplus_{\nu \in \Lambda} G_\nu \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

identycznych z $r_\lambda : (r, g_\mu) \mapsto \begin{cases} \ell^{(\mu)}(r, g_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$. Terminalność pary $(G^\Gamma, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ przesądza w tej sytuacji o istnieniu jedynej rodziny odwzorowań

$$\rho_\mu : R \times G_\mu \longrightarrow \bigoplus_{\nu \in \Lambda} G_\nu \subset G^\Gamma$$

o własności

$$\forall \lambda \in \Lambda : \text{pr}_\lambda \circ \rho_\mu = r_\lambda.$$

Stąd ostatecznie wyprowadzamy pożądaną równość

$$J_\lambda \circ \ell^{(\lambda)} = \ell^\Gamma \circ (\text{id}_R \times J_\lambda)$$

wyrażającą R -liniowość iniekcji kanonicznych.

Warto zwrócić uwagę, że o ile definicja obu rozpatrywanych struktur uniwersalnych: produktu oraz sumy prostej modułów stawia je na pozycjach obiektów wzajem „dualnych” (co odzwierciedla odwrócenie strzałek w odnośnych diagramach przemianych precyzujących sens uniwersalności), o tyle bezpośrednia konstrukcja w ramach teorii modułów nad pierścieniem uwypukla ich wewnątrzstrukturalne powinowactwo, prowadząc wprost do

COROLLARIUM 3. *Produkt i suma prosta skończonej rodziny modułów nad pierścieniem pokrywają się.* ■

Rzeczony powinowactwo niejednokrotnie pozwala uzyskać bezpośredni wgląd w relacje wiążące naturalne struktury liniowe – jako przykład prześledzimy równoważny opis sumy algebraicznej modułów w terminach ich sumy prostej.

STWIERDZENIE 28. *Przyjmijmy zapis Def. 2 (3) oraz 32 i niechaj $H_1, H_2 \subset G$ będą dwoma podmodułami modułu G nad pierścieniem R , włożonymi weń kanonicznie przez odwzorowania $J_{H_\alpha} : H_\alpha \hookrightarrow G$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Zdefiniujmy odwzorowanie (jawnie R -liniowe)*

$$\Delta_G : G \longrightarrow G \oplus G : g \mapsto (g, g).$$

Prawdziwą jest równoważność

$$G \oplus G = \Delta_G(G) +_{\oplus} J_{H_1}(H_1) \oplus J_{H_2}(H_2) \iff G = H_1 +_G H_2.$$

Dowód:

\Rightarrow Wobec przynależności $(g, 0_G) \in G \oplus G$ istnieją $\tilde{g} \in G$ oraz $h_\alpha \in H_\alpha$ spełniające tożsamość

$$(g, 0_G) = (\tilde{g}, \tilde{g}) +_{\oplus} (h_1, h_2) = (\tilde{g} +_G h_1, \tilde{g} +_G h_2),$$

z której wyprowadzamy pożądaną równość

$$g = \tilde{g} +_G h_1 = P_G(h_2) +_G h_1,$$

oto bowiem daje nam ona układ inkluzji

$$G \subset H_1 +_G H_2 \subset G,$$

z którego wynika pierwsza część tezy dowodzonego stwierdzenia.

\Leftarrow Równość $G = H_1 +_G H_2$ oznacza dla dowolnych elementów $g_1, g_2 \in G$ istnienie elementów $h_{1,\alpha}, h_{2,\alpha} \in H_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ spełniających warunki

$$g_1 = h_{1,1} +_G h_{1,2}, \quad g_2 = h_{2,1} +_G h_{2,2}.$$

Wobec powyższego możemy zapisać równość

$$(g_1, g_2) = (h_{1,2} +_G h_{2,1}, h_{1,2} +_G h_{2,1}) +_{\oplus} (h_{1,1} +_G P_G(h_{2,1}), h_{2,2} +_G P_G(h_{1,2})),$$

która z racji dowolności g_1 i g_2 implikuje relację

$$G \oplus G \subset \Delta_G(G) +_{\oplus} J_{H_1}(H_1) \oplus J_{H_2}(H_2).$$

Ta w połączeniu z oczywistą relacją odwrotną,

$$\Delta_G(G) +_{\oplus} J_{H_1}(H_1) \oplus J_{H_2}(H_2) \subset G \oplus G,$$

odtwarza drugą część tezy. □

NOTACJA 3. W przypadku skończonej rodziny $\{G_k\}_{k \in \overline{1, n}}$, $n \in \mathbb{N}$ modułów nad pierścieniem R będziemy czasem stosować zapis

$$\bigoplus_{k \in \overline{1, n}} G_k \equiv G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n.$$

* * *

Warunki definiujące wymienione powyżej struktury uniwersalne dla rodziny modułów nad pierścieniem poddają się użytecznej parafrazie, z której nieraz przyjdzie nam korzystać w dalszej części naszych rozważań. Oto więc mamy

STWIERDZENIE 29. *Przyjmijmy zapis Def. 15, 31 oraz 32 i niechaj G będzie dowolnym R -modułem lewostronnym. Homomorfizmy*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(J, G) & : \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, G\right) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G_\lambda, G) : \chi \longmapsto \chi \circ J, \\ \chi \circ J & : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G_\lambda, G) : \lambda \longmapsto \chi \circ J_\lambda \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(G, \text{pr}) & : \text{Hom}_R\left(G, \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda\right) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G, G_\lambda) : \chi \longmapsto \text{pr} \circ \chi, \\ \text{pr} \circ \chi & : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G, G_\lambda) : \lambda \longmapsto \text{pr}_\lambda \circ \chi, \end{aligned}$$

indukowane – odpowiednio – przez rzuty kanoniczne na moduły składowe i ich włożenia kanoniczne, są izomorfizmami grup przemiennej. Określamy je mianem izomorfizmów kanonicznych.

■

Dowód: O istnieniu homomorfizmów odwrotnych do wypisanych przesądzają definicje odnośnych struktur uniwersalnych. I tak, np., rodzinie $\{\chi^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ odwzorowań R -liniowych $\chi^{(\lambda)} : G_\lambda \rightarrow G$ przypisane jest jedyne odwzorowanie R -liniowe $\chi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow G$ o własności $\chi \circ j_\lambda = \chi^{(\lambda)}$, któremu homomorfizm $\text{Hom}_R(J, G)$ przyporządkowuje na powrót wyjściową rodzinę odwzorowań. \square

W sytuacjach fizycznie istotnych częstokroć możemy ograniczyć uwagę do modułów mających rozkład na sumy proste swoich podmodułów. Punktem wyjścia do dalszej dyskusji jest tutaj

COROLLARIUM 4. *Przyjmijmy zapis Stw. 29 i niechaj $\{G_{A\lambda_A}\}_{\lambda_A \in \Lambda_A}$, $A \in \{1, 2\}$ będą dwiema rodzinami R -modułów o sumach prostych, odpowiednio, $G_{A\oplus} := \bigoplus_{\lambda_A \in \Lambda_A} G_{A\lambda_A}$. Odwzorowanie*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} & : \text{Hom}_R(G_{1\oplus}, G_{2\oplus}) \longrightarrow \prod_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \text{Hom}_R(G_{1\lambda_1}, G_{2\lambda_2}) \\ & : \chi \longmapsto \text{pr} \circ \chi \circ j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pr} \circ \chi \circ j & : \Lambda_2 \times \Lambda_1 \longrightarrow \bigcup_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \text{Hom}_R(G_{1\lambda_1}, G_{2\lambda_2}) \\ & : (\lambda_2, \lambda_1) \longmapsto \text{pr}_{\lambda_2} \circ \chi \circ j_{\lambda_1} \end{aligned}$$

jest monomorfizmem grup przemiennej. Ilekroć zbiór indeksów Λ_2 jest skończony, \mathcal{M} jest izomorfizmem. \square

■

Dowód: Wprost z konstrukcji sumy prostej modułów wynika, że $G_{2\oplus} \subset \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2}$, a zatem każde odwzorowanie R -liniowe $\chi : G \rightarrow G_{2\oplus}$ jest zarazem elementem $\text{Hom}_R(G, \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2})$. Przy tym zawieranie przechodzi w równość dla skończonego zbioru indeksów. Teza jest więc następstwem Stw. 29. \square

ĆWICZENIA 1.

Tytułem pożytecznego ćwiczenia warto zastanowić się nad dowodami poniższych (s)twierdzeń (dowody te można znaleźć w notatkach wykładowych [Sus13]).

⤴

STWIERDZENIE 30. *Przyjmijmy zapis Def. 32. Niechaj $H \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$ i niech $\chi_\cdot \in \text{Mor } \mathbf{Mod}_R^\Lambda$ będzie rodziną odwzorowań R -liniowych $\chi_\lambda : G_\lambda \rightarrow H$, indukującą jedyne odwzorowanie R -liniowe $\chi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow H$ o własności*

$$\forall \lambda \in \Lambda : \chi \circ j_\lambda = \chi_\lambda.$$

Na to by χ był izomorfizmem R -modułów, potrzeba i wystarcza, iżby istniała rodzina $\psi_\cdot \in \text{Mor } \mathbf{Mod}_R^\Lambda$ odwzorowań R -liniowych $\psi_\lambda : H \rightarrow G_\lambda$ o następujących własnościach:

$$(DS1) \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda : \psi_\lambda \circ \chi_\mu = \begin{cases} \text{id}_{G_\lambda} & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0 & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases};$$

(DS2)

$$\forall_{h \in H} : \left(|\{ \lambda \in \Lambda \mid \psi_\lambda(h) \neq 0_\lambda \}| < \infty \quad \wedge \quad h = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \circ \psi_\lambda(h) \right).$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 84].

□

Zajmiemy się teraz ważnym przypadkiem szczególnym, kiedy to sumę prostą tworzą podmoduły modułu danego.

DEFINICJA 33. Przyjmijmy zapis Def. 15 i 32. Niechaj $G \in \text{Obj Mod}_R$ i niech $G = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ będzie rodziną jego podmodułów. Mówimy, że G jest sumą prostą wszystkich modułów z tej rodziny, jeśli jedyne odwzorowanie $J_\oplus : \bigoplus_{\mu \in \Lambda} G_\mu \rightarrow G$ spełniające tożsamości

$$J_\oplus \circ J_\lambda = J_{G_\lambda},$$

w których $J_{G_\lambda} \in \text{Hom}_R(G_\lambda, G)$ są włożeniami standardowymi z Przykł. 12 (4), jest izomorfizmem modułów, lub też – co na jedno wychodzi – jeśli dowolny element $g \in G$ ma jednoznaczny rozkład w postaci

$$g = \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda, \quad g_\lambda \in G_\lambda,$$

zadawany przez rodzinę $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ o nośniku skończonym (w rozumieniu Def. 18). Sumę prostą opisanego typu określamy mianem **wewnętrznej sumy prostej podmodułów**, natomiast niezerowe elementy g_λ rozkładu g to **składowe z podmodułu** G_λ . Będziemy tu (najczęściej) stosować zapis uproszczony

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda,$$

w którym kanoniczny izomorfizm między modułami po obu stronach znaku równości został opuszczony.

▲

Wygodnym jest mieć do dyspozycji kilka równoważnych praktycznych definicji wewnętrznej sumy prostej. Dostarcza ich poniższe

STWIERDZENIE 31. Przyjmijmy zapis Def. 18 oraz 33 i oznaczmy przez

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda := \left\{ \sum_{\mu \in \Lambda} g_\mu \mid \{g_\mu\}_{\mu \in \Lambda} \in \mathcal{B}_0(G; \Lambda) \quad \wedge \quad \forall_{\mu \in \Lambda} : g_\mu \in G_\mu \right\}$$

sumę algebraiczną podmodułów z rodziny $G = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Poniższe zdania są równoważne

- (i) $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$.
- (ii) $\forall_{\mu \in \Lambda} : G_\mu \cap \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} G_\lambda = \{0_G\}$.
- (iii) $\forall_{\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{B}_0(G; \Lambda)} : \left(\left(\forall_{\lambda \in \Lambda} : g_\lambda \in G_\lambda \quad \wedge \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda = 0_G \right) \implies \forall_{\lambda \in \Lambda} : g_\lambda = 0_G \right)$.

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 85]. \square

Warto prześledzić konsekwencje rozkładu modułu na sumę prostą rodziny jego podmodułów w kontekście Stw. 30. Tytułem przygotowania do tej dyskusji rozważymy

DEFINICJA 34. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz 18 i niechaj $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$. **Rzut** (lub **operator rzutu**) to **idempotentny** endomorfizm π modułu G , tj. taki, który spełnia tożsamość (w $\text{End}_R(G)$)

$$\pi \circ \pi = \pi.$$

Rodzinę $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \text{End}_R(G)$ określamy mianem **rodziny rzutów komplementarnych** (lub **dopełniających**⁶), jeśli spełnione są warunki

$$\forall_{\lambda, \mu \in \Lambda} : (\lambda \neq \mu \implies \pi_\lambda \circ \pi_\mu = 0).$$

▲

Możemy już teraz sformułować nader istotne

STWIERDZENIE 32. *Przyjmijmy zapis Def. 33 i 34. Jeśli moduł $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$ jest sumą prostą rodziny $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R^\Lambda$ swoich podmodułów, to wówczas rzuty kanoniczne $\text{pr}_\mu : G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow G_\mu$, $\mu \in \Lambda$ wraz z iniekcjami kanonicznymi $J_\mu : G_\mu \rightarrow G$ indukują rodzinę rzutów komplementarnych*

$$\pi_\mu := J_\mu \circ \text{pr}_\mu : G \circlearrowleft : \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda \mapsto g_\mu +_G \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} 0_G \equiv g_\mu$$

o własności

$$\forall_{g \in G} : g = \sum_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda(g),$$

którą będziemy też zapisywać w postaci⁷

$$(1.2.11) \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda = \text{id}_G.$$

I odwrotnie, każda rodzina $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \text{End}_R(G)$ rzutów komplementarnych o własności (1.2.11) zadaje rozkład G na sumę prostą

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda(G).$$

Rodzinę rzutów komplementarnych o własności będziemy nazywać **zupełną**.

W przypadku zupełnej pary rzutów komplementarnych powyższy rozkład przyjmuje postać

$$G = \text{Im } P_1 \oplus \text{Im } P_2 \equiv \text{Ker } P_1 \oplus \text{Ker } P_2.$$

■

⁶Bourbaki używa w odniesieniu do odwzorowań π_λ określenia „rzuty ortogonalne”, my jednak rezerwujemy to określenie dla pewnego typu rzutów komplementarnych w przestrzeni z iloczynem skalarnym.

⁷Należy podkreślić, że w przypadku nieskończonej rodziny modułów zapis ten jest umowny, oto bowiem suma w nim występująca jest nieskończona. Skończoną jest natomiast każda z sum w równości poprzedniej.

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 88 i 89]. □

Dotychczasowe nasze rozważania w naturalny sposób prowadzą do pytania o istnienie rozkładu modułu na sumę prostą zadawanego przez dowolny jego podmoduł. Jak się okaże, twierdząca odpowiedź na to pytanie jest kolejnym wyróżnikiem strukturalnym przestrzeni wektorowych pośród modułów ogólnych. Zanim jednak przekonamy się o tym, wprowadźmy niezbędne pojęcia.

DEFINICJA 35. Przyjmijmy zapis Def. 15 i 33. **Dopełnienie proste** podmodułu $H_1 \subset G$ modułu G nad pierścieniem R to podmoduł $H_2 \subset G$ o własności

$$G = H_1 \oplus H_2,$$

rozumianej w sensie Def. 33. Podmoduł $H_1 \subset G$ posiadający dopełnienie proste w G nazywamy **składnikiem prostym** G . ▲

Użytecznym uzupełnieniem opisu modułów rozszczepiających się na sumę prostą swych podmodułów jest poniższe oczywiste

STWIERDZENIE 33. *Przyjmijmy zapis Def. 15, 18 i 33. Niechaj $\mathcal{B}_\lambda \subset G_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ będą bazami podmodułów $G_\lambda \subset G$ R -modułu G . Jeśli moduł ten ma rozkład na sumę prostą*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

w rozumieniu Def. 33, to wówczas zbiór

$$\mathcal{B} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda$$

jest jego bazą.⁸ W szczególności więc rząd modułu (nad pierścieniem o cesze IBN) będącego sumą prostą podmodułów jest sumą rządów tychże podmodułów. ■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 91]. □

W przypadku przestrzeni wektorowych wywodziemy zeń kolejny istotny wyróżnik (pod)przestrzeni wektorowych.

COROLLARIUM 5. *Każda podprzestrzeń przestrzeni wektorowej ma dopełnienie proste.* ■

Dowód: Patrz: [Sus13, Cor. 13]. □

Okazuje się, że konstrukcja sumy prostej podnosi się – co szczególnie istotne z punktu widzenia naszych przyszłych rozważań – do kategorii przestrzeni kwadratowych, ma zatem sens poniższa

DEFINICJA 36. Przyjmijmy zapis Def. 24 oraz 32 i niechaj $((V_\lambda, +_\lambda, P_\lambda, \bullet \mapsto 0_\lambda), \ell_\lambda), Q_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ będą przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem \mathbb{K} . **Suma prosta przestrzeni kwadratowych** V_λ to przestrzeń kwadratowa

$$(((\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda, +_\square, P_\square, \bullet \mapsto 0_\square), \ell_\square), \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda),$$

⁸W analogiczny sposób tworzymy (jako sumy teoriomnogościowe odnośnych podzbiorów składników prostych po zbiorze indeksów) podzbiory generujące oraz liniowo niezależne w G .

przy czym **suma prosta form kwadratowych** $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$ jest określona wzorem

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \longrightarrow \mathbb{K} : v \longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(v).$$

▲

Mamy też użyteczną

DEFINICJA 37. Przyjmijmy zapis Def. 26 oraz 32. Niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem \mathbb{K} i niech $W_1, W_2 \subset V$ będą dowolnymi jej podprzestrzeniami wzajem dopełniającymi, tj. zadającymi rozkład tejże na sumę prostą

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

Sumę tę nazwiemy **sumą (Q-)ortogonalną** i zapiszemy w postaci

$$V = W_1 \perp_Q W_2,$$

jeśli W_1 i W_2 są wzajem (Q-)ortogonalne, tj.

$$W_1 \perp_Q W_2.$$

▲

Mamy fundamentalne

STWIERDZENIE 34. *Każda skończenie wymiarowa niezwyrodniała podprzestrzeń przestrzeni kwadratowej ma ortogonalne dopełnienie proste (w rozumieniu Def. 35 i 37).*

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 156]. □

Powyższa definicja pozwala nam także wygodnie doprecyzować tezę Stw. 22 w przypadku $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Istotnie, procedura Lagrange'a, stanowiąca treść konstruktywnego dowodu tego stwierdzenia, jest wprawdzie niezawodna i w każdych okolicznościach prowadzi do diagonalizacji formy kwadratowej, bywa jednak mozolna. Tymczasem poniższe ogólne twierdzenie daje nam jakościowy wgląd w strukturę przestrzeni kwadratowej, który w praktycznych zastosowaniach wystarcza do wyciągnięcia daleko idących wniosków.

TWIERDZENIE 1.2.3 (Sylwestera prawo bezwładności). *Przyjmijmy zapis Def. 22 i 24. Niechaj $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i niech $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q$ będzie przestrzenią kwadratową wymiaru $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ nad \mathbb{K} . Wówczas V rozkłada się na sumę ortogonalną*

$$V = V_0 \perp_Q V_+ \perp_Q V_-$$

podprzestrzeni $V_0 \subset V$ oraz niezwyrodniałych $V_\pm \subset V$ określonych przez warunki

$$Q|_{V_0} = 0, \quad Q|_{V_+} \geq 0, \quad Q|_{V_-} \leq 0.$$

Co więcej, istnieje baza ortogonalna $\mathcal{B} := \{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ przestrzeni V o tej własności, że macierz Φ_Q względem \mathcal{B} ma postać

$$[\Phi_Q]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\underbrace{1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, \dots, 1_{\mathbb{K}}}_{s_+ \text{ razy}}, \underbrace{-1_{\mathbb{K}}, -1_{\mathbb{K}}, \dots, -1_{\mathbb{K}}}_{s_- \text{ razy}}, \underbrace{0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}}_{N-(s_++s_-) \text{ razy}}).$$

Przy tym wymiary \mathbb{K} -liniowe $s_{\pm} := \dim_{\mathbb{K}} V_{\pm}$ nie zależą od wyboru rozkładu opisanego powyżej, a nadto spełniają tożsamości

$$s_{\pm} := \max_{\substack{W \subset V \\ \pm \Phi_Q|_{W \times W} \geq 0 \text{ niezwyrodniała}}} \{ \dim_{\mathbb{K}} W \}, \quad s_+ + s_- = \text{rk } \Phi_Q.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Tw. 9.3].

□

Powyższe rozważania prowadzą do

DEFINICJA 38. Przyjmijmy zapis Tw. 1.2.3. Parę liczb $(s_+, s_-) \in \mathbb{N}^2$ nazywamy **sygnaturą formy kwadratowej** Q i zapisujemy jako

$$\text{sign}(Q) := (s_+, s_-).$$

▲

Konstruktywny dowód Stw. 22 zamieszczony w Ref. [Sus13] zawiera szczegółowy opis niezawodnej procedury (Lagrange'a), która w każdych okolicznościach prowadzi do diagonalizacji formy kwadratowej i pozwala ustalić jej sygnaturę. Wygodny alternatywny algorytm konstrukcji bazy ortogonalnej i zarazem prosty przepis na sygnaturę, znajdujący zastosowanie w szczególnych okolicznościach algebraicznych, zawiera poniższe

STWIERDZENIE 35 (Sylwestera–Jacobiego wyznacznikowy wzór na sygnaturę). *Przyjmijmy zapis Def. 20 i 38. Niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q$ będzie przestrzenią kwadratową skończonego wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V =: N < \infty$ nad ciałem \mathbb{K} o charakterystyce $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ i niech $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}} \subset V$ będzie dowolną bazą V o tej własności, że dla dowolnego $n \in \overline{1, N}$ podprzestrzeń $V_n := \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}$ jest niezwyrodniała względem Q , tj. wyznacznik odnośnej macierzy*

$$G(n) : \overline{1, n} \times \overline{1, n} \longrightarrow \mathbb{K} : (i, j) \longmapsto \Phi_Q(v_i, v_j),$$

jest odwracalny w \mathbb{K} ,

$$\forall_{n \in \overline{1, N}} : \det_{(n)} G(n) \neq 0_{\mathbb{K}}.$$

Wówczas wektory

$$e_n := \sum_{j=1}^n \left(\left(\widetilde{G(n)}_n^n \right)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \widetilde{G(n)}_n^j \right) \triangleright_V v_j, \quad n \in \overline{1, N},$$

zapisane przy użyciu wyrażeń skalarnych: $\widetilde{G(1)}_1^1 := 1_{\mathbb{K}}$ oraz

$$\widetilde{G(n)}_j^i := (-1)^{i+j} \det_{(n-1)}(G(n)_{\neq i}^{\neq j}), \quad i, j \in \overline{1, n},$$

w których $G(n)_{\neq i}^{\neq j} \in \mathbb{K}(n-1)$ jest macierzą otrzymaną z $G(n)$ przez usunięcie $G(n)^j_{\bullet}$ (j -tego wiersza) i $G(n)_{\bullet i}$ (i -tej kolumny), tworzą bazę V diagonalizującą Q w rozumieniu Stw. 22, a przy tym

$$\forall_{n \in \overline{1, N}} : Q(e_n) = 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \left(\widetilde{G(n)}_n^n \right)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \widetilde{G(n+1)}_{n+1}^{n+1},$$

gdzie $\widetilde{G(N+1)}_{N+1}^{N+1} := \det_{(N)}(G(N))$. W szczególności więc

$$\text{sign}(Q) = (p, q),$$

gdzie p jest liczbą dodatnich, q zaś – ujemnych wyrazów ciągu

$$\left(\widetilde{G(n)}_n\right)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \widetilde{G(n+1)}_{n+1}, \quad n \in \overline{1, N}.$$

Forma Q nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ jest zatem dodatnio określona, gdy

$$\forall_{n \in \overline{2, N+1}} : \widetilde{G(n)}_n > 0$$

i ujemnie określona, gdy

$$\forall_{n \in \overline{2, N+1}} : (-1)^n \cdot_{\mathbb{R}} \widetilde{G(n)}_n < 0.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw.164]. □

UWAGA 2. Algorytm konstrukcji bazy Q -ortogonalna opisany w treści ostatniego stwierdzenia nosi miano **ortogonalizacji Grama–Schmidta** i znajduje szerokie zastosowanie praktyczne.

Wprowadzone tu pojęcie sygnatury pozwala nam dopracować treść Stw.25 w fizykalnie istotnym przypadku niezwyrodniałej przestrzeni kwadratowej nad ciałem \mathbb{R} .

STWIERDZENIE 36. *Przyjmijmy zapis Def.38 i Stw.25. Na dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej (wymiaru $\dim_{\mathbb{R}} V = N$) wyposażonej w formę kwadratową Q o sygnaturze (p, q) istnieje **wyznacznik unormowany** $\Delta \in \wedge^{\bullet} V^*$, tj. taki, który spełnia warunek*

$$\lambda_{\Delta} = (-1)^q.$$

■

Dowód: Wybierzmy w V bazę (pseudo)ortogonalną $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ i rozważmy stowarzyszony z nią wyznacznik $\Delta_{\mathcal{E}}$. Obliczamy bezpośrednio

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \cdot \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E})^2 = \det_{(N)} \left(\Phi_Q(e_i, e_j) \right)_{i, j \in \overline{1, N}} \\ &\equiv \det_{(N)} \left(\underbrace{\text{diag}(1, 1, \dots, 1)}_{p \text{ razy}}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q \text{ razy}} \right) = (-1)^q. \end{aligned}$$

□

Wreszcie na zakończenie tej części naszych rozważań wysłowimy nader brzemienne w konsekwencje stwierdzenie określające relację strukturalną między izotropowymi i hiperbolicznymi podprzestrzeniami dowolnej niezwyrodniałej przestrzeni kwadratowej.

STWIERDZENIE 37 (O rozszerzeniu hiperbolicznym przestrzeni izotropowej). *Przyjmijmy zapis Def.26 oraz 37 i Przykł.14(2), przy czym zakładamy, że (V, Q) jest niezwyrodniałą przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} o charakterystyce $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$. Niechaj $W \subset V$ będzie podprzestrzenią V . Oznaczmy $\Phi_W := \Phi_Q \upharpoonright W \times W$ i $W_0 := \text{Ker } \Phi_W$ i załóżmy, że wymiar W_0 jest skończony, $\dim_{\mathbb{K}} W_0 =: K < \infty$. Wybierzmy bazę $\{w_i\}_{i \in \overline{1, K}}$ w W_0 i niech D będzie dopełnieniem Q -ortogonalnym W_0 w W ,*

$$W = W_0 \oplus_Q D.$$

Wówczas istnieją wektory $\{v_i\}_{i \in \overline{1, K}} \subset D^{\perp_Q} \subset V$ o tej własności, że dla każdego indeksu $i \in \overline{1, K}$ układ $\{v_i, w_i\}$ jest parą hiperboliczną rozpinającą płaszczyznę hiperboliczną $H_i := \langle v_i, w_i \rangle_{\mathbb{K}}$. Pary te zadają rozkład ortogonalny podprzestrzeni

$$\widetilde{W} := \langle v_1, v_2, \dots, v_K, w_1, w_2, \dots, w_K \rangle_{\mathbb{K}} +_V D \subset V$$

dany wzorem

$$\widetilde{W} = H_1 \oplus_Q H_2 \oplus_Q \cdots \oplus_Q H_K \oplus_Q D.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw.166].

□

Oczywistą konsekwencją powyższego jest

COROLLARIUM 6. *Przyjmijmy zapis Def. 26, przy czym zakładamy, że V jest skończeniem wymiarową niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową nad ciałem \mathbb{K} o charakterystyce $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, $W \subset V$ zaś – jej podprzestrzenią Q -zerową. Wówczas*

$$\dim_{\mathbb{K}} W \leq E\left(\frac{n}{2}\right).$$

*Podprzestrzeń, której wymiar wysyca powyższą nierówność, określamy mianem **maksymalnej podprzestrzeni Q -zerowej**.*

■

Mamy także wygodne

STWIERDZENIE 38. *Przyjmijmy zapis Cor. 6 i Przykł. 14 (2), przy czym zakładamy, że (V, Q) jest (skończeniem wymiarową) **przestrzenią hiperboliczną**, tj. sumą (Q) -ortogonalną skończonej liczby płaszczyzn hiperbolicznych. Niechaj $W \subset V$ będzie dowolną maksymalną podprzestrzenią Q -zerową. Każda izometria $\chi \in \text{O}(V, Q)$ o własności*

$$\chi \upharpoonright_W = \text{id}_W$$

jest obrotem,

$$\chi \in \text{SO}(V, Q).$$

■

Dowód: Utożsamiawszy podprzestrzeń W z treści Stw. 37 z maksymalną podprzestrzenią Q -zerową, o której mowa w treści twierdzenia dowodzonego, stwierdzamy istnienie (maksymalnie) Q -zerowego dopełnienia *prostego* $\Delta \subset V$ tejże podprzestrzeni,

$$W \oplus \Delta = V,$$

rozpiętego na wektorach $v_i, i \in \overline{1, n}$, $2n \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$ dopełniających elementy (dowolnej) bazy $\{w_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ do odnośnych par hiperbolicznych $\{w_i, v_i\}$. Wprost na mocy założenia zachodzi przy tym

$$\forall_{i \in \overline{1, n}} : \chi(w_i) = w_i,$$

a zatem także – dla dowolnych $(w, x) \in W \times \Delta$ –

$$\begin{aligned} \Phi_Q(w, \chi(x) - x) &= \Phi_Q(w, \chi(x)) - \Phi_Q(w, x) \equiv \Phi_Q(\chi(w), \chi(x)) - \Phi_Q(w, x) \\ &= \Phi_Q(w, x) - \Phi_Q(w, x) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

skąd wniosek:

$$\forall x \in \Delta : \chi(x) - x \in W^{\perp Q}.$$

Q -zerowość W implikuje inkluzję

$$W \subseteq W^{\perp Q},$$

która w konsekwencji Równ. (1.1.9) (znajdującego tu zastosowanie wobec niezwyrodnienia V) i maksymalności W , pociągających za sobą równość

$$\dim_{\mathbb{K}} W^{\perp Q} = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} W = 2n - n = n \equiv \dim_{\mathbb{K}} W,$$

sprowadza się do tożsamość

$$W = W^{\perp Q}.$$

Możemy zatem przepisać wcześniejszy wniosek w postaci

$$\forall x \in \Delta : \chi(x) - x \in W,$$

otrzymując tym sposobem w szczególności relacje

$$\forall_{i \in \overline{1, n}} \exists_{\mu_i^1, \mu_i^2, \dots, \mu_i^n \in \mathbb{K}} : \chi(v_i) = v_i + \sum_{j=1}^n \mu_i^j v_j,$$

które przesądzają o górnotrójkątnej postaci macierzy endomorfizmu χ względem bazy $\mathcal{B} := \{w_1, w_2, \dots, w_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$$[\chi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & (\mu_i^j)_{i \in \overline{1, n}}^{j \in \overline{1, n}} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}.$$

Licząc wyznacznik χ w tej właśnie bazie, otrzymujemy pożądaną wartość

$$\det \chi = \det_{(2n)} [\chi]_{\mathcal{B}} = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}.$$

□

Konsekwencją dużo mniej oczywistą, a fundamentalną dla teorii przestrzeni kwadratowych, jest⁹

TWIERDZENIE 1.2.4 (Cartana–Dieudonnégo). *Przyjmijmy zapis Def. 22 i 26 oraz Przykł. 6 (1), zakładając dodatkowo, że przestrzeń kwadratowa (V, Q) nad ciałem \mathbb{K} o charakterystyce $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ jest skończonego wymiaru, $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, i jest niezwyrodniała. Wówczas*

$$\forall_{\chi \in \text{O}(V, Q)} \exists_{n \in \overline{0, N}} \exists_{v_1, v_2, \dots, v_n \in V^\times} : \chi = P_{v_1} \circ P_{v_2} \circ \dots \circ P_{v_n},$$

przy czym

$$\chi \in \text{SO}(V, Q) \iff n \in 2\mathbb{N}.$$

■

Dowód: Zauważmy na wstępie, że dowolne odbicie elementarne P_v przyjmuje względem rozkładu Q -ortogonalnego

$$V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}$$

⁹W swojej wersji pierwotnej, sformułowanej i udowodnionej dla $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, twierdzenie to pochodzi od E.J. Cartana [Car38a, Car38b]. Jego wersję ogólną oraz także dowód podał następnie J.A. Dieudonné w monografii [Die55]. Dowód przedstawiony w niniejszym skrypcie pochodzi zasadniczo od E. Artina [Art61].

postać

$$P_v = (-\text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}}) \oplus_Q \text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}},$$

zatem spełnia warunek

$$\det P_v = -\mathbf{1}_{\mathbb{K}}.$$

Przy założeniu słuszności pierwszej części tezy dowodzonego twierdzenia obserwacja ta implikuje natychmiast drugą jej część.

Dowód części pierwszej przeprowadzimy metodą indukcji silnej względem N , zauważając natychmiast oczywistość tezy w przypadku $N = 1$ – istotnie, jeśli $V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$, to mamy koniecznie $\chi(v) = \lambda \triangleright v$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, a przy tym $\mathbf{0}_{\mathbb{K}} \neq Q(v) = Q \circ \chi(v) = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)$ implikuje $\lambda \in \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\}$, więc albo $\chi = \text{id}_V \in \text{SO}(V, Q)$, albo $\chi = P_v \in \text{O}(V, Q) \setminus \text{SO}(V, Q)$. Poczyniwszy założenie indukcyjne o słuszności dowodzonej tezy dla $N \in \overline{1, N_0 - 1}$, $N_0 > 1$, rozbijemy następnie dowód jej słuszności dla $N = N_0$ na składowe odpowiadające wykluczającym się nawzajem ewentualnościom:

- (i) $\exists_{v \in V^\times} : \chi(v) = v$;
- (ii) $\forall_{v \in V^\times} : \chi(v) - v \neq 0_V \quad \wedge \quad \exists_{w \in V^\times} : \chi(w) - w \in V^\times$;
- (iii) $\forall_{v \in V^\times} : \chi(v) - v \in Q^{-1}(\{0_V\}) \setminus \{0_V\}$.

W przypadku (i) przywołujemy tezę Stw. 34 (na co pozwala nieizotropowość v) i dokonujemy rozkładu

$$(1.2.12) \quad V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q},$$

odnotowując przy tym rozkład rozważanego endomorfizmu

$$\chi = \text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \chi \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}}.$$

Wobec równości

$$\dim_{\mathbb{K}} \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q} = N_0 - 1$$

założenie indukcyjne pozwala nam rozłożyć $\chi \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}}$ na co najwyżej $N_0 - 1$ odbić elementarnych $P_x^{(N_0-1)}$ w hiperpłaszczyznach $Q \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}} \equiv Q_{\perp v}$ -ortogonalnych do wyróżnionych wektorów nieizotropowych $x \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}$. Odbicie $P_x^{(N_0-1)}$ przyjmuje względem odnośnego rozkładu

$$\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q} = \langle x \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_{Q_{\perp v}} \langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_{Q_{\perp v}}},$$

postać blokowo-diagonalną

$$P_x^{(N_0-1)} = (-\text{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}}) \oplus \text{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_{Q_{\perp v}}}},$$

a jego trywialne rozszerzenie do całej przestrzeni V zapisuje się względem rozkładu (1.2.12) jako

$$\text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus P_x^{(N_0-1)} \equiv \text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus (-\text{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}}) \oplus \text{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_{Q_{\perp v}}}},$$

czyli sprowadza się do odbicia elementarnego w hiperpłaszczyźnie

$$\langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q} = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_{Q_{\perp v}}},$$

tj. spełnia tożsamość

$$\text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus P_x^{(N_0-1)} \equiv P_x.$$

To rozumowanie przekonuje, że w przypadku (i) izometria χ rozkłada się na co najwyżej $N_0 - 1 < N_0$ odbić elementarnych.

W przypadku (ii) nieizotropowość $\chi(w) - w$ pozwala rozpatrzeć odbicie elementarne $P_{\chi(w)-w}$, które spełnia tożsamość

$$\begin{aligned} P_{\chi(w)-w}(w) &= w - \frac{2\Phi_Q(w, \chi(w)-w)}{Q(\chi(w)-w)} \triangleright (\chi(w) - w) \\ &= w - \frac{2(\Phi_Q(w, \chi(w)) - Q(w))}{2Q(w) - 2\Phi_Q(w, \chi(w))} \triangleright (\chi(w) - w) = \chi(w). \end{aligned}$$

Na jej podstawie stwierdzamy, że izometria $\chi_w := P_{\chi(w)-w} \circ \chi$ zachowuje nieizotropowy wektor w , co w świetle poprzedniej części naszego dowodu oznacza, że χ_w jest superpozycją co najwyżej $N_0 - 1$ odbić elementarnych. Co za tym idzie, wyjściowa izometria χ jest superpozycją co najwyżej $N_0 - 1 + 1 = N_0$ odbić elementarnych, zgodnie z tezą indukcyjną.

W przypadku (iii) przekonujemy się, że $N_0 = 2k$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ oraz że $\chi \in \text{SO}(V, Q)$, co pozwala przeprowadzić następujące proste rozumowanie. Nieizotropowość wektora $v \in V^\times$ (wybranego dowolnie, a wybór taki istnieje z racji niezwyrodnienia V i założenia dotyczącego charakterystyki \mathbb{K}) oznacza, że przynajmniej jeden z wektorów $\chi(v) \pm v$ jest nieizotropowy, gdyż

$$Q(\chi(v) + v) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} = Q(\chi(v) - v)$$

$$\iff Q(v) + \Phi_Q(v, \chi(v)) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} = Q(v) - \Phi_Q(v, \chi(v)) \implies Q(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}.$$

W rozważanym przypadku (iii) oznacza to niechybnie $\chi(v) +_V v \in V^\times$ przy jednocześnie $\chi(v) \neq v$, ponieważ zaś

$$P_{\chi(v)+_V v}(v) = v - \frac{2\Phi_Q(v, \chi(v)+_V v)}{Q(\chi(v)+_V v)} \triangleright (\chi(v) +_V v) = -\chi(v),$$

przeto $\tilde{\chi}_v := P_v \circ P_{\chi(v)+_V v} \circ \chi$ zachowuje wektor nieizotropowy v . Rozumując jak poprzednio, stwierdzamy, że $\tilde{\chi}_v$ jest superpozycją co najwyżej $N_0 - 1$ odbić elementarnych, przy czym jeśli przyjąć, że – jak pokażemy lada chwila – N_0 jest liczbą parzystą, a χ jest obrotem, to mamy do czynienia z sytuacją, w której *obrót* $\tilde{\chi}_v$ rozkłada się na co najwyżej $N_0 - 1 \in 2\mathbb{N} + 1$ odbić (elementarnych), czyli koniecznie w rozkładzie tym jest co najwyżej $N_0 - 2 \in 2\mathbb{N}$ czynników, to zaś – koniec końców – prowadzi do wniosku, że χ jest superpozycją co najwyżej $N_0 - 2 + 2 = N_0$ odbić elementarnych, w zgodzie z tezą indukcyjną. Pozostaje przeto dowieść, że endomorfizm ten przy spełnionych warunkach z punktu (iii) jest w istocie obrotem w parzystowymiarowej (niezwyrodniałej) przestrzeni kwadratowej. Jasno widać, że $N_0 \neq 1$, oto bowiem w przypadku $N_0 = 1$ jest – jak pokazaliśmy wcześniej – $\chi(v) = -v$, więc też $\chi(v) - v = -2_{\mathbb{K}} \triangleright v \in V^\times$, przeciwieństwo do założenia (iii). Gdyby natomiast było $N_0 = 2$, to wówczas mielibyśmy $\chi(v) \notin \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby albo $\chi(v) = v$, niezgodnie z założeniem (iii), albo $\chi(v) = -v$, a wtedy $\chi(v) - v = -2_{\mathbb{K}} \triangleright v \in V^\times$, również w sprzeczności z założeniem (iii). Skoro jednak $\chi(v) \notin \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$, to $\{v, \chi(v)\}$ jest bazą V , w której wprost na mocy założenia (iii) znika gramian

$$\begin{aligned} \det_{(2)} \begin{pmatrix} \Phi_Q(v, v) & \Phi_Q(v, \chi(v)) \\ \Phi_Q(v, \chi(v)) & \Phi_Q(\chi(v), \chi(v)) \end{pmatrix} &= \det_{(2)} \begin{pmatrix} Q(v) & \Phi_Q(v, \chi(v)) \\ \Phi_Q(v, \chi(v)) & Q(v) \end{pmatrix} \\ &= Q(v)^2 - \Phi_Q(v, \chi(v))^2 = 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} Q(\chi(v) - v) \cdot_{\mathbb{K}} 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} Q(\chi(v) +_V v) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

co oznacza, że V jest zwyrodniała, wbrew założeniu. Ostatecznie więc $N_0 \geq 3$. Rozważmy następnie izotropowy wektor $w \in V$. W świetle Stw. 37 istnieje niepuste (wszak $\dim_{\mathbb{K}} V > 2$) dopełnienie Q -ortogonalne płaszczyzny hiperbolicznej zawierającej w , czyli też – wektor nieizotropowy $v \in V^\times$ (wszak Q jest niezwyrodniała) o własności $\Phi_Q(v, w) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. Dla dowolnego $\varepsilon \in \mathbb{K}^\times$ otrzymujemy wtedy wektor nieizotropowy $w +_V \varepsilon \triangleright v \in V$,

$$\begin{aligned} Q(w +_V \varepsilon \triangleright v) &\equiv \Phi_Q(w +_V \varepsilon \triangleright v, w +_V \varepsilon \triangleright v) \\ &= Q(w) + \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) + 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v, w) \\ &= \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

a zatem także – wprost na mocy (iii) – niezerowy wektor izotropowy $\chi(w +_V \varepsilon \triangleright v) - (w +_V \varepsilon \triangleright v)$, przy czym warunek izotropowości tego ostatniego daje nam – w połączeniu z warunkiem izotropowości $\chi(v) - v$ – tożsamość

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_{\mathbb{K}} &= Q(\chi(w +_V \varepsilon \triangleright v) - (w +_V \varepsilon \triangleright v)) \equiv Q(\chi(w) - w +_V \varepsilon \triangleright (\chi(v) - v)) \\ &= Q(\chi(w) - w) +_{\mathbb{K}} \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(\chi(v) - v) +_{\mathbb{K}} 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(\chi(w) - w, \chi(v) - v) \\ &= Q(\chi(w) - w) +_{\mathbb{K}} 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(\chi(w) - w, \chi(v) - v). \end{aligned}$$

Dodając do siebie obie strony powyższej równości dla $\varepsilon = -\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ i $\varepsilon = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}$, otrzymujemy równość

$$Q(\chi(w) - w) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}},$$

słuszną dla dowolnego izotropowego wektora w . W konkluzji możemy zapisać, w rozpatrywanym tu przypadku (iii),

$$V_1 := \text{Im}(\chi - \text{id}_V) \subset \text{Ker } Q.$$

Zauważmy przy tym, że

$$(1.2.13) \quad \forall_{x, y \in V_1} : \Phi_Q(x, y) = 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} (Q(x +_V y) - Q(x) - Q(y)) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$$

(wszak V_1 jest podgrupą), więc V_1 jest podprzestrzenią Q -zerową. Wybierzmy $x \in V$ oraz $y \in V_1^{\perp Q}$, a wtedy – w świetle powyższego –

$$\begin{aligned} \Phi_Q(x, \chi(y) - y) &= \Phi_Q(\chi(x), \chi(y) - y) - \Phi_Q(\chi(x) - x, \chi(y) - y) \\ &= \Phi_Q(\chi(x), \chi(y) - y) = \Phi_Q(x, y) - \Phi_Q(\chi(x), y) \\ &= -\Phi_Q(\chi(x) - x, y) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

czyli – wobec dowolności x i niezwyrodnienia Q –

$$\forall_{y \in V_1^{\perp Q}} : \chi(y) - y = 0_V,$$

czyli

$$(1.2.14) \quad \chi \upharpoonright_{V_1^{\perp Q}} = \text{id}_{V_1^{\perp Q}}.$$

Przywołując raz jeszcze warunek (iii), konkludujemy, że

$$V_1^{\perp Q} \subset Q^{-1}(\{\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\}),$$

a że $V_1^{\perp Q} \subset V$ jest podgrupą, przeto jest też automatycznie podprzestrzenią Q -zerową (por. (1.2.13)), a zatem

$$V_1^{\perp Q} \subseteq (V_1^{\perp Q})^{\perp Q}.$$

Ostatecznie otrzymujemy ciąg inkluzji

$$V_1 \subseteq V_1^{\perp Q} \subseteq (V_1^{\perp Q})^{\perp Q} = V_1,$$

w którym ostatnia równość wynika wprost ze Stw. 24. Z powyższego wynika już wprost równość

$$V_1 = V_1^{\perp Q},$$

a z niej – na mocy Równ. (1.1.9) – parzystość $N_0 \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$. Obecność w niej podprzestrzeni Q -zerowej W wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} W = \frac{N_0}{2}$, czyli maksymalnego, przesądza – w świetle Stw. 37 – o hiperboliczności V i tym samym pozwala nam odnieść tezę Stw. 38 do izometrii χ o własności (1.2.14), tj. ograniczającej się trywialnie do maksymalnej podprzestrzeni Q -zerowej $V_1^{\perp Q} = V_1$. Tym sposobem wnioskujemy, że χ jest w istocie obrotem, co kończy dowód. \square

2. Iloczyn tensorowy

W następnej odsłonie analizy fizykalnie istotnych struktur uniwersalnych natrafiamy na obiekt stanowiący strukturalnie kluczową, wręcz współdefiniującą składową opisu zjawisk kwantowych, w szczególności – jako narzędzie konstrukcji przestrzeni stanów kwantowych złożonego układu fizycznego z przestrzeni stanów podukładów. Tytułem przygotowania gruntu pod definicję zasadniczą wprowadzimy najpierw

DEFINICJA 39. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz 31 i ustalmy $R \in \text{Obj Ring}$. Niechaj $G_1 \in \text{Obj Mod}_{R^{\text{opp}}}$, $G_2 \in \text{Mod}_R$ oraz $H \in \text{Obj AbGrp}$ i niech $\varphi : G_1 \times G_2 \rightarrow H$ będzie **dwu- Z -liniowe** (czyli dwu-addytywne), tj.

$$\forall_{g_1, g_2 \in G_1} \forall_{g_3 \in G_2} : \varphi(g_1 +_1 g_2, g_3) = \varphi(g_1, g_3) +_H \varphi(g_2, g_3),$$

$$\forall_{h_1 \in G_1} \forall_{h_2, h_3 \in G_2} : \varphi(h_1, h_2 +_2 h_3) = \varphi(h_1, h_2) +_H \varphi(h_1, h_3).$$

Odwzorowanie φ nazywamy **śródo- R -liniowym**, jeśli spełnia dodatkowy warunek **śródo- R -jednorodności**

$$\forall_{(r, g_1, g_2) \in R \times G_1 \times G_2} : \varphi(g_1 \triangleleft r, g_2) = \varphi(g_1, r \triangleright g_2).$$

Odwzorowania śródo- R -liniowe dla ustalonej pary (G_1, G_2) tworzą kategorię ${}^{G_1}L^{G_2}$, której obiektami są pary (H, φ) złożone z $H \in \text{Obj AbGrp}$ i odwzorowania śródo- R -liniowego $\varphi \in \text{Hom}_{\text{Set}}(G_1 \times G_2, H)$, morfizmami zaś – dla ustalonych obiektów $(H_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$, utworzonych przez $H_\alpha \in \text{Obj AbGrp}$ i odwzorowania śródo- R -liniowe $\varphi_\alpha : G_1 \times G_2 \rightarrow H_\alpha$ – odwzorowania

$$\text{Hom}_{G_1 L^{G_2}}((H_1, \varphi_1), (H_2, \varphi_2)) = \{ \chi \in \text{Hom}_{\text{AbGrp}}(H_1, H_2) \mid \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1 \}.$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 20. Fundamentalnym przykładem odwzorowania śródo- R -liniowego jest mnożenie w pierścieniu R , przy czym R traktujemy tutaj jako kanoniczny lewy $({}_R R)$ i prawy (R_R) R -moduł z Przykł. 11 (2).

✓

Możemy już teraz wysłowić

DEFINICJA 40. Przyjmijmy zapis Def. 29 i 39. **Iloczyn tensorowy nad R** prawego R -modułu G_1 i lewego R -modułu G_2 to struktura inicjalna

$$((G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R), \otimes_R)$$

dla warunku

$P_{(G_1, G_2); F_1, F_2}(H, \varphi) \equiv \text{„}\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H \text{ jest odwzorowaniem śród-}R\text{-liniowym”}$,

w którego zapisie $F_1 : \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}} \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem przyporządkowującym parze modułów (wzgl. odwzorowań R -liniowych) iloczyn kartezjański ich nośników (wzgl. tychże odwzorowań), a $F_2 : \mathbf{AbGrp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem zapominania przyporządkowującym grupie przemiennej (wzgl. homomorfizmowi między takimi grupami) jej nośnik (wzgl. to samo odwzorowanie traktowane jako odwzorowanie między zbiorami).

▲

UWAGA 3. Dokonajmy elementarnej egzegezy powyższej definicji, aby uniknąć onieśmielającego uczucia wysokościowego *vertigo*. Oto więc iloczyn tensorowy R -modułów G_1 i G_2 to – w istocie – para $(G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R)$ złożona z grupy przemiennej $G_1 \otimes_R G_2$ oraz odwzorowania śród- R -liniowego $\otimes_R : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2$, zwanego **kanonicznym odwzorowaniem śród- R -liniowym**, o tej własności, że dla każdej grupy przemiennej H i każdego odwzorowania śród- R -liniowego $\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup przemiennych $\tilde{\varphi} : G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow H$, który czyni przemienny diagram

$$(1.2.15) \quad \begin{array}{ccccc} & & H & \xleftarrow{F_2} & (H, \varphi) \\ & \nearrow \varphi & \uparrow & | & \uparrow \\ & & G_1 \otimes_R G_2 & \xleftarrow{F_2} & (G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R) \\ & \uparrow \tilde{\varphi} & | & | & \uparrow \tilde{\varphi} \\ (G_1, G_2) & \xrightarrow{F_1} & G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\otimes_R} & G_1 \otimes_R G_2 \end{array} ,$$

czyli – mówiąc po ludzku – spełnia tożsamość

$$(1.2.16) \quad \forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2) = \varphi(g_1, g_2),$$

gdzie wprowadziliśmy standardowe oznaczenie

$$(1.2.17) \quad \otimes_R(g_1, g_2) \equiv g_1 \otimes_R g_2.$$

Mamy wielce uspokajające

TWIERDZENIE 1.2.5. *Przyjmijmy zapis Def. 40. Dla dowolnego pierścienia R i dowolnych $G_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$, $G_2 \in \mathbf{Mod}_R$ iloczyn tensorowy $((G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R), \otimes_R)$ istnieje i jest określony jednoznacznie z dokładnością do jedynego izomorfizmu grup przemiennych.*

■

Dowód: Wprost z definicji iloczynu tensorowego jako morfizmu uniwersalnego wynika – w świetle Tw. 1.2.2 – druga część dowodzonego twierdzenia. Pozostaje zatem wykazać jego istnienie, co czynimy w sposób bezpośredni (konstruktywny). Utwórzmy wolny \mathbb{Z} -moduł $\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ (czyli grupę przemienną) nad *zbiorem*¹⁰ $G_1 \times G_2$ według definicji zawartej w Przykł. 11 (3). Moduł ten zawiera \mathbb{Z} -podmoduł

$$\begin{aligned} T := & \{ \{ (g_1 +_1 g_2, g_3) - (g_1, g_3) - (g_2, g_3) \}_{g_1, g_2 \in G_1, g_3 \in G_2} \\ & \cup \{ (h_1, h_2 +_2 h_3) - (h_1, h_2) - (h_1, h_3) \}_{h_1 \in G_1, h_2, h_3 \in G_2} \\ & \cup \{ (k_1 \triangleleft_1 r, k_2) - (k_1, r \triangleright_2 k_2) \}_{k_1 \in G_1, k_2 \in G_2, r \in R} \}_{\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

który wobec przemienności grupy $\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ definiuje \mathbb{Z} -moduł ilorazowy (czyli grupę ilorazową). Postulujemy

$$(1.2.18) \quad G_1 \otimes_R G_2 := \langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}} / T,$$

a ponieważ zbiór $G_1 \times G_2$ zanurza się kanonicznie w $\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ (jako *zbiór*) wedle schematu

$$(1.2.19) \quad \tilde{\mathcal{J}}_{G_1 \times G_2} : G_1 \times G_2 \rightarrow \langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}} : (g_1, g_2) \mapsto \delta_{(g_1, g_2)},$$

wykorzystującą bazę z Przykł. 13 (6), przeto możemy też zdefiniować

$$(1.2.20) \quad \begin{aligned} \otimes_R := \pi_{\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}} / T} \circ \tilde{\mathcal{J}}_{G_1 \times G_2} & : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2 \\ & : (g_1, g_2) \mapsto \delta_{(g_1, g_2)} + T, \end{aligned}$$

używając rzutu kanonicznego *modulo* T określonego jak w Przykł. 2 (6).

Zacniemy od sprawdzenia śród- R -liniowości zdefiniowanego powyżej odwzorowania \otimes_R , licząc dla dowolnych $g_1, g_2 \in G_1$, $g_3, g_4 \in G_2$ i $r \in R$, co następuje:

$$\begin{aligned} (g_1 +_1 g_2) \otimes_R g_3 & \equiv \delta_{(g_1 +_1 g_2, g_3)} + T \\ & = \delta_{(g_1, g_3)} + \delta_{(g_2, g_3)} + (\delta_{(g_1 +_1 g_2, g_3)} - \delta_{(g_1, g_3)} - \delta_{(g_2, g_3)}) + T \\ & \equiv \delta_{(g_1, g_3)} + \delta_{(g_2, g_3)} + T = (\delta_{(g_1, g_3)} + T) + (\delta_{(g_2, g_3)} + T) \\ & \equiv g_1 \otimes_R g_3 + g_2 \otimes_R g_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 \otimes_R (g_3 +_2 g_4) & \equiv \delta_{(g_1, g_3 +_2 g_4)} + T \\ & = \delta_{(g_1, g_3)} + \delta_{(g_1, g_4)} + (\delta_{(g_1, g_3 +_2 g_4)} - \delta_{(g_1, g_3)} - \delta_{(g_1, g_4)}) + T \\ & \equiv \delta_{(g_1, g_3)} + \delta_{(g_1, g_4)} + T = (\delta_{(g_1, g_3)} + T) + (\delta_{(g_1, g_4)} + T) \\ & \equiv g_1 \otimes_R g_3 + g_1 \otimes_R g_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 \triangleleft_1 r \otimes_R g_2 & \equiv \delta_{(g_1 \triangleleft_1 r, g_2)} + T = \delta_{(g_1, r \triangleright_2 g_2)} + (\delta_{(g_1 \triangleleft_1 r, g_2)} - \delta_{(g_1, r \triangleright_2 g_2)}) + T \\ & = \delta_{(g_1, r \triangleright_2 g_2)} + T \equiv g_1 \otimes_R r \triangleright_2 g_2. \end{aligned}$$

¹⁰Podkreślmy: *nie* chodzi tutaj o grupę przemienną $G_1 \times G_2$, lecz o „goły” zbiór.

W następnej kolejności wykażemy istnienie i jednoznaczność odwzorowania $\tilde{\varphi}$, o którym mowa w Uwadze 3. W tym celu przypomnijmy, za Przykł. 13 (6), że układ $\{\delta_{(g_1, g_2)}\}_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2}$ jest bazą modułu $\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$, odwzorowanie $\pi_{(G_1 \times G_2)_{\mathbb{Z}}/T}$ zaś jest epimorfizmem, zatem definiująca tożsamość (1.2.16) ustala obraz względem odwzorowania $\tilde{\varphi}$ układu generującego dziedzinę tego odwzorowania. Jest zatem jasne, że istnieje co najwyżej jedno \mathbb{Z} -liniowe rozszerzenie tak zadanego (na układzie generującym) odwzorowania. Rozszerzenie to przyjmuje następującą postać: wobec surjektywności rzutu kanonicznego *modulo* T każdy element $\tau \in G_1 \otimes_R G_2$ możemy przedstawić w formie $\tau = \nu + T$ dla pewnej funkcji $\nu \in \mathbb{Z}^{G_1 \times G_2}$ (o ograniczonym nośniku), skoro zaś układ $\{\delta_{(g_1, g_2)}\}_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2}$ jest bazą $\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$, to możemy rozłożyć $\nu = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} n_{(g_1, g_2)} \triangleright \delta_{(g_1, g_2)}$, przy czym – jak łatwo widać – $n_{(g_1, g_2)} \equiv \nu(g_1, g_2)$, ostatecznie więc najbardziej ogólna postać elementu modułu $G_1 \otimes_R G_2$ to

$$\begin{aligned}
(1.2.21) \quad \tau &= \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright \delta_{(g_1, g_2)} + T \\
&= \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (\delta_{(g_1, g_2)} + T) + T \\
&\equiv \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) + T \\
&\equiv \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \tilde{\nu}(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)
\end{aligned}$$

(gdzie w ostatnim kroku dokonaliśmy banalnego przesunięcia $\nu \mapsto \nu + \delta_{(0_{(1)}, 0_{(2)})} =: \tilde{\nu}$), a ponieważ $\tilde{\varphi}$ jest z założenia homomorfizmem grup przemiennej, przeto (na mocy Tw. 14)

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \tilde{\nu}(g_1, g_2) \triangleright_H \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2),$$

co daje antycypowany jednoznaczny wynik ostateczny

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \tilde{\nu}(g_1, g_2) \triangleright_H \varphi(g_1, g_2).$$

Innymi słowy, określenie postaci przyjmowanej przez $\tilde{\varphi}$ na układzie generującym $G_1 \otimes_R G_2$ złożonym z tensorów prostych, w sposób zdeterminowany przez samą definicję obiektu inicjalnego, jednoznacznie podpowiada postać (jedyne) rozszerzenia \mathbb{Z} -liniowego tego odwzorowania do całego modułu tensorowego. \square

Mając na względzie przyszlą wygodę dowodzenia, podamy obecnie równoważną definicję iloczynu tensorowego modułów uwzględniającą powyższe rozumowanie, a to w formie

STWIERDZENIE 39. *Przyjmijmy zapis Def. 40 i Przykł. 11 (3). Niechaj $(T, \tau) \in \text{Obj}^{G_1 L_2^G}$. Poniższe zdania logiczne są równoważne.*

- (i) (T, τ) jest iloczynem tensorowym modułów G_1 i G_2 nad R .
- (ii) Grupa T jest generowana (nad \mathbb{Z}) przez elementy postaci $\tau(g_1, g_2)$, $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, tj.

$$(1.2.22) \quad T = \langle \tau(G_1 \times G_2) \rangle_{\mathbb{Z}},$$

a ponadto dla każdej pary $(H, \varphi) \in \text{Obj}^{G_1 L^{G_2}}$ jest określone odwzorowanie $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{G_1 L^{G_2}}((T, \tau), (H, \varphi))$, tj. takie, które czyni przemiennym diagram

$$(1.2.23) \quad \begin{array}{ccc} & & H \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \tilde{\varphi} \\ G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\tau} & T \end{array} .$$

■

Dowód:

(i)⇒(ii) Prawdziwość zdania (i) implikuje istnienie (jedyne) odwzorowania $\tilde{\varphi}$ wprost na mocy uniwersalności iloczynu tensorowego. Niechaj

$$T_\tau := \langle \tau(G_1 \times G_2) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

będzie podgrupą generowaną przez elementy $\tau(g_1, g_2)$, $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, kanonicznie zanurzoną w T przez $j_{T_\tau} : T_\tau \rightarrow T$ jak w Przykł. 2 (3), a wtedy τ kanonicznie określa obiekt $(T_\tau, \underline{\tau}) \in \text{Obj}^{G_1 L^{G_2}}$ o własności

$$j_{T_\tau} \circ \underline{\tau} = \tau .$$

Inicjalność τ gwarantuje istnienie homomorfizmu grup przemiennych $\tilde{\tau} : T \rightarrow T_\tau$ o własności

$$\tilde{\tau} \circ \tau = \underline{\tau} ,$$

a zatem zachodzi tożsamość

$$j_{T_\tau} \circ \tilde{\tau} \circ \tau = j_{T_\tau} \circ \underline{\tau} = \tau \equiv \text{id}_T \circ \tau ,$$

która wobec tejże inicjalności τ daje nam równość

$$j_{T_\tau} \circ \tilde{\tau} = \text{id}_T ,$$

implikującą postulowaną surjektywność zanurzenia kanonicznego,

$$\text{Im } j_{T_\tau} = T .$$

(ii)⇒(i) Niechaj $\tilde{\varphi}_1 : T \rightarrow H$ i $\tilde{\varphi}_2 : T \rightarrow H$ będą dwoma homomorfizmami grup przemiennych domykającymi Diag. (1.2.23),

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tau = \varphi = \tilde{\varphi}_2 \circ \tau ,$$

skąd wniosek:

$$\tilde{\varphi}_1 \upharpoonright_{\tau(G_1 \times G_2)} = \tilde{\varphi}_2 \upharpoonright_{\tau(G_1 \times G_2)} .$$

Równość (1.2.22) przesądza o pożądanej równości obu homomorfizmów (wobec ich \mathbb{Z} -liniowości),

$$\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2 .$$

□

ĆWICZENIA 2.

- (1) Udowodnij $\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : g_1 \otimes_R 0_2 = 0 (\equiv T) = 0_1 \otimes_R g_2$.
- (2) Oblicz $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dla $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wzajem pierwszych.



W następnej kolejności zajmiemy się omówieniem operacji tensorowania odwzorowań liniowych. Nasza dyskusja będzie zarazem stanowić pierwszą demonstrację siły pojęcia morfizmu uniwersalnego. Zaczniemy, jak (niemal) zawsze od

DEFINICJA 41. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz 40 i niechaj $G_1, H_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$ i $G_2, H_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$. **Iloczyn tensorowy nad R odwzorowań R -liniowych** $\chi_1 \in \text{Hom}_{R^{\text{opp}}}(G_1, H_1)$ i $\chi_2 \in \text{Hom}_R(G_2, H_2)$ to (jedyne) homomorfizm grup przemiennej

$$\chi_1 \otimes \chi_2 : G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow H_1 \otimes_R H_2$$

o własności

$$\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : (\chi_1 \otimes \chi_2)(g_1 \otimes_R g_2) = \chi_1(g_1) \otimes_R \chi_2(g_2).$$



STWIERDZENIE 40. Dla dowolnego pierścienia R i dowolnych $G_1, H_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$, $G_2, H_2 \in \mathbf{Mod}_R$ oraz $(\chi_1, \chi_2) \in \text{Hom}_{R^{\text{opp}}}(G_1, H_1) \times \text{Hom}_R(G_2, H_2)$ homomorfizm grup przemiennej $\chi_1 \otimes \chi_2$ jest dobrze określony.



Dowód: Rozważmy odwzorowanie

$$\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H_1 \otimes_R H_2 : (g_1, g_2) \longmapsto \chi_1(g_1) \otimes_R \chi_2(g_2).$$

Jest ono jawnie śród- R -liniowe, zatem w świetle uniwersalności iloczynu tensorowego nad R określa ono jednoznacznie odwzorowanie $\chi_1 \otimes \chi_2 := \tilde{\varphi}$, o którym mowa w dowodzonym stwierdzeniu. \square

UWAGA 4. Przyjęty zapis iloczynu odwzorowań liniowych może być mylący, sugeruje bowiem, jakoby $\chi_1 \otimes \chi_2$ było iloczynem tensorowym odwzorowań χ_1 i χ_2 traktowanych jako elementy \mathbb{Z} -modułów (tj. grup przemiennej) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, H_1)$ i $\text{Hom}_R(G_2, H_2)$, odpowiednio, tymczasem skonstruowane poniżej odwzorowanie $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, H_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$ nie jest w ogólności ani surjektywne, ani injektywne.

STWIERDZENIE 41. Przyjmijmy zapis Def. 41. Istnieje kanoniczny homomorfizm \mathbb{Z} -modułów

$$\iota : \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$$

o własności

$$\iota(\chi_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \chi_2) = \chi_1 \otimes \chi_2.$$



Dowód: Odwzorowanie

$$\begin{aligned} \varphi & : \text{Hom}_R(G_1, H_1) \times \text{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2) \\ & : (\chi_1, \chi_2) \longmapsto \chi_1 \otimes \chi_2 \end{aligned}$$

jest jawnie \mathbb{Z} -dwuliniowe, więc też automatycznie śród- \mathbb{Z} -liniowe, a zatem określa jednoznacznie odwzorowanie $\iota := \tilde{\varphi}$, o którym mowa w dowodonym stwierdzeniu. \square

Mamy przydatne

STWIERDZENIE 42. *Przyjmijmy zapis Def. 41. Dla dowolnych $G_1, H_1, K_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$ i $G_2, H_2, K_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$ oraz $\chi_1 \in \text{Hom}_{R^{\text{opp}}}(G_1, H_1)$, $\chi_2 \in \text{Hom}_R(G_2, H_2)$ i $\psi_1 \in \text{Hom}_R(H_1, K_1)$, $\psi_2 \in \text{Hom}_R(H_2, K_2)$ zachodzi tożsamość*

$$(1.2.24) \quad (\psi_1 \otimes \psi_2) \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) = (\psi_1 \circ \chi_1) \otimes (\psi_2 \circ \chi_2).$$

W szczególności ilekroć χ_1 i χ_2 są odwracalne, otrzymujemy

$$(\chi_1 \otimes \chi_2)^{-1} = \chi_1^{-1} \otimes \chi_2^{-1}.$$

Podobnie, surjektywność χ_1 i χ_2 implikuje surjektywność $\chi_1 \otimes \chi_2$ wobec tożsamości

$$\text{Im}(\chi_1 \otimes \chi_2) = \text{Im } \chi_1 \otimes_R \text{Im } \chi_2.$$

Wreszcie też kiedy $R = \mathbb{K}$ jest ciałem, tak że wszystkie R -moduły $G_\alpha, H_\alpha, K_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ są przestrzeniami \mathbb{K} -liniowymi, injektywność χ_1 i χ_2 pociąga za sobą injektywność $\chi_1 \otimes \chi_2$. \blacksquare

Dowód: Wobec Równ. (1.2.21) oraz \mathbb{Z} -liniowości \otimes_R wystarczy sprawdzić dowodzoną tożsamość (1.2.24) na generatorach $g_1 \otimes_R g_2$, $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ grupy przemiennej $G_1 \otimes_R G_2$, co jest rzeczą prostą.

Jedyna nietrywialna konstatacja – ta dotycząca przypadku $R = \mathbb{K}$ – jest natychmiastową konsekwencją Cor. 5 oraz istnienia \mathbb{K} -liniowych retrakcji ρ_α dla χ_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ w postaci $\rho_\alpha : H_\alpha = \text{Im } \chi_\alpha \oplus D_\alpha \twoheadrightarrow \text{Im } \chi_\alpha \twoheadrightarrow G_\alpha$. Na podstawie udowodnionej wcześniej tożsamości (1.2.24) iloczyn tensorowy tych retrakcji spełnia warunek

$$(\rho_1 \otimes \rho_2) \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) = (\rho_1 \circ \chi_1) \otimes (\rho_2 \circ \chi_2) = \text{id}_{G_1} \otimes \text{id}_{G_2} = \text{id}_{G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2},$$

który przesądza o injektywności $\chi_1 \otimes \chi_2$. \square

W podsumowaniu dotychczasowej dyskusji możemy wypowiedzieć zwięzłe

TWIERDZENIE 1.2.6. *Przyjmijmy zapis Def. 27 oraz 41. Iloczyn tensorowy określa functor kowariantny $\otimes_R : \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}} \times \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ o składowej obiektowej $(G_1, G_2) \mapsto G_1 \otimes_R G_2$ i składowej morfizmowej $(\chi_1, \chi_2) \mapsto \chi_1 \otimes \chi_2$.* \blacksquare

Dowód: Wynika wprost z Def. 41 oraz Stw. 42. \square

Uniwersalna natura iloczynu tensorowego dostarcza nam potężnego narzędzia analizy jego własności strukturalnych, z których kilka opiszemy poniżej.

TWIERDZENIE 1.2.7 (O przemienności iloczynu tensorowego). *Przyjmijmy zapis Def. 40 i niechaj $G_1^{(\text{opp})}$ (wzgl. $G_2^{(\text{opp})}$) oznacza lewy (wzgl. prawy) R^{opp} -moduł o nośniku G_1 (wzgl. G_2) i strukturze indukowanej z tej na G_1 (wzgl. G_2) w sposób opisany w (dowodzie) Stw. 3. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup przemiennych*

$$\sigma_{G_1, G_2} : G_1 \otimes_R G_2 \xrightarrow{\cong} G_2^{(\text{opp})} \otimes_{R^{\text{opp}}} G_1^{(\text{opp})}$$

o własności

$$\forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : \sigma_{G_1, G_2}(g_1 \otimes_R g_2) = g_2 \otimes_{R^{\text{opp}}} g_1.$$

■

Dowód: Wprost na mocy definicji $G_\alpha^{(\text{opp})}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ odwzorowanie

$$\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_2^{(\text{opp})} \otimes_{R^{\text{opp}}} G_1^{(\text{opp})} : (g_1, g_2) \longmapsto g_2 \otimes_{R^{\text{opp}}} g_1$$

jest śród- $R^{(\text{opp})}$ -liniowe, istnieje zatem jedyne odwzorowanie \mathbb{Z} -liniowe

$$\sigma_{G_1, G_2} : G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow G_2^{(\text{opp})} \otimes_{R^{\text{opp}}} G_1^{(\text{opp})}$$

o własności wskazanej w tezie dowodzonego twierdzenia. Analogicznie dowodzimy istnienia jedyne odwzorowania \mathbb{Z} -liniowe

$$\tau_{G_1, G_2} : G_2^{(\text{opp})} \otimes_{R^{\text{opp}}} G_1^{(\text{opp})} \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2$$

o własności

$$\forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : \tau_{G_1, G_2}(g_2 \otimes_{R^{\text{opp}}} g_1) = g_1 \otimes_R g_2.$$

Otrzymujemy więc równości, trywialnie spełnione na generatorach, a więc i ogólnie,

$$\sigma_{G_1, G_2} \circ \tau_{G_1, G_2} = \text{id}_{G_2^{(\text{opp})} \otimes_{R^{\text{opp}}} G_1^{(\text{opp})}},$$

$$\tau_{G_1, G_2} \circ \sigma_{G_1, G_2} = \text{id}_{G_1 \otimes_R G_2}.$$

□

Celem zbadania zagadnienia łączności operacji tensorowania modułów uogólnimy najpierw nasze dotychczasowe rozważania w sposób opisany w

STWIERDZENIE 43. *Przyjmijmy zapis Def. 40 oraz 41 i niechaj $G_1, H_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{(R_2, R_1^{\text{opp}})}$, $G_2, H_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_1}$, $G_3, H_3 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_1^{\text{opp}}}$, $G_4, H_4 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})}$. Wówczas*

- (i) $G_1 \otimes_{R_1} G_2$ jest lewym R_2 -modułem z działaniem określonym na generatorach:

$$\forall (r, g_1, g_2) \in R_2 \times G_1 \otimes_{R_1} G_2 : r \triangleright_{\otimes} (g_1 \otimes_{R_1} g_2) := (r \triangleright_{(1)} g_1) \otimes_{R_1} g_2.$$

- (ii) $\forall (\chi_1, \chi_2) \in \text{Hom}_{(R_2, R_1)}(G_1, H_1) \times \text{Hom}_{R_1}(G_2, H_2) : \chi_1 \otimes \chi_2 \in \text{Hom}_{R_2}(G_1 \otimes_{R_1} G_2, H_1 \otimes_{R_1} H_2)$.

- (iii) $G_3 \otimes_{R_1} G_4$ jest prawym R_2 -modułem z działaniem określonym na generatorach:

$$\forall (g_3, g_4, r) \in G_3 \otimes_{R_1} G_4 \times R_2 : (g_3 \otimes_{R_1} g_4) \triangleleft_{\otimes} r := g_3 \otimes_{R_1} (g_4 \triangleleft_{(4)} r).$$

- (iv) $\forall (\psi_1, \psi_2) \in \text{Hom}_{R_1}(G_3, H_3) \times \text{Hom}_{(R_1, R_2)}(G_4, H_4) : \psi_1 \otimes \psi_2 \in \text{Hom}_{R_2}(G_3 \otimes_{R_1} G_4, H_3 \otimes_{R_1} H_4)$.

■

Dowód: Przedstawimy jedynie dowód punktów (i) i (ii) tezy, dowód pozostałych punktów przebiega w pełni analogicznie.

Ad (i) Określmy dla dowolnego $r \in R_2$ odwzorowanie

$$\varphi_r : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} G_2 : (g_1, g_2) \longmapsto (r \triangleright_{(1)} g_1) \otimes_{R_1} g_2.$$

Jest ono jawnie śród- R_1 -liniowe, więc też indukuje jedyne odwzorowanie \mathbb{Z} -liniowe

$$\ell_r^\otimes := \widetilde{\varphi_r} : G_1 \otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} G_2$$

o pożądanej własności

$$\ell_r^\otimes(g_1 \otimes_{R_1} g_2) = (r \triangleright_{(1)} g_1) \otimes_{R_1} g_2.$$

Bez trudu sprawdzamy, że to ostatnie zadaje strukturę lewego R_2 -modułu na swej dziedzinie, według schematu

$$\begin{aligned} \ell^\otimes : R_2 \times G_1 \otimes_{R_1} G_2 &\longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} G_2 \\ &: \left(r, \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_{R_1} g_2) \right) \\ &\longmapsto \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright \ell_r^\otimes(g_1 \otimes_{R_1} g_2). \end{aligned}$$

Ad (ii) Trywialne sprawdzenie na generatorach. □

Możemy już teraz wysłowić

TWIERDZENIE 1.2.8 (O łączności iloczynu tensorowego). *Przyjmijmy zapis Def. 27 oraz 40 i niechaj $G_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}}$, $G_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})}$, $G_3 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_2}$. Istnieje kanoniczny izomorfizm naturalny*

$$\begin{array}{ccc} & \otimes_{R_2} \circ (\otimes_{R_1} \times \text{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}) & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})} \times \mathbf{Mod}_{R_2} & \begin{array}{c} \Downarrow \alpha_{\cdot, \cdot, \cdot} \\ \Downarrow \end{array} & \mathbf{AbGrp} \\ & \curvearrowleft & \\ & \otimes_{R_2} \circ (\otimes_{R_1} \times \text{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}) & \end{array}$$

między funktorami kowariantnymi

$$\begin{aligned} \otimes_{R_2} \circ (\otimes_{R_1} \times \text{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}) &: \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})} \times \mathbf{Mod}_{R_2} \longrightarrow \mathbf{AbGrp} \\ &: (G_1, G_2, G_3) \longmapsto (G_1 \otimes_{R_1} G_2) \otimes_{R_2} G_3 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \otimes_{R_1} \circ (\text{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_1}} \times \otimes_{R_2}) &: \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})} \times \mathbf{Mod}_{R_2} \longrightarrow \mathbf{AbGrp} \\ &: (G_1, G_2, G_3) \longmapsto G_1 \otimes_{R_1} (G_2 \otimes_{R_2} G_3), \end{aligned}$$

o własności

$$\forall_{(g_1, g_2, g_3) \in G_1 \times G_2 \times G_3} : \alpha_{G_1, G_2, G_3}((g_1 \otimes_{R_1} g_2) \otimes_{R_2} g_3) = g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3).$$

■

Dowód: Ustalenie postaci postulowanego izomorfizmu na generatorach gwarantuje – jak uprzednio – jego jednoznaczność. Pozostaje dowieść jego istnienia, co uczynimy w sposób konstruktywny. Zdefiniujemy, dla dowolnego $g_3 \in G_3$, odwzorowanie (jawnie) R_1 -liniowe

$$h_{g_3} : G_2 \longrightarrow G_2 \otimes_{R_2} G_3 : g_2 \longmapsto g_2 \otimes_{R_2} g_3$$

i rozważmy indukowane przezeń odwzorowanie \mathbb{Z} -liniowe

$$\widehat{h}_{g_3} := \text{id}_{G_1} \otimes h_{g_3} : G_1 \otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} (G_2 \otimes_{R_2} G_3).$$

To ostatnie zadaje odwzorowanie

$$\widehat{h} : G_1 \otimes_{R_1} G_2 \times G_3 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} (G_2 \otimes_{R_2} G_3),$$

które na generatorach określamy jako

$$\widehat{h}(g_1 \otimes_{R_1} g_2, g_3) := \widehat{h}_{g_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2).$$

Odwzorowanie to jest \mathbb{Z} -liniowe w pierwszym argumencie wprost na mocy \mathbb{Z} -liniowości \widehat{h}_{g_3} , a nadto – \mathbb{Z} -liniowe w drugim argumencie wobec tożsamości (zapisanej dla dowolnych $g_1 \otimes_{R_1} g_2 \in G_1 \otimes_{R_1} G_2$ i $g_3, h_3 \in G_3$)

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{g_3+h_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2) &\equiv g_1 \otimes_{R_1} h_{g_3+h_3}(g_2) = g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} (g_3 +_{(3)} h_3)) \\ &= g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3 +_{\otimes} g_2 \otimes_{R_2} h_3) \\ &= g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3) +_{\otimes} g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} h_3) \\ &\equiv \widehat{h}_{g_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2) +_{\otimes} \widehat{h}_{h_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2). \end{aligned}$$

Także na generatorach sprawdzamy jego $\text{śród-}R_2$ -jednorodność, z której wynika istnienie jedyne go odwzorowania \mathbb{Z} -liniowego α o pożądanej własności. Dowód istnienia odwrotności α przebiega w pełni analogicznie. I wreszcie naturalność opisanej tu rodziny izomorfizmów jest oczywistą konsekwencją ich definicji. \square

UWAGA 5. Zagadnienie uniwersalne dla odwzorowań $\text{śród-}R$ -liniowych ma swoje naturalne uogólnienie na przypadek n -liniowy dla $n > 2$, które w przypadku $n = 3$ prowadzi do definicji grupy przemiennej $G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3$, zwanej potrójnym iloczynem tensorowym. Łatwo wykazać istnienie kanonicznego izomorfizmu grup przemiennej

$$(G_1 \otimes_{R_1} G_2) \otimes_{R_2} G_3 \cong G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3.$$

Uogólnienie tej obserwacji formalizujemy w poniższej definicji, pozostawiając Czytelnikowi dowód jej sensowności (tj. istnienia przedmiotu tejże) jako proste, a pożyteczne ćwiczenie.

DEFINICJA 42. Przyjmijmy zapis Def. 29 oraz 39 i dla ustalonego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ niechaj $G_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}}$, $G_n \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_{n-1}}$ oraz $G_k \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{(R_{k-1}, R_k)}$, $k \in \overline{2, n-1}$. Niech też ${}^{G_1}L^{G_2}L^{G_3} \dots L^{G_{n-1}}L^{G_n}$ będzie kategorią, której obiektami są pary (H, φ) złożone z $H \in \text{Obj } \mathbf{AbGrp}$ i odwzorowania $\varphi : G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \longrightarrow H$ n -addytywnego i $\text{śród-}R_l$ -jednorodnego dla każdej pary (G_l, G_{l+1}) , $l \in \overline{1, n-1}$ i której morfizmami – dla ustalonych obiektów $(H_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$, utworzonych

przez $H_\alpha \in \text{Obj } \mathbf{AbGrp}$ i odwzorowania $\varphi_\alpha : G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H_\alpha$ – są odwzorowania

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{G_1 L G_2 L G_3 \dots L G_{n-1} L G_n}((H_1, \varphi_1), (H_2, \varphi_2)) \\ &= \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(H_1, H_2) \mid \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1 \}. \end{aligned}$$

n -krotny iloczyn tensorowy nad $(R_1, R_2, \dots, R_{n-1})$ rodziny modułów $\{G_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ to struktura inicjalna

$$((G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3 \otimes_{R_3} \cdots \otimes_{R_{n-1}} G_n, \otimes_R), \otimes^n)$$

dla warunku

$$P_{(G_1, G_2, \dots, G_n); F_1, F_2}(H, \varphi) \equiv \text{„}\varphi : G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H \text{ jest}$$

odwzorowaniem śród- R_l -liniowym dla $l \in \overline{1, n-1}$ ”,

w którego zapisie $F_1 : \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2)} \times \mathbf{Mod}_{(R_2, R_3)} \times \cdots \times \mathbf{Mod}_{(R_{n-1}, R_n)} \times \mathbf{Mod}_{R_n} \longrightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem przyporządkowującym n -tce (bi)modułów (wzgl. stosownych odwzorowań liniowych) iloczynu kartezjańskiego ich nośników (wzgl. tychże odwzorowań), a $F_2 : \mathbf{AbGrp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ jest funktorem zapominania jak w Def. 40. ▲

Istnienie kanonicznej struktury (R, R) -bimodułu na R , określonej przez lewo- i prawostronne mnożenie przez elementy R , pozwala nam w przypadku dowolnego $G_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$ traktować $G_1 \otimes_R R$ jako R -moduł prawostronny, a w przypadku dowolnego $G_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$ – $R \otimes_R G_2$ jako R -moduł lewostronny. Obserwacja ta nadaje sens

STWIERDZENIE 44. *Przyjmijmy zapis Def. 40 oraz Równ. (1.2.21). Odwzorowanie*

$${}_{G_1}\xi : G_1 \longrightarrow G_1 \otimes_R R : g \longmapsto g \otimes_R \mathbf{1}_R$$

jest izomorfizmem R -modułów prawostronnych, o odwrotności zadanej przez odwzorowanie

$$\begin{aligned} {}_{G_1}\kappa & : G_1 \otimes_R R \longrightarrow G_1 \\ & : \sum_{(g,r) \in G_1 \times R} \nu(g,r) \triangleright (g \otimes_R r) \longmapsto \sum_{(g,r) \in G_1 \times R} \nu(g,r) \triangleright (g \triangleleft r). \end{aligned}$$

Podobnie odwzorowanie

$$\xi_{G_2} : G_2 \longrightarrow R \otimes_R G_2 : g \longmapsto \mathbf{1}_R \otimes_R g$$

jest izomorfizmem R -modułów lewostronnych, o odwrotności zadanej przez odwzorowanie

$$\begin{aligned} \kappa_{G_2} & : R \otimes_R G_2 \longrightarrow G_2 \\ & : \sum_{(r,g) \in R \times G_2} \nu(r,g) \triangleright (r \otimes_R g) \longmapsto \sum_{(r,g) \in R \times G_2} \nu(r,g) \triangleright (r \triangleright g). \end{aligned}$$

■

Dowód: Dowodzimy pierwszej części tezy, dowód drugiej części jest w pełni analogiczny. Łatwo sprawdzamy, że jawnie \mathbb{Z} -dwuliniowe (wprost z definicji działania) odwzorowanie

$$\wp : G_1 \times R \longrightarrow G_1 : (g, r) \longmapsto g \triangleleft r$$

jest śród- R -jednorodne,

$$\forall_{(g,r,s) \in G_1 \times R \times R} : \wp((g \triangleleft r), s) \equiv (g \triangleleft r) \triangleleft s = g \triangleleft (r \cdot_R s) \equiv g \triangleleft (r \triangleright s) \equiv \wp(g, r \triangleright s),$$

to zaś implikuje istnienie (jedyne) odwzorowania \mathbb{Z} -liniowego ${}_{G_1}\kappa \equiv \tilde{\wp}$ jak w tezie dowodzonego stwierdzenia. Tożsamości ${}_{G_1}\kappa \circ {}_{G_1}\xi = \text{id}_{G_1}$ oraz ${}_{G_1}\xi \circ {}_{G_1}\kappa = \text{id}_{G_1 \otimes_R R}$ sprawdzamy bezpośrednio na generatorach (tensorach prostych). \square

Na zakończenie niniejszej wstępnej analizy konsekwencji uniwersalności iloczynu tensorowego zastanowimy się nad istotnym – z punktu widzenia przyszłych naszych rozważań – zagadnieniem tensorowania modułów ilorazowych. Oto więc mamy

TWIERDZENIE 1.2.9. *Przyjmijmy zapis Def. 40 oraz Przykł. 11 (14) i niechaj $H_\alpha \subset G_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą podmodułami – odpowiednio, prawym (dla $\alpha = 1$) i lewym (dla $\alpha = 2$) – odnośnych R -modułów G_α . Oznaczmy*

$$T(H_1, H_2) := H_1 \otimes_R G_2 + G_1 \otimes_R H_2.$$

Istnieje kanoniczny izomorfizm grup przemiennych

$$\iota_{H_1, H_2} : G_1/H_1 \otimes_R G_2/H_2 \xrightarrow{\cong} (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2).$$

Izomorfizm ten spełnia warunek

$$\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \iota_{H_1, H_2}((g_1 +_1 H_1) \otimes_R (g_2 +_2 H_2)) = g_1 \otimes_R g_2 +_{\otimes} T(H_1, H_2). \quad \blacksquare$$

Dowód: W dowodzie wykorzystamy równoważną charakteryzację iloczynu tensorowego podaną w Stw. 39. Zaczniemy od zdefiniowania odwzorowania śród- R -liniowego

$$\begin{aligned} \hat{\tau} & : G_1 \times G_2 \longrightarrow (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2) \\ & : (g_1, g_2) \longmapsto \pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)}(g_1 \otimes_R g_2) \end{aligned}$$

w terminach rzutu kanonicznego

$$\pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)} : G_1 \otimes_R G_2 \twoheadrightarrow (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)$$

z Przykł. 12 (5). Wobec oczywistych tożsamości

$$\forall_{(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2} \forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \hat{\tau}(h_1, g_2) = 0_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)} = \hat{\tau}(g_1, h_2)$$

stwierdzamy istnienie odwzorowania śród- R -liniowego

$$\begin{aligned} \tau & : G_1/H_1 \times G_2/H_2 \longrightarrow (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2) \\ & : (g_1 +_1 H_1, g_2 +_2 H_2) \longmapsto \hat{\tau}(g_1, g_2). \end{aligned}$$

Pokażemy, że $((G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2), \tau)$ jest iloczynem tensorowym modułów ilorazowych G_1/H_1 i G_2/H_2 nad R . W tym celu zauważmy najpierw równość

$$\text{Im } \tau = \text{Im } \hat{\tau} \equiv \text{Im}(\pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)} \circ \otimes_R),$$

z której w świetle tożsamości

$$\langle \text{Im } \otimes_R \rangle_{\mathbb{Z}} = G_1 \otimes_R G_2$$

oraz surjektywności $\pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)}$ wynika pożądana teza

$$\langle \text{Im } \tau \rangle_{\mathbb{Z}} = (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2).$$

Niechaj teraz

$$\underline{\varphi} : G_1/H_1 \times G_2/H_2 \longrightarrow H$$

będzie dowolnym odwzorowaniem śród- R -liniowym. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H : (g_1, g_2) \longmapsto \underline{\varphi}(g_1 +_1 H_1, g_2 +_2 H_2),$$

które jest jawnie śród- R -liniowe i jako takie indukuje (jedyne) homomorfizm grup przemiennych

$$\tilde{\varphi} : G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow H$$

o własności

$$\tilde{\varphi} \circ \otimes_R = \varphi.$$

Jako że prawdziwe są tożsamości

$$\forall_{(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2} \quad \forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \begin{cases} \tilde{\varphi}(h_1 \otimes_R g_2) \equiv \underline{\varphi}(H_1, g_2 +_2 H_2) = 0_H \\ \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R h_2) \equiv \underline{\varphi}(g_1 +_1 H_1, H_2) = 0_H \end{cases},$$

przeto

$$T(H_1, H_2) \subset \ker \tilde{\varphi},$$

a zatem – na mocy Tw. 1.1.1 – istnieje homomorfizm grup przemiennych

$$[\tilde{\varphi}] : (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2) \longrightarrow H$$

o własności

$$[\tilde{\varphi}] \circ \pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)} = \tilde{\varphi}.$$

Homomorfizm ten spełnia – dla dowolnej pary $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ – warunek

$$\begin{aligned} [\tilde{\varphi}] \circ \tau(g_1 +_1 H_1, g_2 +_2 H_2) &\equiv [\tilde{\varphi}] \circ \hat{\tau}(g_1, g_2) \\ &\equiv [\tilde{\varphi}] \circ \pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)}(g_1 \otimes_R g_2) \\ &= \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2) \equiv \varphi(g_1, g_2) \equiv \underline{\varphi}(g_1 +_1 H_1, g_2 +_2 H_2), \end{aligned}$$

czyli także tożsamość

$$[\tilde{\varphi}] \circ \tau = \underline{\varphi},$$

równoznaczną – w świetle Tw. 1.2.2 – z istnieniem jedynego izomorfizmu grup przemiennych ι_{H_1, H_2} . Przywołując rozumowanie przeprowadzone w dowodzie tegoż twierdzenia, konstatujemy, iż izomorfizm ten spełnia tożsamość

$$\iota_{H_1, H_2} \circ \otimes_R = \tau,$$

co pokazuje słuszność drugiej części tezy dowodzonego stwierdzenia. \square

Jako proste corollarium powyższego otrzymujemy

STWIERDZENIE 45. *Przyjmijmy zapis Def. 41 oraz Przykł. 1 (6), przy czym załóżmy, że $R = \mathbb{K}$ jest ciałem, a wszystkie R -moduły G_α, H_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ są przestrzeniami \mathbb{K} -liniowymi. Zachodzi tożsamość*

$$\ker(\chi_1 \otimes \chi_2) := \ker \chi_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2 + G_1 \otimes_{\mathbb{K}} \ker \chi_2.$$

■

Dowód: Przywoławszy tezę Tw. 1.2.9 (i przyjąwszy jego notację), stwierdzamy istnienie kanonicznego \mathbb{K} -liniowego izomorfizmu

$$\iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2} : G_1/\ker \chi_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2/\ker \chi_2 \xrightarrow{\cong} (G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2)$$

o własności

$$\iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2}(\pi_{G_1/\ker \chi_1}(g_1) \otimes_{\mathbb{K}} \pi_{G_2/\ker \chi_2}(g_2)) = \pi_{(G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2)}(g_1 \otimes_{\mathbb{K}} g_2).$$

Rozważmy następnie indukowane – w duchu Tw. 1.1.5 – \mathbb{K} -liniowe monomorfizmy

$$\widetilde{\chi}_\alpha : G_\alpha/\ker \chi_\alpha \rightarrow H_\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

spełniające relacje

$$\widetilde{\chi}_\alpha \circ \pi_{G_\alpha/\ker \chi_\alpha} = \chi_\alpha.$$

W świetle Stw. 42 określają one \mathbb{K} -liniowy monomorfizm

$$\widetilde{\chi}_1 \otimes \widetilde{\chi}_2 : G_1/\ker \chi_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2/\ker \chi_2 \rightarrow H_1 \otimes_{\mathbb{K}} H_2,$$

możemy zatem zdefiniować monomorfizm

$$\chi := (\widetilde{\chi}_1 \otimes \widetilde{\chi}_2) \circ \iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2}^{-1} : (G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2) \rightarrow H_1 \otimes_{\mathbb{K}} H_2,$$

który spełnia – dla dowolnych $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ – tożsamość

$$\begin{aligned} & \chi \circ \pi_{(G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2)}(g_1 \otimes_{\mathbb{K}} g_2) \\ &= \chi \circ \iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2}(\pi_{G_1/\ker \chi_1}(g_1) \otimes_{\mathbb{K}} \pi_{G_2/\ker \chi_2}(g_2)) \\ &\equiv (\widetilde{\chi}_1 \otimes \widetilde{\chi}_2) \circ \iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2}^{-1} \circ \iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2}(\pi_{G_1/\ker \chi_1}(g_1) \otimes_{\mathbb{K}} \pi_{G_2/\ker \chi_2}(g_2)) \\ &= (\widetilde{\chi}_1 \circ \pi_{G_1/\ker \chi_1} \otimes \widetilde{\chi}_2 \circ \pi_{G_2/\ker \chi_2})(g_1 \otimes_{\mathbb{K}} g_2) \\ &= (\chi_1 \otimes \chi_2)(g_1 \otimes_{\mathbb{K}} g_2). \end{aligned}$$

Tę ostatnią możemy przepisać w formie niezależnej od (dowolnych) argumentów:

$$\chi \circ \pi_{(G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2)} = \chi_1 \otimes \chi_2.$$

Wobec iniektywności χ wnioskujemy, że

$$\ker(\chi_1 \otimes \chi_2) = \ker \pi_{(G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2)} = T(\ker \chi_1, \ker \chi_2),$$

co należało okazać. □

Możemy już teraz przystąpić do dyskusji mniej elementarnych własności iloczynu tensorowego, w szczególności zaś – ustalić relację tejże struktury uniwersalnej z innymi poznanymi wcześniej strukturami uniwersalnymi w kategorii liniowej, a mianowicie: produktem i sumą prostą. Zaczniemy od elementarnego

STWIERDZENIE 46. *Przyjmijmy zapis Def. 31 i 40, ustalmy zbiory (indeksów) Λ_1, Λ_2 i niechaj $G_1, \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}^{\Lambda_1}$ oraz $G_2, \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R^{\Lambda_2}$. Odwzorowanie*

$$\begin{aligned} \tau &: \prod_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \times \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2} \longrightarrow \prod_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2} \\ &: (g^{(1)}, g^{(2)}) \longmapsto (g^{(1)} \circ \text{pr}_1) \otimes_R (g^{(2)} \circ \text{pr}_2), \end{aligned}$$

w którego zapisie $\text{pr}_\alpha : \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \Lambda_\alpha, \alpha \in \{1, 2\}$ są rzutami kanonicznymi, indukuje kanoniczny homomorfizm grup przemiennych

$$\tilde{\tau} : \prod_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \otimes_R \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2} \longrightarrow \prod_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2}$$

o własności

$$\forall_{(g^{(1)}, g^{(2)}) \in G_{1, \times G_2}} : \tilde{\tau}(g^{(1)} \otimes_R g^{(2)}) = (g^{(1)} \circ \text{pr}_1) \otimes_R (g^{(2)} \circ \text{pr}_2).$$

■

Dowód: Odwzorowanie τ jest jawnie \mathbb{Z} -dwuliniowe i wśród- R -jednorodnie, zatem teza dowodzonego stwierdzenia wynika wprost z Tw. 1.2.5. □

W ogólności nie możemy orzekać o własnościach $\tilde{\tau}$ bez poczynienia dodatkowych założeń odnośnie do struktury rodzin modułów pojawiających się w jego definicji (znane są przykłady odwzorowań nieinjektywnych i niesurjektywnych). Na większą precyzję wypowiedzi pozwala ograniczenie rozważań do podmodułów modułów produktowych danych przez sumy proste. Oto więc znajdujemy ważne

TWIERDZENIE 1.2.10. *Przyjmijmy zapis Stw. 46. Kanoniczny homomorfizm grup przemiennych $\tilde{\tau}$ ogranicza się do iloczynu podmodułów $\bigoplus_{\lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha} G_{\alpha\lambda_\alpha} \subset \prod_{\lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha} G_{\alpha\lambda_\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}$, tj. zadaje kanoniczny homomorfizm grup przemiennych*

$$\tilde{\tau} : \bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2},$$

przy czym sumy proste tensorowane w dziedzinie $\tilde{\tau}$ to sumy proste R -modułów, gdy tymczasem przeciwdziedzina jest sumą prostą \mathbb{Z} -modułów. Homomorfizm ten jest izomorfizmem grup przemiennych.

■

Dowód: Wobec tożsamości z Ćwic. 2 (1) $\tilde{\tau}$ -obraz iloczynu tensorowego skończonych kombinacji R -liniowych elementów $\bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1}$ i – odpowiednio – $\bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2}$ jest skończoną kombinacją \mathbb{Z} -liniową tensorów prostych z $G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2}$, więc – w istocie –

$$\tilde{\tau}\left(\bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2}\right) \subset \bigoplus_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2}.$$

W świetle Stw. 46 pozostaje zatem znaleźć odwzorowanie \mathbb{Z} -liniowe

$$h : \bigoplus_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2}$$

spełniające tożsamości

$$h \circ \tilde{\tau} = \text{id}_{\bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2}}, \quad \tilde{\tau} \circ h = \text{id}_{\bigoplus_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2}}.$$

Przywołując definicję sumy prostej jako struktury inicjalnej, stwierdzamy przy tym, że istnienie i jednoznaczność poszukiwanego odwzorowania wynika wprost z istnienia stosownej rodziny homomorfizmów grup przemiennej

$$\begin{aligned} \chi_{\cdot, \cdot} &: \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{AbGrp} \\ &: (\lambda_1, \lambda_2) \longmapsto \chi_{\lambda_1, \lambda_2} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2}, \bigoplus_{\mu_1 \in \Lambda_1} G_{1\mu_1} \otimes_R \bigoplus_{\mu_2 \in \Lambda_2} G_{2\mu_2}\right), \end{aligned}$$

której elementy możemy wybrać w postaci

$$(1.2.25) \quad \chi_{\lambda_1, \lambda_2} := J_{\lambda_1} \otimes J_{\lambda_2},$$

gdzie zastosowaliśmy notację Def. 32 oraz 41. Homomorfizmy te indukują poszukiwane odwzorowanie spełniające relację

$$h \circ J_{\lambda_1, \lambda_2} = \chi_{\lambda_1, \lambda_2},$$

wyrażoną w terminach włożeń kanonicznych

$$J_{\lambda_1, \lambda_2} : G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{(\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\mu_1} \otimes_R G_{2\mu_2}.$$

Oznaczmy symbolicznie

$$J_{\lambda_\alpha} : G_{\alpha\lambda_\alpha} \longrightarrow \bigoplus_{\mu_\alpha \in \Lambda_\alpha} G_{\alpha\mu_\alpha} : g_{\lambda_\alpha} \longmapsto \delta_{\lambda_\alpha}^{\mathbb{Z}} \triangleright g_{\lambda_\alpha}, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

oraz

$$\begin{aligned} J_{\lambda_1, \lambda_2} &: G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{(\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\mu_1} \otimes_R G_{2\mu_2} \\ &: \sum_{(g_1, g_2) \in G_{1\lambda_1} \times G_{2\lambda_2}} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \\ &\longmapsto \sum_{(g_1, g_2) \in G_{1\lambda_1} \times G_{2\lambda_2}} \delta_{(\lambda_1, \lambda_2), (\cdot, \cdot)}^{\mathbb{Z}} \cdot \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \end{aligned}$$

i przywołajmy Równ. (1.2.10). Możemy już teraz wprost sprawdzić – z wykorzystaniem definiującej własności (1.2.25), jak również \mathbb{Z} -liniowości iloczynu tensorowego – pożądane tożsamości (na tensorach prostych z $\bigoplus_{\mu_1 \in \Lambda_1} G_{1\mu_1} \otimes_R \bigoplus_{\mu_2 \in \Lambda_2} G_{2\mu_2}$, dla dowolnych $r \in \mathcal{R}_0(R; \Lambda_1)$ i $s \in \mathcal{R}_0(R; \Lambda_2)$)

$$\begin{aligned} &h \circ \tilde{\tau}(g \triangleleft_{(1)} r \otimes_R s \triangleright_{(2)} g) = h(g \triangleleft_{(1)} r \circ \text{pr}_1 \otimes_R s \triangleright_{(2)} g \circ \text{pr}_2) \\ \equiv &\sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} h \circ J_{\lambda_1, \lambda_2} \circ \text{pr}_{\lambda_1, \lambda_2}(g \triangleleft_{(1)} r \circ \text{pr}_1 \otimes_R s \triangleright_{(2)} g \circ \text{pr}_2) \\ &= \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} (J_{\lambda_1} \otimes J_{\lambda_2})(g_{\lambda_1} \triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1} \otimes_R s_{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}) \\ &= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} J_{\lambda_1}(g_{\lambda_1} \triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1}) \otimes_R J_{\lambda_2}(s_{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}) \\ &= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} J_{\lambda_1}(g_{\lambda_1} \triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1}) \otimes_R \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} J_{\lambda_2}(s_{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}) \\ &= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} J_{\lambda_1} \circ \text{pr}_{\lambda_1}(g \triangleleft_{(1)} r) \otimes_R \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} J_{\lambda_2} \circ \text{pr}_{\lambda_2}(s \triangleright_{(2)} g) \\ &= g \triangleleft_{(1)} r \otimes_R s \triangleright_{(2)} g. \end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy – dla dowolnej rodziny $N_{(\cdot, \cdot)} \in \mathcal{R}_0(\mathbb{Z}; \Lambda_1 \times \Lambda_2)$ –

$$\begin{aligned}
& \tilde{\tau} \circ h(N_{(\cdot, \cdot)} \cdot \nu(g^{(1)} \circ \text{pr}_1, g^{(2)} \circ \text{pr}_2) \triangleright (g^{(1)} \circ \text{pr}_1 \otimes_R g^{(2)} \circ \text{pr}_2)) \\
&= \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} \tilde{\tau} \circ h \circ J_{\lambda_1, \lambda_2} \circ \text{pr}_{\lambda_1, \lambda_2} (N_{(\cdot, \cdot)} \cdot \nu(g^{(1)} \circ \text{pr}_1, g^{(2)} \circ \text{pr}_2) \\
&\quad \triangleright (g^{(1)} \circ \text{pr}_1 \otimes_R g^{(2)} \circ \text{pr}_2)) \\
&= \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} \tilde{\tau} \circ (J_{\lambda_1} \otimes J_{\lambda_2})(N_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cdot \nu(g_{\lambda_1}^{(1)}, g_{\lambda_2}^{(2)}) \triangleright (g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R g_{\lambda_2}^{(2)})) \\
&\quad \equiv \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} \tilde{\tau}(N_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cdot \nu(g_{\lambda_1}^{(1)}, g_{\lambda_2}^{(2)}) \triangleright (J_{\lambda_1}(g_{\lambda_1}^{(1)}) \otimes_R J_{\lambda_2}(g_{\lambda_2}^{(2)}))) \\
&= \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} \tilde{\tau}(N_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cdot \nu(g_{\lambda_1}^{(1)}, g_{\lambda_2}^{(2)}) \triangleright (\delta_{\lambda_1, 1}^{\mathbb{Z}} \triangleright g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R \delta_{\lambda_2, 2}^{\mathbb{Z}} \triangleright g_{\lambda_2}^{(2)})) \\
&= \tilde{\tau}\left(\sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} N_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cdot \nu(g_{\lambda_1}^{(1)}, g_{\lambda_2}^{(2)}) \triangleright (\delta_{\lambda_1, 1}^{\mathbb{Z}} \triangleright g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R \delta_{\lambda_2, 2}^{\mathbb{Z}} \triangleright g_{\lambda_2}^{(2)})\right) \\
&\quad = \tilde{\tau}(N_{(\cdot, \cdot)} \cdot \nu(g^{(1)}, g^{(2)}) \triangleright (g^{(1)} \otimes_R g^{(2)})) \\
&= N_{(\text{pr}_1, \text{pr}_2)} \cdot \nu(g^{(1)} \circ \text{pr}_1, g^{(2)} \circ \text{pr}_2) \triangleright (g^{(1)} \circ \text{pr}_1 \otimes_R g^{(2)} \circ \text{pr}_2) \\
&\quad \equiv N_{(\cdot, \cdot)} \cdot \nu(g^{(1)} \circ \text{pr}_1, g^{(2)} \circ \text{pr}_2) \triangleright (g^{(1)} \circ \text{pr}_1 \otimes_R g^{(2)} \circ \text{pr}_2).
\end{aligned}$$

□

Prostą konsekwencją powyższego twierdzenia jest

STWIERDZENIE 47. *Przyjmijmy zapis Def. 40 i niechaj $((V_\alpha, +_\alpha, \mathbf{P}_\alpha, \bullet \mapsto 0_\alpha), \ell_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema przestrzeniami wektorowymi nad ciałem \mathbb{K} . Ich iloczyn tensorowy $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2$ spełnia warunek*

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 \cdot \dim_{\mathbb{K}} V_2.$$

■

Dowód: Pochodna Tw. 1.2.10 i Stw. 33. □

Istotnie pogłębiwszy wgląd w relację między iloczynem tensorowym i sumą prostą, tudzież produktem modułów uzyskujemy w przypadku modułów wolnych, do której teraz przechodzimy. Tytułem wprowadzenia sformułujemy

STWIERDZENIE 48. *Przyjmijmy zapis Def. 18, 32 i 40. Niechaj $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$ będzie R -modułem wolnym o bazie $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, indeksowanej przez pewien zbiór Λ , i niech $H \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$. Wówczas*

$$\forall_{\tau \in H \otimes_R G} \exists!_{h \in \mathcal{R}_0(H; \Lambda)} : \tau = \sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda \otimes_R g_\lambda$$

i istnieje (niekanoniczny) izomorfizm grup przemiennej

$$H \otimes_R G \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H.$$

■

Dowód: Wybór bazy w R -module G jest równoznaczny ze wskazaniem izomorfizmu R -modułów

$$G \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \langle g_\lambda \rangle_R,$$

co w świetle Tw. 1.2.10 (a przy domyślnym zastosowaniu Stw. 42) pozwala zapisać

$$H \otimes_R G \cong H \otimes_R \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \langle g_\lambda \rangle_R \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (H \otimes_R \langle g_\lambda \rangle_R).$$

Liniowa niezależność (nad R) każdego z elementów bazy $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ oznacza dalej, że odwzorowanie

$$\iota_\lambda : R \longrightarrow \langle g_\lambda \rangle_R : r \longmapsto r \triangleright g_\lambda$$

jest izomorfizmem R -modułów, którego istnienie daje nam, po uwzględnieniu tezy Stw. 44, pożądaną izomorfizm grup przemiennej

$$H \otimes_R G \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (H \otimes_R \langle g_\lambda \rangle_R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (H \otimes_R R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H.$$

Powyższe rozumowanie pozwala nam bez trudu przeprowadzić dowód pierwszej części stwierdzenia. Istotnie, rozważmy dowolny tensor

$$\sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \otimes_R g) \in H \otimes_R G,$$

określony przez rodzinę $\nu \in \mathcal{R}_0(\mathbb{Z}; H \times G)$. Uwzględnivszy skończoność tej ostatniej, jak również skończoność rodziny $r \cdot (g) \in \mathcal{R}_0(R; \Lambda)$ wyznaczającej jednoznaczny rozkład elementu $g \in G$ w bazie $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, w połączeniu z tożsamością z Ćwicz. 2 (1), wreszcie też wykorzystawszy śród- R -liniowość \otimes_R , stwierdzamy

$$\begin{aligned} \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \otimes_R g) &= \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright \left(h \otimes_R \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda(g) \triangleright_G g_\lambda \right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \otimes_R r_\lambda(g) \triangleright_G g_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \triangleleft_H r_\lambda(g) \otimes_R g_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \triangleleft_H r_\lambda(g)) \right) \otimes_R g_\lambda, \end{aligned}$$

co jest poszukiwanym rozkładem,

$$h_\lambda := \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \triangleleft_H r_\lambda(g)) \in H.$$

Jego jednoznaczność wynika wprost z równoważności

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda \otimes_R g_\lambda = \mathbf{0}_{H \otimes_R G} \iff \forall_{\lambda \in \Lambda} : h_\lambda = \mathbf{0}_H,$$

której nietrywialną składową \implies otrzymujemy ewaluując odwzorowanie \mathbb{Z} -liniowe $\text{id}_H \otimes \iota_\mu^{-1} \circ \text{pr}_\mu$ na obu stronach równości z lewej strony dla każdego indeksu $\mu \in \Lambda$ z osobna. \square

Rozumowanie jak to przedstawione powyżej prowadzi nas wprost do

STWIERDZENIE 49. *Przyjmijmy zapis Def. 18 i 40. Jeśli oba moduły G_1 i G_2 są wolne, przy czym odnośne bazy to $\{g_{\lambda_1}^{(1)}\}_{\lambda_1 \in \Lambda_1}$ i $\{g_{\lambda_2}^{(2)}\}_{\lambda_2 \in \Lambda_2}$, to w zapisie dowolnego elementu*

$$\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R h_{\lambda_1}^{(2)} \equiv \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} h_{\lambda_2}^{(1)} \otimes_R g_{\lambda_2}^{(2)}$$

w terminach elementów $h_{\lambda_1}^{(2)} \in G_2$ i $h_{\lambda_2}^{(1)} \in G_1$, o rozkładach

$$h_{\lambda_1}^{(2)} = \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} h_{\lambda_1, \lambda_2}^{(2)} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}^{(2)}, \quad h_{\lambda_2}^{(1)} = \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} g_{\lambda_1}^{(1)} \triangleleft_{(1)} h_{\lambda_2, \lambda_1}^{(1)},$$

o którym orzeka Stw. 48, są spełnione tożsamości

$$\forall_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2 \times \Lambda_2} : h_{\lambda_1, \lambda_2}^{(2)} = h_{\lambda_2, \lambda_1}^{(1)}.$$

■

Dowód: Wystarczy wykorzystać jednoznaczność rozkładu, o którym mówi Stw. 48 (w wersji stosownie zszytrowanej). □

UWAGA 6. Należy podkreślić, że mimo swe strukturalne powinowactwo do stwierżeń orzekających o jednoznaczności rozkładu elementu modułu w bazie, powyższe stwierdzenie nie pozwala nam traktować układu $\{g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R g_{\lambda_2}^{(2)}\}_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2 \times \Lambda_2}$ jako bazy, oto bowiem grupa przemienna $G_1 \otimes_R G_2$ nie jest w ogólności R -modułem.

Znaczenie założenia o istnieniu (skończonej) bazy eksponuje

STWIERDZENIE 50. *Przyjmijmy zapis Def. 18, 31 oraz 40 i niechaj $H \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}^{\Lambda}$. Jeśli $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$ jest R -modułem wolnym, to wówczas kanoniczny homomorfizm grup przemiennych*

$$\tilde{\tau} : \prod_{\lambda \in \Lambda} H_{\lambda} \otimes_R G \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} (H_{\lambda} \otimes_R G),$$

o którym mówi Stw. 46, jest monomorfizmem. Jeżeli ponadto moduł G jest skończenie generowany, to homomorfizm ten jest izomorfizmem.

■

Dowód: Niechaj $\{g_{\mu}\}_{\mu \in \tilde{\Lambda}}$ będzie bazą G , a wtedy dowolny element $t = \prod_{\lambda \in \Lambda} H_{\lambda} \otimes_R G$ można – w świetle Stw. 48 – zapisać jednoznacznie jako

$$t = \sum_{\mu \in \tilde{\Lambda}} h^{\mu} \otimes_R g_{\mu}, \quad h^{\mu} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} H_{\lambda},$$

zatem jego obrazem względem odwzorowania kanonicznego $\tilde{\tau}$ jest element grupy $\prod_{\lambda \in \Lambda} (H_{\lambda} \otimes_R G)$ postaci

$$\tilde{\tau}(t) : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (H_{\lambda} \otimes_R G) : \lambda \longmapsto \sum_{\mu \in \tilde{\Lambda}} h_{\lambda}^{\mu} \otimes_R g_{\mu} \in H_{\lambda} \otimes_R G.$$

Ten ostatni jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \sum_{\mu \in \tilde{\Lambda}} h_{\lambda}^{\mu} \otimes_R g_{\mu} = 0_{H_{\lambda} \otimes_R G},$$

to zaś – wobec jednoznaczności rozkładu orzeczonej w Stw. 48 – jest równoważne stwierdzeniu

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} \forall_{\mu \in \tilde{\Lambda}} : h_{\lambda}^{\mu} = 0_{H_{\lambda}},$$

co pokazuje injektywność odwzorowania $\tilde{\tau}$ w rozpatrywanym przypadku.

Jeśli ponadto $N := |\tilde{\Lambda}| < \infty$, to na podstawie Tw. 1.2.10 oraz Stw. 44 (i wcześniejszych naszych rozważań, w tym Stw. 42) otrzymujemy z jednej strony

$$\begin{aligned} \iota_1 : \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \otimes_R G &\cong \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \otimes_R \bigoplus_{n=1}^N \langle g_n \rangle_R \cong \bigoplus_{n=1}^N \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \otimes_R \langle g_n \rangle_R \right) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \otimes_R R \right) \cong \bigoplus_{n=1}^N \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \cong \prod_{n=1}^N \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \\ &\equiv \prod_{(n,\lambda) \in \overline{1, N \times \Lambda}} H_\lambda, \end{aligned}$$

z drugiej zaś

$$\begin{aligned} \iota_2 : \prod_{\lambda \in \Lambda} (H_\lambda \otimes_R G) &\cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(H_\lambda \otimes_R \bigoplus_{n=1}^N \langle g_n \rangle_R \right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \bigoplus_{n=1}^N (H_\lambda \otimes_R \langle g_n \rangle_R) \\ &\cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \bigoplus_{n=1}^N (H_\lambda \otimes_R R) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \bigoplus_{n=1}^N H_\lambda \equiv \prod_{\lambda \in \Lambda} \prod_{n=1}^N H_\lambda \\ &\cong \prod_{(n,\lambda) \in \overline{1, N \times \Lambda}} H_\lambda. \end{aligned}$$

W powyższych rozważaniach wykorzystaliśmy oczywiste izomorfizmy

$$\prod_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2} \cong \prod_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2},$$

które dowolnemu odwzorowaniu

$$\gamma_\cdot : \Lambda_1 \longrightarrow \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \mathbf{Map}(\Lambda_2, \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2})$$

o własności

$$\forall \lambda_1 \in \Lambda_1 : \gamma_{\lambda_1} : \Lambda_2 \longrightarrow \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2} : \lambda_2 \mapsto \gamma_{\lambda_1}(\lambda_2) \in G_{\lambda_1, \lambda_2}$$

przyporządkowują odwzorowanie

$$g_\cdot^\gamma : \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2} : (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \gamma_{\lambda_1}(\lambda_2),$$

i odwrotnie – z każdym odwzorowaniem

$$g_\cdot : \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2} : (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto g_{\lambda_1, \lambda_2} \in G_{\lambda_1, \lambda_2}$$

stowarzyszą odwzorowanie

$$\gamma_\cdot^{g_\cdot} : \Lambda_1 \longrightarrow \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \mathbf{Map}(\Lambda_2, \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2})$$

o wartościach danych przez odwzorowania

$$\gamma_{\lambda_1}^{g_\cdot} : \Lambda_2 \longrightarrow \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2} : \lambda_2 \mapsto g_{\lambda_1, \lambda_2}.$$

Endomorfizm złożony $\iota_2 \circ \tilde{\tau} \circ \iota_1^{-1}$ grupy przemiennej $\prod_{(n,\lambda) \in \overline{1, N \times \Lambda}} H_\lambda$ jest injektywny wprost z konstrukcji, ale też bez trudu stwierdzamy, że jest to endomorfizm identycznościowy, co przesądza o bijektywnym charakterze $\tilde{\tau}$. \square

Na zakończenie dyskusji własności iloczynu tensorowego modułów nad *dowolnym* pierścieniem zatrzymamy się jeszcze nad wynikiem, który doprowadzi nas do wygodnej (i często wykorzystywanej w fizyce, w tym np. w mechanice kwantowej) reprezentacji odwzorowań R -liniowych.

TWIERDZENIE 1.2.11. *Przyjmijmy zapis Def. 16, 40 oraz 41 i niechaj $G_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_1}$, $G_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})}$, $G_3 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_2}$. Istnieje kanoniczny homomorfizm grup przemiennej*

$$\varepsilon : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 \longrightarrow \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3),$$

który na tensorach prostych przyjmuje postać

$$\forall (\chi, g_3, g_1) \in \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \times G_3 \times G_1 : \varepsilon(\chi \otimes_{R_2} g_3)(g_1) = \chi(g_1) \otimes_{R_2} g_3.$$

Jeśli moduł G_3 jest wolny, to homomorfizm ten jest monomorfizmem. Jeżeli zaś moduł G_1 lub moduł G_3 jest wolny i skończenie generowany, to homomorfizm ten jest izomorfizmem, co implikuje – w szczególności – istnienie, w tym przypadku i dla $R_1 = R_2 =: R$, kanonicznego izomorfizmu

$$(1.2.26) \quad G_1^* \otimes_R G_3 \cong \text{Hom}_R(G_1, G_3),$$

w tym także – dla $G_1 = G_3 =: G$ –

$$(1.2.27) \quad \theta_G \equiv \varepsilon : G^* \otimes_R G \xrightarrow{\cong} \text{End}_R(G, G).$$

■

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że teza dowodzonego twierdzenia ma sens formalny w świetle Stw. 43. Z kolei istnienie homomorfizmu ε jest konsekwencją oczywistej śród- R_2 -liniowości odwzorowania

$$\begin{aligned} \varphi & : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \times G_3 \longrightarrow \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) \\ & : (\chi, g_3) \longmapsto \chi(\cdot) \otimes_{R_2} g_3. \end{aligned}$$

Dowód zaczniemy od rozważenia przypadku, kiedy G_3 ma bazę $\{g_\lambda^{(3)}\}_{\lambda \in \Lambda}$. W świetle Stw. 48 dowolny tensor z dziedziny ε możemy wówczas przedstawić w postaci (danej jednoznacznie)

$$\tau = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^\lambda \otimes_{R_2} g_\lambda^{(3)}, \quad \chi^\lambda \in \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2).$$

Niech $\varepsilon(\tau) = 0$, albo równoważnie

$$\forall_{g_1 \in G_1} : 0_{G_2 \otimes_{R_2} G_3} = \varepsilon(\tau)(g_1) \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^\lambda(g_1) \otimes_{R_2} g_\lambda^{(3)}.$$

Przywoławszy tezę Stw. 48 raz jeszcze, konstatujemy, iż $0_{G_2 \otimes_{R_2} G_3}$ ma jednoznaczny rozkład wypisanej postaci, więc koniecznie

$$\forall_{g_1 \in G_1} \forall_{\lambda \in \Lambda} : \chi^\lambda(g_1) = 0_{(2)},$$

a stąd

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \chi^\lambda = 0.$$

Stwierdzamy zatem na koniec, że $\tau = 0$, co dowodzi iniektywności ε w rozpatrywanym przypadku.

Niech teraz dodatkowo $N := |\Lambda| < \infty$. Na mocy Tw. 1.2.10 oraz Stw. 44 (i wcześniejszych naszych rozważań, w tym Stw. 42) wnioskujemy o istnieniu (niekanonicznych) izomorfizmów grup przemiennych:

$$\begin{aligned} \iota_1 : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 &\cong \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} \bigoplus_{n=1}^N R_2 \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N (\text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} R_2) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \iota_2 : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) &\cong \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} \bigoplus_{n=1}^N R_2) \\ &\cong \text{Hom}_{R_1}(G_1, \bigoplus_{n=1}^N (G_2 \otimes_{R_2} R_2)) \\ &\cong \text{Hom}_{R_1}(G_1, \bigoplus_{n=1}^N G_2) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2), \end{aligned}$$

przy czym w ostatnim przejściu wykorzystaliśmy Cor. 4. Obłożywszy iniektywny homomorfizm ε z obu stron stosownymi izomorfizmami, otrzymujemy nowy monomorfizm: $\iota_2 \circ \varepsilon \circ \iota_1^{-1}$, którego strukturę możemy bez trudu zanalizować wobec tożsamości jego dziedziny i przeciwdziedziny. Tym sposobem bez trudu przekonujemy się, że w obrazie rzeczonego złożenia monomorfizm ε jawi się odwzorowaniem identycznościowym (w przyjętej notacji $\iota_2 \circ \varepsilon \circ \iota_1^{-1}$ przeprowadza na siebie wektor odwzorowań R_1 -liniowych $(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^N)$, gdzie przyjęliśmy dla ustalenia uwagi, że $\Lambda \equiv \overline{1, N}$), przeto i sam ε jest nieodzownie izomorfizmem.

Zajmiemy się wreszcie przypadkiem, kiedy to G_1 jest modulem o skończonej bazie $\{g_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1, N}}$. Dowolny element $\chi \in \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3)$ jest teraz jednoznacznie określony przez wynik ewaluacji na owej bazie – niech to będzie (w notacji Równ. (1.2.21))

$$(1.2.28) \quad \chi(g_k^{(1)}) = \sum_{(g,h) \in G_2 \times G_3} \nu_k(g, h) \triangleright (g \otimes_{R_2} h), \quad k \in \overline{1, N}.$$

Zdefiniujemy odwzorowania $\chi_{(k,g)} \in \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2)$ indeksowane elementami zbioru $\overline{1, N} \times G_2 \ni (k, g)$ i będące jedynymi R_1 -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\forall_{l \in \overline{1, N}} : \chi_{(k,g)}(g_l^{(1)}) := \delta_{l,k}^Z \triangleright g.$$

Oznaczmy ponadto, dla dowolnego *ustalonego* rozkładu tensora $\chi(g_k^{(1)})$ (pamiętajmy, że tensory proste w ogólności nie stanowią układu bazowego, a jedynie układ generujący)

$$\forall_{(k,g,h) \in \overline{1, N} \times G_2 \times G_3} : \nu(\chi_{(k,g)}, h) := \nu_k(g, h).$$

Bez trudu przekonujemy się, że obrazem tensora

$$(1.2.29) \quad \gamma(\chi) := \sum_{(k,g,h) \in \overline{1, N} \times G_2 \times G_3} \nu(\chi_{(k,g)}, h) \triangleright (\chi_{(k,g)} \otimes_{R_2} h)$$

(suma w jego definicji jest skończona w konsekwencji skończoności N oraz nośnika ν_k) względem homomorfizmu ε jest homomorfizm χ określony w Równ. (1.2.28), oto bowiem

$$\begin{aligned} \varepsilon(\gamma(\chi))(g_k^{(1)}) &:= \sum_{(l,g,h) \in \overline{1,N} \times G_2 \times G_3} \nu(\chi(l,g), h) \triangleright (\chi(l,g)(g_k^{(1)}) \otimes_{R_2} h) \\ &= \sum_{(l,g,h) \in \overline{1,N} \times G_2 \times G_3} \nu(\chi(l,g), h) \triangleright (\delta_{l,k}^Z \triangleright g \otimes_{R_2} h) \\ &= \sum_{(g,h) \in G_2 \times G_3} \nu(\chi(k,g), h) \triangleright (g \otimes_{R_2} h) \equiv \chi(g_k^{(1)}). \end{aligned}$$

Jest przeto ε epimorfizmem, a ponieważ istnieją (niekanoniczne) izomorfizmy:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 &\cong \text{Hom}_{R_1}\left(\bigoplus_{n=1}^N R_1, G_2\right) \otimes_{R_2} G_3 \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \text{Hom}_{R_1}(R_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N G_2 \otimes_{R_2} G_3 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) &\cong \text{Hom}_{R_1}\left(\bigoplus_{n=1}^N R_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3\right) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \text{Hom}_{R_1}(R_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N G_2 \otimes_{R_2} G_3, \end{aligned}$$

więc też nieodzownie ε ma trywialne jądro, czyli jest izomorfizmem. \square

UWAGA 7. W szczególnym przypadku $R_1 = R_2 =: R$, a dla $G_2 = R$ i G_1 wolnego odwrotność kanonicznego izomorfizmu R -modułów z tezy powyższego twierdzenia daje się wypisać wprost w zwartej postaci

$$\varepsilon^{-1} : \text{Hom}_R(G_1, G_3) \xrightarrow{\cong} G_1^* \otimes_R G_3 : \chi \mapsto \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(1)} \otimes_R \chi(g_k^{(1)})$$

przy użyciu bazy $\{\gamma_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1,N}}$ modułu G_1^* dwoistej wzgl. $\{g_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1,N}}$, por.: Równ. (1.2.29). Jeśli ponadto $G_1 = G_3 \equiv G$, to izomorfizm θ_G dostarcza nam powszechnie spotykanej reprezentacji endomorfizmu identycznościowego (w konwencji $\gamma_k^{(1)} \equiv e_k^*$, $g_k^{(1)} \equiv e_k$)

$$\theta_G^{-1}(\text{id}_G) = \sum_{k=1}^N e_k^* \otimes_R e_k.$$

Powyższe rozważania prowadzą wprost do jakże użytecznej

DEFINICJA 43. Przyjmijmy zapis Tw. 1.2.11, zakładając w szczególności, że pierścień R jest przemienny, R -moduł G zaś – wolny i skończenie generowany. Wówczas kanoniczny homomorfizm R -modułów

$$\tau : G^* \otimes_R G \longrightarrow R$$

o własności

$$\forall_{(\varphi, g) \in G^* \times G} : \tau(\varphi \otimes_R g) = \varphi(g)$$

określa **kanoniczną formę R -liniową**

$$\mathrm{tr}_G := \tau \circ \theta_G^{-1} : \mathrm{End}_R(G) \longrightarrow R$$

zwaną **ślądem endomorfizmu po module G** . ▲

Ilekoć pierścień bazy jest przemienny, w *naturalny* sposób pojawia się dodatkowa struktura algebraiczna na grupie przemiennej $G_1 \otimes_R G_2$ z Def. 40. Ażeby uwypuklić znaczenie przemienności R , prześledźmy następujące rozumowanie, którego celem jest wyindukowanie na rzeczony grupie struktury R -modułu przy użyciu istniejących działań R na czynnikach iloczynu tensorowego. Oczywisty kandydat do roli R -działania (lewostronnego) to odwzorowanie

$$\begin{aligned} \ell^{\otimes} & : R \times (G_1 \otimes_R G_2) \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2 \\ & : \left(r, \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \right) \\ & \longmapsto \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r \triangleright_{(2)} g_2). \end{aligned}$$

(1.2.30)

Na pierwszy rzut oka odwzorowanie to ma pożądaną własność (wypisaną dla dowolnych $r_1, r_2 \in R$)

$$\begin{aligned} & \ell_{r_1}^{\otimes} \circ \ell_{r_2}^{\otimes} \left(\sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \right) \\ & = \ell_{r_1}^{\otimes} \left(\sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r_2 \triangleright_{(2)} g_2) \right) \\ & = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r_1 \triangleright_{(2)} (r_2 \triangleright_{(2)} g_2)) \\ & = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R (r_1 \cdot r_2) \triangleright_{(2)} g_2) \\ & \equiv \ell_{r_1 \cdot r_2}^{\otimes} \left(\sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \right). \end{aligned}$$

Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę śród- R -jednorodność \otimes_R , to natrafimy na kłopot, oto bowiem otrzymujemy tożsamość

$$\begin{aligned} & \ell_{r_1}^{\otimes} \circ \ell_{r_2}^{\otimes} \left(\sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \right) \\ & = \ell_{r_1}^{\otimes} \left(\sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r_2 \triangleright_{(2)} g_2) \right) \\ & = \ell_{r_1}^{\otimes} \left(\sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \triangleleft_{(1)} r_2 \otimes_R g_2) \right) \\ & = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \triangleleft_{(1)} r_2 \otimes_R r_1 \triangleright_{(2)} g_2) \\ & = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright ((g_1 \triangleleft_{(1)} r_2) \triangleleft_{(1)} r_1 \otimes_R g_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \triangleleft_{(1)} (r_2 \cdot_R r_1) \otimes_R g_2) \\
&= \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R (r_2 \cdot_R r_1) \triangleright_{(2)} g_2) \\
&\equiv \ell_{r_2 \cdot_R r_1}^{\otimes} \left(\sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \right),
\end{aligned}$$

która wymaga, dla uniknięcia sprzeczności z tą uzyskaną poprzednio, iżby

$$\forall_{r_1, r_2 \in R} : r_1 \cdot_R r_2 = r_2 \cdot_R r_1,$$

tj., iżby R był przemienny. Przyjmując to za punkt wyjścia do dalszych rozważań, wprowadzamy

DEFINICJA 44. Przyjmijmy zapis Def. 40, przy czym niechaj R będzie pierścieniem przemiennym. Struktura R -modułu na $G_1 \otimes_R G_2$ jest zadawana przez odwzorowanie (działanie) (1.2.30). Analogicznie definiujemy strukturę R -modułu na n -krotnym iloczynie tensorowym rodziny modułów $\{G_A\}_{A \in \overline{1, n}}$ z Def. 42 przy $R_l := R$, $l \in \overline{1, n-1}$. ▲

Zacznijmy od natychmiastowego corollarium do Stw. 49.

STWIERDZENIE 51. *Przyjmijmy zapis Def. 44 i Stw. 49. Jeśli oba moduły G_1 i G_2 są wolne, przy czym odnośne bazy to $\{g_{\lambda_1}^{(1)}\}_{\lambda_1 \in \Lambda_1}$ i $\{g_{\lambda_2}^{(2)}\}_{\lambda_2 \in \Lambda_2}$, to także R -moduł $G_1 \otimes_R G_2$ jest wolny, a rodzina $\{g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R g_{\lambda_2}^{(2)}\}_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2}$ jest jego bazą.* ■

Dowód: Oczywiście. □

Mamy też dość oczywiste

STWIERDZENIE 52. *Przyjmijmy zapis Def. 44 (w szczególności R jest pierścieniem przemiennym) i niechaj $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$. Istnieje kanoniczny izomorfizm R -modułów*

$$\text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, G) \cong L_R(G_1, G_2; G),$$

gdzie R -moduł po prawej stronie to moduł odwzorowań R -dwuliniowych z $G_1 \times G_2$ do G . ■

Dowód: Odwzorowanie R -dwuliniowe $\varphi \in L_R(G_1, G_2; G)$ to takie odwzorowanie \mathbb{Z} -dwuliniowe (czyli dwu-addytywne), które spełnia warunek

$$\forall_{(r, g_1, g_2) \in R \times G_1 \times G_2} : \varphi(r \triangleright_{(1)} g_1, g_2) = r \triangleright \varphi(g_1, g_2) = \varphi(g_1, r \triangleright_{(2)} g_2).$$

Jest ono zatem w szczególności śród- R -liniowe, czyli jest mu jednoznacznie przypisany homomorfizm grup przemiennych $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, G)$ o własności

$$\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2) = \varphi(g_1, g_2).$$

Warunek

$$\varphi(r \triangleright_{(1)} g_1, g_2) = r \triangleright \varphi(g_1, g_2)$$

implikuje dodatkową własność rzeczonego homomorfizmu:

$$\forall_{(r, g_1, g_2) \in R \times G_1 \times G_2} : \tilde{\varphi}(r \triangleright_{(1)} g_1 \otimes_R g_2) = r \triangleright \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2),$$

która w świetle definicji działania R na $G_1 \otimes_R G_2$ pozwala nam zapisać

$$\forall_{(r, g_1, g_2) \in R \times G_1 \times G_2} : \tilde{\varphi}(r \triangleright_{\otimes} (g_1 \otimes_R g_2)) = r \triangleright \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2).$$

Powyższa własność rozszerza się na cały moduł tensorowy $G_1 \otimes_R G_2$ ze zbioru jego generatorów, co oznacza przynależność $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, G)$. Jest oczywistym, że tak określona odpowiedniość między elementami obu modułów odwzorowań jest wzajemnie bijektywna i strukturalna. W szczególności dowolne odwzorowanie $\chi \in \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, G)$ zadaje odwzorowanie R -dwuliniowe

$$\underline{\chi} : G_1 \times G_2 \longrightarrow G : (g_1, g_2) \longmapsto \chi(g_1 \otimes_R g_2).$$

□

Zachodzi też przydatne

STWIERDZENIE 53. *Przyjmijmy zapis Def. 16, 41 i 44 (w szczególności R jest pierścieniem przemiennym). Istnieje kanoniczny homomorfizm R -modułów*

$$\iota : \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$$

o własności

$$\iota(\chi_1 \otimes_R \chi_2) = \chi_1 \otimes \chi_2.$$

Ilekoć moduły w którejś z par $(G_1, H_1), (G_2, H_2)$ lub (G_1, G_2) są wolne i skończenie generowane, homomorfizm ten jest izomorfizmem. W szczególności więc dla $H_1 = R = H_2$ stwierdzamy, że jeżeli jeden z modułów G_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ jest wolny i skończenie generowany, istnieje kanoniczny izomorfizm R -modułów

$$(1.2.31) \quad (G_1 \otimes_R G_2)^* \cong G_1^* \otimes_R G_2^*.$$

■

Dowód: Dowód pierwszej części stwierdzenia stanowi prostą wariację na temat (dowodu) Stw. 41. Przejdziemy więc od razu do dowodu części drugiej, przy czym wobec symetrii (jakościowej niezmienniczości) zagadnienia względem transpozycji indeksów $(1, 2) \mapsto (2, 1)$ wystarczy rozpatrzyć niezależnie przypadek, w którym moduły pary (G_1, H_1) są wolne i skończenie generowane, oraz ten, w którym moduły pary (G_1, G_2) mają tę cechę. Zaczniemy od tego pierwszego. Niechaj $\{g_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1, M_1}}$ będzie bazą R -modułu G_1 , a $\{h_l^{(1)}\}_{l \in \overline{1, N_1}}$ bazą R -modułu H_1 . Wówczas bazą R -modułu $\text{Hom}_R(G_1, H_1)$ jest – w świetle Tw. 1.2.11 (patrz: Równ. (1.2.26)) – rodzina odwzorowań R -liniowych

$$\tau_{k,l}^{(1)} := \varepsilon(g_k^{(1)*} \otimes_R h_l^{(1)}), \quad (k, l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}.$$

Na mocy Stw. 48 dowolny tensor $\tau \in \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2)$ można zatem przedstawić (jednoznacznie) w postaci

$$\tau = \sum_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} \tau_{k,l}^{(1)} \otimes_R \chi^{k,l}, \quad \chi^{k,l} \in \text{Hom}_R(G_2, H_2),$$

warunek $\iota(\tau) = 0$ jest więc równoważny układowi tożsamości

$$\begin{aligned} \forall_{m \in \overline{1, M_1}} \forall_{g \in G_2} : 0_{H_1 \otimes_R H_2} &= \sum_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} \tau_{k,l}^{(1)}(g_m^{(1)}) \otimes_R \chi^{k,l}(g) \\ &= \sum_{l \in \overline{1, N_1}} h_l^{(1)} \otimes_R \chi^{m,l}(g), \end{aligned}$$

z których na podstawie tegoż Stw. 48 odczytujemy warunki

$$\forall_{(m,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} \forall_{g \in G_2} : \chi^{m,l}(g) = 0_{H_2}.$$

Z nich wyciągamy wniosek

$$\forall_{(m,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} : \chi^{m,l} = 0,$$

a dalej

$$\tau = 0,$$

co dowodzi injektywności ι w rozważanym przypadku. Na obecnym etapie wystarczy upewnić się o istnieniu stosownego (niekanonicznego) izomorfizmu między dziedziną i przeciwdziedziną ι , aby móc zanalizować bezpośrednio ten monomorfizm, podobnie jak w dowodzie Tw. 1.2.11. Czynimy to w rachunku wykorzystującym Tw. 1.2.10 oraz Stw. 44 (i wcześniejsze nasze rozważania, w tym Stw. 42), jak również [Sus13, Cor. 14] – oto więc z jednej strony

$$\begin{aligned} \iota_1 : \quad & \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ & \cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} R, \bigoplus_{l=1}^{N_1} R\right) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ & \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} \text{Hom}_R(R, R) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ & \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} R \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ & \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} (R \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2)) \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} \text{Hom}_R(G_2, H_2), \end{aligned}$$

a z drugiej

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2) & \cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} R \otimes_R G_2, \bigoplus_{l=1}^{N_1} R \otimes_R H_2\right) \\ & \cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} (R \otimes_R G_2), \bigoplus_{l=1}^{N_1} (R \otimes_R H_2)\right) \\ & \cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} G_2, \bigoplus_{l=1}^{N_1} H_2\right) \\ & \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} \text{Hom}_R(G_2, H_2). \end{aligned}$$

Jak łatwo widać, monomorfizm $\iota_2 \circ \iota \circ \iota_1^{-1}$ jest odwzorowaniem identycznościowym (w przyjętej notacji przeprowadza na siebie macierz odwzorowań R -liniowych $(\chi^{k,l})_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}}$), więc też ι jest izomorfizmem. Zauważmy, że dowiedziona część tezy twierdzenia uzasadnia (w połączeniu z Tw. 1.2.7) Równ. (1.2.31).

Na koniec zajmijmy się przypadkiem, kiedy to moduły G_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ są wolne i skończenie generowane. Wybierzmy w G_1 bazę jak w poprzedniej części dowodu, a w G_2 bazę $\{g_l^{(2)}\}_{l \in \overline{1, N_2}}$. Pokażemy najpierw, że homomorfizm ι jest surjektywny. W tym celu rozważmy odwzorowanie R -liniowe $\chi \in \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$,

które na bazie $\{g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)}\}_{(k,l) \in \overline{1, N_1} \times \overline{1, N_2}}$ dziedziny przyjmuje postać

$$(1.2.32) \quad \chi(g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)}) = \sum_{(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2} r_{kl}(h_1, h_2) \triangleright_{\otimes} (h_1 \otimes_R h_2)$$

dla pewnych $r_{kl}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{R}_0(R; H_1 \times H_2)$. Postępując analogicznie jak w dowodzie Tw. 1.2.11, zdefiniujemy odwzorowania $\chi_{(k, h_\alpha)} \in \text{Hom}_R(G_\alpha, H_\alpha)$ indeksowane elementami zbioru $\overline{1, N_\alpha} \times H_\alpha \ni (k, h_\alpha)$ i będące jedynymi R -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\forall_{l \in \overline{1, N_\alpha}} : \chi_{(k, h_\alpha)}(g_l^{(A)}) := \delta_{l, k}^Z \triangleright h_\alpha.$$

Ustalwszy dowolnie rozkład tensora $\chi(g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)})$, wprowadźmy oznaczenia

$$\forall_{(k, l, h_1, h_2) \in \overline{1, N_1} \times \overline{1, N_2} \times H_1 \times H_2} : r(\chi_{(k, h_1)}, \chi_{(l, h_2)}) := r_{kl}(h_1, h_2).$$

Łatwo widać, że obrazem tensora

$$\gamma(\chi) := \sum_{(k, l, h_1, h_2) \in \overline{1, N_1} \times \overline{1, N_2} \times H_1 \times H_2} r(\chi_{(k, h_1)}, \chi_{(l, h_2)}) \triangleright_{\otimes} (\chi_{(k, h_1)} \otimes_R \chi_{(l, h_2)})$$

(suma w jego definicji jest skończona w konsekwencji skończoności N_A oraz nośnika $r_{kl}(\cdot, \cdot)$) względem homomorfizmu ι jest homomorfizm χ określony w Równ. (1.2.32). Konstatujemy więc, że ι jest epimorfizmem, a ponieważ na mocy Równ. (1.2.31) i Tw. 1.2.8 oraz innych przywoływanych wcześniej (s)twierdzeń (w tym Tw. 1.2.7) istnieje (kanoniczny) izomorfizm

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) &\cong (G_1^* \otimes_R H_1) \otimes_R (G_2^* \otimes_R H_2) \\ &\cong (G_1^* \otimes_R G_2^*) \otimes_R (H_1 \otimes_R H_2) \\ &\cong (G_1 \otimes_R G_2)^* \otimes_R (H_1 \otimes_R H_2) \\ &\cong \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2), \end{aligned}$$

przeto z całą pewnością ι jest izomorfizmem. □

I wreszcie na zakończenie części naszej dyskusji poświęconej strukturze modułów tensorowych nad pierścieniem przemiennym opiszemy – tytułem ilustracji zastosowań konstrukcji iloczynu tensorowego modułów – kanoniczną relację między modułami nad pierścieniami liczbowymi o szczególnym znaczeniu w modelowaniu zjawisk, tj. \mathbb{R} , \mathbb{C} i \mathbb{H} .

DEFINICJA 45. Przyjmijmy zapis Def. 41 i 44 oraz Przykł. 6 (2) i 29 (4). Wyposaźmy pierścienie $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}$ oraz $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^{\times 4}$ w naturalną strukturę przestrzeni \mathbb{R} -liniowych, opisaną w Przykł. 11 (10). **Kompleksyfikacja** rzeczywistej przestrzeni wektorowej to functor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

o składowej obiektowej

$$(1.2.33) \quad \begin{aligned} &\text{Obj } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \\ &: ((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V) \longmapsto ((V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, +_{\otimes}, P_{\otimes}, \bullet \mapsto 0_{\otimes}), \ell_V^{\mathbb{C}}), \end{aligned}$$

przyporządkowującej przestrzeni \mathbb{R} -liniowej V iloczyn tensorowy tej ostatniej z przestrzenią $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}$ nad \mathbb{R} wyposażony w działanie

$$\ell_V^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

określone na tensorach prostych formułą

$$\ell_V^{\mathbb{C}}(\tilde{z}, v \otimes_{\mathbb{R}} z) := v \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{z} \cdot_{\mathbb{C}} z),$$

oraz o składowej morfizmowej

$$(1.2.34) \quad \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} : \chi \longmapsto \chi \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}.$$

Kompleksyfikacja rzeczywistej przestrzeni kwadratowej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}} : \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

stanowiący rozszerzenie funktora określonego na kategorii przestrzeni \mathbb{R} -liniowych, tj. taki, który przestrzeni \mathbb{R} -liniowej będącej nośnikiem struktury kwadratowej przyporządkowuje jej kompleksyfikację w rozumieniu Równ. (1.2.33), a izometrii między przestrzeniami – jej kompleksyfikację w rozumieniu Równ. (1.2.34), przy czym istotą rozszerzenia jest odwzorowanie formy kwadratowej $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ w formę kwadratową $Q^{\mathbb{C}} : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ zadaną na tensorach prostych wzorem

$$\forall_{(v,z) \in V \times \mathbb{C}} : Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) := J_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \cdot z^2.$$

Kwaternionifikacja rzeczywistej przestrzeni wektorowej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{H}} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}$$

o składowej obiektowej

$$\text{Obj } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}$$

(1.2.35)

$$: ((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V) \longmapsto ((V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}, +_{\otimes}, P_{\otimes}, \bullet \longmapsto 0_{\otimes}), \wp_V^{\mathbb{H}}),$$

przyporządkowującej przestrzeni \mathbb{R} -liniowej V iloczyn tensorowy tej ostatniej z przestrzenią $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^{\times 4}$ nad \mathbb{R} wyposażony w (prawostronne) działanie

$$\wp_V^{\mathbb{H}} : (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \times \mathbb{H} \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$$

określone na tensorach prostych formułą

$$\wp_V^{\mathbb{H}}(v \otimes_{\mathbb{R}} q, \tilde{q}) := v \otimes_{\mathbb{R}} (q \cdot_{\mathbb{H}} \tilde{q}),$$

oraz o składowej morfizmowej

$$(1.2.36) \quad \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}} : \chi \longmapsto \chi \otimes \text{id}_{\mathbb{H}}.$$

Jako że kwaterniony są pierścieniem z dzieleniem, (prawe¹¹) moduły nad tym pierścieniem (nieodzwonnie wolne) określa się mianem **kwaternionowych przestrzeni wektorowych**. ▲

Na marginesie powyższych rozważań warto wspomnieć o istnieniu wygodnej alternatywy dla standardowej definicji zespolonej oraz kwaternionowej przestrzeni wektorowej, którą opisuje

¹¹Wybór ten jest kwestią konwencji – w tej przyjętej przez nas odwzorowaniami \mathbb{H} -liniowymi przestrzeni modelowych $\mathbb{H}^{\times n}$, $n \in \mathbb{N}$ stają się macierze o współczynnikach kwaternionowych obliczające się na wektorach w standardowy sposób, tj. z lewej strony.

STWIERDZENIE 54. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz Przykł. 6 (2) i 29 (4). Niechaj $(V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V)$ będzie grupą przemenną. Poniższe dwa zdania są wzajem równoważne:

- (C1) na V określone jest działanie \mathbb{C} , które czyni z V przestrzeń wektorową nad \mathbb{C} ;
(C2) na V określone jest działanie \mathbb{R} , które czyni z V przestrzeń wektorową nad \mathbb{R} , przy czym istnieje endomorfizm $I \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o własności

$$(1.2.37) \quad I \circ I = -\text{id}_V,$$

zwany **strukturą zespoloną** na V .

To samo dotyczy poniższych dwóch zdań:

- (H1) na V określone jest działanie \mathbb{H} , które czyni z V kwaternionową przestrzeń wektorową;
(H2) na V określone jest działanie \mathbb{R} , które czyni z V przestrzeń wektorową nad \mathbb{R} , przy czym istnieje trójka endomorfizmów $I, J, K \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o własnościach

$$(1.2.38) \quad I \circ I = J \circ J = K \circ K = -\text{id}_V, \quad I \circ J = K,$$

zwanych **strukturą kwaternionową** na V , które przesądzają o tym, że endomorfizmy I, J, K spełniają algebrę (2.1.3).

■

Dowód: Przeprowadzimy dowód równoważności orzeczeń dotyczących struktury \mathbb{C} -liniowej. Dowód równoważności orzeczeń dotyczących struktury \mathbb{H} -liniowej jest w pełni analogiczny i stanowi elementarne ćwiczenie, które pozostawiamy do wykonania Czytelnikowi.

- (C1) \Rightarrow (C2) Działanie $\ell : \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ indukuje działanie $\ell^{\mathbb{R}} := \ell_{j_{\mathbb{R}(\cdot)}} : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, a nadto wyróżnia endomorfizm $I := \ell_{(0,1)} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o pożądanej własności. Istotnie,

$$\forall_{(r,v) \in \mathbb{R} \times V} : I \circ \ell_r^{\mathbb{R}}(v) \equiv \ell_{(0,1)} \circ \ell_{(r,0)}(v) = \ell_{(0,r)}(v) = \ell_{(r,0)} \circ \ell_{(0,1)}(v) \equiv \ell_r^{\mathbb{R}} \circ I(v),$$

$$I \circ I \equiv \ell_{(0,1)} \circ \ell_{(0,1)} = \ell_{(0,1)^2} = \ell_{-(1,0)} = -\text{id}_V.$$

- (C1) \Leftarrow (C2) Działanie $\ell : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ wraz z wyróżnionym endomorfizmem $I \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ o własności (1.2.37) pozwalają zdefiniować odwzorowanie

$$\ell^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times V \rightarrow V : ((x, y), v) \mapsto \ell_x(v) +_V I \circ \ell_y(v),$$

którego rozdzielność względem $+_V$ i $+_{\mathbb{C}}$ jest oczywista i które ponadto spełnia – dla dowolnych $((x_1, y_1), (x_2, y_2), v) \in \mathbb{C}^{\times 2} \times V$ – warunek

$$\begin{aligned} \ell_{(x_1, y_1) \circ_{\mathbb{C}} (x_2, y_2)}^{\mathbb{C}}(v) &= \ell_{(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)}^{\mathbb{C}}(v) = \ell_{x_1 x_2 - y_1 y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_1 y_2 + x_2 y_1}(v) \\ &= \ell_{x_1 x_2}(v) +_V P_V \circ \ell_{y_1 y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_1 y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_2 y_1}(v) \\ &= \ell_{x_1} \circ \ell_{x_2}(v) +_V (I \circ \ell_{y_1}) \circ (I \circ \ell_{y_2})(v) +_V \ell_{x_1} \circ (I \circ \ell_{y_2})(v) \\ &\quad +_V (I \circ \ell_{y_1}) \circ \ell_{x_2}(v) \equiv \ell_{(x_1, y_1)}^{\mathbb{C}} \circ \ell_{(x_2, y_2)}^{\mathbb{C}}(v). \end{aligned}$$

□

Powyższa alternatywa okazuje się być przydatną m.in. w dyskusji uprzywilejowanej (w istocie wyjątkowej) pozycji, jaką pośród hilbertowskich realizacji algebr zdań (logicznych) reprezentujących – w duchu teorii Pirona – wyniki doświadczeń elementarnych zajmują zespolone przestrzenie wektorowe. Znajdziemy dla niej także nieco bardziej elementarne zastosowanie w kontekście teorii reprezentacji algebr Clifforda.

W konkretnych sytuacjach (w szczególności w kontekście teorii reprezentacji algebr własnie) wygodną bywa logika odmienna, w której punktem wyjścia do dalszych rozważań algebraicznych jest istnienie struktury zespolonej, a przedmiotem poszukiwań staje się struktura rzeczywista wzgl. kwaternionowa.

DEFINICJA 46. Przyjmijmy zapis Def. 15 i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{C} . Odwzorowanie $\varepsilon : V \curvearrowright$ określamy mianem **struktury rzeczywistej**, jeśli spełnione są następujące warunki:

(SR1) ε jest **odwzorowaniem anty- \mathbb{C} -liniowym**, tj.

$$\forall (\lambda, v) \in \mathbb{C} \times V : \varepsilon(\lambda \triangleright v) = \bar{\lambda} \triangleright \varepsilon(v);$$

(SR2) $\varepsilon^2 = \text{id}_V$.

Podobnie, odwzorowanie $J : V \curvearrowright$ określamy mianem **struktury kwaternionowej**, jeśli spełnione są następujące warunki:

(SK1) J jest odwzorowaniem anty- \mathbb{C} -liniowym;

(SK2) $J^2 = -\text{id}_V$.

▲

Formalne podobieństwo obu par warunków maskuje istotną różnicę ich znaczeń, o ile bowiem pierwszy układ w istocie określa operację sprzężenia zespolonego i pozwala wyodrębnić podprzestrzeń, której kompleksyfikacja odtwarza V , o tyle drugi układ pozwala określić działanie pierścienia \mathbb{H} . Obserwację tę precyzuje

STWIERDZENIE 55. *Przyjmijmy zapis Def. 45 oraz 46 i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{C} . Poniższe dwa zdania są wzajem równoważne:*

(R1) *na V jest określona struktura rzeczywista ε ;*

(R2) *w V istnieje podprzestrzeń \mathbb{R} -liniowa V_+ (będąca podzbiorem względem struktury \mathbb{C} -liniowej) o własnościach*

$$V = V_+ +_V (0, 1) \triangleright V_+ \quad \wedge \quad V_+ \cap (0, 1) \triangleright V_+ = \{0_V\},$$

z których wynika istnienie kanonicznego izomorfizmu przestrzeni \mathbb{C} -liniowych

$$V_+^{\mathbb{C}} \cong V.$$

To samo dotyczy poniższych dwóch zdań:

(K1) *na V jest określona struktura kwaternionowa J ;*

(K2) *na V określone jest działanie \mathbb{H} , które czyni z V kwaternionową przestrzeń wektorową.*

■

Dowód:

(R1) \Rightarrow (R2) Niechaj ε będzie strukturą rzeczywistą na V , a wtedy $\text{Sp}(\varepsilon) \subset \{-1, 1\}$. Zdefiniujmy odwzorowania

$$P_{\pm} := \frac{1}{2} \triangleright (\text{id}_V \pm \varepsilon)$$

i oznaczmy symbolem V_{\pm} zbiór wszystkich wektorów własnych ε odpowiadających wartości własnej ± 1 . Oba zbiory są niepuste, oto bowiem dla dowolnego wektora $v \in V$ zachodzi $v_{\pm} := P_{\pm}(v) \in V_{\pm}$. Ponadto każdy wektor $v \in V$ możemy zapisać w postaci $v \equiv P_+(v) +_V P_-(v)$, zatem $V = V_+ +_V V_-$, przy czym – rzecz jasna – $v = \varepsilon(v) = -v$ jest równoznaczne z $v = 0_V$, więc $V_+ \cap V_- = \{0_V\}$. Anty- \mathbb{C} -liniowość ε prowadzi do tożsamości $\varepsilon((0, 1) \triangleright v) = \overline{(0, 1)} \triangleright \varepsilon(v) = -(0, 1) \triangleright \varepsilon(v)$, która implikuje relacje $(0, 1) \triangleright V_+ \subset V_-$ oraz $(0, 1) \triangleright V_- \subset V_+$, z tych zaś wynika tożsamość zbiorów $V_- = (0, 1) \triangleright V_+$. Mamy też oczywistą inkluzję $\forall r \in \mathbb{R} : r \triangleright V_{\pm} \subset V_{\pm}$. Możemy teraz wypisać izomorfizm

$$\iota : V_+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} V$$

w jawnej i jawnie \mathbb{C} -liniowej postaci (na tensorach prostych):

$$\iota(v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (x, y)) := (x, y) \triangleright v_+.$$

Jego odwrotnością jest odwzorowanie

$$\iota^{-1} : V \xrightarrow{\cong} V_+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : v \longmapsto P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) +_V (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1).$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \iota^{-1} \circ \iota(v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (x, y)) &= \frac{1}{2} \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (x, -y) \triangleright \varepsilon(v_+)) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V \frac{1}{2} (0, -1) \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (-x, y) \triangleright \varepsilon(v_+)) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= \frac{1}{2} \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (x, -y) \triangleright v_+) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V \frac{1}{2} (0, -1) \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (-x, y) \triangleright v_+) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= (x, 0) \triangleright v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) +_V (y, 0) \triangleright v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) = v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) \end{aligned}$$

oraz

$$\iota \circ \iota^{-1}(v) = (1, 0) \triangleright P_+(v) +_V (0, 1) \triangleright ((0, -1) \triangleright P_-(v)) = (P_+ + P_-)(v) = v.$$

Bez trudu przekonujemy się także o \mathbb{C} -liniowości ι^{-1} ,

$$\begin{aligned} \iota^{-1}((x, y) \triangleright v) &= \frac{1}{2} \triangleright ((x, y) \triangleright v +_V (x, -y) \triangleright \varepsilon(v)) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V \frac{1}{2} (0, -1) \triangleright ((x, y) \triangleright v +_V (-x, y) \triangleright \varepsilon(v)) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= (x, 0) \triangleright P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) +_V (-y, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V (x, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) +_V (y, 0) \triangleright P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) +_V (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (-y, x) \\ &= P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) \cdot_{\mathbb{C}} (1, 0) +_V (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) \cdot_{\mathbb{C}} (0, 1) \end{aligned}$$

$$\equiv (x, y) \triangleright \iota^{-1}(v).$$

□

3. Produkt włóknisty i koprodukt kowłóknisty

Wybór omówionych dotychczas struktur uniwersalnych był podyktowany wolą oswojenia konstrukcji uniwersalnej w odwołaniu do pojęć dobrze znanych z podstawowego kursu algebry liniowej. Te dość szczególne struktury odgrywają, rzecz jasna, nader istotną rolę w (lokalnym) modelowaniu zjawisk, lecz ich analiza – w nawiązaniu do znanych konstrukcji geometrycznych najprostszych modeli fizycznych – stanowi ledwie pierwszą poszlakę wskazującą na powszechność i przydatność struktur uniwersalnych w matematycznym modelowaniu zjawisk. W dalszej części kursu poznamy zarówno te spośród nich (jak np. algebry Clifforda), które korzystają z dodatkowej, umotywowanej fizycznie i stosownie okiełznanej na kursie algebry liniowej, struktury w wyjściowej kategorii \mathcal{C}_1 (w notacji Def. 29), wzgl. odwołują się wprost (jak np. algebra tensorowa) do konstrukcji uniwersalnych przedstawionych w poprzednich rozdziałach, jak i – nieco później – te, których definicje są z jednej strony strukturalnie dużo surowsze, ale też – ze strony drugiej – ich fizycznie istotne inkarnacje są mniej oczywiste i stają się dostępne dopiero z pewnego wyższego poziomu wyrafinowania formalnego, nie tylko porządkując starą wiedzę, ale też otwierając drogę do twórczych uogólnień na nowe konteksty poznawcze (jak np. kategoryfikacja symetrii oraz pozariemannowska geometria T-foldów). Tytułem przygotowania gruntu pod przyszłą dyskusję tych ostatnich poprzez stworzenie stosownego algebraicznego pola skojarzeniowego przedstawimy poniżej zwięźle kilka z nich. Zaczniemy od wprowadzenia pojęć pomocniczych

DEFINICJA 47. Przyjmijmy zapis Def. 27 oraz Przykł. 15 (5) i ustalmy (dowolnie) kategorię \mathcal{C} . **Powłoką w \mathcal{C}** nazywamy dowolny diagram $\hat{F} : \{1, 2\} \rightarrow \mathcal{C}$ w \mathcal{C} modelowany na rozpięciu $\{1, 2\}$ zbioru dwuelementowego $\{1, 2\}$, reprezentowany przez diagram (w sensie graficznym) postaci

$$\begin{array}{ccc} & \hat{F}(\bullet) & \\ \hat{F}(\bullet \rightarrow 1) \swarrow & & \searrow \hat{F}(\bullet \rightarrow 2) \\ \hat{F}(1) & & \hat{F}(2) \end{array} \quad \equiv \quad \text{sp}(\hat{F}(\bullet), (\hat{F}(\bullet \rightarrow 1), \hat{F}(\bullet \rightarrow 2))).$$

Kopowłoką w \mathcal{C} nazywamy dowolny diagram $\check{F} : \{1, 2\} \rightarrow \mathcal{C}$ w \mathcal{C} modelowany na korozpięciu zbioru dwuelementowego $\{1, 2\}$, reprezentowany przez diagram (w sensie graficznym) postaci

$$\begin{array}{ccc} \check{F}(1) & & \check{F}(2) \\ \check{F}(1 \rightarrow \bullet) \searrow & & \swarrow \check{F}(2 \rightarrow \bullet) \\ & \check{F}(\bullet) & \end{array} \quad \equiv \quad \text{cosp}((\check{F}(1 \rightarrow \bullet), \check{F}(2 \rightarrow \bullet)), \check{F}(\bullet)).$$

Z dowolną powłoką \hat{F} w \mathcal{C} stwarzamy podkategorię $\text{Toit}(\hat{F}) \subset \mathcal{C}^{\{1, 2\}}$ w kategorii diagramów w \mathcal{C} modelowanych na korozpięciu $\{1, 2\}$ zbioru $\{1, 2\}$

utworzoną przez kopowłoki $\check{R} : \{1, 2\} \rightarrow \mathcal{C}$ postaci

$$\begin{array}{ccc} \check{R}(1) \equiv \hat{F}(1) & & \check{R}(2) \equiv \hat{F}(2) \\ & \searrow \check{R}(1 \rightarrow \bullet) \quad \swarrow \check{R}(2 \rightarrow \bullet) & \\ & \check{R}(\bullet) & \end{array},$$

które uzupełniają \hat{F} do diagramów przemiennych

$$\begin{array}{ccc} & \hat{F}(\bullet) & \\ \hat{F}(\bullet \rightarrow 1) \swarrow & & \searrow \hat{F}(\bullet \rightarrow 2) \\ \check{R}(1) \equiv \hat{F}(1) & & \check{R}(2) \equiv \hat{F}(2) \\ \check{R}(1 \rightarrow \bullet) \searrow & & \swarrow \check{R}(2 \rightarrow \bullet) \\ & \check{R}(\bullet) & \end{array}$$

$$\equiv \text{cosp}((\check{R}(1 \rightarrow \bullet), \check{R}(2 \rightarrow \bullet)), \check{R}(\bullet)) \circ_{(\hat{F}(1), \hat{F}(2))} \text{sp}(\hat{F}(\bullet), (\hat{F}(\bullet \rightarrow 1), \hat{F}(\bullet \rightarrow 2))),$$

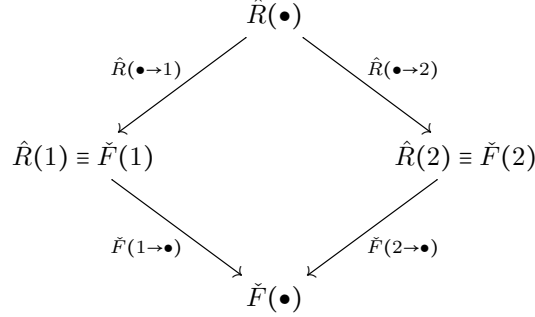
wraz z transformacjami naturalnymi $\check{\eta} : \check{R}_1 \Longrightarrow \check{R}_2$ między nimi o własności $\check{\eta}_\alpha = \text{id}_{\hat{F}(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2\}$, naturalnie utożsamialnymi z morfizmami $\check{\eta}_\bullet$ w \mathcal{C} , które czynią przemiennymi poniższe diagramy

$$\begin{array}{ccc} & \check{R}_1(\bullet) & \\ \check{R}_1(1 \rightarrow \bullet) \swarrow & & \swarrow \check{R}_1(2 \rightarrow \bullet) \\ \hat{F}(1) & & \hat{F}(2) \\ \check{R}_2(1 \rightarrow \bullet) \searrow & \check{\eta}_\bullet & \swarrow \check{R}_2(2 \rightarrow \bullet) \\ & \check{R}_2(\bullet) & \end{array}.$$

Analogicznie, z dowolną kopowłoką \check{F} w \mathcal{C} stowarzyszymy podkategorię $\text{Plaf}(\check{F}) \subset \mathcal{C}^{\{1, 2\}}$ w kategorii diagramów w \mathcal{C} modelowanych na rozpięciu $\{1, 2\}$ zbioru $\{1, 2\}$ utworzoną przez powłoki $\hat{R} : \{1, 2\} \rightarrow \mathcal{C}$ postaci

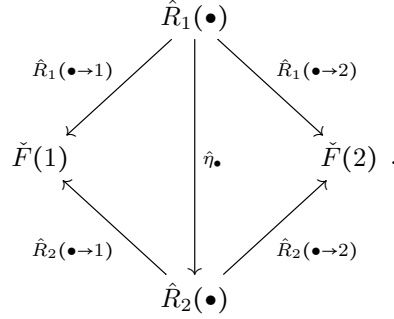
$$\begin{array}{ccc} & \hat{R}(\bullet) & \\ \hat{R}(\bullet \rightarrow 1) \swarrow & & \searrow \hat{R}(\bullet \rightarrow 2) \\ \hat{R}(1) = \check{F}(1) & & \hat{R}(2) = \check{F}(2) \end{array},$$

które uzupełniają \hat{F} do diagramów przemiennych



$$\equiv \text{cosp}((\check{F}(1 \rightarrow \bullet), \check{F}(2 \rightarrow \bullet)), \check{F}(\bullet)) \circ_{(\check{F}(1), \check{F}(2))} \text{sp}(\hat{R}(\bullet), (\hat{R}(\bullet \rightarrow 1), \hat{R}(\bullet \rightarrow 2))),$$

wraz z transformacjami naturalnymi $\hat{\eta}_\bullet : \hat{R}_1 \implies \hat{R}_2$ między nimi o własności $\hat{\eta}_\alpha = \text{id}_{\check{F}(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2\}$, naturalnie utożsamialnymi z morfizmami $\hat{\eta}_\bullet$ w \mathcal{C} , które czynią przemiennymi poniższe diagramy



▲

Możemy już teraz sformułować

DEFINICJA 48. Przyjmijmy zapis Def. 29 i 47. **Produkt włóknisty obiektów** $(X_1, X_2) \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times 2}$ **nad obiektem** $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$ to struktura terminalna

$$(X_1 \times_Y X_2, (\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)), \quad \widehat{\xi}_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \times_Y X_2, X_\alpha), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

dla warunku

$$\begin{aligned}
 & P_{(X_1, X_2); \text{id}_{\mathcal{C}^{\times 2}}, \Delta_{\mathcal{C}, \{1, 2\}}}(Z, (\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2)) \\
 &= \text{„powłoka } \text{sp}(Z, (\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2)) \text{ domyka kopowłokę } \text{cosp}((\check{v}_1, \check{v}_2), Y) \\
 & \text{ do diagramu przemiennego } \text{cosp}((\check{v}_1, \check{v}_2), Y) \circ_{(X_1, X_2)} \text{sp}(Z, (\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2))\text{”}
 \end{aligned}$$

na $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$. Innymi słowy, produkt włóknisty jest obiektem terminalnym w kategorii $\text{Plaf}(\check{F}) \subset \mathcal{C}^{\{1, 2\}}$ dla kopowłoki $\check{F} : \{1, 2\} \longrightarrow \mathcal{C}$ spełniającej warunki $\check{F}(\alpha) = X_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Kategorię, w której istnieją produkty włókniste obiektów, określamy mianem **kategorii z produktami włóknistymi**.

Koproduct kowłóknisty obiektów $(X_1, X_2) \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times 2}$ **względem obiektu** $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$ to struktura inicjalna

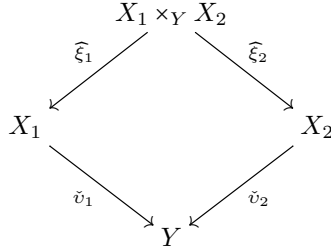
$$(X_1 \sqcup_Y X_2, (\check{\xi}_1, \check{\xi}_2)), \quad \check{\xi}_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\alpha, X_1 \sqcup_Y X_2), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

dla warunku

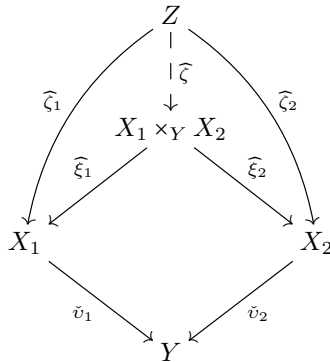
$$\begin{aligned}
& P_{(X_1, X_2); \text{id}_{\mathcal{C}^{\times 2}}, \Delta_{\mathcal{C}, \{1, 2\}}} (Z, (\check{\zeta}_1, \check{\zeta}_2)) \\
&= \text{„kopwłoka } \text{cosp}((\check{\zeta}_1, \check{\zeta}_2), Z) \text{ domyka powłokę } \text{sp}(Y, (\check{v}_1, \check{v}_2)) \\
&\quad \text{do diagramu przemiennego } \text{cosp}((\check{\zeta}_1, \check{\zeta}_2), Z) \circ_{(X_1, X_2)} \text{sp}(Y, (\check{v}_1, \check{v}_2))\text{”}
\end{aligned}$$

na $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$. Innymi słowy, koprodukt kowłóknisty jest obiektem inicjalnym w kategorii $\text{Toit}(\hat{F}) \subset \mathcal{C}^{\{1, 2\}}$ dla kopwłoki $\hat{F} : \{1, 2\} \rightarrow \mathcal{C}$ spełniającej warunki $\hat{F}(\alpha) = X_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Kategorię, w której istnieją koprodukty kowłókniste obiektów, określamy mianem **kategorii z koproduktami kowłóknistymi**. ▲

UWAGA 8. Rozłożymy powyższą definicję na czynniki pierwsze. Oto więc produkt włóknisty $(X_1, X_2) \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times 2}$ nad $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$ to w istocie trójka $(X_1 \times_Y X_2, (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2))$ złożona z obiektu $X_1 \times_Y X_2 \in \text{Obj } \mathcal{C}$ oraz pary morfizmów $\hat{\xi}_\alpha : X_1 \times_Y X_2 \rightarrow X_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ w \mathcal{C} o własności wyrażonej przez diagram przemienny

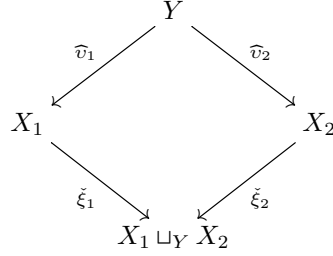


i taka, że dla każdej innej trójki $(Z, (\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2))$ tego typu istnieje dokładnie jeden morfizm $\widehat{\zeta} : Z \rightarrow X_1 \times_Y X_2$, który czyni poniższy diagram przemiennym:

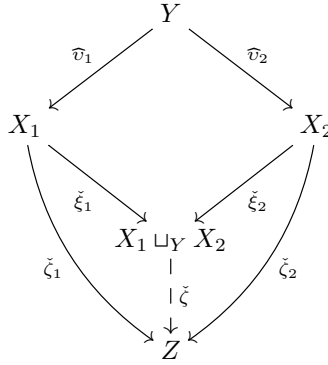


Analogicznie, koprodukt kowłóknisty $(X_1, X_2) \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times 2}$ względem $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$ to trójka $(X_1 \sqcup_Y X_2, (\check{\xi}_1, \check{\xi}_2))$ złożona z obiektu $X_1 \sqcup_Y X_2 \in \text{Obj } \mathcal{C}$ oraz pary morfizmów $\check{\xi}_\alpha : X_\alpha \rightarrow X_1 \sqcup_Y X_2$, $\alpha \in \{1, 2\}$ w \mathcal{C} o własności wyrażonej przez

diagram przemienny



i taka, że dla każdej innej trójki $(Z, (\check{\zeta}_1, \check{\zeta}_2))$ tego typu istnieje dokładnie jeden morfizm $\check{\zeta} : X_1 \sqcup_Y X_2 \rightarrow Z$, który czyni poniższy diagram przemiennym:



Naturalnym uogólnieniem przedstawionych konstrukcji jest

DEFINICJA 49. Przyjmijmy zapis Def. 47 oraz 29 i ustalmy (dowolnie) $N \in \mathbb{N}^\times$. N -**lokrotny produkt włóknisty obiektów** $(X_1, X_2, \dots, X_N) \equiv X_{(N)} \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times N}$ **nad obiektem** $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}) \equiv Y_{(N-1)} \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times (N-1)}$ to kolekcja

$$(X_{12\dots N}^\times, \widehat{\xi}_{(N)}) \equiv (X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} \cdots \times_{Y_{N-1}} X_N, (\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2, \dots, \widehat{\xi}_N)) \in \text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Hom } \mathcal{C}^{\times N},$$

$$\widehat{\xi}_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{12\dots N}^\times, X_i), \quad i \in \overline{1, N},$$

którą tworzą struktury terminalne

$$(X_{12\dots N}^\times, (\widehat{\xi}_j, \widehat{\xi}_{j+1})), \quad j \in \overline{1, N-1}$$

dla warunków

$$P_{X_{(N)}; \text{id}_{\mathcal{C}^{\times 2}}, \Delta_{\mathcal{C}, \{j, j+1\}}}(Z, (\widehat{\zeta}_j, \widehat{\zeta}_{j+1}))$$

$$= \text{„powłoka } \text{sp}(Z, (\widehat{\zeta}_j, \widehat{\zeta}_{j+1})) \text{ domyka kopowłokę } \text{cosp}((\widehat{v}_{j,2}, \widehat{v}_{j+1,1}), Y_j) \text{ do diagramu przemiennego } \text{cosp}((\widehat{v}_{j,2}, \widehat{v}_{j+1,1}), Y_j) \circ_{X_{(N)}} \text{sp}(Z, (\widehat{\zeta}_j, \widehat{\zeta}_{j+1}))\text{”}$$

na $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$.

N -**krotny koprodukt kowłóknisty obiektów** $X_{(N)}$ **względem obiektu** $Y_{(N-1)}$ to kolekcja

$$(X_{12\dots N}^\sqcup, \check{\xi}_{(N)}) \equiv (X_1 \sqcup_{Y_1} X_2 \sqcup_{Y_2} \cdots \sqcup_{Y_{N-1}} X_N, (\check{\xi}_1, \check{\xi}_2, \dots, \check{\xi}_N)) \in \text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Hom } \mathcal{C}^{\times N},$$

$$\check{\xi}_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_{12\dots N}^\sqcup), \quad i \in \overline{1, N},$$

którą tworzą struktury inicjalne

$$(X_{12\dots N}^{\sqcup}, (\check{\xi}_j, \check{\xi}_{j+1})), \quad j \in \overline{1, N-1}$$

dla warunków

$$\begin{aligned} & P_{X_{12\dots N}^{\sqcup}; \text{id}_{\mathcal{C} \times 2}, \Delta_{\mathcal{C}, \{j, j+1\}}}(Z, (\check{\zeta}_j, \check{\zeta}_{j+1})) \\ &= \text{„kopułoka } \text{cosp}((\check{\zeta}_j, \check{\zeta}_{j+1}), Z) \text{ domyka powłokę } \text{sp}(Y_j, (\widehat{v}_{j,2}, \widehat{v}_{j+1,1})) \\ & \text{ do diagramu przemienneo } \text{cosp}((\check{\zeta}_j, \check{\zeta}_{j+1}), Z) \circ_{X_{12\dots N}^{\sqcup}} \text{sp}(Y_j, (\widehat{v}_{j,2}, \widehat{v}_{j+1,1})) \text{”} \end{aligned}$$

na $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$.

▲

Na pierwszy rzut oka zdefiniowane powyżej struktury wyglądają onieśmielająco i ezoterycznie. Ażeby rozproszyć to powierzchowne wrażenie, jeszcze zanim przejdziemy do ich wykorzystania w kontekście dalszych naszych rozważań, zilustrujemy poniżej – trochę awansem względem logiki i zawartości merytorycznej wykładu – oba pojęcia na przykładach doskonale znanych, a przy tym pożytecznych konstrukcji teoriomnogościowych i geometrycznych, które pozwalają nam stwierdzić – w formie parafrazy eksklamacji Pana Jourdain’a z komedii Jana Chrzciciela Poquelin’a (zw. Molière’em) pt. „Le Bourgeois gentilhomme” –

il y a plusieurs années que l'on dit de la prose sans que l'on en sut rien!

A oto i

PRZYKŁAD(Y) 21.

- (1) **Produkt włóknisty zbiorów** (X_1, X_2) **nad zbiorem** Y określony przez parę odwzorowań $v_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$, czyli zbiór

$$X_1 \times_Y X_2 = \{ (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid v_1(x_1) = v_2(x_2) \},$$

wraz z parą ograniczeń rzutów kanonicznych

$$\widehat{\xi}_\alpha \equiv \text{pr}_\alpha \upharpoonright_{X_1 \times_Y X_2} : X_1 \times_Y X_2 \rightarrow X_\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

jest produktem włóknistym w kategorii **Set**. Istotnie, rozważmy dowolny zbiór Z , na którym są określone odwzorowania $\widehat{\zeta}_\alpha : Z \rightarrow X_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o własności $\check{v}_1 \circ \widehat{\zeta}_1 = \check{v}_2 \circ \widehat{\zeta}_2$. Jako że $(X_1 \times X_2, \text{pr.})$ jest produktem (czyli strukturą terminalną) w kategorii **Set**, przeto istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\zeta : Z \rightarrow X_1 \times X_2$ o własności $\text{pr}_\alpha \circ \zeta = \widehat{\zeta}_\alpha$, a ponieważ ta ostatnia implikuje równość $\check{v}_2 \circ \widehat{\xi}_2 \circ \zeta \equiv \check{v}_2 \circ \text{pr}_2 \circ \zeta = \check{v}_2 \circ \widehat{\zeta}_2 = \check{v}_1 \circ \widehat{\zeta}_1 = \check{v}_1 \circ \text{pr}_1 \circ \zeta \equiv \check{v}_1 \circ \widehat{\xi}_1 \circ \zeta$, zatem $\zeta(Z) \subset X_1 \times_Y X_2$. W szczególności gdy $X_2 \subset Y$ jest podzbiorem (kanonicznie) włożonym w Y przez odwzorowanie \check{v}_2 , to $\widehat{\xi}_1$ jest bijekcją $X_1 \times_Y X_2$ na poziomicy $\check{v}_1^{-1}(X_1)$, o odwrotności $\widehat{\xi}_1^{-1} : \check{v}_1^{-1}(X_1) \rightarrow X_1 \times_Y X_2 : x_1 \mapsto (x_1, \check{v}_1(x_1))$. Jeśli także $X_1 \subset Y$ jest podzbiorem (kanonicznie) włożonym w Y przez \check{v}_1 , to otrzymujemy tym sposobem bijekcję $X_1 \times_Y X_2 \cong X_1 \cap X_2$. Konstrukcja produktu włóknistego zbiorów znajduje swoje uogólnienie i szerokie zastosowanie w geometrii, a w szczególności w teorii wiązek włóknistych oraz geometryzacji wyższych klas kohomologii (pod postacią tzw. cofnięcia struktury).

- (2) **Koprodukt kowłóknisty zbiorów** (X_1, X_2) **względem zbioru** Y określony przez parę odwzorowań $\widehat{v}_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$, czyli zbiór

$$X_1 \sqcup_Y X_2 = (X_1 \sqcup X_2) / \sim_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$$

klas abstrakcji w sumie rozłącznej $X_1 \sqcup X_2$ względem **domknięcia równoważnościowego** $\sim_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$ relacji

$$\mathcal{R}_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)} = \{ ((\widehat{v}_1(y), 1), (\widehat{v}_2(y), 2)) \in (X_1 \sqcup X_2)^{\times 2} \mid y \in Y \}$$

(czyli minimalnej relacji równoważności zawierającej $\mathcal{R}_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$) wraz z parą odwzorowań

$$\check{\xi}_\alpha \equiv \pi_\sim \circ j_\alpha : X_\alpha \rightarrow X_1 \sqcup_Y X_2, \quad \alpha \in \{1, 2\},$$

będących złożeniami włożeń kanonicznych $j_\alpha : X_\alpha \rightarrow X_1 \sqcup X_2$ z rzutem kanonicznym $\pi_\sim : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow (X_1 \sqcup X_2) / \sim_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$, jest koproduktem kowłóknistym w kategorii **Set**. W rzeczy samej, niech Z będzie dowolnym zbiorem, dla którego są określone odwzorowania $\check{\zeta}_\alpha : X_\alpha \rightarrow Z$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o własności $\check{\zeta}_1 \circ \widehat{v}_1 = \check{\zeta}_2 \circ \widehat{v}_2$. Jako że $(X_1 \sqcup X_2, j_\cdot)$ jest koproduktem (czyli strukturą inicjalną) w kategorii **Set**, przeto istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\check{\zeta} : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow Z$ o własności $\check{\zeta} \circ j_\alpha = \check{\zeta}_\alpha$. Pozostaje upewnić się, że odwzorowanie to jest stałe na klasach abstrakcji relacji $\sim_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$. W tym celu przyjrzymy się bliżej procedurze domykania $\mathcal{R}_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$. Pierwszym krokiem jest tutaj dodanie do każdej z par $((\widehat{v}_1(y), 1), (\widehat{v}_2(y), 2))$ par $((\widehat{v}_1(y), 1), (\widehat{v}_1(y), 1)), ((\widehat{v}_2(y), 2), (\widehat{v}_2(y), 2))$ oraz $((\widehat{v}_2(y), 2), (\widehat{v}_1(y), 1))$ (uzwrotnienie i symetryzacja), przy czym oczywiście $\check{\zeta}$ przyjmuje tę samą wartość na każdej z nich. Ilekroć oba odwzorowania \widehat{v}_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ są iniektywne, to kończy dyskusję. Jeśli jednak któreś z nich – np. \widehat{v}_1 – jest nieiniektywne i $\widehat{v}_1(y') = \widehat{v}_1(y)$ dla $y' \neq y$, to wówczas musimy jeszcze dodać do powyższych pary $((\widehat{v}_1(y') = \widehat{v}_1(y), 1), (\widehat{v}_2(y'), 2))$, $((\widehat{v}_2(y'), 2), (\widehat{v}_2(y'), 2))$, $((\widehat{v}_2(y), 2), (\widehat{v}_2(y'), 2))$ oraz $((\widehat{v}_2(y'), 2), (\widehat{v}_2(y), 2))$, aby zapewnić przechodność domknięcia. I w tym jednak przypadku stwierdzamy stałość $\check{\zeta}$ na otrzymanych tym sposobem zbiorach, co ostatecznie doprowadza nas do przekonania, że $\check{\zeta}$ określa jednoznacznie poszukiwane odwzorowanie ζ o własności $\check{\zeta} = \zeta \circ \pi_\sim$. W szczególności, gdy $Y = X_1 \cap X_2$ i $\widehat{v}_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ są inkluzjami (włączeniami), to $X_1 \sqcup_Y X_2 \cong X_1 \sqcup X_2$ (kanonicznie). Powyższa konstrukcja koproduktu kowłóknistego w przypadku iniektywnych odwzorowań \widehat{v}_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ zstępuje do kategorii **Top** przestrzeni topologicznych z Def. 54 (zakładamy wtedy dodatkowo, że wszystkie rozważane odwzorowania są ciągłe, przy czym topologia na produkcie jest topologią ilorazową indukowaną przez topologię sumy rozłącznej na $X_1 \sqcup X_2$ wzdłuż rzutu π_\sim – patrz: Przykł. 24 (4)), a nawet do kategorii **TopMan** rozmaitości topologicznych z Def. 64 jako tzw. **suma spójna** (zwana też **sklejeniem**) wzdłuż Y . Odgrywa ona fundamentalną rolę w funktorialnym schemacie kwantowania geometrii zwanym topologiczną kwantową teorią pola, a szerzej – w topologii różniczkowej i teorii homologii.

✓

Przedstawione tu operacje na obiektach kategorii są w naturalny sposób dziedziczone przez klasy morfizmów tejże kategorii, o czym zaświadcza poniższe dwa stwierdzenia:

STWIERDZENIE 56. *Przyjmijmy zapis Def. 48 i niechaj*

$$\begin{array}{ccc}
 & X_1^\alpha \times_{Y^\alpha} X_2^\alpha & \\
 \xi_1^\alpha \swarrow & & \searrow \xi_2^\alpha \\
 X_1^\alpha & & X_2^\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\} \\
 v_1^\alpha \searrow & & \swarrow v_2^\alpha \\
 & Y^\alpha &
 \end{array}$$

będą dwoma produktami włóknistymi w \mathcal{C} nad odnośnymi obiektami Y^α . Jeżeli istnieją morfizmy $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^1, Y^2)$ oraz $\varphi_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\beta^1, X_\beta^2)$, $\beta \in \{1, 2\}$ spełniające warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc}
 X_\beta^1 & \xrightarrow{\varphi_\beta} & X_\beta^2 \\
 v_\beta^1 \downarrow & & \downarrow v_\beta^2 \\
 Y^1 & \xrightarrow{\varphi} & Y^2
 \end{array}, \quad \beta \in \{1, 2\},$$

to wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm $\varphi_1 \times_\varphi \varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1^1 \times_{Y^1} X_2^1, X_1^2 \times_{Y^2} X_2^2)$, który czyni poniższy diagram przemiennym

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1^1 & \xleftarrow{\xi_1^1} & X_1^1 \times_{Y^1} X_2^1 \\
 & & \downarrow v_1^1 & & \downarrow \xi_2^1 \\
 Y^1 & \xleftarrow{\varphi_1} & X_2^1 & & \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow v_2^1 & & \downarrow \xi_1^1 \\
 & & X_1^2 & \xleftarrow{\xi_1^2} & X_1^2 \times_{Y^2} X_2^2 \\
 & & \downarrow v_1^2 & & \downarrow \xi_2^2 \\
 Y^2 & \xleftarrow{\varphi_2} & X_2^2 & & \\
 & & \downarrow v_2^2 & &
 \end{array}$$

Morfizm ten określamy mianem **produktu włóknistego morfizmów** $(\varphi_1, \varphi_2) \in \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$ **nad morfizmem** φ .

Jeśli ponadto dany jest trzeci produkt włóknisty

$$\begin{array}{ccc}
 & X_1^3 \times_{Y^3} X_2^3 & \\
 \xi_1^3 \swarrow & & \searrow \xi_2^3 \\
 X_1^3 & & X_2^3 \\
 v_1^3 \searrow & & \swarrow v_2^3 \\
 & Y^3 &
 \end{array}$$

oraz morfizmy $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^2, Y^3)$ oraz $\tilde{\varphi}_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\beta^2, X_\beta^3)$, $\beta \in \{1, 2\}$ spełniające warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc}
 X_\beta^2 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\beta} & X_\beta^3 \\
 v_\beta^2 \downarrow & & \downarrow v_\beta^3 \\
 Y^2 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Y^3
 \end{array}, \quad \beta \in \{1, 2\},$$

to dla zdefiniowanego przez nie produktu włóknistego morfizmów $\tilde{\varphi}_1 \times_{\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi}_2$ oraz dla $\varphi_1 \times_\varphi \varphi_2$ zachodzi tożsamość

$$(\tilde{\varphi}_1 \times_{\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi}_2) \circ (\varphi_1 \times_\varphi \varphi_2) = (\tilde{\varphi}_1 \circ \varphi_1) \times_{\tilde{\varphi} \circ \varphi} (\tilde{\varphi}_2 \circ \varphi_2).$$

■

Dowód: Teza jest prostą konsekwencją terminalnej natury produktu włóknistego $(\tilde{X}_1 \times_Y \tilde{X}_2, (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2))$, oto bowiem powłoka $\text{sp}(X_1 \times_Y X_2, (\varphi_1 \circ \xi_1, \varphi_2 \circ \xi_2))$ domyka kopowłokę $\text{cosp}((\tilde{v}_1, \tilde{v}_2), Y)$ do diagramu przemienne wprost na mocy konstrukcji.

Aby przekonać się o słuszności reguły superpozycji produktów morfizmów, wystarczy złożyć odnośne sześciennie diagramy przemienne w jeden:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1^1 & \xleftarrow{\xi_1^1} & X_1^1 \times_{Y^1} X_2^1 \\
 & v_1^1 \swarrow & \downarrow & \searrow \xi_2^1 & \downarrow \varphi_1 \times \varphi_2 \\
 Y^1 & \xleftarrow{\varphi_1} & X_2^1 & & \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \\
 & v_1^2 \swarrow & X_1^2 & \xleftarrow{\xi_1^2} & X_1^2 \times_{Y^2} X_2^2 \\
 & \downarrow & \downarrow \varphi_2 & \searrow \xi_2^2 & \downarrow \tilde{\varphi}_1 \times \tilde{\varphi}_2 \\
 Y^2 & \xleftarrow{\tilde{\varphi}_1} & X_2^2 & & \\
 \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow \tilde{\varphi}_1 & & \downarrow \\
 & v_1^3 \swarrow & X_1^3 & \xleftarrow{\xi_1^3} & X_1^3 \times_{Y^3} X_2^3 \\
 & \downarrow & \downarrow \tilde{\varphi}_2 & \searrow \xi_2^3 & \\
 Y^3 & \xleftarrow{\tilde{\varphi}_2} & X_2^3 & & \\
 & & \downarrow v_2^3 & &
 \end{array}$$

a następnie zauważyć, że superpozycja morfizmów zaznaczonych na nim strzałkami o przerywanych promieniach spełnia warunki definiujące morfizm $(\tilde{\varphi}_1 \circ \varphi_1) \times_{\tilde{\varphi} \circ \varphi} (\tilde{\varphi}_2 \circ \varphi_2)$, co wobec jedyności tego ostatniego przesądza o prawdziwości reguły superpozycji. \square

oraz dualne w swej treści

STWIERDZENIE 57. *Przyjmijmy zapis Def. 48 i niechaj*

$$\begin{array}{ccc}
 & Y^\alpha & \\
 v_1^\alpha \swarrow & & \searrow v_2^\alpha \\
 X_1^\alpha & & X_2^\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\} \\
 \xi_1^\alpha \searrow & & \swarrow \xi_2^\alpha \\
 & X_1^\alpha \sqcup_{Y^\alpha} X_2^\alpha &
 \end{array}$$

będą dwoma koproduktami kowłóknistymi w \mathcal{C} względem odnośnych obiektów Y^α . Jeżeli istnieją morfizmy $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^1, Y^2)$ oraz $\varphi_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\beta^1, X_\beta^2)$, $\beta \in \{1, 2\}$

spełniające warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc}
 Y^1 & \xrightarrow{\varphi} & Y^2 \\
 v_\beta^1 \downarrow & & \downarrow v_\beta^2, \quad \beta \in \{1, 2\}, \\
 X_\beta^1 & \xrightarrow{\varphi_\beta} & X_\beta^2
 \end{array}$$

to wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm $\varphi_1 \sqcup_\varphi \varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1^1 \sqcup_{Y^1} X_2^1, X_1^2 \sqcup_{Y^2} X_2^2)$, który czyni poniższy diagram przemianym

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1^1 & \xrightarrow{\xi_1} & X_1^1 \sqcup_{Y^1} X_2^1 \\
 & v_1^1 \nearrow & \downarrow & \nearrow \xi_2^1 & \downarrow \varphi_1 \sqcup_\varphi \varphi_2 \\
 Y^1 & \xrightarrow{\varphi_1} & X_2^1 & & \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_2 & \nearrow \xi_2^2 & \\
 & v_1^2 \nearrow & X_1^2 & \xrightarrow{\xi_1^2} & X_1^2 \sqcup_{Y^2} X_2^2 \\
 & & \downarrow & \nearrow \xi_2^2 & \\
 Y^2 & \xrightarrow{\varphi_2} & X_2^2 & & \\
 & & \downarrow v_2^2 & &
 \end{array}$$

Morfizm ten określamy mianem **koprodktu kowłóknistego morfizmów** $(\varphi_1, \varphi_2) \in \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$ **względem morfizmu** φ .

Jeśli ponadto dany jest trzeci koproduct kowłóknisty

$$\begin{array}{ccc}
 & Y^3 & \\
 v_1^3 \swarrow & & \searrow v_2^3 \\
 X_1^3 & & X_2^3 \\
 \xi_1^3 \searrow & & \swarrow \xi_2^3 \\
 & X_1^3 \sqcup_{Y^3} X_2^3 &
 \end{array}$$

oraz morfizmy $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^2, Y^3)$ oraz $\tilde{\varphi}_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\beta^2, X_\beta^3)$, $\beta \in \{1, 2\}$ spełniające warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc}
 Y^2 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Y^3 \\
 v_\beta^2 \downarrow & & \downarrow v_\beta^3, \quad \beta \in \{1, 2\}, \\
 X_\beta^2 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\beta} & X_\beta^3
 \end{array}$$

to dla zdefiniowanego przez nie koproduktu kowłóknistego morfizmów $\tilde{\varphi}_1 \sqcup_{\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi}_2$ oraz dla $\varphi_1 \sqcup_{\varphi} \varphi_2$ zachodzi tożsamość

$$(\tilde{\varphi}_1 \sqcup_{\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi}_2) \circ (\varphi_1 \sqcup_{\varphi} \varphi_2) = (\tilde{\varphi}_1 \circ \varphi_1) \sqcup_{\tilde{\varphi} \circ \varphi} (\tilde{\varphi}_2 \circ \varphi_2).$$

■

Dowód: Teza jest prostą konsekwencją inicjalnej natury produktu włóknistego $(X_1 \sqcup_Y X_2, (\xi_1, \xi_2))$, oto bowiem kopowłoka $\text{cosp}((\tilde{\xi}_1 \circ \varphi_1, \tilde{\xi}_2 \circ \varphi_2), \tilde{X}_1 \sqcup_{\tilde{\varphi}} \tilde{X}_2)$ domyka powłokę $\text{sp}(\tilde{Y}, (v_1, v_2))$ do diagramu przemiennego wprost na mocy konstrukcji. Dowód słuszności reguły superpozycji koproduktów morfizmów przebiega analogicznie jak w przypadku produktu. □

Na zakończenie naszej zwięzłej dyskusji struktur: produktu włóknistego i koproduktu włóknistego opiszemy kilka prostych ich własności, z których będziemy korzystać w przyszłości. Oto więc mamy

TWIERDZENIE 1.2.12 (O przemienności (ko)produktu (ko)włóknistego). *Przyjmijmy zapis Def. 48. Ilekroć produkt włóknisty $(X_1 \times_Y X_2, (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2))$ jest dobrze określony, jest on jednoznacznie izomorficzny z produktem włóknistym $(X_2 \times_Y X_1, (\xi_2, \xi_1))$, przy czym zapisujemy*

$$\tau_{X_1, X_2}^{\times} : X_1 \times_{Y_1} X_2 \xrightarrow{\cong} X_2 \times_{Y_1} X_1.$$

Podobnie, ilekroć koprodukt kowłóknisty $(X_1 \sqcup_Y X_2, (\check{\xi}_1, \check{\xi}_2))$ jest dobrze określony, jest on jednoznacznie izomorficzny z koproduktem kowłóknistym $(X_2 \sqcup_Y X_1, (\check{\xi}_2, \check{\xi}_1))$, przy czym zapisujemy

$$\tau_{X_1, X_2}^{\sqcup} : X_1 \sqcup_{Y_1} X_2 \xrightarrow{\cong} X_2 \sqcup_{Y_1} X_1.$$

■

Dowód: Oczywisty. □

UWAGA 9. Powyższe należy rozumieć jako stwierdzenie, że produkt włóknisty $(X_1 \times_Y X_2, (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2))$ jest modelem produktu włóknistego $(X_2 \times_Y X_1, (\xi_2, \xi_1))$, a koprodukt kowłóknisty $(X_1 \sqcup_Y X_2, (\check{\xi}_1, \check{\xi}_2))$ jest modelem koproduktu kowłóknistego $(X_2 \sqcup_Y X_1, (\check{\xi}_2, \check{\xi}_1))$.

Prawdziwe jest też

TWIERDZENIE 1.2.13 (O łączności (ko)produktu (ko)włóknistego). *Przyjmijmy zapis Def. 49. Ilekroć produkty włókniste:*

$$(1.2.39) \quad (X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3, (\tilde{\xi}_1^{(123)}, \tilde{\xi}_2^{(123)}, \tilde{\xi}_3^{(123)}))$$

nad obiektem $(Y_1, Y_2) \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times 2}$ (domykający kopowłoki $\text{cosp}((\check{v}_{j,2}, \check{v}_{j+1,1}), Y_j)$, $j \in \{1, 2\}$ do diagramów przemiennej) oraz $(X_1 \times_{Y_1} X_2, (\tilde{\xi}_1^{(12)}, \tilde{\xi}_2^{(12)}))$ nad Y_1 (domykający kopowłokę $\text{cosp}((\check{v}_{1,2}, \check{v}_{2,1}), Y_1)$), wzgl. $(X_2 \times_{Y_2} X_3, (\tilde{\xi}_1^{(23)}, \tilde{\xi}_2^{(23)}))$ nad Y_2 (domykający kopowłokę $\text{cosp}((\check{v}_{2,2}, \check{v}_{3,1}), Y_2)$) są dobrze określone, (1.2.39) jest jednoznacznie izomorficzny z produktem włóknistym

$$((X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3, \tilde{\xi}_1^{(12,3)}, \tilde{\xi}_2^{(12,3)})$$

nad Y_2 (domykającym kopowłokę $\text{cosp}((\check{v}_{2,2} \circ \check{\xi}_2^{(12)}, \check{v}_{3,1}), Y_2)$) wzgl. z produktem włóknistym

$$(X_1 \times_{Y_1} (X_2 \times_{Y_2} X_3), \check{\xi}_1^{(1,23)}, \check{\xi}_2^{(1,23)})$$

nad Y_1 (domykającym kopowłokę $\text{cosp}((\check{v}_{1,2}, \check{v}_{2,1} \circ \check{\xi}_1^{(23)}), Y_1)$).

Podobnie, ilekroć koprodukty kowłókniste:

$$(1.2.40) \quad (X_1 \sqcup_{Y_1} X_2 \sqcup_{Y_2} X_3, (\check{\xi}_1^{(123)}, \check{\xi}_2^{(123)}, \check{\xi}_3^{(123)}))$$

względem (Y_1, Y_2) (domykający powłoki $\text{sp}(Y_j, (\widehat{v}_{j,2}, \widehat{v}_{j+1,1}))$, $j \in \{1, 2\}$) oraz $(X_1 \sqcup_{Y_1} X_2, (\check{\xi}_1^{(12)}, \check{\xi}_2^{(12)}))$ względem Y_1 (domykający powłokę $\text{sp}(Y_1, (\widehat{v}_{1,2}, \widehat{v}_{2,1}))$), wzgl. $(X_2 \sqcup_{Y_2} X_3, (\check{\xi}_1^{(23)}, \check{\xi}_2^{(23)}))$ względem Y_2 (domykający powłokę $\text{sp}(Y_2, (\widehat{v}_{2,2}, \widehat{v}_{3,1}))$) są dobrze określone, (1.2.40) jest jednoznacznie izomorficzny z koproduktem kowłóknistym

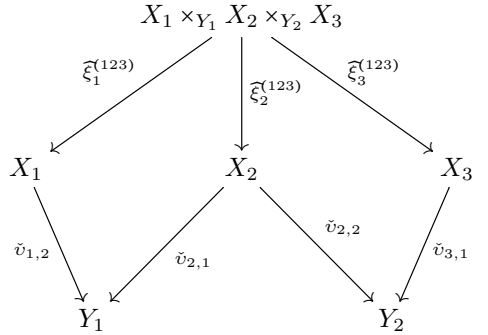
$$((X_1 \sqcup_{Y_1} X_2) \sqcup_{Y_2} X_3, \check{\xi}_1^{(12,3)}, \check{\xi}_2^{(12,3)})$$

względem Y_2 (domykającym powłokę $\text{sp}((\check{\xi}_2^{(12)} \circ \widehat{v}_{2,2}, \widehat{v}_{3,1}), Y_2)$) wzgl. z koproduktem kowłóknistym

$$(X_1 \sqcup_{Y_1} (X_2 \sqcup_{Y_2} X_3), \check{\xi}_1^{(1,23)}, \check{\xi}_2^{(1,23)})$$

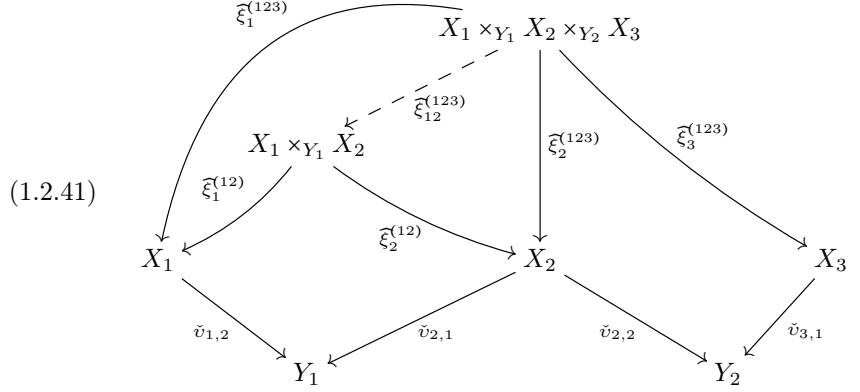
względem Y_1 (domykającym powłokę $\text{sp}((\widehat{v}_{1,2}, \check{\xi}_1^{(23)} \circ \widehat{v}_{2,1}), Y_1)$). ■

Dowód: Teza jest prostą konsekwencją uniwersalności (ko)produktu. Ograniczymy się do szczegółowej rekonstrukcji kanonicznego izomorfizmu $X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3 \cong (X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3$, na podstawie której bez trudu można sprawdzić prawdziwość pozostałych punktów tezy. Punktem wyjścia do naszych rozważań jest diagram przemienny dla potrójnego produktu włóknistego



Uwzględniając terminalną naturę produktu $(X_1 \times_{Y_1} X_2, (\check{\xi}_1^{(12)}, \check{\xi}_2^{(12)}))$ (którego istnienie zakładamy), możemy domknąć w nim do diagramu przemiennego (pod)kopowłokę

$\text{cosp}((\check{v}_{1,2}, \check{v}_{2,1}), Y_1)$, co daje nam diagram przemienny



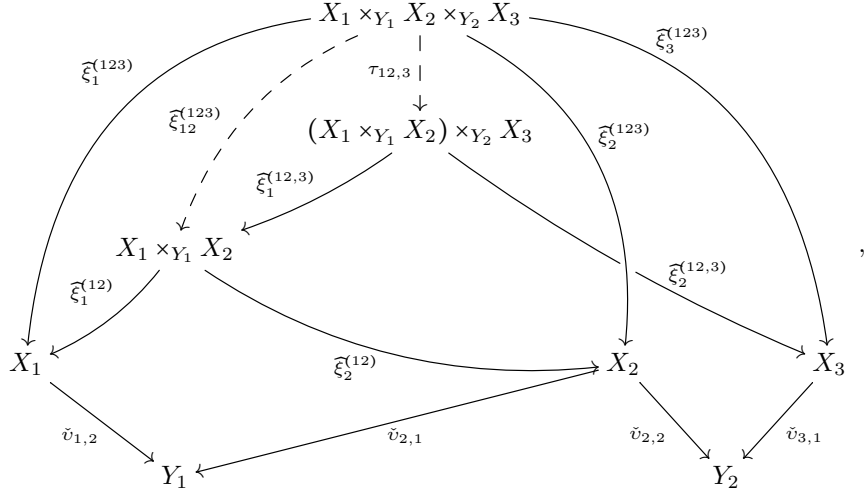
w którym

$$\tilde{\xi}_{12}^{(123)} : X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3 \longrightarrow X_1 \times_{Y_1} X_2$$

jest jedynym morfizmem (w \mathcal{C}) spełniającym tożsamości

$$\tilde{\xi}_\alpha^{(12)} \circ \tilde{\xi}_{12}^{(123)} = \tilde{\xi}_\alpha^{(123)}, \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

Wobec terminalności $((X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3, (\tilde{\xi}_1^{(12,3)}, \tilde{\xi}_2^{(12,3)}))$ wyprowadzamy stąd diagram przemienny



w którym

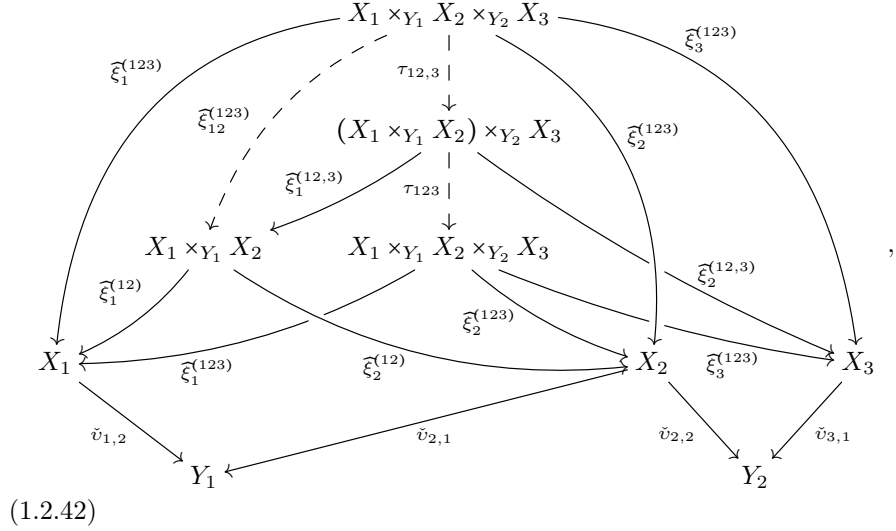
$$\tau_{12,3} : X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3 \longrightarrow (X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3$$

jest jedynym morfizmem spełniającym tożsamości

$$\tilde{\xi}_1^{(12,3)} \circ \tau_{12,3} = \tilde{\xi}_{12}^{(123)}, \quad \tilde{\xi}_2^{(12,3)} \circ \tau_{12,3} = \tilde{\xi}_3^{(123)}.$$

W powyższym diagramie zauważamy nową powłokę $\text{sp}((X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3, (\tilde{\xi}_1^{(12)} \circ \tilde{\xi}_1^{(12,3)}, \tilde{\xi}_2^{(12)} \circ \tilde{\xi}_2^{(12,3)}, \tilde{\xi}_3^{(123)}))$ domykającą do diagramu przemiennego wyjściową

parę kopowłok $\text{cosp}((\check{v}_{j,2}, \check{v}_{j+1,1}), Y_j)$, $j \in \{1, 2\}$, możemy przeto raz jeszcze przywołać terminalność $(X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3, (\xi_1^{(123)}, \xi_2^{(123)}, \xi_3^{(123)}))$, aby zapisać diagram przemienny



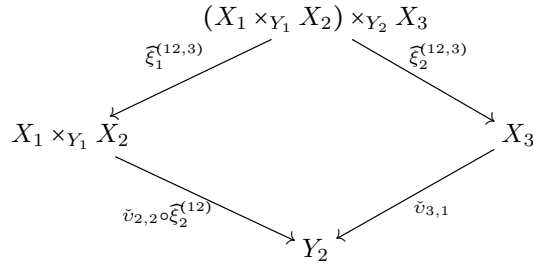
w którym

$$\tau_{123} : (X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3 \longrightarrow X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3$$

jest jedynym morfizmem spełniającym tożsamości

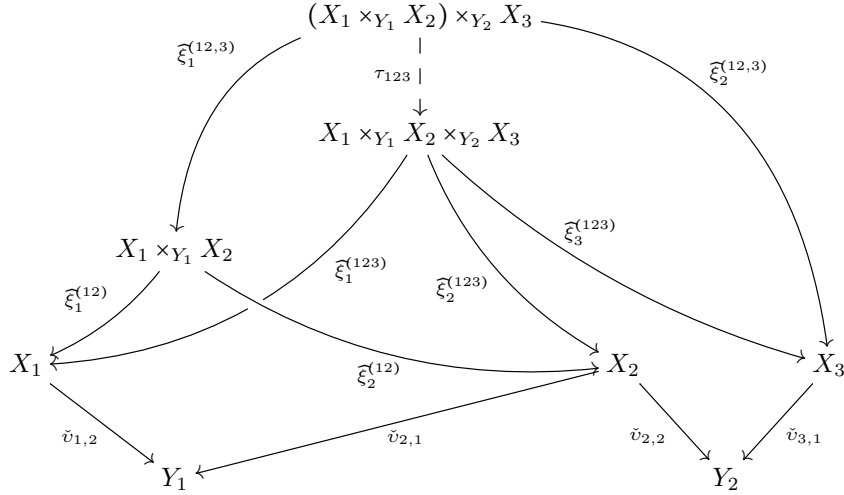
$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_1^{(123)} \circ \tau_{123} &= \widehat{\xi}_1^{(12)} \circ \widehat{\xi}_1^{(12,3)}, & \widehat{\xi}_2^{(123)} \circ \tau_{123} &= \widehat{\xi}_2^{(12)} \circ \widehat{\xi}_1^{(12,3)}, \\ \widehat{\xi}_3^{(123)} \circ \tau_{123} &= \widehat{\xi}_2^{(12,3)}. \end{aligned}$$

W następnym kroku zagnieździemy ostatni diagram w diagramie otrzymanym z diagramu przemiennego dla produktu włóknistego

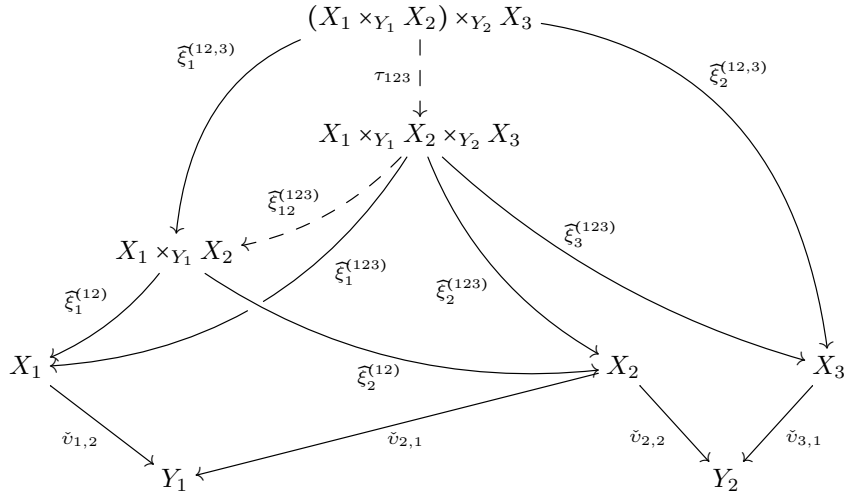


poprzez rozpisanie jego lewej dolnej strzałki z jednoczesnym doklejeniem kopowłoki $\text{cosp}((\check{v}_{1,2}, \check{v}_{2,1}), Y_1)$, wchodzącej do diagramu współdefiniującego produkt $(X_1 \times_{Y_1} X_2, (\xi_1^{(12)}, \xi_2^{(12)}))$, oraz uwzględnienie terminalności produktu $(X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3, (\xi_1^{(123)}, \xi_2^{(123)}, \xi_3^{(123)}))$ dla ujawnionej tym sposobem pary kopowłok $((\check{v}_{j,2}, \check{v}_{j+1,1}), Y_j)$, $j \in \{1, 2\}$ w powyższym diagramie, co w sumie pozwala zapisać (raz jeszcze)

diagram przemienny

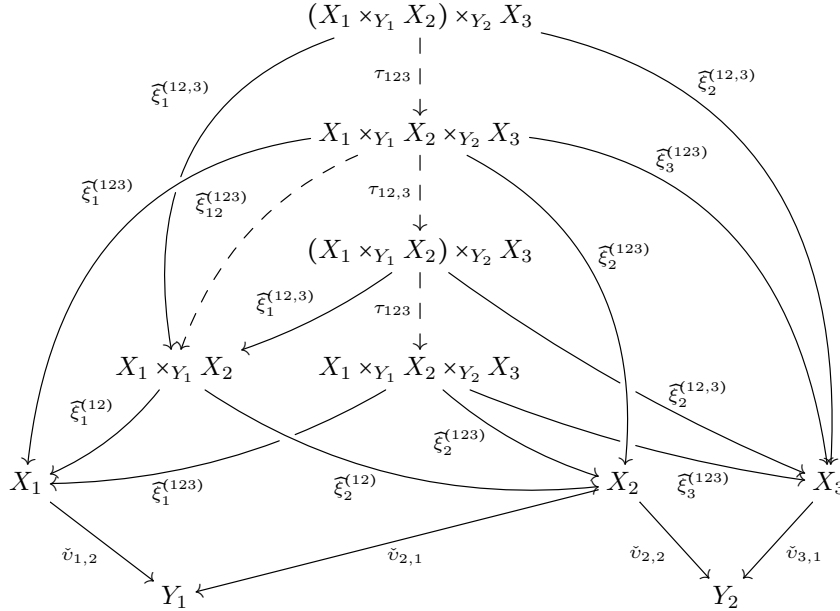


Przywoławszy definicję morfizmu $\tilde{\xi}_{12}^{(123)}$, uzupełniamy diagram do postaci



w której pod powłoką $\text{sp}((X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3, (\tilde{\xi}_1^{(12,3)}, \tau_{123}, \tilde{\xi}_2^{(12,3)}))$ rozpoznajemy diagram (1.2.41), który został przez nas wcześniej poddany wnikliwej analizie. Ostatecznie więc możemy podpiąć diagram (1.2.42) pod wskazaną tu powłokę, co

daje



Na koniec raz jeszcze korzystamy z terminalności obu produktów włóknistych trójki obiektów X_α , $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, aby skonstatować, że spełnione są tożsamości

$$\tau_{123} \circ \tau_{12,3} = \text{id}_{X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3}, \quad \tau_{12,3} \circ \tau_{123} = \text{id}_{(X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3}.$$

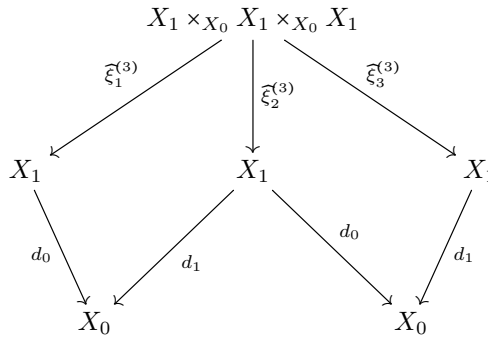
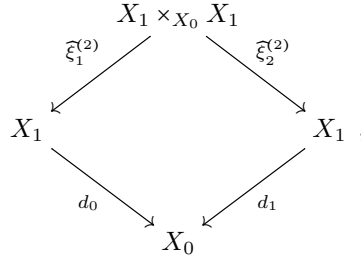
Te pozwalają nam zidentyfikować $\tau_{12,3}$ jako postulowany izomorfizm produktów włóknistych. Dowód w pozostałych przypadkach przebiega w pełni analogicznie. \square

Możemy już teraz użyć bezpośrednio produktu włóknistego w konstrukcji prowadzącej do naturalnego uogólnienia pojęcia małej kategorii, o szerokich i istotnych (choć nie zawsze uświadamianych) zastosowaniach w geometrii i algebrze inspirowanych fizykalnie. Mamy zatem

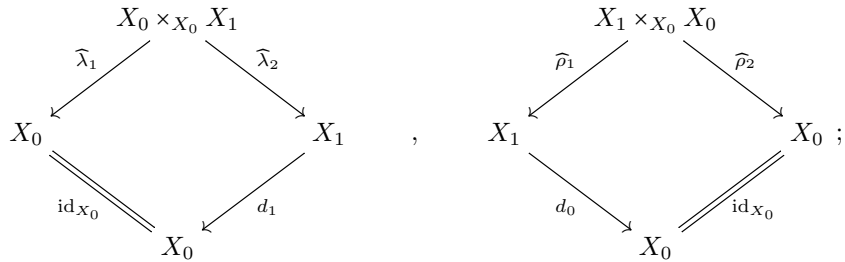
DEFINICJA 50. Przyjmijmy zapis Def. 48 oraz Tw. 1.2.12 i niechaj \mathcal{C} będzie kategorią z produktami włóknistymi. **Kategoria wewnętrzna w** (lub **obiekt kategoryalny**) \mathcal{C} to szóstka $(X_0, X_1, d_0, d_1, \iota, c)$ złożona z

- obiektu $X_0 \in \text{Obj } \mathcal{C}$, zwanego **obiektem obiektów**;
- obiektu $X_1 \in \text{Obj } \mathcal{C}$, zwanego **obiektem morfizmów**;
- morfizmów $d_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_0)$, $\alpha \in \{0, 1\}$, zwanych – odpowiednio – **morfizmem początku** ($\alpha = 0$) oraz **morfizmem końca** ($\alpha = 1$), dla

których istnieją produkty włókniste



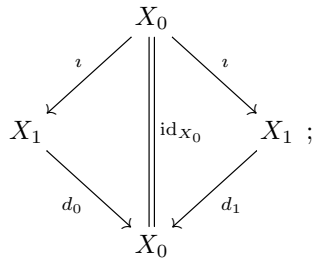
oraz



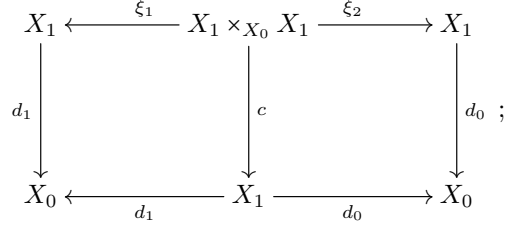
- morfizmu $\iota \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, X_1)$, zwanego **morfizmem identyczności**;
- morfizmu $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \times_{X_0} X_1, X_1)$, zwanego **morfizmem złożenia**,

spełniających następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne):

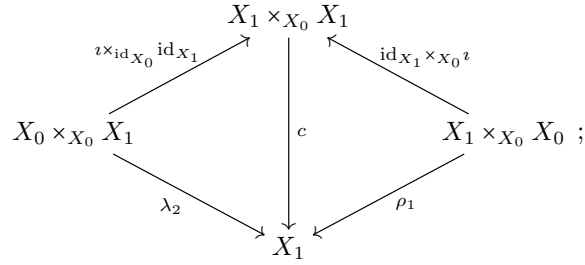
(IC1) (tożsamość początku i końca identyczności)



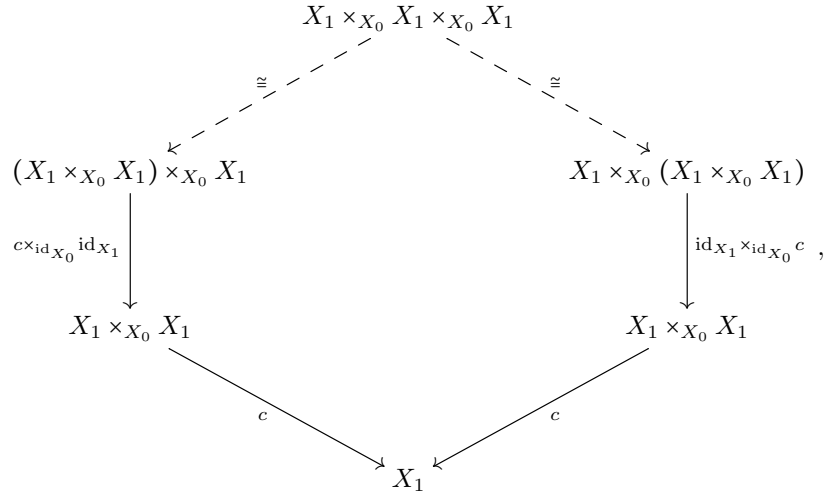
(IC2) (skrajny początek i koniec złożenia)



(IC3) (neutralność identyczności względem złożenia)



(IC4) (łączność złożenia)



przy czym górne strzałki reprezentują izomorfizmy, o których mowa w Tw. 1.2.13.

Funktor wewnętrzny w \mathcal{C} między kategoriami wewnętrznymi $(X_0^\alpha, X_1^\alpha, d_0^\alpha, d_1^\alpha, \iota^\alpha, c^\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ w \mathcal{C} to para (Φ_0, Φ_1) złożona z morfizmów

$$\Phi_a \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_a^1, X_a^2), \quad a \in \{0, 1\}$$

spełniających następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne):

(IF1) (transport początku i końca)

$$\begin{array}{ccccc}
X_0^1 & \xleftarrow{d_0^1} & X_1^1 & \xrightarrow{d_1^1} & X_0^1 \\
\downarrow \Phi_0 & & \downarrow \Phi_1 & & \downarrow \Phi_0 \\
X_0^2 & \xleftarrow{d_0^2} & X_1^2 & \xrightarrow{d_1^2} & X_0^2
\end{array} ;$$

(IF2) (transport identyczności)

$$\begin{array}{ccc}
X_0^1 & \xrightarrow{i^1} & X_1^1 \\
\downarrow \Phi_0 & & \downarrow \Phi_1 \\
X_0^2 & \xrightarrow{i^2} & X_1^2
\end{array} ;$$

(IF3) (transport złożenia)

$$\begin{array}{ccc}
X_1^1 \times_{X_0^1} X_1^1 & \xrightarrow{c^1} & X_1^1 \\
\downarrow \Phi_1 \times_{\Phi_0} \Phi_1 & & \downarrow \Phi_1 \\
X_1^2 \times_{X_0^2} X_1^2 & \xrightarrow{c^2} & X_1^2
\end{array} .$$

Funktor taki zapisujemy jako

$$(\Phi_0, \Phi_1) : (X_0^1, X_1^1, d_0^1, d_1^1, i^1, c^1) \longrightarrow (X_0^2, X_1^2, d_0^2, d_1^2, i^2, c^2).$$

Transformacja naturalna wewnętrzna w \mathcal{C} między funktorami wewnętrznymi

$$(\Phi_0^\alpha, \Phi_1^\alpha) : (X_0^1, X_1^1, d_0^1, d_1^1, i^1, c^1) \longrightarrow (X_0^2, X_1^2, d_0^2, d_1^2, i^2, c^2), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

w \mathcal{C} między kategoriami wewnętrznymi $(X_0^\beta, X_1^\beta, d_0^\beta, d_1^\beta, i^\beta, c^\beta)$, $\beta \in \{1, 2\}$ w \mathcal{C} to morfizm

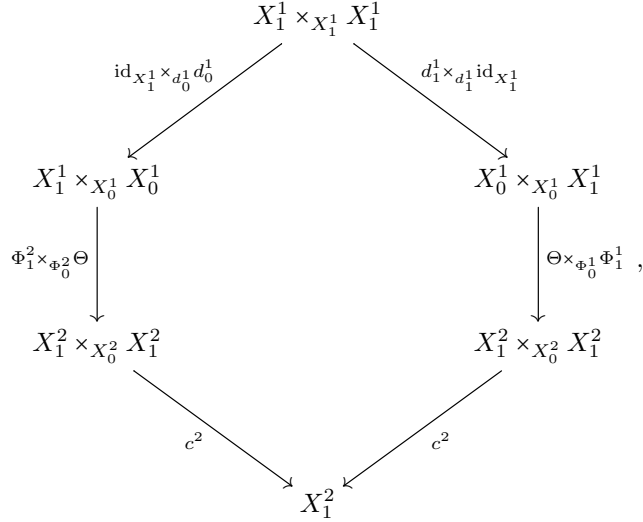
$$\Theta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0^1, X_1^2)$$

spełniająca następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne):

(INT1) (rozpięcie między funktorialnymi obrazami)

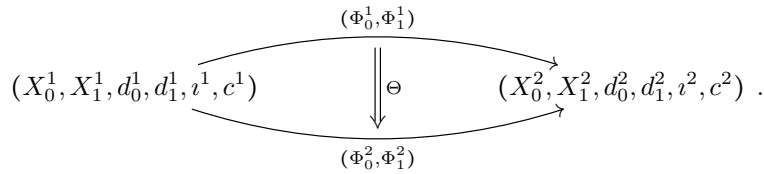
$$\begin{array}{ccc}
& X_0^1 & \\
\Phi_0^1 \swarrow & & \searrow \Phi_0^2 \\
X_0^2 & & X_0^2 \\
& \downarrow \Theta & \\
& X_1^2 & \\
d_0^2 \swarrow & & \searrow d_1^2 \\
& & X_1^2
\end{array} ;$$

(INT2) (splatanie funktorów)



przy czym wszystkie produkty włókniste w powyższym diagramie poza trywialnym domknięciem $X_1^1 \times_{X_1^1} X_1^1 \cong X_1^1$ kopowłoki $\text{cosp}((\text{id}_{X_1^1}, \text{id}_{X_1^1}), X_1^1)$ to te rozważane wcześniej (patrz: definicja kategorii wewnętrznej w \mathcal{C}).

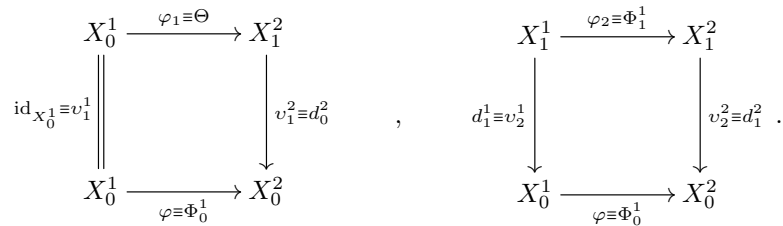
Transformację taką zapisujemy jako



UWAGA 10. Należy podkreślić, że w zapisie aksjomatu (INT2) znajduje swoje odzwierciedlenie (w sposób nadający mu sens formalny) poprzedzająca go aksjomatyka transformacji naturalnej wewnętrznej (aksjomat (INT1)) oraz funktora wewnętrznego, oto bowiem – dla przykładu – o istnieniu pojawiającego się na diagramie morfizmu

$$\Theta \times_{\Phi_0^1} \Phi_1^1 : X_0^1 \times_{X_0^1} X_1^1 \longrightarrow X_1^2 \times_{X_0^2} X_1^2$$

przesądza – na gruncie Stw. 56 – przemienność diagramów



PRZYKŁAD(Y) 22.

- (1) Kategoria wewnętrzna w kategorii **Set** to mała kategoria. W tym wypadku definicje funktora wewnętrznego i transformacji naturalnej wewnętrznej odtwarzają standardowe definicje – odpowiednio – funktora (między małymi kategoriami) i transformacji naturalnej.
- (2) Kategoria wewnętrzna w kategorii **Grp** to iloczyn półprosty (zewnątrzny) pary grup.

✓

Niezależnie od swych konkretnych zastosowań, z których nam przyjdzie już wkrótce poznać kilka, elementarna kategoryfikacja intuicyjnie doskonale uchwytynych pojęć zbioru (wzgl. klasy) obiektów i morfizmów, warunku składalności morfizmów, funktorialnego transportu początku i końca morfizmu itd. stanowi doskonale ćwiczenie pogłębiające zrozumienie formalnej struktury i abstrakcyjnego sensu podstawowej aksjomatyki teorii kategorii. Ażeby jeszcze lepiej oswoić się z zaproponowanym tutaj sposobem myślenia o kategoriach, uzyskując przy okazji wgląd w konstrukcję, z której lada moment będziemy nader często i swobodnie korzystać, dokonamy dalszej specjalizacji powyższej definicji ogólnej: poddamy kategoryfikację strukturę grupy. W tym celu przywołujemy (re)definicję grupy jako (małej) kategorii o jednoelementowej klasie obiektów i wszystkich morfizmach odwracalnych (patrz: Przykł. 15 (4) i – przede wszystkim – Dodatek A). O ile kategoryfikacja warunku odwracalności morfizmów wydaje się dość oczywista, o tyle abstrakcja pojęcia singletonu (jako klasy obiektów) wymaga wskazania jakiejś jego cechy opisywalnej w terminach samych tylko morfizmów kategorii **Set**. Cechą taką jest terminalność, wzmiankowana w Przykł. 18 (1).

DEFINICJA 51. Przyjmijmy zapis Def. 27, 28 oraz 26 i niechaj \mathcal{C} będzie kategorią z produktami. **Grupa wewnętrzna** (lub **obiekt grupowy**) w \mathcal{C} to piątka $(\star, \mathcal{G}, \mu, \iota, \varepsilon)$ złożona z

- obiektu terminalnego $\star \in \text{Obj } \mathcal{C}$;
- obiektu $\mathcal{G} \in \text{Obj } \mathcal{C}$, dla którego istnieją w \mathcal{C} produkty

$$(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, \pi_1, \pi_2)$$

oraz

$$(\mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}, \pi_1, \pi_2, \pi_3);$$

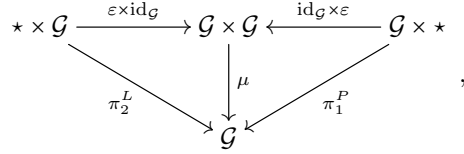
- morfizmu $\mu \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, \mathcal{G})$, zwanego **morfizmem mnożenia**;
- morfizmu $\iota \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$, zwanego **morfizmem odwrotności**;
- morfizmu $\varepsilon \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, \mathcal{G})$, zwanego **morfizmem jedności**,

spełniających następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne):

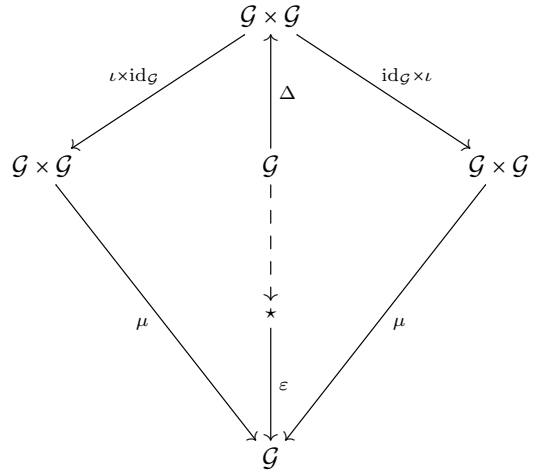
(IG1) (łączność działania grupowego)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{\mu \times \text{id}_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G} \times \mathcal{G} \\
 \text{id}_{\mathcal{G}} \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}
 \end{array} ;$$

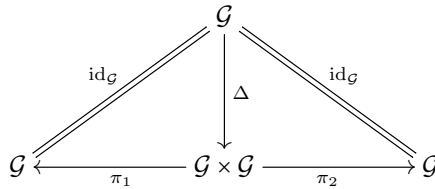
(IG2) (neutralność jedności względem mnożenia)



przy czym π_2^L i π_1^P są rzutami kanonicznymi odnośnych produktów;
 (IG3) (fundamentalna własność odwrotności)



przy czym strzałka o przerywanym promieniu symbolizuje jedyny element zbioru $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}, \star)$, a $\Delta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}, \mathcal{G} \times \mathcal{G})$ jest (także jedynym, a to z racji terminalności produktu $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, (\pi_1, \pi_2))$) morfizmem czyniącym poniższy diagram przemiennym:

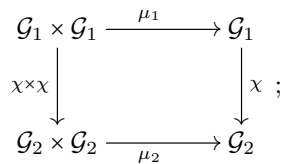


Homomorfizm wewnętrzny w \mathcal{C} między grupami wewnętrznymi $(\star_{\alpha}, \mathcal{G}_{\alpha}, \mu_{\alpha}, \iota_{\alpha}, \varepsilon_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ w \mathcal{C} to morfizm

$$\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$$

spełniający następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemiennie)

(IH1) (transport mnożenia)



(IH2) (transport odwrotności)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\iota_1} & \mathcal{G}_1 \\
 \downarrow \chi & & \downarrow \chi \\
 \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\iota_2} & \mathcal{G}_2
 \end{array} ;$$

(IH2) (transport jedności)

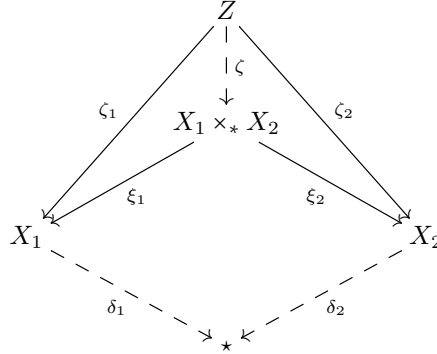
$$\begin{array}{ccc}
 *1 & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \mathcal{G}_1 \\
 \vdots & & \downarrow \chi \\
 *2 & \xrightarrow{\varepsilon_2} & \mathcal{G}_2
 \end{array} .$$

▲

UWAGA 11. Na pierwszy rzut oka ostatnia definicja stanowi odejście od schematu logicznego Def. 50 w zakresie wykraczającym poza konieczność kategoryfikacji dwóch dodatkowych własności grupy, o których była mowa wcześniej. Czy zatem, jeśli potraktujemy grupę jako (małą) kategorię, tak jak to czynimy w Dodatek A, i zastosujemy do niej konstrukcję z Def. 50 uzupełnioną o niezbędną strukturę $(*, \iota)$ związaną przez naturalny aksjomat (IG3), otrzymamy strukturę odmienną od tej zdefiniowanej powyżej? Okazuje się, że nie, a przekonanie się o tym stanowi proste ćwiczenie pozwalające lepiej zrozumieć sens poczynionych założeń. Pierwsza różnica w stosunku do Def. 50, jaka rzuca się w oczy, to zastąpienie wszystkich występujących w niej produktów włóknistych nad obiektem obiektów X_0 produktami. Ustalmy (dowolnie) obiekty $X_\alpha \in \text{Obj } \mathcal{C}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ i oznaczmy odnośne (jedyne) morfizmy $\delta_\alpha : X_\alpha \rightarrow *$, po czym rozważmy obie struktury terminalne: produkt

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 \zeta_1 \swarrow & & \searrow \zeta_2 \\
 & X_1 \times X_2 & \\
 \xi_1 \swarrow & & \searrow \xi_2 \\
 X_1 & & X_2
 \end{array}$$

oraz produkt włóknisty nad obiektem *terminalnym* \star (we wprowadzonej wcześniej notacji)



Jedynym dodatkowym warunkiem narzucanym na powłoki $\text{sp}(Z, (\zeta_1, \zeta_2))$ rozpatrywane w tym drugim przypadku (a zatem także na $\text{sp}(X_1 \times_* X_2, (\xi_1, \xi_2))$) jest równość morfizmów

$$\delta_1 \circ \zeta_1 = \delta_2 \circ \zeta_2.$$

Jednakowoż *każde* dwa morfizmy $\zeta_\alpha : Z \rightarrow X_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ po złożeniu z odnośnymi morfizmami δ_α definiują morfizmy z $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \star)$, a ten ostatni zbiór jest jednoelementowy, przeto nieuchronnie złożenia te są równe. Powyższy warunek dodatkowy nie jest więc w istocie żadnym warunkiem, co pokazuje dowodnie tożsamość obu rozpatrywanych struktur terminalnych. To wyjaśnia możliwość zamiennego ich używania w obu definicjach. Dla tej samej przyczyny stwierdzamy konieczną równość morfizmów początku i końca (jako dwóch morfizmów z jednoelementowego zbioru $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}, \star)$),

$$d_0 = d_1 =: \gamma,$$

i przekonujemy się o trywialności aksjomatu (IC1),

$$d_0 \circ \iota \equiv \gamma \circ \varepsilon = \text{id}_\star = \gamma \circ \varepsilon \equiv d_1 \circ \iota \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, \star) \equiv \{\text{id}_\star\}.$$

To samo tyczy się aksjomatu (IC2),

$$\begin{aligned} d_0 \circ \xi_2 \equiv \gamma \circ \pi_2 = \gamma \circ \mu \equiv d_0 \circ c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, \star) &\equiv \{\gamma \circ \pi_2\} \\ \equiv \{\gamma \circ \pi_1\} \ni d_1 \circ \xi_1 \equiv \gamma \circ \pi_1 = \gamma \circ \mu \equiv d_1 \circ c. \end{aligned}$$

Ostatnią rzeczą, która wydaje się różnić obie definicje (poza niezbędnym uzupełnieniem definicji ogólnej o strukturę swoistą dla kategorii zadawanej przez grupę), jest brak w Def. 51 założenia o *istnieniu* produktów $\star \times \mathcal{G} \equiv \star \times_\star \mathcal{G}$ oraz $\mathcal{G} \times \star \equiv \mathcal{G} \times_\star \star$. I w tym jednak przypadku przekonujemy się bez trudu, że pominięcie to nie ma żadnego znaczenia, gdyż oba produkty mają (wspólny) model, a jest nim (zgodnie z oczekiwaniami) \mathcal{G} . Zajmiemy się wykazaniem słuszności tego stwierdzenia w przypadku produktu $\star \times \mathcal{G} \equiv \star \times_\star \mathcal{G}$. Analiza przypadku drugiego przebiega w pełni analogicznie. Oto więc musimy dla dowolnego obiektu Z spełniającego warunek

wyrażany przez diagram przemienny (w którym Γ jest częścią struktury na Z)

$$(1.2.43) \quad \begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow \text{---} & & \searrow \Gamma \\ \star & & \mathcal{G} \\ \swarrow \text{=} & & \searrow \text{---} \\ & \star & \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{id}_\star \\ \text{---} \\ \text{=} \end{array}$$

wskazać *jedyny* morfizm $\pi_Z \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \mathcal{G})$, który czyni przemiennym diagram

$$(1.2.44) \quad \begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow \text{---} & \downarrow \pi_Z & \searrow \Gamma \\ & \mathcal{G} & \\ \swarrow \gamma & \text{---} & \searrow \text{=} \\ \star & & \mathcal{G} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{id}_{\mathcal{G}} \\ \text{---} \\ \text{=} \end{array},$$

przy czym wybór powłoki dla postulowanego modelu produktu $\star \times \mathcal{G}$ usprawiedliwia diagram (jawnie) przemienny

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G} & \\ \swarrow \gamma & \text{---} & \searrow \text{id}_\Gamma \\ \star & & \mathcal{G} \\ \swarrow \text{=} & & \searrow \text{---} \\ & \star & \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{id}_\star \\ \text{---} \\ \text{=} \end{array}$$

Przemienność prawego skrzydła diagramu (1.2.44) pokazuje dowodnie jedyność

$$\pi_Z = \Gamma,$$

a porównanie skrzydła lewego (z podstawioną taką właśnie postacią π_Z) z diagramem (1.2.43) definiującym Γ , przekonuje nas ostatecznie o słuszności dowodzonej tezy. Konstatujemy zatem w podsumowaniu, że definicja grupy wewnętrznej (w kategorii z obiektem terminalnym oraz produktami) jest w pełni spójna z wcześniejszą ogólną definicją kategorii wewnętrznej.

Ciągi dokładne

Para homomorfizmów $(J_H, \pi_{G/H})$ z Przykł. 2 (3) i (6), którą zapiszemy w postaci

$$H \xrightarrow{J_H} G \xrightarrow{\pi_{G/H}} G/H$$

spełnia oczywistą relację

$$\text{Ker } \pi_{G/H} = \text{Im } J_H,$$

wyrażającą utożsamienie pomiędzy dzielnikami normalnymi a jądrami homomorfizmów. Jej naturalną abstrakcją opisuje

DEFINICJA 52. Przyjmijmy zapis Def. 5. Niechaj $(G_\alpha, \phi_2^{(\alpha)}, \phi_1^{(\alpha)}, \phi_0^{(\alpha)})$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ będzie trójką grup i niech $\chi_\beta : G_\beta \rightarrow G_{\beta+1}$, $\beta \in \{1, 2\}$ będzie parą homomorfizmów grup. Piątkę

$$G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} G_3$$

nazywamy **ciągami dokładnymi (grup)**, jeżeli

$$\text{Ker } \chi_2 = \text{Im } \chi_1.$$

Ogólniej, rodzina grup i stowarzyszonych homomorfizmów opisana diagramem

$$G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} \dots \xrightarrow{\chi_{n-1}} G_n$$

nosi miano ciągu dokładnego, jeśli

$$\forall_{k \in \overline{1, n-2}} : \text{Ker } \chi_{k+1} = \text{Im } \chi_k.$$

Krótki ciąg dokładny to ciąg dokładny szczególnej postaci

$$\mathbf{1} \rightarrow G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} G_3 \rightarrow \mathbf{1},$$

w którym ($\mathbf{1}$ jest grupą trywialną i) spełniona jest koniunkcja warunków:

- (1) χ_1 jest monomorfizmem;
- (2) χ_2 jest epimorfizmem;
- (3) $\text{Ker } \chi_2 = \text{Im } \chi_1$.

Trójkę (G_2, χ_1, χ_2) nazywamy wtedy **rozszerzeniem grupy G_3 przez grupę G_1** . Przy tym ilekroć $\text{Im } \chi_1 \subset \mathcal{Z}(G_2)$, mówimy o **rozszerzeniu centralnym**¹ (możliwym wtedy tylko, gdy G_1 jest przemienna).

▲

¹Rozszerzenia centralne grup odgrywają istotną rolę w opisie symetrii kwantowej teorii pola.

PRZYKŁAD(Y) 23. Niechaj $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ będzie dowolną grupą, $H \subset G$ zaś – jej dzielnikiem normalnym. Wówczas diagram

$$(1.3.1) \quad \mathbf{1} \longrightarrow H \xrightarrow{j_H} G \xrightarrow{\pi_{G/H}} G/H \longrightarrow \mathbf{1}$$

zadaje krótki ciąg dokładny. Każdy ciąg dokładny tej postaci będziemy odąd nazywać **normalnym ciągiem dokładnym**. Ważnym przykładem takiego ciągu jest

$$\mathbf{1} \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{j_{2\pi\mathbb{Z}}} \mathbb{R} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{1},$$

w którym $2\pi\mathbb{Z}$ i \mathbb{R} należy rozumieć jako nośniki struktury grupy zadawanej przez dodawanie liczb (rzeczywistych). Wobec oczywistej relacji

$$\text{Ker } e^i = 2\pi\mathbb{Z}$$

wypisanej dla epimorfizmu grup z Przykł. 2 (1), dostajemy – na mocy Tw. 1.1.1 –

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong U(1),$$

co pozwala przepisać powyższy normalny ciąg dokładny w postaci powszechnie spotykanej w literaturze, tj.

$$\mathbf{1} \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow U(1) \longrightarrow \mathbf{1}.$$

✓

Ciągi dokładne odegrają istotną rolę w dyskusji wybranych zagadnień algebry homologicznej w Rozdz. 7. Zanim jednak przejdziemy do opisu wyników bezpośrednio przygotowujących grunt pod tamtą dyskusję, zademonstrujemy przydatność i naturalność ciągów dokładnych w opisie struktury nader powszechnie stosowanej w matematycznym modelowaniu zjawisk (w szczególności w kontekście opisu symetrii układów fizykalnych). Struktura ta stanowi naturalne uogólnienie struktury produktu grup, wyprowadzonej w komentarzach do Def. 31 (patrz: przypis na str. 72). Ażeby zrozumieć właściwie sens owego uogólnienia, przeformułujemy definicję produktu pary grup (G_1, G_2) przy użyciu stosownego krótkiego ciągu dokładnego, a mianowicie (w notacji Def. 31 i 32):

$$\mathbf{1} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{j_1} G_1 \times G_2 \xrightarrow{\text{pr}_2} G_2 \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku istnieją homomorfizmy grup $\rho \in \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G_1 \times G_2, G_1)$ oraz $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G_2, G_1 \times G_2)$ o własnościach

$$\rho \circ j_1 = \text{id}_{G_1}, \quad \text{pr}_2 \circ \sigma = \text{id}_{G_2}.$$

Są nimi odwzorowania

$$\rho \equiv \text{pr}_1 : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 : (g_1, g_2) \mapsto g_1$$

oraz

$$\sigma \equiv j_2 : G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2 : g_2 \mapsto (e_1, g_2).$$

Powstaje naturalne pytanie o pojemność strukturalną tego ostatniego warunku w oderwaniu od jego powyższej szczególnej (i dość trywialnej) instancjacji. Droga do precyzyjnej odpowiedzi na to pytanie wiedzie przez poniższą

DEFINICJA 53. Przyjmijmy zapis Def. 5 oraz Przykł. 1 (5) i niechaj $(G_\alpha, \cdot_\alpha, \text{Inv}_\alpha, \bullet \mapsto e_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą grupami, $\varphi : G_2 \rightarrow \text{Aut}(G_1)$ zaś – homomorfizmem grup. **Iloczyn półprosty grup G_1 i G_2 prawo-stowarzyszony z automorfizmem φ** to grupa

$$(G_1 \times G_2, m_\varphi \equiv \cdot_\varphi, \text{Inv}_\varphi, \bullet \mapsto (e_1, e_2)),$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} m_\varphi & : (G_1 \times G_2)^{\times 2} \longrightarrow G_1 \times G_2 \\ & : ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \end{aligned}$$

i odwrotnością

$$\text{Inv}_\varphi : G_1 \times G_2 \circlearrowleft : (g_1, g_2) \mapsto (\varphi_{\text{Inv}_2(g_2)} \circ \text{Inv}_1(g_1), \text{Inv}_2(g_2)).$$

Iloczyn kartezjański grup z tak zadaną strukturą grupy oznaczamy symbolem

$$G_1 \rtimes_\varphi G_2.$$

Iloczyn półprosty grup G_1 i G_2 lewo-stowarzyszony z automorfizmem φ to grupa

$$(G_2 \times G_1, {}_\varphi m \equiv \varphi \cdot \varphi \cdot \text{Inv}, \bullet \mapsto (e_1, e_2)),$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} {}_\varphi m & : (G_2 \times G_1)^{\times 2} \longrightarrow G_2 \times G_1 \\ & : ((g_2, g_1), (h_2, h_1)) \mapsto (g_2 \cdot_2 h_2, \varphi_{\text{Inv}_2(h_2)}(g_1) \cdot_1 h_1) \end{aligned}$$

i odwrotnością

$${}_\varphi \text{Inv} : G_2 \times G_1 \circlearrowleft : (g_2, g_1) \mapsto (\text{Inv}_2(g_2), \varphi_{g_2} \circ \text{Inv}_1(g_1)).$$

Iloczyn kartezjański grup z tak zadaną strukturą grupy oznaczamy symbolem

$$G_2 {}_\varphi \ltimes G_1.$$

▲

UWAGA 12. O tym, że w istocie mamy do czynienia ze strukturą grupową, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku – tutaj tylko dla iloczynu prawo-stowarzyszonego (dla przykładu) – wykorzystującym zarówno homomorficzny charakter φ ,

$$\forall_{g, h \in G_2} : \varphi_{g \cdot_2 h} = \varphi_g \circ \varphi_h,$$

jak i automorficzny charakter obrazu względem tego odwzorowania dowolnego elementu $g \in G_2$,

$$\forall_{(g, h_1, h_2) \in G_2 \times G_1 \times G_1} : \varphi_g(h_1 \cdot_1 h_2) = \varphi_g(h_1) \cdot_1 \varphi_g(h_2).$$

Te warunki pozwalają nam sprawdzić – dla dowolnych $(g_1, g_2), (h_1, h_2), (k_1, k_2) \in G_1 \times G_2$ – wszystkie aksjomaty grupy, więc łączność mnożenia,

$$\begin{aligned} & ((g_1, g_2) \cdot_\varphi (h_1, h_2)) \cdot_\varphi (k_1, k_2) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \cdot_\varphi (k_1, k_2) \\ & = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1) \cdot_1 \varphi_{g_2 \cdot_2 h_2}(k_1), g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 k_2) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1 \cdot_1 \varphi_{h_2}(k_1)), g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 k_2) \\ & \equiv (g_1, g_2) \cdot_\varphi (h_1 \cdot_1 \varphi_{h_2}(k_1), h_2 \cdot_2 k_2) \equiv (g_1, g_2) \cdot_\varphi ((h_1, h_2) \cdot_\varphi (k_1, k_2)), \end{aligned}$$

neutralność pary (e_1, e_2) ,

$$(g_1, g_2) \cdot_{\varphi} (e_1, e_2) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(e_1), g_2 \cdot_2 e_2) = (g_1 \cdot_1 e_1, g_2 \cdot_2 e_2) = (g_1, g_2),$$

$$(e_1, e_2) \cdot_{\varphi} (g_1, g_2) = (e_1 \cdot_1 \varphi_{e_2}(g_1), e_2 \cdot_2 g_2) = (e_1 \cdot_1 \text{id}_{G_1}(g_1), e_2 \cdot_2 g_2)$$

$$= (e_1 \cdot_1 g_1, e_2 \cdot_2 g_2) = (g_1, g_2)$$

oraz fundamentalną własność odwrotności,

$$(g_1, g_2) \cdot_{\varphi} (\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}), g_2^{-1}) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}), g_2 \cdot_2 g_2^{-1})$$

$$= (g_1 \cdot_1 \varphi_{e_2}(g_1^{-1}), g_2 \cdot_2 g_2^{-1}) = ((g_1 \cdot_1 \text{id}_{G_1}(g_1^{-1}), g_2 \cdot_2 g_2^{-1}) = (g_1 \cdot_1 g_1^{-1}, g_2 \cdot_2 g_2^{-1})$$

$$= (e_1, e_2),$$

$$(\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}), g_2^{-1}) \cdot_{\varphi} (g_1, g_2) = (\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}) \cdot_1 \varphi_{g_2^{-1}}(g_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2)$$

$$= (\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1} \cdot_1 g_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2) = (\varphi_{g_2^{-1}}(e_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2) = (e_1, e_2).$$

Obie formy iloczynu półprostego pozostają w prostej relacji wzajemnej, o czym przekonuje

STWIERDZENIE 58. *Przyjmijmy zapis Def. 53. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup między iloczynami półprostymi: prawo- i lewo-stowarzyszonymi danej pary grup (przy ustalonym homomorfizmie φ), który przybiera postać*

$$\tau_{\varphi} : G_2 \times_{\varphi} G_1 \xrightarrow{\cong} G_1 \times_{\varphi} G_2 : (g_2, g_1) \mapsto (\varphi_{g_2}(g_1), g_2).$$

■

Dowód: Zapostulowane odwzorowanie jest jawnie odwracalne, oto bowiem odwzorowanie odwrotne do niego to

$$\tau_{\varphi}^{-1} : G_1 \times_{\varphi} G_2 \longrightarrow G_2 \times_{\varphi} G_1 : (g_1, g_2) \mapsto (g_2, \varphi_{\text{Inv}_2(g_2)}(g_1)).$$

Wystarczy zatem sprawdzić warunek definiujący homomorfizm, co czynimy w bezpośrednim rachunku, dla dowolnych $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$,

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi}(g_2, g_1) \cdot_{\varphi} \tau_{\varphi}(h_2, h_1) &= (\varphi_{g_2}(g_1), g_2) \cdot_{\varphi} (\varphi_{h_2}(h_1), h_2) \\ &= (\varphi_{g_2}(g_1) \cdot_1 \varphi_{g_2} \circ \varphi_{h_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \\ &= (\varphi_{g_2 \cdot_2 h_2}(\varphi_{h_2^{-1}}(g_1) \cdot_1 h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \\ &\equiv \tau_{\varphi}(g_2 \cdot_2 h_2, \varphi_{h_2^{-1}}(g_1) \cdot_1 h_1) \\ &\equiv \tau_{\varphi}((g_2, g_1) \cdot_{\varphi} (h_2, h_1)). \end{aligned}$$

□

Powyższe stwierdzenie pozwala nam skupić się w dalszej części dyskusji na jednej z form, np. na formie prawo-stowarzyszonej, a obserwacje poczynione w odniesieniu do niej przetłumaczają się prosto na obserwacje dotyczące drugiej z form za

pośrednictwem znalezionej izomorfizmu. Definicja iloczynu półprostego pozwala sformułować oczekiwane

TWIERDZENIE 1.3.1. *Przyjmijmy zapis Def. 52 oraz 53 i niechaj $(G_\alpha, \cdot_\alpha, \text{Inv}_\alpha, \bullet \mapsto e_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą grupami. Istnienie krótkiego ciągu dokładnego grup*

$$(1.3.2) \quad \mathbf{1} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} G_3 \longrightarrow \mathbf{1},$$

wraz z parą homomorfizmów grup

$$\rho : G_2 \longrightarrow G_1, \quad \sigma : G_3 \longrightarrow G_2$$

o własnościach

$$(1.3.3) \quad \rho \circ \chi_1 = \text{id}_{G_1}$$

i

$$(1.3.4) \quad \chi_2 \circ \sigma = \text{id}_{G_3}$$

jest równoważne istnieniu homomorfizmu grup $\varphi : G_3 \longrightarrow \text{Aut}(G_1)$ oraz izomorfizmu grup

$$\iota : G_2 \xrightarrow{\cong} G_1 \rtimes_\varphi G_3.$$

Homomorfizm ρ nazywamy **retrakcją** χ_1 , a σ – **cięciem** χ_2 . ■

Dowód: Niechaj będzie dany krótki ciąg dokładny (1.3.2) z retrakcją ρ i cięciem σ . Wykorzystując warunek (1.3.4), obliczamy – dla dowolnego elementu $g_2 \in G_2$ –

$$\begin{aligned} \chi_2(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2)) &= \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) \\ &= \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) = \chi_2(g_2 \cdot_2 \text{Inv}_2(g_2)) = \chi_2(e_2) \\ &= e_3, \end{aligned}$$

a stąd wniosek, że

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) \in \text{Ker } \chi_2,$$

czyli też – z racji założonej dokładności ciągu (w G_2) –

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) \in \text{Im } \chi_1.$$

W świetle Tw. 1.1.1, a wobec iniektywności χ_1 możemy zatem zdefiniować odwzorowanie

$$\begin{aligned} \iota : G_2 \longrightarrow G_1 \times G_3 : g_2 \longmapsto & (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1}(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2)), \chi_2(g_2)) \\ & \equiv (\xi(g_2), \chi_2(g_2)). \end{aligned}$$

Przekonamy się najpierw, że jest ono postulowanym homomorfizmem grup, przy czym dyskusja tej ewentualności doprowadzi nas wprost do definicji stosownego homomorfizmu φ . Dla dowolnych $g_2, h_2 \in G_2$ wyznaczamy

$$\begin{aligned} \iota(g_2 \cdot_2 h_2) &= (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1}(g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(h_2^{-1} \cdot_2 g_2^{-1})), \chi_2(g_2 \cdot_2 h_2)) \\ &= (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1}(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2^{-1}) \cdot_2 \text{Ad}_{\sigma \circ \chi_2(g_2)}(h_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(h_2^{-1}))), \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2(h_2)) \\ &\equiv (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1}(\chi_1 \circ \xi(g_2) \cdot_2 \text{Ad}_{\sigma \circ \chi_2(g_2)} \circ \chi_1 \circ \xi(h_2)), \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2(h_2)), \end{aligned}$$

a ponieważ dla każdych $(g_1, g_3) \in G_1 \times G_3$ zachodzi

$$\chi_2(\text{Ad}_{\sigma(g_3)} \circ \chi_1(g_1)) = \chi_2 \circ \sigma(g_3) \cdot_3 \chi_2 \circ \chi_1(g_1) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma(g_3^{-1}) = g_3 \cdot_3 e_3 \cdot_3 g_3^{-1} = e_3,$$

przeto możemy przepisać powyższe w sugestywnej postaci

$$\iota(g_2 \cdot_2 h_2) = (\xi(g_2) \cdot_1 (\chi_1 \uparrow_{\text{Im } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma \circ \chi_2(g_2)} \circ \chi_1) \circ \xi(h_2), \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2(h_2)).$$

Zważywszy, że obraz G_3 względem odwzorowania

$$\chi_1 \uparrow_{\text{Im } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma(\cdot)} \circ \chi_1 : G_3 \longrightarrow \text{End}_{\mathbf{Grp}}(G_1) : g_3 \longmapsto \chi_1 \uparrow_{\text{Im } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma(g_3)} \circ \chi_1$$

w oczywisty sposób zawiera się w podzbiorze $\text{Aut}(G_1) \subset \text{End}_{\mathbf{Grp}}(G_1)$, możemy ostatecznie – na podstawie porównania wyniku naszych rachunków z formułą na m_φ w Def. 53 – zapisać

$$\iota(g_2 \cdot_2 h_2) = \iota(g_2) \cdot_{\chi_1 \uparrow_{\text{Im } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma(\cdot)} \circ \chi_1} \iota(h_2).$$

Odwzorowanie ι zostało skonstruowane jako homomorfizm grup, na obecnym etapie pozostaje przeto jedynie przekonać się o bijektywnym charakterze ι . Po pierwsze więc równość

$$\iota(g_2) = (e_1, e_3)$$

oznacza parę równości

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2^{-1}) = \chi_1(e_1) = e_2 \quad \wedge \quad \chi_2(g_2) = e_3,$$

które możemy przepisać w postaci równoważnej

$$g_2 = \sigma(\chi_2(g_2)) \quad \wedge \quad \chi_2(g_2) = e_3,$$

otrzymując tym sposobem równość

$$g_2 = \sigma(e_3) = e_2,$$

przesądzającą o injektywności ι . Dla dowolnej pary $(g_1, g_3) \in G_1 \times G_3$ wybierzmy dowolne $g_2 \in G_2$ o własności $\chi_2(g_2) = g_3$ (co jest możliwe z racji surjektywności χ_2), po czym z jego warstwy $g_2 \text{ Ker } \chi_2 = g_2 \text{ Im } \chi_1$ wybierzmy reprezentanta $g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1)$, $h_1 \in G_1$, który spełnia dodatkowy warunek

$$g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(\chi_1(h_1^{-1}) \cdot_2 g_2^{-1}) \stackrel{!}{=} \chi_1(g_1).$$

Ażeby przekonać się o tym, że reprezentant taki istnieje, upraszczamy powyższy warunek – wykorzystując po drodze dokładność ciągu (1.3.2) w G_2 – do postaci

$$g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2)^{-1} \stackrel{!}{=} \chi_1(g_1)$$

albo równoważnej

$$\chi_1(h_1) \stackrel{!}{=} g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1(g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2).$$

Bezpośredni rachunek

$$\begin{aligned} \chi_2(g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1(g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2)) &= \chi_2(g_2)^{-1} \cdot_3 \chi_2 \circ \chi_1(g_1) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma \circ \chi_2(g_2) \\ &= \chi_2(g_2)^{-1} \cdot_3 e_3 \cdot_3 \chi_2(g_2) = e_3, \end{aligned}$$

w którym raz jeszcze przywołujemy dokładność ciągu (1.3.2) w G_2 oraz warunek definiujący σ , przesądza o istnieniu h_1 , oto bowiem pozwala on stwierdzić, że

$$g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1(g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2) \in \text{Ker } \chi_2 = \text{Im } \chi_1.$$

Znaleziony przez nas element $\tilde{g}_2 := g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1)$ spełnia koniunkcję warunków

$$\chi_2(\tilde{g}_2) = g_3 \quad \wedge \quad \tilde{g}_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(\tilde{g}_2^{-1}) = \chi_1(g_1),$$

więc też jego obrazem względem ι jest

$$\iota(\tilde{g}_2) = (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1} \circ \chi_1(g_1), g_3) = (g_1, g_3).$$

To kończy dowód pierwszej implikacji.

I odwrotnie, niechaj $\varphi : G_3 \rightarrow \text{Aut}(G_1)$ będzie homomorfizmem grup zadającym strukturę iloczynu półprostego na $G_1 \rtimes_{\varphi} G_3$ i niech $\iota : G_2 \xrightarrow{\cong} G_1 \rtimes_{\varphi} G_3$ będzie izomorfizmem grup. Wówczas definiujemy odwzorowania:

$$\chi_1 : G_1 \rightarrow G_2 : g_1 \mapsto \iota^{-1}(g_1, e_3),$$

$$\chi_2 : G_2 \rightarrow G_3 : g_2 \mapsto \text{pr}_2 \circ \iota(g_2),$$

które w oczywisty sposób są homomorfizmami grup. Injektywność χ_1 wynika wprost z ciągu równoważności

$$\chi_1(g_1) = e_2 \iff (g_1, e_3) = \iota(e_2) = (e_1, e_3) \iff g_1 = e_1,$$

a równość

$$\chi_2(\iota^{-1}(e_1, g_3)) \equiv \text{pr}_2 \circ \iota \circ \iota^{-1}(e_1, g_3) = \text{pr}_2(e_1, g_3) = g_3,$$

słuszna dla dowolnego $g_3 \in G_3$, przesądza o surjektywności χ_2 . Pozostaje wskazać retrakcję ρ dla χ_1 oraz cięcie σ dla χ_2 . Bez trudu przekonujemy się, że homomorfizmy

$$\rho : G_2 \rightarrow G_1 : g_2 \mapsto \text{pr}_1 \circ \iota(g_2)$$

oraz

$$\sigma : G_3 \rightarrow G_2 : g_3 \mapsto \iota^{-1}(e_1, g_3)$$

mają pożądane własności. □

Rudymenty topologii i geometrii różniczkowej

Naturalna ścieżka ku zastosowaniom metod i wyników algebry wyższej w modelowaniu zjawisk fizycznych prowadzi przez topologię i rachunek nieskończenie małych, tj. rachunek różniczkowy i całkowy, osadzone w kontekście geometrycznym. Ta prosta konstatacja każe nam przywołać w sposób możliwie zwięzły istotne pojęcia i twierdzenia topologii, analizy funkcjonalnej oraz geometrii różniczkowej, z których przyjdzie nam korzystać w naszych rozważaniach.

1. Niezbędnik topologiczny

Zacznijmy od przypomnienia podstawowych pojęć z zakresu topologii ogólnej. Punktem wyjścia jest

DEFINICJA 54. Niechaj X będzie zbiorem. **Topologia na X** to rodzina $\mathcal{T}(X) \subset 2^X$ jego podzbiorów spełniających następujące aksjomaty

- (T1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}(X)$;
- (T2) $\forall \mathcal{T} \subset \mathcal{T}(X) : \bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{T}} \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$;
- (T3) $\forall N \in \mathbb{N} \forall \mathcal{O}_n : \overline{1, N} \rightarrow \mathcal{T}(X) : \bigcap_{n=1}^N \mathcal{O}_n \in \mathcal{T}(X)$.

Baza topologii to podzbiór $\mathcal{B}(X) \subset 2^X$ o własnościach

- (BT1) $X = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{B}(X)} \mathcal{B}$;
- (BT2) $\forall \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}(X) : (x \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \implies \exists \mathcal{B}_{12} \in \mathcal{B}(X) : x \in \mathcal{B}_{12} \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$,

przy czym **topologia generowana** przez $\mathcal{B}(X)$ jest określona jako przecięcie („element po elemencie”) wszystkich topologii zawierających $\mathcal{B}(X)$. **Podbaza topologii** to podzbiór $\mathcal{G}(X) \subset 2^X$ o tej własności, że

$$\mathcal{B}_{\mathcal{G}}(X) := \left\{ \bigcap_{i \in I} \mathcal{G}_i \mid \mathcal{G}_i \in \mathcal{G}(X) \wedge |I| < \infty \right\}$$

jest bazą topologii. Mając dowolne dwie topologie $\mathcal{T}_A(X)$, $A \in \{1, 2\}$ na X , topologię $\mathcal{T}_1(X)$ nazwiemy **słabszą** od $\mathcal{T}_2(X)$, topologię $\mathcal{T}_2(X)$ zaś – **silniejszą** od $\mathcal{T}_1(X)$, jeśli $\mathcal{T}_1(X) \subset \mathcal{T}_2(X)$.

Parę $(X, \mathcal{T}(X))$ złożoną ze zbioru z wyróżnioną na nim topologią nazwiemy **przestrzenią topologiczną**. Zbiory należące do $\mathcal{T}(X)$ określamy mianem **zbiorów otwartych**. Podzbiór $\mathcal{C} \subset X$ o własności $X \setminus \mathcal{C} \in \mathcal{T}(X)$ nazwiemy **domkniętym**. Przecięcie wszystkich zbiorów domkniętych zawierających podzbiór $Y \subset X$ to **domknięcie** Y , oznaczane symbolem \bar{Y} – jest to najmniejszy zbiór domknięty zawierający Y (istotnie, dopełnienie w X przecięcia zbiorów jest sumą dopełnień tychże zbiorów).

Podprzestrzeń topologiczna przestrzeni $(X, \mathcal{T}(X))$ to para $(Y, \mathcal{T}_X(Y))$ złożona z podzbioru $Y \subset X$ oraz jego topologii $\mathcal{T}_X(Y) = \{ \mathcal{O} \cap Y \mid \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X) \}$,

zwanej **topologią podprzestrzeni** (lub **względna**). Zbiory otwarte i zbiory domknięte w tej topologii noszą miano **względnie otwartych** i – odpowiednio – **względnie domkniętych**.

Odwzorowanie $f : X_1 \rightarrow X_2$ z przestrzeni topologicznej $(X_1, \mathcal{T}(X_1))$ w przestrzeń topologiczną $(X_2, \mathcal{T}(X_2))$ nazwiemy **ciągłym w punkcie** $x \in X_1$, ilekroć przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego zawierającego $f(x)$ zawiera pewien zbiór otwarty $\mathcal{U} \ni x$, czyli

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) : (\mathcal{O} \ni f(x) \implies (\exists \mathcal{U} \in \mathcal{T}(X_1) : x \in \mathcal{U} \wedge f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{O})).$$

Odwzorowanie ciągłe to takie, które jest ciągłe w każdym punkcie swej dziedziny, czyli takie, które spełnia warunek

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) : f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_1).$$

Równoważnie odwzorowanie ciągłe charakteryzuje to, że przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego względem niego jest domknięty. Odwracalne odwzorowanie ciągłe o ciągłej odwrotności nazywamy **homeomorfizmem**. Przestrzenie topologiczne wraz z odwzorowaniami ciągłymi między nimi tworzą **kategorię przestrzeni topologicznych**, którą będziemy oznaczać symbolem

Top.

Injekttywne odwzorowanie ciągłe $f : X \rightarrow Y$ będące homeomorfizmem na obraz względem topologii podprzestrzeni na tymże zwie się **zanurzeniem topologicznym**. **Odwzorowanie otwarte** z przestrzeni topologicznej $(X_1, \mathcal{T}(X_1))$ w przestrzeń topologiczną $(X_2, \mathcal{T}(X_2))$ to odwzorowanie $f : X_1 \rightarrow X_2$ spełniające warunek

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_1) : f(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_2).$$

Odwzorowanie domknięte natomiast spełnia warunek

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_1) : X_2 \setminus f(X_1 \setminus \mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_2).$$

Odwzorowanie ilorazowe to takie odwzorowanie surjektywne, które spełnia warunek

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) : (\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) \iff f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_1)).$$

▲

Na styku topologii i algebry odnajdujemy

DEFINICJA 55. Przyjmijmy zapis Def. 3 i 10. **Topologiczna struktura algebraiczna prosta** to struktura algebraiczna prosta \mathcal{S} o nośniku S wyposażonym w topologię, względem której wszystkie operacje k_i -argumentowe ϕ_{k_i} , $i \in \overline{1, N}$ są ciągłe. Podobnie **topologiczna struktura algebraiczna złożona** to struktura algebraiczna złożona o składowych (prostych) będących topologicznymi strukturami algebraicznymi prostymi o topologiach, względem których wszystkie współdefiniujące tę strukturę złożoną odwzorowania ϕ_i , $i \in I$ także są ciągłe. W tym sensie mówimy o **grupach topologicznych**, **pierścieniach topologicznych**, **ciałach topologicznych**, czy wreszcie **topologicznych modułach nad pierścieniem (topologicznym)** oraz – w tej liczbie – **topologicznych przestrzeniach wektorowych**.

▲

Elementarną własność podprzestrzeni topologicznych opisuje

STWIERDZENIE 59. *Przyjmijmy zapis Def. 54 i niechaj $(Y, \mathcal{T}_X(Y))$ będzie podprzestrzenią przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$. Podzbiór $S \subset Y$ jest domknięty (w topologii podprzestrzeni) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podzbiór domknięty $C \subset X$ (w topologii $\mathcal{T}(X)$) o własności $S = C \cap Y$.*

■

Dowód: Domkniętość S w topologii podprzestrzeni jest równoważna otwartości $Y \setminus S$ w tejże topologii, czyli istnieniu podzbioru $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$ o własności $Y \setminus S = \mathcal{O} \cap Y$, to jednak jest równoważne istnieniu podzbioru domkniętego $C \subset X$ o własności $Y \setminus S = (X \setminus C) \cap Y$, czyli ostatecznie – istnieniu podzbioru domkniętego $C \subset X$ o własności

$$S \equiv Y \setminus (Y \setminus S) = Y \setminus (X \setminus C) \cup Y \setminus Y = Y \setminus (X \setminus C) = Y \cap C.$$

□

Z kolei pojęcie „zanurzenia topologicznego” przybliża

STWIERDZENIE 60. *Przyjmijmy zapis Def. 54. Każde domknięte odwzorowanie ciągłe $f : X_1 \rightarrow X_2$, które jest injektywne, jest zanurzeniem topologicznym.*

■

Dowód: Wobec injektywności f odwzorowanie ograniczone $\tilde{f} : X_1 \rightarrow f(X_2) : x \mapsto f(x)$ jest bijektywne, istnieje zatem jego odwrotność $\tilde{f}^{-1} : f(X_2) \rightarrow X_1$, a przy tym ilekroć podzbiór $\mathcal{O} \subset X_1$ jest domknięty, wówczas jego przeciwobraz $(\tilde{f}^{-1})^{-1}(\mathcal{O}) = \tilde{f}(\mathcal{O}) \equiv f(\mathcal{O})$ jest domknięty w X_2 wprost na mocy założenia, więc także domknięty w $f(X_1)$ w topologii podprzestrzeni. To pokazuje, że odwzorowanie \tilde{f}^{-1} jest ciągłe, przeto f jest homeomorfizmem na swój obraz. □

W dyskusji obiektów geometrycznych lokalnie modelowanych na strukturach algebraicznych przydatną okaże się także

DEFINICJA 56. Przyjmijmy zapis Def. 54. **Otoczeniem punktu** $x \in X$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ nazwiemy dowolny zbiór otwarty $\mathcal{O}_x \in \mathcal{T}(X)$ zawierający ten punkt, $\mathcal{O}_x \ni x$. **Otoczenie podzbioru** $S \subset X$ to dowolny zbiór otwarty $\mathcal{O}_S \in \mathcal{T}(X)$ zawierający ten podzbiór, $\mathcal{O}_S \supset S$. **Baza otoczeń punktu** x to podzbiór \mathcal{B}_x zbioru \mathcal{O}_x otoczeń x o własności

$$\forall \mathcal{O}_x \in \mathcal{O}_x \exists \mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}_x : \mathcal{O}_x \supset \mathcal{B}_x.$$

Mówimy, że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T}(X))$ **spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności**, jeśli każdy punkt ma skończoną lub przeliczalnie nieskończoną bazę otoczeń. Ilekroć topologia $\mathcal{T}(X)$ zbioru X ma skończoną lub przeliczalnie nieskończoną bazę, orzekamy, że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T}(X))$ **spełnia drugi aksjomat przeliczalności**.

▲

Mamy wygodną redefinicję domknięcia zbioru:

STWIERDZENIE 61. *Przyjmijmy zapis Def. 54. Każde otoczenie dowolnego punktu z domknięcia \bar{Y} podzbioru Y przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ zawiera punkt należący do Y . I odwrotnie, dowolny punkt przestrzeni X o tej własności należy do \bar{Y} .*

■

Dowód: Istnienie otoczenia \mathcal{O}_x punktu $x \in \bar{Y}$ o pustym przecięciu z Y oznaczałoby, że zbiór domknięty $\bar{Y} \cap (X \setminus \mathcal{O}_x)$ będący dopełnieniem w X sumy mnogościowej $(X \setminus \bar{Y}) \cup \mathcal{O}_x$ zawiera Y (gdyż własność tę ma \bar{Y}), a przy tym $\bar{Y} \cap (X \setminus \mathcal{O}_x) \not\subseteq \bar{Y}$ (wszak $x \in \bar{Y} \setminus (\bar{Y} \cap (X \setminus \mathcal{O}_x))$), co przeczy minimalności \bar{Y} .

Niech teraz $x \in X$ ma tę własność, że każde jego otoczenie zawiera punkt z Y . Jeśli x należał do zbioru otwartego $X \setminus \bar{Y}$, to istniałby zbiór domknięty \mathcal{C} zawierający Y i taki, że $x \in X \setminus \mathcal{C}$, a zatem także $\mathcal{O}_x \subset X \setminus \mathcal{C}$ dla pewnego otoczenia x , co prowadziłoby do sprzeczności: $\mathcal{O}_x \cap Y = \emptyset$. □

Ustalenie topologii na zbiorze pozwala określić pojęcie zbieżności, o czym mówi

DEFINICJA 57. Przyjmijmy zapis Def. 56. Ciąg $x. : \mathbb{N} \rightarrow X$ nazwiemy **zbieżnym do** $x \in X$, co zapiszemy symbolem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

jeśli każde otoczenie $\mathcal{O}_x \ni x$ zawiera prawie wszystkie jego wyrazy, tj. jeśli istnieje indeks $N_{\mathcal{O}_x} \in \mathbb{N}$ o tej własności, że dla każdego $n \geq N_{\mathcal{O}_x}$ jest $x_n \in \mathcal{O}_x$. Punkt x jest wówczas **granicą ciągu** $x.$ Jeśli natomiast każde otoczenie $\mathcal{O}_x \ni x$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu, to x nazywamy **punktem skupienia ciągu**. ▲

Relację pomiędzy oboma wprowadzonymi tu pojęciami ustala

STWIERDZENIE 62. *Punkt skupienia dowolnego ciągu punktów w przestrzeni spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności jest granicą pewnego podciągu.* ■

Dowód: Niechaj $x. : \mathbb{N} \rightarrow X$ będzie ciągiem punktów przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ i niech x będzie jego punktem skupienia. Wybierzmy dowolną bazę otoczeń $\{\mathcal{O}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ punktu x i rozważmy jego otoczenia postaci

$$\mathcal{Q}_N := \bigcap_{n=0}^N \mathcal{O}_n.$$

W świetle definicji punktu skupienia istnieje taki indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, dla którego $x_{n_0} \in \mathcal{Q}_0$, a dalej dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ określamy rekurencyjnie $n_{k+1} > n_k$ jako najmniejszy indeks o własności $x_{n_{k+1}} \in \mathcal{Q}_{k+1}$. Niechaj teraz \mathcal{O}_x będzie dowolnym otoczeniem punktu x , a wówczas $\mathcal{O}_x \supset \mathcal{O}_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, ponieważ jednak

$$\forall_{k > n} : x_{n_k} \in \mathcal{Q}_k \subset \mathcal{O}_n,$$

przeto stwierdzamy, że x jest granicą podciągu x_{n_k} . □

Pojęcie granicy ciągu pozwala wysłowić jeszcze jedną przydatną alternatywną definicję domknięcia zbioru.

STWIERDZENIE 63. *Przyjmijmy zapis Def. 57, zakładając przy tym, że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T}(X))$ spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności. Wówczas dla dowolnego podzbioru $Y \subset X$ spełniona jest równoważność:*

$$x \in \bar{Y} \iff \exists_{x. : \mathbb{N} \rightarrow Y} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

■

Dowód:

\implies Niechaj $\{\mathcal{O}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie bazą otoczeń punktu $x \in \bar{Y}$. Zdefiniujmy zbiory otwarte

$$\mathcal{Q}_N := \bigcap_{n=0}^N \mathcal{O}_n,$$

z których każdy jest otoczeniem x , więc też zawiera – w świetle Stw. 61 – punkt $x_N \in \mathcal{Q}_N \cap Y$. Ciąg $\{x_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset Y$ jest jawnie zbieżny do x .

\impliedby Dowolne otoczenie punktu x zawiera – wprost z konstrukcji – prawie wszystkie wyrazy ciągu x , z których każdy należy do Y . Teza wynika zatem bezpośrednio ze Stw. 61. □

Na następnym poziomie uszczegółowienia natrafiamy na

DEFINICJA 58. Przyjmijmy zapis Def. 54. **Pokrycie otwarte** przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ to podzbiór $\mathcal{O} \equiv \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{T}(X)$ (ideksowany przez pewien zbiór Λ) o własności

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda = X.$$

Pokrycie otwarte nosi miano **lokalnie skończonego**, jeśli każdy punkt przestrzeni ma otoczenie, które przecina się niepusto tylko ze skończoną liczbą elementów tego pokrycia. **Podpokrycie** pokrycia \mathcal{O} to dowolny podzbiór $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ będący pokryciem otwartym X . **Rozdrobieniem pokrycia** \mathcal{O} nazwiemy pokrycie otwarte $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ o własności

$$(1.4.1) \quad \forall \alpha \in A \quad \exists \lambda \in \Lambda : \mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{O}_\lambda.$$

Przestrzeń topologiczną nazywamy **zwartą**, jeśli dowolne jej pokrycie otwarte ma podpokrycie skończone. W sytuacji, gdy dowolne pokrycie otwarte ma rozdrobienie lokalnie skończone, mówimy o **przestrzeni parazwartej**. Dowolna zwarta podprzestrzeń topologiczna przestrzeni topologicznej nosi miano **zbioru zwartego**. Podzbiór przestrzeni topologicznej, którego domknięcie jest zbiorem zwartym, nazywamy **zbiorem przewartym**. Przestrzeń topologiczną nazwiemy **lokalnie zwartą** (wzgl. **lokalnie przewartą**), jeśli każdy jej punkt zawiera się w pewnym zbiorze zwartym (wzgl. przewartym) zawierającym pewne otoczenie (otwarte) tego punktu. Wreszcie też przestrzeń topologiczną nazwiemy **ciągowo zwartą**, jeśli każdy ciąg jej elementów zawiera podciąg zbieżny do punktu w tej przestrzeni. Odwzorowanie między dwiema przestrzeniami topologicznymi, względem którego przeciwobrazy zbiorów zwartych są zwarte, zwie się **odwzorowaniem właściwym**. ▲

PRZYKŁAD(Y) 24. (Struktury)

- (1) **Topologia trywialna** na zbiorze X to $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, X\}$.
- (2) **Topologia dyskretna** na zbiorze X to $\mathcal{T}(X) \equiv 2^X$. Zbiór z topologią dyskretną określamy mianem **przestrzeni dyskretniej**.
- (3) **Topologia Hausdorffa** na zbiorze X to taka, w której każde dwa punkty $x \neq y \in X$ mają otoczenia wzajem rozłączne. Zbiór z topologią Hausdorffa określamy mianem **przestrzeni Hausdorffa**.

- (4) **Topologia końcowa** (albo **mocna**) na zbiorze X **indukowana wzdłuż** rodziny odwzorowań $f_\lambda : Y_\lambda \rightarrow X$, $\lambda \in \Lambda$ **z topologii** $\mathcal{T}(Y_\lambda)$ na zbiorach Y_λ to

$$f^{-1}(\mathcal{T})(X) = \{ \mathcal{O} \in X \mid \forall \lambda \in \Lambda : f_\lambda^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(Y_\lambda) \}.$$

W szczególności ilekroć mamy do czynienia z pojedynczą przestrzenią topologiczną $(Y, \mathcal{T}(Y))$ odwzorowaną surjektywnie na X , odnośną topologię końcową określamy mianem **topologii ilorazowej** na zbiorze X **indukowanej wzdłuż** $\pi : Y \rightarrow X$ **z topologii** $\mathcal{T}(Y)$ na zbiorze Y , a zbiór X z topologią ilorazową – mianem **przestrzeni ilorazowej**. Wreszcie też w przypadku sumy rozłącznej

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{ (x, \lambda) \mid x \in X_\lambda, \lambda \in \Lambda \}$$

rodziny zbiorów $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ o odnośnych topologiach $\mathcal{T}(X_\lambda)$, indeksowanej przez zbiór (dowolny) Λ , topologię końcową indukowaną wzdłuż kanonicznych zanurzeń

$$\iota_\mu : X_\mu \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : x \mapsto (x, \mu), \quad \mu \in \Lambda$$

zwiemy **topologią sumy rozłącznej**.

- (5) **Topologia początkowa** (albo **słaba**) na zbiorze X **indukowana wzdłuż** rodziny odwzorowań $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ **z topologii** $\mathcal{T}(Y_\lambda)$ na zbiorach Y_λ to topologia $f^* \mathcal{T}(X)$ o podbazie

$$\mathcal{B}(X) = \{ f_\lambda^{-1}(\mathcal{O}_\lambda) \mid \mathcal{O}_\lambda \in \mathcal{T}(Y_\lambda), \lambda \in \Lambda \}.$$

Ilekroć mamy do czynienia z odwzorowaniem X w pojedynczą przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}(Y))$, odnośną topologię początkową określamy mianem **topologii cofnięciowej** na zbiorze X **indukowanej wzdłuż** odwzorowania $f : X \rightarrow Y$ **z topologii** $\mathcal{T}(Y)$ na zbiorze Y . W szczególności w przypadku kanonicznej iniekcji podzbioru w przestrzeń topologiczną odnośna topologia początkowa jest tożsama z topologią podprzestrzeni. Z kolei dla produktu kartezjańskiego $\times_{n=1}^N X_n$ (skończonej) rodziny zbiorów $\{X_n\}_{n \in \overline{1, N}}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ o odnośnych topologiach $\mathcal{T}(X_n)$ topologia początkowa indukowana wzdłuż rzutów kanonicznych $\text{pr}_m : \times_{n=1}^N X_n \rightarrow X_m$, $m \in \overline{1, N}$ to standardowa **topologia produktowa**. Zbiór $\times_{n=1}^N X_n$ z topologią produktową nazywamy **przestrzenią produktową**. **Topologia zwarto-otwarta** na zbiorze $C(X_1, X_2)$ odwzorowań ciągłych z przestrzeni Hausdorffa $(X_1, \mathcal{T}(X_1))$ w przestrzeń Hausdorffa $(X_2, \mathcal{T}(X_2))$ to topologia $\mathcal{T}_{\text{co}}(C(X_1, X_2))$ o podbazie

$$\mathcal{B}(C(X_1, X_2)) = \{ \{ f \in C(X_1, X_2) \mid f(\mathcal{K}) \subset \mathcal{O} \} \mid \mathcal{K} \text{ zwarty}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) \}.$$

✓

Mając w ręku konstrukcję topologii produktowej, możemy wysłowić obserwację dotyczącą przydatnej własności (niemal) moltiplikatywności odwzorowań ilorazowych, co czynimy w

STWIERDZENIE 64. *Przyjmijmy zapis Def. 54 i niechaj $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą otwartymi odwzorowaniami ilorazowymi między odnośnymi przestrzeniami topologicznymi $(X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha))$ oraz $(Y_\alpha, \mathcal{T}(Y_\alpha))$. Odwzorowanie produktowe*

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

jest wówczas odwzorowaniem ilorazowym względem topologii produktowej. ■

Dowód: Surjektywność $f_1 \times f_2$ jest oczywistą konsekwencją surjektywności obu odwzorowań składowych. Istotnie, dla każdej składowej dowolnego punktu $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ znajdujemy punkt w przeciwobrazie $f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$, a wtedy $(y_1, y_2) = (f_1 \times f_2)(x_1, x_2)$. Przechodząc do dyskusji podzbiorów otwartych w $Y_1 \times Y_2$, stwierdzamy, że warunek $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(Y_1 \times Y_2)$ jest równoważny istnieniu rodzin $\{\mathcal{O}_i^\alpha\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(Y_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o własności $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i^1 \times \mathcal{O}_i^2)$, przy czym otwartość elementów tych rodzin implikuje $\{f_\alpha^{-1}(\mathcal{O}_i^\alpha)\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(X_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Wówczas jednak przeciwobraz $(f_1 \times f_2)^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} (f_1^{-1}(\mathcal{O}_i^1) \times f_2^{-1}(\mathcal{O}_i^2))$ jest sumą mnogościową produktów zbiorów otwartych i jako taki jest otwarty w topologii produktowej na $X_1 \times X_2$. Dowód implikacji odwrotnej wymaga skorzystania z otwartości odwzorowań składowych. Istotnie, otwartość $(f_1 \times f_2)^{-1}(\mathcal{O})$ oznacza istnienie rodzin $\{\mathcal{U}_j^\alpha\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}(X_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o własności $(f_1 \times f_2)^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{j \in J} (\mathcal{U}_j^1 \times \mathcal{U}_j^2)$, która pociąga za sobą równość $\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J} (f_1(\mathcal{U}_j^1) \times f_2(\mathcal{U}_j^2))$. Otwartość odwzorowań f_1 i f_2 gwarantuje otwartość każdego ze zbiorów $f_1(\mathcal{U}_j^1)$ i $f_2(\mathcal{U}_j^2)$, ta zaś przesądza o przynależności \mathcal{O} do topologii produktowej $\mathcal{T}(Y_1 \times Y_2)$. □

W dalszej części dokonamy przeglądu stwierdzeń dotyczących pojęcia zwartości. Zaczynamy od ustalenia związku między różnymi jej rodzajami.

STWIERDZENIE 65. *Każda zwarta przestrzeń topologiczna spełniająca pierwszy aksjomat przeliczalności jest ciągowo zwarta.* ■

Dowód: Niechaj $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ będzie ciągiem punktów w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności. Załóżmy, że nie istnieje zbieżny podciąg ciągu x , a zatem – w świetle Stw. 62 – ciąg ten nie posiada punktów skupienia. Oznacza to, że dowolny punkt $x \in X$ ma otoczenie \mathcal{O}_x zawierające jedynie skończoną liczbę wyrazów x . Utworzywszy z takich otoczeń pokrycie otwarte, $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x$, możemy następnie – wobec zwartości X – wybrać z niego podpokrycie skończone $\{\mathcal{O}_{x_n}\}_{n \in \overline{1, N}}$, co jednak prowadzi do sprzeczności, oto bowiem każdy z elementów podpokrycia zawiera skończoną liczbę wyrazów x , co oznacza, że także przestrzeń X zawiera skończoną ich liczbę. □

W następnej kolejności porządkujemy relacje między pojęciami domkniętości i (para-)zwartości.

STWIERDZENIE 66. *Domknięty podzbiór zwartej przestrzeni topologicznej jest zwarty. Jeśli przestrzeń topologiczna jest przestrzenią Hausdorffa, to także – odwrotnie – dowolny jej zwarty podzbiór jest domknięty. Wreszcie też domknięty podzbiór parazwartej przestrzeni topologicznej jest parazwarty.* ■

Dowód: Niechaj $(X, \mathcal{T}(X))$ będzie zwartą (wzgl. parazwartą) przestrzenią topologiczną, $\mathcal{K} \subset X$ zaś – jej domkniętym podzbiorem. Wybierzmy (dowolnie) otwarte pokrycie \mathcal{O} podzbioru \mathcal{K} . Zważywszy, że $X \setminus \mathcal{K}$ jest otwarty, $\tilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \cup \{X \setminus \mathcal{K}\}$ jest otwartym pokryciem X , z którego z racji zwartości (wzgl. parazwatości) X możemy wybrać podpokrycie skończone (wzgl. lokalnie skończone). Usunąwszy z niego – jeśli trzeba – $X \setminus \mathcal{K}$, otrzymujemy skończone (wzgl. lokalnie skończone) podpokrycie (pokrycia \mathcal{O}) podzbioru \mathcal{K} , którego istnienie dowodzi zwartości (wzgl. parazwatości) \mathcal{K} .

Niechaj teraz $(X, \mathcal{T}(X))$ będzie przestrzenią Hausdorffa, \mathcal{K} zaś – jej zwartym podzbiorem. Rzecz jasna, \mathcal{K} z topologią podprzestrzeni jest także przestrzenią Hausdorffa. Wybierzmy (dowolnie) punkt $x \in X \setminus \mathcal{K}$. Musimy pokazać, że istnieje otoczenie (w rozumieniu Def. 56) $\mathcal{O}_x \ni x$ o własności $\mathcal{O}_x \subset X \setminus \mathcal{K}$. Z racji hausdorffowskości X z dowolnym punktem $y \in \mathcal{K}$ możemy stowarzyszyć parę zbiorów otwartych: $\mathcal{U}_y \ni x$ oraz $\mathcal{O}_y \ni y$ o własności $\mathcal{U}_y \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$. Zbiór $\{\mathcal{O}_y \mid y \in \mathcal{K}\}$ jest otwartym pokryciem \mathcal{K} , z którego wobec zwartości \mathcal{K} możemy wybrać skończone podpokrycie $\{\mathcal{O}_{y_i} \mid i \in \overline{1, N}\}$. Wybierzmy zbiory $\mathcal{U}_{y_i} \ni x$ dla każdego z punktów y_i i zdefiniujmy zbiór

$$\mathcal{U} := \bigcap_{i=1}^N \mathcal{U}_{y_i},$$

jawnie otwarty, bo będący przecięciem skończonej rodziny zbiorów otwartych. Jako że $x \in \mathcal{U}_{y_i}$ dla każdego indeksu $i \in \overline{1, N}$, stwierdzamy, że $x \in \mathcal{U}$. Wreszcie też $z \in \mathcal{U}$ implikuje $z \notin \mathcal{O}_{y_i}$ dla każdego indeksu $i \in \overline{1, N}$, przeto $z \notin \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_{y_i} = \mathcal{K}$. Zbiór \mathcal{U} ma zatem wszystkie pożądane własności. \square

Przechodząc do dyskusji funkcji na przestrzeniach (pre)zwartych, znajdujemy nieco mniej elementarną relację

STWIERDZENIE 67. *Każde ciągłe odwzorowanie właściwe o dziedzinie spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności oraz lokalnie przewartej przeciwdziedzinie jest domknięte.*

■

Dowód: Niechaj $f : X_1 \rightarrow X_2$ będzie ciągłym odwzorowaniem właściwym między przestrzeniami topologicznymi $(X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha))$, $\alpha \in \{1, 2\}$ i niech $\mathcal{C} \subset X_1$ będzie zbiorem domkniętym. Wybrawszy dowolny punkt $y \in f(\mathcal{C})$ w domknięciu $f(\mathcal{C})$, wnioskujemy – w odwołaniu do Stw. 63 – o istnieniu ciągu punktów $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f(\mathcal{C})$ zbieżnego do y ,

$$(1.4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Każdy z tych punktów ma swój przeciwobraz,

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \mathcal{C} : f(x_n) = y_n.$$

Korzystając z lokalnej przewartości X_2 , wybierzmy dowolny przewarty podzbiór $\mathcal{K} \ni y$, a wówczas relacja (1.4.2) implikuje istnienie indeksu $N \in \mathbb{N}$ o własności

$$\forall n > N : y_n \in \mathcal{K} \subset \bar{\mathcal{K}},$$

więc też

$$\forall n > N : x_n \in f^{-1}(\bar{\mathcal{K}}),$$

a ponieważ zbiór $f^{-1}(\overline{K})$ jest zwarty jako przeciwobraz zbioru zwartego, przeto istnieje – w świetle Stw. 65 – podciąg $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ zbieżny do punktu $x \in f^{-1}(\overline{K})$. Jako że $\mathcal{C} \supset \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest domknięty, zachodzi $x \in \mathcal{C}$, w takim jednak razie – wobec ciągłości f –

$$f(x) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y,$$

skąd wniosek, że $y \in f(\mathcal{C})$ □

Transport struktury przestrzeni zwartej wzdłuż odwzorowań ciągłych, także przydatny w dalszej części wykładu, opisuje

STWIERDZENIE 68. *Przyjmijmy zapis Def. 54. Ciągły obraz zwartej przestrzeni topologicznej jest zwarty.* ■

Dowód: Niechaj $(K, \mathcal{T}(K))$ i $(X, \mathcal{T}(X))$ będą przestrzeniami topologicznymi, przy czym zakładamy, że K jest zwarta, i niech $f : K \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wybierzmy (dowolnie) otwarte pokrycie $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ obrazu $f(K)$. Wobec ciągłości f zbiór $\{f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest otwartym pokryciem K , z którego możemy wybrać skończone podpokrycie $\{f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda_0 \subset \Lambda}$, $|\Lambda_0| < \infty$. Zbiór $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in S}$ jest wówczas skończonym podpokryciem obrazu i jego istnienie przesądza o zwartości tego ostatniego. □

Wreszcie na koniec przypomnimy pojęcia, które odegrają istotną rolę w przyszłej dyskusji geometrycznych aspektów algebry homologicznej.

DEFINICJA 59. Przyjmijmy zapis Def. 54. Przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{T}(X))$ nazywamy **niespójną**, jeśli istnieją zbiory $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}(X) \setminus \{\emptyset\}$ o własnościach

$$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = X \quad \wedge \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset.$$

Ileokroć zbiory o tych własnościach nie istnieją, przestrzeń X określamy mianem **spójnej**. Każdy podzbiór X , który jako podprzestrzeń topologiczna jest spójny, zwie się (**pod**)zbiorem **spójnym**. Określiwszy w X relację równoważności

$$x \sim y \quad \iff \quad \exists Y \subset X : (Y \text{ spójny} \wedge x, y \in Y),$$

klasy abstrakcji tej relacji (czyli podzbiory spójne maksymalne w sensie relacji \subseteq) nazwiemy jej **składowymi spójnymi**. Składowa spójna X zawierająca punkt $x \in X$ bywa nazywana **składową spójną punktu x** . **Przestrzeń lokalnie spójna** to taka, której każdy punkt ma bazę otoczeń złożoną ze zbiorów spójnych.

Ścieżka (ciągła) w X z punktu $x \in X$ do punktu $y \in Y$ to odwzorowanie ciągle $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ spełniająca warunki $(\gamma(0), \gamma(1)) = (x, y)$. Ścieżka zamknięta, tj. taka, która spełnia warunek $\gamma(0) = \gamma(1)$, jest nazywana **pętlą (zaczepioną w $\gamma(0)$)**. Zbiór pętli w X wyposażony w topologię zwarto-otwartą z Przykł. 24 (6) nazywamy **przestrzenią pętli (swobodnych)** i oznaczamy symbolem

$$\mathbb{L}X \equiv (C(\mathbb{S}^1, X), \mathcal{T}_{\text{co}}(C(\mathbb{S}^1, X))).$$

Istnienie ścieżki łączącej punkty określa na X relację równoważności

$$x \sim_p y \quad \iff \quad \exists \gamma \in C([0, 1], X) : (\gamma(0) = x \wedge \gamma(1) = y),$$

której klasy abstrakcji nazwiemy jej **składowymi drogowo spójnymi**. Składowa drogowo spójna X zawierająca punkt $x \in X$ bywa nazywana **składową drogowo**

spójną punktu x . Przestrzeń topologiczna (niepusta) o jednej składowej drogowo spójnej to **przestrzeń drogowo spójna** (albo **0-spójna**). **Przestrzeń lokalnie drogowo spójna** to taka, której każdy punkt ma bazę otoczeń złożoną ze zbiorów drogowo spójnych.

Dla dowolnych przestrzeni topologicznych $(X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha))$, $\alpha \in \{1, 2\}$ i odcinka $I \equiv [0, 1]$ (wyposażonego w topologię podprzestrzeni indukowaną z \mathbb{R}) oraz pary odwzorowań ciągłych $f_\beta : X_1 \rightarrow X_2$, $\beta \in \{0, 1\}$ odwzorowanie ciągłe

$$H : X_1 \times I \rightarrow X_2$$

spełniające warunki

$$\forall_{x \in X_1} : (H(x, 0) = f_0(x) \quad \wedge \quad H(x, 1) = f_1(x))$$

nosi miano **homotopii od** f_0 do f_1 . Dowolne dwa odwzorowania, dla których istnieje odnośna homotopia, nazwiemy **homotopijnymi**. Ilekroć na pewnym (niepustym) podzbiornie $Y_1 \subset X_1$ homotopia H od f_0 do f_1 oraz powiązane przez nią odwzorowania spełniają warunek

$$\forall_{(y,t) \in Y_1 \times I} : f_0(y) = H(y,t) = f_1(y),$$

mówimy, że odwzorowania f_0 i f_1 są **homotopijne względem** Y_1 . Homotopijność (względem Y_1) jest relacją równoważności na zbiorze $C(X_1, X_2)$ odwzorowań ciągłych z X_1 do X_2 , a jej klasy abstrakcji nazywamy **klasami homotopii (względem Y_1)**. W szczególności w przypadku $X_1 = I$ oraz $Y_1 = \{0, 1\}$ ścieżki homotopijne względem Y_1 nazywamy **drogowo homotopijnymi**. Klasę abstrakcji ścieżki γ względem relacji drogowej homotopii będziemy oznaczać symbolem $[\gamma]_{\text{ph}}$. Przestrzeń drogowo spójna X , w której spełniony jest warunek

$$\forall_{\gamma \in LX} : [\gamma]_{\text{ph}} = [\gamma(0)_*]_{\text{ph}},$$

w którego zapisie $\gamma(0)_*$ oznacza pętlę stałą $\gamma(0)_* : [0, 1] \rightarrow \{\gamma(0)\} \subset X$, nosi miano **przestrzeni jednospójnej** (wzgl. **1-spójnej**). Każdy podzbiór X , który jako podprzestrzeń topologiczna jest jednospójny, zwie się **(pod)zbiorem jednospójnym** (wzgl. **1-spójnym**).

Nakrycie (topologiczne) to trójka (\tilde{X}, X, π) złożona z drogowo spójnej i lokalnie drogowo spójnej przestrzeni topologicznej $(\tilde{X}, \mathcal{T}(\tilde{X}))$, zwanej **przestrzenią nakrywającą** (lub **przestrzenią totalną nakrycia**), i przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$, zwanej **bazą nakrycia**, oraz ciągłej surjekcji $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, zwanej **rzutem nakrycia**, przy czym każdy punkt $x \in X$ ma spójne otoczenie \mathcal{O}_x **równomiernie pokryte** przez π , tj. takie, że każda spójna składowa przeciwobrazu $\pi^{-1}(\mathcal{O}_x)$, zwana **gałęzią nakrycia**, jest przez π odwzorowywana homeomorficznie na \mathcal{O}_x . Przestrzeń dyskretną $\pi^{-1}(\{x\}) \equiv \tilde{X}_x$ nazywamy **włóknem nakrycia nad x** , a jego moc, lokalnie stałą na bazie (czyli stałą na spójnych składowych bazy), określamy mianem **krotności nakrycia**. Nakrycie o globalnie stałej krotności $n \in \mathbb{N}$ zwie się **nakryciem n -krotnym**. Ilekroć przestrzeń nakrywająca jest jednospójna, mówimy o **nakryciu uniwersalnym**. ▲

UWAGA 13. Jest oczywiste, że każda przestrzeń 0-spójna jest zarazem spójna. O tym, że oba pojęcia nie są równoważne, przekonuje analiza **sinusoidy zagęszczonej** (zwanej też **sinusoidą warszawską**), czyli zbioru

$$S := \{ (x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^{\times 2} \mid x \in]0, \frac{1}{\pi}] \} \cup \{ (0, y) \in \mathbb{R}^{\times 2} \mid y \in [-1, 1] \}$$

wyposażonego w topologię podprzestrzeni indukowaną z \mathbb{R}^2 .

2. Fundamentalne struktury i twierdzenia analizy

Dyskusja własności analitycznych (wyższego rzędu) odwzorowań między przestrzeniami topologicznymi lokalnie modelowanymi na (otwartych podzbiorach) \mathbb{R}^n , a zatem także – w konsekwencji powyższego – analiza strukturalnych relacji między rzeczonymi przestrzeniami (takich jak zanurzenie, nakrycie *etc.*), w szczególności zaś zrozumienie (lokalnych) automorfizmów tychże przestrzeni indukowanych przez gładkie rozkłady wektorów stycznych nad nimi, wymagają elementarnych narzędzi teorii przestrzeni Banacha, które rekapitulujemy zwięźle w niniejszym rozdziale. Zaczynamy od

DEFINICJA 60. Przyjmijmy zapis Def. 15. **Metryka** na zbiorze X to odwzorowanie

$$d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

o własnościach:

- (MS1) $\forall_{x,y,z \in X} : d_X(x,z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z)$ („nierówność trójkąta”);
- (MS2) $\forall_{x,y \in X} : d_X(y,x) = d_X(x,y)$ (symetria);
- (MS3) $\forall_{x,y \in X} : (d_X(x,y) = 0 \implies y = x)$ (niezwyrodnienie).

Para (X, d_X) złożona ze zbioru X wyróżnioną metryką d_X nosi miano **przestrzeni metrycznej**. Dwie metryki d_X^1 i d_X^2 na zbiorze X nazwiemy **równoważnymi**, jeśli istnieją stałe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ o własności

$$\forall_{x,y \in X} : C_1 \cdot d_X^1(x,y) \leq d_X^2(x,y) \leq C_2 \cdot d_X^1(x,y).$$

Kula otwarta o środku w $x \in X$ i promieniu $R \in \mathbb{R}_{>0}$ to zbiór

$$B_X(x; R) := \{ y \in X \mid d_X(y, x) < R \}.$$

Topologia przestrzeni metrycznej złożona z podzbiorów $\mathcal{O} \subset X$ spełniających warunków

$$\forall_{x \in \mathcal{O}} \exists_{R \in \mathbb{R}_{>0}} : B_X(x; R) \subset \mathcal{O},$$

a więc mająca za bazę zbiór wszystkich kul otwartych w X , jest znana jako **topologia metryczna**. **Podzbiór ograniczony** \mathcal{B} w przestrzeni metrycznej (X, d_X) to taki, który spełnia warunek

$$\exists_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \forall_{x,y \in \mathcal{B}} : d_X(x,y) \leq R.$$

Odwzorowanie $f : S \longrightarrow X$ ze zbioru S w przestrzeń metryczną X nazwiemy **ograniczonym**, jeśli jego zbiór wartości $f(S) \subset X$ jest ograniczony. Pośród odwzorowań między przestrzeniami metrycznymi (X_1, d_{X_1}) i (X_2, d_{X_2}) wyróżniamy **izometrie**, tj. odwzorowania $f : X_1 \longrightarrow X_2$ o własności

$$\forall_{x,y \in X_1} : d_{X_2}(f(x), f(y)) = d_{X_1}(x, y).$$

Przestrzenie metryczne wraz z izometriami tworzą **kategorię przestrzeni metrycznych**, którą w dalszej części naszych rozważań będziemy oznaczać symbolem Metr. W kategorii tej istnieje struktura produktowa – w szczególności ustaliliśmy

dowolnie $p \in \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$, **iloczynem kartezjańskim typu p przestrzeni metrycznych** (X_k, d_{X_k}) , $k \in \overline{1, N}$, $N \in \mathbb{N}^*$ będziemy nazywać przestrzeń metryczną

$$\left(\prod_{k=1}^N X_k, d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)} \right)$$

z **metryką produktową typu p** daną formułą

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)} &: \prod_{k=1}^N X_k \times \prod_{l=1}^N X_l \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &: ((x_1, x_2, \dots, x_N), (y_1, y_2, \dots, y_N)) \longmapsto \left(\sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

dla $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, wzgl.

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)} &: \prod_{k=1}^N X_k \times \prod_{l=1}^N X_l \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &: ((x_1, x_2, \dots, x_N), (y_1, y_2, \dots, y_N)) \longmapsto \max_{k \in \overline{1, N}} d_{X_k}(x_k, y_k). \end{aligned}$$

Ciąg Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej to dowolny ciąg $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ o własności

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall m, n > N_\varepsilon : d_X(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Jeśli każdy ciąg Cauchy'ego punktów z X ma granicę w X w sensie Def. 57 w topologii metrycznej, tj. istnieje dlań punkt $x \in X$ o własności

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > N_\varepsilon : d_X(x, x_n) < \varepsilon,$$

to wówczas X określamy mianem **zupłej przestrzeni metrycznej**.

Norma na grupie przemiennej G to odwzorowanie

$$\|\cdot\| : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

o własnościach:

- (NG1) $\forall g, h \in G : \|g + h\| \leq \|g\| + \|h\|$ („nierówność trójkąta”);
- (NG2) $\forall (n, g) \in \mathbb{Z} \times G : \|ng\| = |n| \cdot \|g\|$ (absolutna \mathbb{Z} -jednorodność stopnia 1);
- (NG3) $\forall g \in G : (\|g\| = 0 \implies g = 0_G)$ (niezwyrodnienie).

Grupę z wyróżnioną normą nazywamy **grupą unormowaną** (lub **grupą z normą**). Analogicznie definiujemy **unormowany pierścień przemienny** (lub **pierścień przemienny z normą**) jako taki, którego grupa przemienna (z dodawaniem) jest grupą unormowaną, a do tego spełniony jest aksjomat

$$(NR1) \quad \forall g, h \in G : \|g \cdot_R h\| \leq \|g\| \cdot \|h\|.$$

Plekość pierścienia niesie bogatszą strukturę ciała, mówimy o **ciele unormowanym** (lub **ciele z normą**). Wreszcie też **unormowana przestrzeń wektorowa** (lub **przestrzeń wektorowa z normą**) to przestrzeń liniowa V nad ciałem \mathbb{K} z normą $\|\cdot\|_{\mathbb{K}}$, w której grupa przemienna V jest wyposażona w normę $\|\cdot\|_V$ o dodatkowej własności

$$(NV1) \quad \forall (\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V : \|\lambda \triangleright v\|_V = \|\lambda\|_{\mathbb{K}} \cdot \|v\|_V.$$

Norma na przestrzeni wektorowej indukuje na niej (jawnie translacyjnie niezmienniczą) metrykę

$$\forall v, w \in V : d_V(v, w) := \|v - w\|_V.$$

Unormowaną przestrzeń wektorową zupełną względem tejże metryki określamy mianem **przestrzeni Banacha**.

Ograniczony operator liniowy między przestrzeniami Banacha $(V_1, \|\cdot\|_1)$ i $(V_2, \|\cdot\|_2)$ to odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe $\chi : V_1 \rightarrow V_2$, dla którego istnieje stała $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ o własności

$$\forall v \in V_1 : \|\chi(v)\|_2 \leq C \cdot \|v\|_1.$$

Przestrzeń \mathbb{K} -liniową powyższych ograniczonych operatorów liniowych będziemy oznaczać symbolem

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \equiv \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \mid \chi \text{ ograniczony} \},$$

stosując także notację skróconą

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V) \equiv \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V, V).$$

Przestrzeń Banacha wraz z ograniczonymi operatorami liniowymi tworzą **kategorię przestrzeni Banacha** (nad ciałem \mathbb{K}), którą w dalszej części naszych rozważań będziemy oznaczać symbolem $\text{Ban}_{\mathbb{K}}$. ▲

UWAGA 14. Jedynym nieoczywistym elementem powyższej definicji jest konstrukcja metryk produktowych $d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)}$, a ściśle – nierówność trójkąta dla zapostulowanej metryki. Oznaczmy $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ i $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$. Jej dowód w przypadku $p = \infty$ jest natychmiastowy:

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)}(x, y) &\equiv \max_{k \in \overline{1, N}} d_{X_k}(x_k, y_k) \leq \max_{k \in \overline{1, N}} (d_{X_k}(x_k, z_k) + d_{X_k}(z_k, y_k)) \\ &\leq \max_{k \in \overline{1, N}} d_{X_k}(x_k, z_k) + \max_{l \in \overline{1, N}} d_{X_l}(z_l, y_l) \\ &\equiv d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)}(x, z) + d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)}(z, y). \end{aligned}$$

Podobnie jest w przypadku $p = 1$,

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)}(x, y) &\equiv \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, y_k) \leq \sum_{k=1}^N (d_{X_k}(x_k, z_k) + d_{X_k}(z_k, y_k)) \\ &= \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, z_k) + \sum_{l=1}^N d_{X_l}(z_l, y_l) \\ &\equiv d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)}(x, z) + d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)}(z, y). \end{aligned}$$

Natomiast przypadek $p \in]1, \infty[$ jest nieco bardziej złożony i wymaga wykorzystania układu nierówności, które obecnie przedyskutujemy. Ustaliwszy dowolnie wartość parametru $\alpha \in]0, 1[$, rozważmy funkcję

$$f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \alpha t - t^\alpha.$$

Jako że

$$f'(t) = \alpha(1 - t^{\alpha-1}),$$

przeto funkcja ta maleje ściśle monotonicznie na przedziale $]0, 1[$, osiąga minimum globalne w $t = 1$, a następnie rośnie ściśle monotonicznie na przedziale $]1, \infty[$. To pozwala zapisać nierówność

$$\forall t \in]0, \infty[: \alpha t - t^\alpha = f(t) \geq f(1) = \alpha - 1.$$

Przedstawimy $t \in]0, \infty[$ w postaci ilorazu $t = \frac{a}{b}$ liczb dodatnich $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, otrzymujemy tym sposobem nierówność

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b,$$

która – gdy wyrazić ją w terminach $p = \frac{1}{\alpha}$ oraz $q = \frac{1}{1-\alpha}$ – przybiera postać

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Podstawienie $A := a^{\frac{1}{p}}$ i $B := b^{\frac{1}{q}}$ prowadzi nas do **nierówności Younga**

$$\forall A, B \in \mathbb{R}_{\geq 0} : AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

(nierówność rozszerza się trywialnie na przypadek $AB = 0$, którego nie obejmują nasze dotychczasowe rozważania), słusznej dla liczb $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ **hölderowsko sprzężonych**, tj. takich, które spełniają warunek

$$(1.4.3) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

O optymalnej naturze powyższego oszacowania przekonuje rozumowanie analogiczne do powyższego poprowadzone w odniesieniu do równoważności

$$f(t) = f(1) \quad \iff \quad t = 1,$$

które pokazuje, że nierówność jest wysycana (jedyne) przy $A^p = B^q$. Połóżmy następnie $A := \lambda a_i$ oraz $B := \mu b_i$ dla $\lambda, \mu, a_i, b_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ oraz $i \in \overline{1, N}$, po czym przesumujemy stronami uzyskane tym sposobem nierówności,

$$\lambda \mu \sum_{i=1}^N a_i b_i \leq \frac{\lambda^p \sum_{i=1}^N a_i^p}{p} + \frac{\mu^q \sum_{j=1}^N b_j^q}{q}.$$

Wybór

$$\lambda := \left(\sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{-\frac{1}{p}}, \quad \mu := \left(\sum_{i=1}^N b_i^q \right)^{-\frac{1}{q}},$$

poczyniony przy założeniu niezerowości którejś z liczb a_i oraz którejś z liczb b_i , odtwarza **nierówność Höldera** (wariant rzeczywisty nieujemny)

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_N), (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \sum_{i=1}^N a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^N b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

W szczególnym przypadku $p = 2 = q$ otrzymujemy **nierówność Schwarza** (wariant rzeczywisty nieujemny)

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_N), (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \left(\sum_{i=1}^N a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^N a_i^2 \cdot \sum_{j=1}^N b_j^2.$$

Na zakończenie naszego wywodu zapiszmy (w dotychczasowych oznaczeniach) zastosujemy otrzymaną wcześniej nierówność Höldera do każdego ze składników prawej strony równości

$$\sum_{i=1}^N (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^N a_i \cdot (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{j=1}^N b_j \cdot (a_j + b_j)^{p-1},$$

otrzymując oszacowanie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (a_i + b_i)^p &\leq \left(\sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^N (a_j + b_j)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^N b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{l=1}^N (a_l + b_l)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^N b_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^N b_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wykorzystuje warunek (1.4.3). Dzieląc ostatnią nierówność obustronnie przez $\left(\sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{q}}$ i korzystając raz jeszcze z warunku (1.4.3), otrzymujemy na koniec wielce pożądaną **nierówność Minkowskiego** (wariant rzeczywisty nieujemny)

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_N), (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \left(\sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^N b_j^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

słuszną dla dowolnego $p \in]1, \infty[$, a także – rzecz jasna – dla $p = 1$ oraz w granicy (rozumianej jak wcześniej) $p \rightarrow \infty$. Na podstawie powyższej nierówności bez trudu dowodzimy, dla dowolnego $p \in]1, \infty[$,

$$\begin{aligned} d_{\times_{k=1}^N X_k}^{(p)}(x, y) &\equiv \left(\sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^N (d_{X_k}(x_k, z_k) + d_{X_k}(z_k, y_k))^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, z_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{l=1}^N d_{X_l}(z_l, y_l)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\equiv d_{\times_{k=1}^N X_k}^{(p)}(x, z) + d_{\times_{k=1}^N X_k}^{(p)}(z, y). \end{aligned}$$

PRZYKŁAD(Y) 25. (Struktury)

(1) Przestrzeń \mathbb{R} -liniowa $\mathbb{R}^{\times N}$, $N \in \mathbb{N}^{\times}$ wraz z pitagorejską miarą odległości

$$\|y - x\|_N := \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2} \equiv d_{\mathbb{R}^{\times N}}^{(2)},$$

między punktami $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{\times N}$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{\times N}$, którą będziemy także określać mianem **normy euklidesowej**, jest przestrzenią Banacha. Jest to, rzecz jasna, przestrzeń Hausdorffa. Kulę otwartą w tej przestrzeni o środku w $x \in \mathbb{R}^{\times N}$ i promieniu $R \in \mathbb{R}_{>0}$ będziemy oznaczać symbolem

$$B_{\mathbb{R}^{\times N}}(x; R) \equiv B^N(x; R).$$

Z kolei **N -kostką** nazwiemy dowolny zbiór postaci

$$(1.4.4) \prod_{i=1}^N [a_i, b_i] \equiv \{ (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{\times N} \mid \forall_{n \in \overline{1, N}} : a_i \leq x_i \leq b_i \},$$

zdefiniowany dla dowolnych $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1, N}$. Standardową topologię metryczną na $\mathbb{R}^{\times N}$ zadawaną przez normę euklidesową będziemy oznaczać symbolem

$$\mathcal{T}_E(\mathbb{R}^{\times N}).$$

(2)

✓

Relacje między wprowadzonymi powyżej produktowymi strukturami metrycznymi porządkuje

STWIERDZENIE 69. *Przyjmijmy zapis Def. 60. Metryki produktowe typu $p \in \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ są wzajem równoważne.*

■

Dowód: Oznaczmy $d_k := d_{X_k}(x_k, y_k)$. Na podstawie ciągu nierówności

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N d_k &\leq N \cdot \max_{k \in \overline{1, N}} d_k \leq N \cdot \left(\sum_{k=1}^N d_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq N \cdot \left(N \cdot \max_{k \in \overline{1, N}} d_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \equiv N^{\frac{p+1}{p}} \cdot \max_{k \in \overline{1, N}} d_k \\ &\leq N^{\frac{p+1}{p}} \cdot \sum_{k=1}^N d_k, \end{aligned}$$

zapisanego dla $p \in]1, \infty[$, wnioskujemy, że

$$d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)} \leq N \cdot d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)} \leq N \cdot d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)} \leq N^{\frac{p+1}{p}} \cdot d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)} \leq N^{\frac{p+1}{p}} \cdot d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)},$$

co przesądza o równoważności wszystkich rozpatrywanych metryk. □

Definicja metryki implikuje oczywiste, acz przydatne

STWIERDZENIE 70. *Przyjmijmy zapis Def. 60. W przestrzeni metrycznej (X, d_X) zachodzi relacja*

$$\forall x, y, z \in X : |d_X(x, y) - d_X(z, y)| \leq d_X(x, z),$$

w szczególności więc w unormowanej przestrzeni wektorowej $(V, \|\cdot\|_V)$ spełniony jest warunek

$$\forall v, w \in V : \left| \|v\|_V - \|w\|_V \right| \leq \|v - w\|_V.$$

■

Dowód: Bezpośrednia konsekwencja nierówności trójkąta oraz symetrii metryki. □

Obecność struktury metrycznej pozwala wprowadzić wygodną, a w pełni równoważną definicję ciągłości, którą opisuje

STWIERDZENIE 71. *Przyjmijmy zapis Def. 60 i niechaj (X_α, d_{X_α}) , $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie $f : X_1 \rightarrow X_2$ jest ciągłe w punkcie $x_0 \in X_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(1.4.5) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon, x_0} \forall x \in X_1 : (d_{X_1}(x, x_0) < \delta_{\varepsilon, x_0} \implies d_{X_2}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

■

Dowód: Załóżmy, że f jest ciągłe, a wtedy przeciwobraz $f^{-1}(B_{X_2}(f(x_0); \varepsilon)) \ni x_0$ kuli otwartej $B_{X_2}(f(x_0); \varepsilon)$, czyli zbioru punktów $y \in X_2$ spełniających warunek $d_{X_2}(y, f(x_0)) < \varepsilon$, jest otwarty w X_1 , zatem – wprost z definicji – zawiera pewną kulę $B_{X_1}(x_0; \delta_{\varepsilon, x_0})$, $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$, czyli zbiór punktów $x \in X_1$ spełniających warunek $d_{X_1}(x, x_0) < \delta_{\varepsilon, x_0}$. I odwrotnie – przyjmijmy, że jest spełniony warunek (1.4.5). Dowolne otoczenie $\mathcal{O} \subset X_2$ punktu $f(x_0)$ zawiera pewną kulę $B_{X_2}(f(x_0); \varepsilon) \subset \mathcal{O}$,

w której przeciwobrazie względem f zawiera się kula $B_{X_1}(x_0; \delta_{\varepsilon; x_0})$ – ta ostatnia jest poszukiwanym otoczeniem x_0 . \square

Powyższe pozwala zrozumieć funkcjonalny sens warunku równoważności metryk na przestrzeni wektorowej, który ukazuje

STWIERDZENIE 72. *Odwzorowanie pomiędzy dwiema przestrzeniami metrycznymi ciągłe względem topologii metrycznych indukowanych przez parę metryk na jego dziedzinie i przeciwdziedzinie jest ciągłe względem topologii metrycznych indukowanych przez każdą inną parę metryk równoważnych.* \blacksquare

Dowód: Posłużymy się definicją ciągłości ze Stw. 71, zaadaptowaną do kategorii metrycznej. Rozważmy odwzorowanie $f : X_1 \rightarrow X_2$ między parą przestrzeni metrycznych (X_α, d_{X_α}) , $\alpha \in \{1, 2\}$ ciągłe w punkcie $x_0 \in X_1$ w odnośnych topologiach metrycznych, tj. spełniające warunek (1.4.5). Niechaj \tilde{d}_{X_α} będzie metryką na X_α równoważną z d_{X_α} , tj. spełniającą układ warunków

$$\forall_{x_\alpha, y_\alpha \in X_\alpha} : C_{\alpha,1} \cdot d_{X_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha) \leq \tilde{d}_{X_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha) \leq C_{\alpha,2} \cdot d_{X_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha), \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

Wówczas wybierając, dla ustalonego $\varepsilon > 0$, ograniczenie postaci $\tilde{\delta}_{\varepsilon, x_0} := C_{1,1} \cdot \delta_{\frac{\varepsilon}{C_{2,2}}, x_0}$ w

$$\tilde{d}_{X_1}(x, x_0) < \tilde{\delta}_{\varepsilon, x_0},$$

otrzymujemy ograniczenie

$$d_{X_1}(x, x_0) \leq \frac{1}{C_{1,1}} \cdot \tilde{d}_{X_1}(x, x_0) < \frac{1}{C_{1,1}} \cdot \tilde{\delta}_{\varepsilon, x_0} \equiv \delta_{\frac{\varepsilon}{C_{2,2}}, x_0},$$

a stąd

$$\tilde{d}_{X_2}(f(x), f(x_0)) \leq C_{2,2} \cdot d_{X_2}(f(x), f(x_0)) < C_{2,2} \cdot \frac{\varepsilon}{C_{2,2}} = \varepsilon.$$

\square

Aksjomatyka struktury metrycznej prowadzi wprost do naturalnego, a przy tym nader przydatnego

STWIERDZENIE 73. *Przyjmijmy zapis Def. 60. Metryka $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ jest odwzorowaniem ciągłym względem topologii w swej dziedzinie $X \times X$ indukowanej przez metrykę produktową typu $p \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ oraz topologii na $\mathbb{R}_{\geq 0}$ indukowanej przez metrykę euklidesową (na \mathbb{R}). W szczególności więc także dowolna norma na grupie przemiennej ma tę własność.* \blacksquare

Dowód: Wobec równoważności wszystkich metryk typu p na $X \times X$, orzeczonej w Stw. 69, możemy – na gruncie Stw. 72 – ograniczyć nasze rozważania do metryki $d_{X \times X}^{(1)}$. Korzystając ze Stw. 70, obliczamy zatem, dla dowolnych $(x, y), (x_0, y_0) \in X \times X$,

$$\begin{aligned} |d_X(x, y) - d_X(x_0, y_0)| &\equiv |d_X(x, y) - d_X(x_0, y) + d_X(x_0, y) - d_X(x_0, y_0)| \\ &\leq |d_X(x, y) - d_X(x_0, y)| + |d_X(x_0, y) - d_X(x_0, y_0)| \\ &\leq d_X(x, x_0) + d_X(y, y_0) \equiv d_{X \times X}^{(1)}((x, y), (x_0, y_0)), \end{aligned}$$

co prowadzi nas do wniosku, że dla uzyskania – dla dowolnego $\varepsilon > 0$ – ograniczenia

$$|d_X(x, y) - d_X(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

przesądzającego o ciągłości metryki w punkcie $(x_0, y_0) \in X \times X$ jej dziedziny, wystarczy narzucić ograniczenie

$$d_{X \times X}^{(1)}((x, y), (x_0, y_0)) < \varepsilon =: \delta_{\varepsilon, (x_0, y_0)}.$$

□

Obecność struktury metrycznej na dziedzinie i przeciwdziedzinie odwzorowania (w szczególności zaś analiza dowodu ostatniego stwierdzenia) pozwala wysubtelnić pojęcie ciągłości, co prowadzi do

DEFINICJA 61. Przyjmijmy zapis Def. 60. Odwzorowanie $f : X_1 \rightarrow X_2$ między przestrzeniami metrycznymi (X_α, d_{X_α}) , $\alpha \in \{1, 2\}$ nazwiemy **jednostajnie ciągłym**, jeśli spełnia warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in X_1 : (d_{X_1}(x, y) < \delta_\varepsilon \implies d_{X_2}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

▲

Mamy w tym kontekście podstawowe

STWIERDZENIE 74. *Odwzorowanie ciągłe o zwartej dziedzinie jest jednostajnie ciągłe.*

■

Dowód: Rozważmy odwzorowanie ciągłe $f : X_1 \rightarrow X_2$ o zwartej dziedzinie X_1 . Ustalmy (dowolnie) $\varepsilon > 0$. Ciągłość f oznacza, że każdy z punktów $x \in X_1$ należy do przeciwbrazu $f^{-1}(B_{X_2}(f(x); \varepsilon))$ otwartej kuli $B_{X_2}(f(x); \varepsilon)$ wraz z pewnym otoczeniem otwartym, więc też – wraz z pewną kulą otwartą $B_{X_1}(x; r_{x, \varepsilon})$. Rodzina kul $\{B_{X_1}(x; \frac{r_{x, \varepsilon}}{2})\}_{x \in X_1}$ stanowi pokrycie otwarte X_1 , z którego wobec zwartości tej przestrzeni można wybrać podpokrycie skończone $\mathcal{B} \equiv \{B_{X_1}(x_n; \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2})\}_{n \in \overline{1, N}}$. Oznaczmy

$$\delta_\varepsilon := \min_{n \in \overline{1, N}} \left\{ \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2} \right\},$$

a wówczas nierówności

$$d_{X_1}(y, x) < \delta_\varepsilon, \quad d_{X_1}(x, x_n) < \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2} < r_{x_n, \varepsilon},$$

z których druga jest spełniona dla pewnego $n \in \overline{1, N}$ (wszak \mathcal{B} jest pokryciem X_1), implikują relację

$$d_{X_1}(y, x_n) \leq d_{X_1}(y, x) + d_{X_1}(x, x_n) < 2 \cdot \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2} = r_{x_n, \varepsilon},$$

ta zaś oznacza, że y tak jak x leży wewnątrz kuli $B_{X_1}(x; r_{x, \varepsilon})$ i – co za tym idzie – spełnia wielce pożądaną warunek

$$f(y) \in B_{X_2}(f(x); \varepsilon).$$

□

Nader istotnej egzemplifikacji pojęcia przestrzeni Banacha dostarcza

STWIERDZENIE 75. *Przyjmijmy zapis Def. 60. Niechaj (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną i niech V będzie przestrzenią Banacha nad ciałem \mathbb{K} względem normy $\|\cdot\|_V$. Przestrzeń $C_b(X, V)$ ograniczonych odwzorowań ciągłych na X o wartościach w V jest przestrzenią Banacha względem **normy supremum***

$$\|\cdot\|_\infty : C_b(X, V) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : f \longmapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V.$$

■

Dowód: Jest oczywistym, że para $(C_b(X, V), \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią unormowaną. W szczególności supremum (normy) sumy jest majoryzowane przez sumę supremów (norm), więc

$$\|f + g\|_\infty \equiv \sup_{x \in X} \|f(x) +_V g(x)\|_V \leq \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V + \sup_{x \in X} \|g(x)\|_V = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Pozostaje wykazać zupełność $(C_b(X, V), \|\cdot\|_\infty)$. W tym celu rozważmy ciąg Cauchy'ego $f : \mathbb{N} \longrightarrow C_b(X, V) : n \longmapsto f_n$. W dowolnym punkcie $x \in X$ definiuje on ciąg $f(x) : \mathbb{N} \longrightarrow V : n \longmapsto f_n(x)$, który także jest ciągiem Cauchy'ego, oto bowiem

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_V \leq \sup_{y \in X} \|f_n(y) - f_m(y)\|_V \equiv \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Wobec zupełności V otrzymujemy zatem odwzorowanie

$$f : X \longrightarrow V : x \longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)).$$

Bez trudu dowodzimy, że odwzorowanie to jest ciągłe. Istotnie, ustalwszy (dowolnie) $\varepsilon > 0$, wybierzmy $N \in \mathbb{N}$ tak, by było

$$\forall_{m, n \geq N} : \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

a wtedy w dowolnym punkcie $x \in X$ stwierdzamy, że

$$\|f_m(x) - f_n(x)\|_V \leq \sup_{y \in X} \|f_m(y) - f_n(y)\|_V \equiv \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

więc też (wobec ciągłości $\|\cdot\|_V$)

$$\|f(x) - f_n(x)\|_V = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m(x) - f_n(x)\|_V < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Korzystając z ciągłości f_n w (dowolnym) punkcie $x \in X$, możemy następnie dobrać $\delta > 0$ tak, by było

$$\forall_{y \in X} : [d(x, y) < \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\|_V < \frac{\varepsilon}{3}],$$

a wtedy, ostatecznie,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_V &\leq \|f(x) - f_n(x)\|_V + \|f_n(x) - f_n(y)\|_V + \|f_n(y) - f(y)\|_V \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

co dowodzi ciągłości f w $x \in X$, czyli też – wobec dowolności x – ciągłości w całej dziedzinie.

W następnej kolejności pokażemy, że f jest ograniczone. Wybierzmy $n > N$ dla $N \in \mathbb{N}$ jak wyżej, a wtedy

$$\|f - f_n\|_\infty \equiv \sup_{x \in X} \|f(x) - f_n(x)\|_V = \sup_{x \in X} \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{N+m}(x) - f_n(x)\|_V < \sup_{x \in X} \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon = \varepsilon,$$

co pokazuje, że f jest punktem skupienia ciągu f_n w przestrzeni $C(X, V)$, a nadto pozwala policzyć – dla n na tyle dużego, że $\|f - f_n\|_\infty < 1$ – normę

$$\|f\|_\infty = \|f - f_n + f_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty < \|f_n\|_\infty + 1 < \infty$$

i tym samym zakończyć dowód zupełności $C_b(X, V)$. \square

Mamy także przykład pokrewny, a przy tym nie mniej istotny, o którym mówię

STWIERDZENIE 76. *Przyjmijmy zapis Def. 60. Niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem \mathbb{K} , przy czym zakładamy, że V_2 jest przestrzenią Banacha względem normy $\|\cdot\|_2$. Przestrzeń \mathbb{K} -liniowa $\mathcal{B}_\mathbb{K}(V_1, V_2)$ jest przestrzenią Banacha względem **normy operatorowej***

$$\|\cdot\|_{\text{op}} : \mathcal{B}_\mathbb{K}(V_1, V_2) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \chi \longmapsto \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi(v)\|_2}{\|v\|_1} \equiv \sup_{v \in \|\cdot\|_1^{-1}(\{1\})} \|\chi(v)\|_2.$$

*Odwzorowanie prawostronnie stowarzyszone z (jawnie dwu- \mathbb{K} -liniowym odwzorowaniem) **odwzorowaniem ewaluacji***

$$\text{ev} : \mathcal{B}_\mathbb{K}(V_1, V_2) \times V_1 \longrightarrow V_2 : (\chi, v) \longmapsto \chi(v) \equiv \text{ev}_v(\chi),$$

tj. odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$r_{\text{ev}} : V_1 \longrightarrow \text{Hom}_\mathbb{K}(\mathcal{B}_\mathbb{K}(V_1, V_2), V_2) : v \longmapsto \text{ev}_v,$$

spełnia relację

$$\text{Im } r_{\text{ev}} \subset \mathcal{B}_\mathbb{K}(\mathcal{B}_\mathbb{K}(V_1, V_2), V_2).$$

■

Dowód: Rozważmy ciąg Cauchy'ego $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_\mathbb{K}(V_1, V_2)$ oraz – dla dowolnego wektora $v \in V_1 \setminus \{0_{V_1}\}$ – ciąg wektorów $\{\chi_n(v)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_2$, który spełnia tożsamość

$$\begin{aligned} \|\chi_n(v) - \chi_m(v)\|_2 &\equiv \|v\|_1 \cdot \frac{\|\chi_n(v) - \chi_m(v)\|_2}{\|v\|_1} \leq \|v\|_1 \cdot \sup_{w \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_n(w) - \chi_m(w)\|_2}{\|w\|_1} \\ &\equiv \|v\|_1 \cdot \|\chi_n - \chi_m\|_{\text{op}}, \end{aligned}$$

a zatem dla dostatecznie dużych wartości m_v i n_v

$$\|\chi_{n_v}(v) - \chi_{m_v}(v)\|_2 < \varepsilon.$$

Jest więc $\{\chi_n(v)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ciągiem Cauchy'ego, co w konsekwencji zupełności V_2 implikuje istnienie wektorów

$$\underline{\chi}(v) := \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(v) \in V_2.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\chi : V_1 \longrightarrow V_2 : v \longmapsto \begin{cases} 0_2 & \text{dla } v = 0_1 \\ \underline{\chi}(v) & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Jego \mathbb{K} -liniowość wynika wprost z \mathbb{K} -liniowości odwzorowań χ_n , a także ciągłości działania unormowanego ciała bazowego \mathbb{K} na V_1 oraz dodawania w V_1 , oto bowiem dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}^\times$ oraz $v_1, v_2 \in V_1 \setminus \{0_1\}$ (w przypadkach innych od rozpatrzonych poniżej tożsamość jest spełniona trywialnie)

$$\begin{aligned} \chi(\lambda_1 \triangleright_1 v_1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(\lambda_1 \triangleright_1 v_1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 \triangleright_2 \chi_n(v_1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \chi_n(v_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(v_1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(v_2) \\
&= \lambda_1 \triangleright_2 \chi(v_1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \chi(v_2).
\end{aligned}$$

W następnej kolejności dowodzimy ograniczoności χ . W tym celu wybierzmy (dowolnie) $v \in V_1$ o własności $\|v\|_1 = 1$. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ możemy wskazać $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ oraz $n_v \geq N_\varepsilon$ o własnościach

$$\|\chi_{n_v}(v) - \chi(v)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \forall_{m, n \geq N_\varepsilon} : \|\chi_n - \chi_m\|_{\text{op}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

a wtedy, o ile $n \geq N_\varepsilon$,

$$\|\chi(v) - \chi_n(v)\|_2 \leq \|\chi(v) - \chi_{n_v}(v)\|_2 + \|\chi_{n_v}(v) - \chi_n(v)\|_2 < \varepsilon,$$

co pozwala skonstatować, że

$$\|\chi(v)\|_2 \leq \|\chi(v) - \chi_n(v)\|_2 + \|\chi_n(v)\|_2 < \varepsilon + \|\chi_n\|_{\text{op}} < \infty,$$

czyli że $\chi \in \mathcal{B}_K(V_1, V_2)$, a nadto że

$$\|\chi - \chi_n\|_{\text{op}} \leq \varepsilon,$$

zatem χ jest w istocie granicą ciągu $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ względem normy operatorowej.

Na koniec sprawdzamy ograniczoność r_{ev} obliczając – dla dowolnego wektora $v \in V \setminus \{0_V\}$ –

$$\begin{aligned}
\|r_{\text{ev}}(v)\|_{\text{op}} &\equiv \sup_{\chi \in \|\cdot\|_{\text{op}}^{-1}(\{1\})} \|r_{\text{ev}}(v)(\chi)\|_2 \equiv \sup_{\chi \in \|\cdot\|_{\text{op}}^{-1}(\{1\})} \|\chi(v)\|_2 \\
&\leq \sup_{\chi \in \|\cdot\|_{\text{op}}^{-1}(\{1\})} \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \|v\|_1 = \|v\|_1.
\end{aligned}$$

□

Naturalną własność normy opisuje

STWIERDZENIE 77. *Przyjmijmy zapis Stw. 76. Niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem \mathbb{K} , przy czym zakładamy, że V_β , $\beta \in \{2, 3\}$ jest przestrzenią Banacha względem normy $\|\cdot\|_\beta$. Norma operatorowa spełnia tożsamość*

$$\forall_{\chi_\gamma \in \mathcal{B}_K(V_\gamma, V_{\gamma+1}), \gamma \in \{1, 2\}} : \|\chi_2 \circ \chi_1\|_{\text{op}} \leq \|\chi_2\|_{\text{op}} \cdot \|\chi_1\|_{\text{op}}.$$

■

Dowód: Wprost na mocy definicji normy operatorowej oraz założenia o ograniczoności χ_1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|\chi_2 \circ \chi_1\|_{\text{op}} &\equiv \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_2 \circ \chi_1(v)\|_3}{\|v\|_1} \equiv \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_2(\chi_1(v))\|_3}{\|v\|_1} \\
&\leq \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_2\|_{\text{op}} \cdot \|\chi_1(v)\|_2}{\|v\|_1} \equiv \|\chi_2\|_{\text{op}} \cdot \|\chi_1\|_{\text{op}}.
\end{aligned}$$

□

Przykładem elementarnego, acz użytecznego zastosowania opisanej powyżej struktury przestrzeni Banacha jest

STWIERDZENIE 78. *Przyjmijmy zapis Def. 60 i niechaj $\chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$. Jeżeli istnieje $\alpha \in [0, 1[$, dla którego spełniona jest nierówność $\|\chi\|_{\text{op}} \leq \alpha$, to wówczas odwzorowanie $\text{id}_V - \chi$ jest automorfizmem V , a przy tym zachodzi nierówność*

$$\|(\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \leq (1 - \alpha)^{-1}.$$

Dla każdego $\tilde{\chi} \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$ o własności $\|\tilde{\chi}\|_{\text{op}} \leq \alpha$ słusznym jest oszacowanie

$$\|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} - (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \leq (1 - \alpha)^{-2} \cdot \|\tilde{\chi} - \chi\|_{\text{op}}.$$

■

Dowód: Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\chi^n \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$, przy czym $\|\chi^n\|_{\text{op}} \leq \|\chi\|_{\text{op}}^n$, co pozwala nam zdefiniować odwzorowanie

$$S_n := \sum_{k=0}^n \chi^k \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V).$$

Bez trudu sprawdzamy, że ciąg $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V) : n \mapsto S_n$ jest dla $\alpha < 1$ ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$,

$$\|S_{n+1} - S_n\|_{\text{op}} = \|\chi^{n+1}\|_{\text{op}} \leq \|\chi\|_{\text{op}}^{n+1} \leq \alpha^{n+1},$$

więc też zbieżnym do pewnego odwzorowania

$$S_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V),$$

dla którego (wobec ciągłości normy, o której mówi Stw. 73) otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} \|S_\infty\|_{\text{op}} &\equiv \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right\|_{\text{op}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|_{\text{op}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \|\chi^k\|_{\text{op}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha^k \\ (1.4.6) \quad &= (1 - \alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

Następnie sprawdzamy, że

$$S_\infty \circ (\text{id}_V - \chi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \circ (\text{id}_V - \chi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id}_V - \chi^{n+1}) = \text{id}_V,$$

$$(\text{id}_V - \chi) \circ S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id}_V - \chi) \circ S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id}_V - \chi^{n+1}) = \text{id}_V,$$

gdź

$$\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \chi^n \right\|_{\text{op}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi^n\|_{\text{op}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi^n = 0.$$

Powyższe rozumowanie pokazuje, że odwzorowanie $\text{id}_V - \chi$ jest odwracalne, a wynik (1.4.6) dowodzi ograniczoności jego (obustronnej) odwrotności.

Na koniec w bezpośrednim rachunku pokazujemy

$$\begin{aligned} &\|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} - (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &= \|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} \circ ((\text{id}_V - \chi) - (\text{id}_V - \tilde{\chi})) \circ (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\equiv \|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} \circ (\tilde{\chi} - \chi) \circ (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\leq \|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1}\|_{\text{op}} \cdot \|\tilde{\chi} - \chi\|_{\text{op}} \cdot \|(\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\leq (1 - \alpha)^{-2} \cdot \|\tilde{\chi} - \chi\|_{\text{op}}. \end{aligned}$$

□

Ostatnie stwierdzenie pozwala bez trudu wykazać słuszność

STWIERDZENIE 79. *Przyjmijmy zapis Def. 60. Izomorfizmy, tj. ograniczone odwzorowania liniowe o ograniczonych odwrotnościach, pomiędzy dowolnymi dwiema przestrzeniami Banacha $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad ciałem \mathbb{K} tworzą albo zbiór pusty, albo też zbiór otwarty w $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$.*

■

Dowód: Niechaj $\chi_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ będzie dowolnym izomorfizmem, a wtedy dowolne ograniczone odwzorowanie liniowe $\delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ o własności

$$\|\delta\|_{\text{op}} < \frac{1}{\|\chi_0^{-1}\|_{\text{op}}}$$

definiuje w świetle Stw. 78 automorfizm $\text{id}_{V_1} + \chi_0^{-1} \circ \delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1)$, gdyż – na mocy Stw. 77 – zachodzi

$$\|\chi_0^{-1} \circ \delta\|_{\text{op}} \leq \|\chi_0^{-1}\|_{\text{op}} \cdot \|\delta\|_{\text{op}} < 1.$$

W takim jednak razie także $\chi_0 + \delta$ jest izomorfizmem, oto bowiem

$$(\chi_0 + \delta)^{-1} \equiv (\chi_0 \circ (\text{id}_{V_1} + \chi_0^{-1} \circ \delta))^{-1} = (\text{id}_{V_1} + \chi_0^{-1} \circ \delta)^{-1} \circ \chi_0^{-1}.$$

□

W przypadku modelowych przestrzeni Banacha $\mathbb{R}^{\times N}$ możemy pokusić się o przydatne w dalszych naszych rozważaniach uszczegółowienie dyskusji pojęć takich jak „zwartość”, „domkniętość”, „ograniczoność” *etc.* oraz relacji między nimi, co czynimy poniżej. Zaczniemy od pomocniczego

STWIERDZENIE 80. *Ustalmy $N \in \mathbb{N}$. Dowolna N -kostka w $\mathbb{R}^{\times N}$ jest zwarta.*

■

Dowód: Niechaj $I_N^{(0)}(a., b.) := \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ będzie N -kostką zdefiniowaną w Równ. (1.4.4), o średnicy

$$\phi_0(a., b.) := \sqrt{\sum_{i=1}^N (b_i - a_i)^2}.$$

Niechaj $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie pokryciem $I_N(a., b.)$, z którego nie można wybrać podpokrycia skończonego. Dzieliąc każdy z przedziałów $[a_i, b_i]$,

$$[a_i, b_i] \equiv [a_i, c_i] \cup [c_i, b_i], \quad c_i := \frac{a_i + b_i}{2},$$

otrzymujemy rozkład $I_N^{(0)}(a., b.)$ na 2^N N -kostek o średnicy $\phi_1(a., b.) \equiv 2^{-1} \phi_0(a., b.)$, z których przynajmniej jedna – oznaczmy ją $I_N^{(1)}(a., b.)$ – nie może być pokryta żadną skończoną podrodziną zbiorów z rodziny \mathcal{O} . Powtórzywszy opisaną wcześniej procedurę podziału N -kostki na 2^N jednakowych N -kostek w odniesieniu do $I_N^{(1)}(a., b.)$, znajdujemy N -kostkę $I_N^{(2)}(a., b.) \subset I_N^{(1)}(a., b.)$ o średnicy $\phi_2(a., b.) \equiv 2^{-2} \phi_0(a., b.)$, której nie da się pokryć skończoną liczbą zbiorów z \mathcal{O} . Iteracja tej konstrukcji prowadzi do powstania monotonicznego ciągu $I_N^{(n)}(a., b.) : \mathbb{N} \longrightarrow 2^{I_N^{(0)}(a., b.)}$ N -kostek,

$$I_N^{(n)}(a., b.) \supset I_N^{(n+1)}(a., b.), \quad n \in \mathbb{N},$$

którego element o indeksie n ma średnicę $\phi_n(a., b.) \equiv 2^{-n} \phi_0(a., b.)$ i nie jest pokrywany przez żadną skończoną podrodzinę zbiorów z rodziny \mathcal{O} . Tenże element można zapisać w postaci

$$I_N^{(n)}(a., b.) \equiv \prod_{i=1}^N [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$$

dla pewnych liczb rzeczywistych

$$a_i \leq a_i^{(1)} \dots \leq a_i^{(n-1)} \leq a_i^{(n)} < b_i^{(n)} \leq b_i^{(n-1)} \leq \dots \leq b_i^{(1)} \leq b_i, \quad i \in \overline{1, N}.$$

Oznaczmy

$$a_i^{(\infty)} := \sup_{m \in \mathbb{N}} \{a_i^{(m)}\}, \quad i \in \overline{1, N}.$$

Wobec powyższych nierówności zachodzi

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_i^{(\infty)} \leq b_i^{(n)}, \quad i \in \overline{1, N},$$

a ponieważ także – wprost z definicji –

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_i^{(n)} \leq a_i^{(\infty)}, \quad i \in \overline{1, N},$$

przeto

$$\forall n \in \mathbb{N} : (a_1^{(\infty)}, a_2^{(\infty)}, \dots, a_N^{(\infty)}) \in I_N^{(n)}(a., b.),$$

czyli też

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_N^{(n)}(a., b.) \neq \emptyset.$$

Niechaj $x_\infty \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_N^{(n)}(a., b.)$, a wtedy $x_\infty \in \mathcal{O}_\lambda$ dla pewnego indeksu $\lambda \in \Lambda$. Skoro jednak \mathcal{O}_λ jest otwarty, to zawiera pewne otoczenie x_∞ , czyli istnieje $r > 0$ o własności $B_N(x_\infty; r) \subset \mathcal{O}_\lambda$. Wybierając n dostatecznie duże, możemy zawsze uzyskać $\phi_n(a., b.) < r$, a wówczas dla dowolnego $y \in I_N^{(n)}(a., b.)$ stwierdzamy, że $\|y - x_\infty\|_N \leq \phi_n(a., b.) < r$, więc też $I_N^{(n)}(a., b.) \subset \mathcal{O}_\lambda$, co leży w sprzeczności z konstrukcją ciągu $I_N^{(n)}(a., b.)$. \square

Powyższe pozwala nam łatwo udowodnić podstawowe

STWIERDZENIE 81 (Twierdzenie Heinego–Borela). *Ustalmy $N \in \mathbb{N}$. Podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^{\times N}$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony i domknięty.* ■

Dowód: Niechaj $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{\times N}$ będzie podzbiorem zwartym. Jego domkniętość wynika – w świetle Stw. 66 – wprost z (oczywistej) hausdorffowskości przestrzeni $\mathbb{R}^{\times N}$. Wybierzmy (dowolnie) punkt $p \in \mathcal{K}$ i rozważmy rodzinę kul otwartych $B^N(p; n)$. Rodzina ta jest pokryciem (otwartym) \mathcal{K} ,

$$\bigcup_{n=1}^N B^N(p; n) = \mathcal{K},$$

możemy z niej zatem wybrać skończone podpokrycie $\{B^N(p; n_k)\}_{k \in \overline{1, M}}$, $M \in \mathbb{N}$. Liczba $n_{\mathcal{K}} := \max_{k \in \overline{1, M}} \{n_k\}$ spełnia warunek

$$B^N(p; n_{\mathcal{K}}) \supset \mathcal{K},$$

który jest równoznaczny z ograniczonością \mathcal{K} .

Przypuśćmy, odwrotnie, że \mathcal{K} jest ograniczony i domknięty. Pierwsza z własności implikuje $\mathcal{K} \subset B_N(x; R)$ dla pewnych $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathcal{K}$ i $R > 0$, a zatem także $\mathcal{K} \subset \prod_{i=1}^N [x_i - R, x_i + R]$. Oto więc \mathcal{K} jest domkniętym podzbiorem N -kostki, która na mocy Stw. 80 jest zwartą podprzestrzenią $\mathbb{R}^{\times N}$. Dowiedzona teza jest teraz natychmiastową konsekwencją Stw. 66. \square

Natychmiastową konsekwencją powyższego jest W dalszej kolejności natrafiamy na

STWIERDZENIE 82. *Ustalmy $N \in \mathbb{N}$. Każdy otwarty podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^{\times N}$ jest sumą mnogościową przeliczalnej rodziny kul otwartych.* \blacksquare

Dowód: Niechaj $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times N})$ i zdefiniujmy zbiór

$$\mathbb{Q}\mathcal{O} := \{ (p, q) \in \mathbb{Q}^{\times N} \times \mathbb{Q} \mid B^N(p; q) \subset \mathcal{O} \}.$$

Jest on przeliczalny jako podzbiór przeliczalnego zbioru $\mathbb{Q}^{\times N+1}$, a przy tym

$$\mathcal{O} = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{Q}\mathcal{O}} B^N(p; q).$$

Istotnie, niech $x \in \mathcal{O}$, a wtedy istnieje $r > 0$ o własności $B^N(x; r) \subset \mathcal{O}$. Wybierzmy (dowolnie) $p \in \mathbb{Q}^{\times N}$ o własności $\|p - x\|_N \leq \frac{r}{3}$, a następnie $q \in \mathbb{Q}$ o własności $\|p - x\|_N < q \leq \frac{r}{2}$ (liczby takie istnieją, gdyż \mathbb{Q} jest podzbiorem gęstym w \mathbb{R}). Jasno widać, że $B^N(p; q) \ni x$. \square

STWIERDZENIE 83. *Ustalmy $N \in \mathbb{N}$. Każdy otwarty i każdy domknięty podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^{\times N}$ jest sumą mnogościową przeliczalnej rodziny podzbiorów zwartych.* \blacksquare

Dowód: Zaczniemy od zbiorów otwartych. W świetle Stw. 82 wystarczy wykazać słuszność tezy dla dowolnej (otwartej) kuli $B^N(x; r)$. Ta jednak staje się oczywistą, gdy jako rodzinę zbiorów zwartych wybierzemy

$$\left\{ \overline{B^N\left(x; \max\left(0, r - \frac{1}{n}\right)\right)} \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}.$$

Niechaj teraz $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{\times N}$ będzie domknięty. Udowodniona część stwierdzenia implikuje istnienie przeliczalnego zwartego pokrycia $\{\mathcal{K}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ przestrzeni $\mathbb{R}^{\times N}$,

$$\mathbb{R}^{\times N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_n,$$

a zatem także

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{C} \cap \mathbb{R}^{\times N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{C} \cap \mathcal{K}_n),$$

przy czym każdy ze zbiorów $\mathcal{C} \cap \mathcal{K}_n \subset \mathbb{R}^{\times N}$ jest domknięty (jako przecięcie dwóch zbiorów domkniętych) i ograniczony (wszak własność tę ma zawierający go zbiór \mathcal{K}_n), więc na mocy Stw. 81 – również zwarty. \square

TWIERDZENIE 1.4.1 (Lemat Lindelöfa). *Ustalmy $N \in \mathbb{N}$. Każde pokrycie otwarte dowolnego podzbioru przestrzeni $\mathbb{R}^{\times N}$ ma przeliczalne podpokrycie.* \blacksquare

Dowód: Niechaj $A \subset \mathbb{R}^{\times N}$ będzie dowolnym podzbiorem, $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ zaś – jego pokryciem (otwartym). W konstrukcji skończonego podpokrycia pokrycia \mathcal{O} wykorzystamy przeliczalne pokrycie $\mathcal{B} := \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ przestrzeni $\mathbb{R}^{\times N}$ złożone z kul otwartych o środkach we wszystkich punktach $\mathbb{Q}^{\times N}$ i – dla każdego z takich punktów – wszystkich promieniach o długości wymiernej. Rozważmy dowolny punkt $x \in A$. Istnieje element pokrycia $\mathcal{O}_{\lambda(x)} \ni x$, a wraz z nim (wobec otwartości pokrycia \mathcal{O}) także indeks $n_x \in \mathbb{N}$ o własności $x \in B_{n_x} \subset \mathcal{O}_{\lambda(x)}$ (możemy np. wybrać najmniejszą liczbę naturalną, dla której spełniony jest taki warunek, a ta istnieje). Tym sposobem otrzymujemy funkcję

$$n : A \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto n_x$$

o przeliczalnym zbiorze wartości $n_A = \{m \in \mathbb{N} \mid n^{-1}(\{m\}) \neq \emptyset\}$. Następnie zdefiniujemy odwzorowanie

$$\beta : n_A \longrightarrow 2^A : m \longmapsto n^{-1}(\{m\}),$$

zauważając przy tym, że każdy ze zbiorów $\beta(m)$, $m \in n_A$ jest niepusty i każdy punkt $x \in A$ należy do dokładnie jednego z nich, a mianowicie: $x \in \beta(n_x)$. Korzystając z Pewnika Wyboru, przyporządkujemy każdemu $m \in n_A$ dowolny (jeden) punkt $x_m \in \beta(m)$. Rzecz jasna, $x_m \in B_m \equiv B_{n_{x_m}} \subset \mathcal{O}_{\lambda(x_m)}$. Przeliczalna rodzina

$$\underline{\mathcal{O}} := \{\mathcal{O}_{\lambda(x_m)}\}_{m \in n_A} \subset \mathcal{O}$$

jest poszukiwanym przeliczalnym podpokryciem pokrycia \mathcal{O} . Istotnie, jest to pokrycie, gdyż dowolny punkt $y \in A$ należy do B_{n_y} , zatem też – wobec $n_y \in n_A$ – do $\mathcal{O}_{\lambda(x_{n_y})} \in \underline{\mathcal{O}}$. \square

Na zakończenie części naszej dyskusji poświęconej euklidesowym przestrzeniom metrycznym wysłowimy jeszcze użyteczne

STWIERDZENIE 84 (Lemat o zwartym pokryciu). *Przyjmijmy zapis Przykł. 25 (1). Ustalmy $N \in \mathbb{N}$ i niechaj $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N})$, a nadto niech $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ będzie zbiorem zwartym. Wówczas istnieje zbiór zwarty $\tilde{\mathcal{K}}$ spełniający relację $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{O}$ i taki, dla którego istnieje para liczb $h, r \in]0, \infty[$ o własności*

$$\forall_{(t,x) \in \mathcal{K}} : \overline{C}_{(h,r)}(t,x) := \{ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N} \mid |s-t| \leq h \quad \wedge \quad \|y-x\|_N \leq r \} \subset \tilde{\mathcal{K}}. \quad (1.4.7)$$

■

Dowód: Dowolnemu punktowi $p = (t,x) \in \mathcal{K}$ przyporządkujemy (dowolną) parę liczb $(h(p), r(p)) \in]0, \infty[^{\times 2}$ o własności

$$\overline{C}_{(2h(p), 2r(p))}(p) \subset \mathcal{O},$$

co jest możliwe z racji otwartości \mathcal{O} . Zdefiniujemy cylindry otwarte

$$C(p) := \{ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N} \mid |s-t| < h(p) \quad \wedge \quad \|y-x\|_N < r(p) \},$$

które tworzą pokrycie otwarte $\{C(p)\}_{p \in \mathcal{K}}$ zbioru zwartego \mathcal{K} . Wybrawszy zeń podpokrycie skończone $\{C(p_k)\}_{k \in \overline{1,L}}$, $L \in \mathbb{N}^{\times}$, $p_k = (t_k, x_k) \in \mathcal{K}$, stwierdzamy, że zbiór zwarty (wprost z konstrukcji)

$$\tilde{\mathcal{K}} := \bigcup_{k=1}^L \overline{C}_{(2h(p_k), 2r(p_k))}(p_k)$$

ma pożądane własności:

$$\mathcal{O} \supset \tilde{\mathcal{K}} \supset \bigcup_{k=1}^L C(p_k) \supset \mathcal{K}.$$

Zdefiniujmy następnie liczby (dodatnie)

$$h := \min_{k \in \overline{1, L}} \{h(p_k)\}, \quad r := \min_{k \in \overline{1, L}} \{r(p_k)\},$$

aby stwierdzić, co następuje: Dowolny punkt $p = (t, x) \in \mathcal{K}$ należy do pewnego cylindra $C(p_k)$, $k \in \overline{1, L}$, a zatem dowolny inny punkt $p' = (t', x') \in \overline{C}_{(h, r)}(p)$ spełnia warunki

$$|t' - t_k| \equiv |t' - t + t - t_k| \leq |t' - t| + |t_k - t| \leq h + h(p_k) \leq 2h(p_k),$$

$$\|x - x_k\|_N \equiv \|x' - x + x - x_k\|_N \leq \|x' - x\|_N + \|x - x_k\|_N \leq r + r(p_k) \leq 2r(p_k),$$

z których wynika już bezpośrednio oczekiwana relacja

$$\overline{C}_{(h, r)}(p) \subset \overline{C}_{(2h(p_k), 2r(p_k))}(p_k) \subset \tilde{\mathcal{K}}.$$

□

Powracając na zakończenie do ogólnej teorii przestrzeni Banacha, wysłowimy kilka jej elementarnych rezultatów o dalekosiężnych konsekwencjach. Pierwszym jest

TWIERDZENIE 1.4.2 (Banacha o punkcie stałym). *Niechaj (X, d_X) będzie zupełną przestrzenią metryczną, $T : X \rightarrow X$ zaś – odwzorowaniem zwężającym (zwanym także kontrakcją), tj. odwzorowaniem spełniającym warunek Lipschitza w postaci*

$$(1.4.8) \quad \exists_{L \in [0, 1[} \forall_{x, y \in X} : d_X(T(x), T(y)) \leq L \cdot d_X(x, y).$$

Istnieje dokładnie jeden punkt stały $v_ \in X$ odwzorowania T ,*

$$T(v_*) = v_*,$$

przy czym, dla dowolnego $x_0 \in X$,

$$v_* = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0).$$

■

Dowód: Wybierzmy (dowolnie) $x_0 \in X$ i zdefiniujmy ciąg

$$x. : \mathbb{N} \rightarrow X : n \mapsto T^n(x_0) \equiv x_n.$$

Jego sąsiednie wyrazy spełniają – wobec (1.4.8) – warunek

$$\begin{aligned} d_X(x_{n+1}, x_n) &\equiv d_X(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq L \cdot d_X(x_n, x_{n-1}) \equiv L \cdot d_X(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \\ &\leq L^2 \cdot d_X(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq L^n \cdot d_X(x_1, x_0), \end{aligned}$$

zatem $x.$ jest ciągiem Cauchy'ego – istotnie, dla dowolnych $n > m \in \mathbb{N}$ słusznym jest oszacowanie

$$\begin{aligned} d_X(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=1}^{n-m} d_X(x_{n+1-k}, x_{n-k}) \leq \sum_{k=1}^{n-m} L^{n-k} \cdot d_X(x_1, x_0) \\ &\leq d_X(x_1, x_0) \cdot L^m \cdot \sum_{l=0}^{n-m-1} L^l \leq d_X(x_1, x_0) \cdot L^m \cdot \sum_{l \in \mathbb{N}} L^l \end{aligned}$$

$$\leq \frac{L^m \cdot d_X(x_1, x_0)}{1-L},$$

które pokazuje, że odległość między wyrazami ciągu o dostatecznie wysokich indeksach jest dowolnie mała. Wobec zupełności X istnieje zatem

$$v_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X,$$

przy czym z ciągłości T , będącej konsekwencją warunku Lipschitza o stałej $0 \leq L < 1$, stwierdzamy, że

$$v_* = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = T(v_*),$$

czyli punkt graniczny jest punktem stałym T . Jeśli także $y \in X$ jest takim punktem, to obliczamy

$$0 \leq d_X(y, v_*) = d_X(T(y), T(v_*)) \leq L \cdot d_X(y, v_*),$$

czyli

$$0 \leq (1 - L) \cdot d_X(y, v_*) \leq 0,$$

więc też – wobec niezwyrodnienia metryki – $y = v_*$. \square

Następnym rezultatem o pierwszorzędnym znaczeniu, stanowiącym podstawę uogólnienia pojęcia całki do klasy odwzorowań o wartościach w przestrzeni Banacha, jest

TWIERDZENIE 1.4.3 (O ograniczonym rozszerzeniu liniowym). *Przyjmijmy zapis Def. 60 i niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem \mathbb{K} , przy czym zakładamy, że V_2 jest przestrzenią Banacha. Niech też $U_1 \subset V_1$ będzie podprzestrzenią \mathbb{K} -liniową, $\chi : U_1 \rightarrow V_2$ zaś – ograniczonym odwzorowaniem liniowym o normie $\|\chi\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(U_1, V_2)} = C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Istnieje dokładnie jedno ograniczone odwzorowanie liniowe $\bar{\chi} : \bar{U}_1 \rightarrow V_2$ rozszerzające χ do podprzestrzeni \bar{U}_1 będącej domknięciem U_1 w V_1 . Rozszerzenie to ma tę samą normę $\|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\bar{U}_1, V_2)} = C$ i jest określane mianem **ograniczonego rozszerzenia liniowego** odwzorowania χ .* \blacksquare

Dowód: Jednoznaczność rozszerzenia $\bar{\chi}$ jest bezpośrednią konsekwencją jego ciągłości, pozostaje zatem wykazać jego istnienie. W przypadku $\chi = 0$ teza jest oczywista, rozważymy zatem przypadek $\chi \neq 0$. Niechaj $u : \mathbb{N} \rightarrow U_1$ będzie ciągiem Cauchy'ego o granicy $u \in \bar{U}_1$. Wobec założonej ciągłości χ zachodzi nierówność

$$\|\chi(u_n) - \chi(u_m)\|_2 \leq C \cdot \|u_n - u_m\|_1,$$

przeto odnośny ciąg wektorów $\chi(u) : \mathbb{N} \rightarrow V_2 : n \mapsto \chi(u_n)$ także jest ciągiem Cauchy'ego, co oznacza istnienie w V_2 jego granicy, którą oznaczmy symbolem

$$\bar{\chi}(u) := \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(u_n).$$

Zauważmy, że granica ta nie zależy od wyboru ciągu u o ustalonej granicy u , oto bowiem dla dowolnego ciągu wektorów $\tilde{u} : \mathbb{N} \rightarrow U_1$ o tej samej granicy wybrawszy – dla ustalonego $\varepsilon > 0$ – indeks $n \in \mathbb{N}$ tak, aby były spełnione nierówności

$$\|u_n - u\|_1 < \frac{\varepsilon}{3C}, \quad \|\tilde{u}_n - u\|_1 < \frac{\varepsilon}{3C}, \quad \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 < \frac{\varepsilon}{3},$$

stwierdzamy pożądaną relację

$$\|\bar{\chi}(u) - \chi(\tilde{u}_n)\|_2 \leq \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 + \|\chi(u_n) - \chi(\tilde{u}_n)\|_2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 + C \cdot \|u_n - \tilde{u}_n\|_1 \\
&\leq \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 + C \cdot (\|u_n - u\|_1 + \|\tilde{u}_n - u\|_1) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + C \cdot \frac{2\varepsilon}{3C} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ponadto, jako że dowolny wektor $v \in U_1$ jest granicą ciągu stałego $v : \mathbb{N} \rightarrow U_1 : n \mapsto v$, prawdziwe jest zdanie

$$\forall v \in U_1 : \bar{\chi}(v) \equiv \chi(v).$$

Jest zatem zasadnym nazwać $\bar{\chi}$ rozszerzeniem χ do \bar{U}_1 . Przy tym ciągłość operacji grupowych w V_1 oraz działania ciała bazowego na tej przestrzeni (zachowującego U_1 i \bar{U}_1) zapewnia \mathbb{K} -liniowość tegoż rozszerzenia. Istotnie, dla dowolnej pary ciągów Cauchy'ego $u^\alpha : \mathbb{N} \rightarrow U_1$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o granicach – odpowiednio – v^α oraz skalarów λ_α zachodzi równość

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}(\lambda_1 \triangleright_1 v^1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v^2) &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(\lambda_1 \triangleright_1 v_n^1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v_n^2) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 \triangleright_2 \chi(v_n^1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \chi(v_n^2)) \\
&= \lambda_1 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(v_n^1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(v_n^2) \\
&\equiv \lambda_1 \triangleright_2 \bar{\chi}(v^1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \bar{\chi}(v^2).
\end{aligned}$$

Wreszcie na koniec ciągłość norm $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ w połączeniu z ograniczonością χ (oraz wobec zachowywania nierówności w przejściu granicznym) pozwala przekonać się, że rozszerzenie $\bar{\chi}$ jest odwzorowaniem ograniczonym,

$$\begin{aligned}
\|\bar{\chi}(v)\|_2 &\equiv \|\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(v_n)\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi(v_n)\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \cdot \|v_n\|_1 = C \cdot \|\lim_{n \rightarrow \infty} v_n\|_1 \\
&\equiv C \cdot \|v\|_1,
\end{aligned}$$

co pozwala stwierdzić, że

$$\|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\bar{U}_1, V_2)} \equiv \sup_{v \in \bar{U}_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\bar{\chi}(v)\|_2}{\|v\|_1} \leq C.$$

Przy tym na podstawie wcześniejszych ustaleń otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned}
C &\equiv \|\chi\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(U_1, V_2)} \equiv \sup_{v \in U_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi(v)\|_2}{\|v\|_1} \equiv \sup_{v \in U_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\bar{\chi}(v)\|_2}{\|v\|_1} \leq \sup_{v \in \bar{U}_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\bar{\chi}(v)\|_2}{\|v\|_1} \\
&\equiv \|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\bar{U}_1, V_2)},
\end{aligned}$$

gdyż supremum obliczone na podzbiorku jest majoryzowane przez supremum obliczone na zawierającym go zbiorze. Ostatecznie więc możemy wypisać ciąg nierówności

$$C \leq \|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\bar{U}_1, V_2)} \leq C,$$

które przekonują o słuszności ostatniej części tezy dowodzonego twierdzenia. \square

Istnienie normy na przestrzeni Banacha pozwala w naturalny sposób uogólnić do kategorii $\text{Ban}_{\mathbb{K}}$ analizę stycznościową odwzorowań, którą formalizuje

DEFINICJA 62. Przyjmijmy zapis Def. 60 i niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem \mathbb{K}), $\mathcal{O} \subset V_1$ – podzbiorem otwartym, $F : \mathcal{O} \rightarrow V_2$ zaś – dowolnym odwzorowaniem. Oznaczmy

$$\mathcal{R}_2 F(v; h) := F(v +_1 h) - F(v) - DF(v)(h).$$

Odwzorowanie F nazwiemy **odwzorowaniem różniczkowalnym (w sensie Fréchet’a) w punkcie** $v \in \mathcal{O}$, jeśli istnieje ograniczony operator liniowy $DF(v) : V_1 \rightarrow V_2$ o własności

$$\lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}_2 F(v; h)\|_2}{\|h\|_1} = 0.$$

Ilekoć istnieje, odwzorowanie $DF(v)$ nazywamy **pochoďną Fréchet’a** odwzorowania F w punkcie v . **Odwzorowanie różniczkowalne na zbiorze \mathcal{O}** to takie, które jest różniczkowalne w każdym punkcie \mathcal{O} . Ilekoć odwzorowanie

$$DF : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$$

jest ciągłe, mówimy, że odwzorowanie F jest **klasy (gładkości) C^1** . Zbiór takich odwzorowań oznaczamy symbolem

$$C^1(\mathcal{O}, V_2) \equiv \{ F \in V_2^{\mathcal{O}} \mid F \text{ klasy } C^1 \}.$$

Zadawszy rekurencyjnie oznaczenie

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}^k(V_1, V_2) := \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^{k-1}(V_1, V_2)), \quad \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^1(V_1, V_2) \equiv \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), \quad k \in \mathbb{N}^\times,$$

w analogii do powyższego określamy na gruncie Stw. 76, także poprzez rekurencję, wyższe pochodne odwzorowania F ,

$$D^k F := D(D^{k-1} F) : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^k(V_1, V_2),$$

odwzorowania wielokrotnie różniczkowalne oraz odnośne wyższe klasy gładkości

$$C^k(\mathcal{O}, V_2) \equiv \{ F \in V_2^{\mathcal{O}} \mid D^{k-1} F \text{ klasy } C^q \}.$$

Oznaczenie to rozszerzamy ostatecznie na przypadki $k \in \{0, \infty\}$ – w pierwszym z nich mamy do czynienia z odwzorowaniami ciągłymi,

$$C^0(\mathcal{O}, V_2) \equiv C(\mathcal{O}, V_2),$$

w drugim zaś – z odwzorowaniami różniczkowalnymi w sposób ciągły dowolną liczbę razy,

$$C^\infty(\mathcal{O}, V_2) \equiv \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\mathcal{O}, V_2),$$

czyli **odwzorowaniami gładkimi**. ▲

Pośród wielu naturalnych własności pochodnej Fréchet’a odnajdujemy i tę:

STWIERDZENIE 85 (Reguła łańcuchowa w przestrzeni Banacha). *Przyjmijmy zapis Def. 60 i niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ będą przestrzeniami Banacha, $\mathcal{O}_\beta \subset V_\beta$, $\beta \in \{1, 2\}$ – podzbiórami otwartymi, $F_{12} : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$ zaś oraz $F_{23} : \mathcal{O}_2 \rightarrow V_3$ odwzorowaniami różniczkowalnymi (w sensie Fréchet’a) w – odpowiednio – $x_0 \in \mathcal{O}_1$ oraz $y_0 = F_{12}(x_0) \in \mathcal{O}_2$. Wówczas superpozycja $F_{23} \circ F_{12} : \mathcal{O}_1 \rightarrow V_3$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym (w sensie Fréchet’a) w x_0 , przy czym*

$$D(F_{23} \circ F_{12})(x_0) = DF_{23}(F_{12}(x_0)) \circ DF_{12}(x_0).$$

Jeśli ponadto $F_{12} \in C^q(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ oraz $F_{23} \in C^q(\mathcal{O}_2, V_3)$ dla pewnego $q \in \mathbb{N}^*$, to także $F_{23} \circ F_{12} \in C^q(\mathcal{O}_1, V_3)$. ■

Dowód: Wybierzmy (dowolnie) $v \in \mathcal{O}_1$ i rozważmy wyrażenie

$$\mathcal{R}_2(F_{23} \circ F_{12})(x_0; v) := F_{23} \circ F_{12}(x_0 + v) - F_{23} \circ F_{12}(x_0) - \mathbf{D}F_{23}(F_{12}(x_0))(v).$$

Dla ustalonego (dowolnie) $\varepsilon > 0$ dobierzmy (korzystając z ograniczoności $\mathbf{D}F_{23}(y_0)$ będącej konsekwencją założonej przez nas różniczkowalności F_{23}) $\mu > 0$ tak, ażeby było

$$\mu \cdot \|\mathbf{D}F_{23}(y_0)\|_{\text{op}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

a następnie (wykorzystując w analogiczny sposób założenie o różniczkowalności F_{12}) $\zeta > 0$ tak, ażeby było

$$\zeta \cdot (\|\mathbf{D}F_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wobec różniczkowalności F_{23} w y_0 możemy teraz dobrać $\eta > 0$, dla którego słuszną jest implikacja

$$\|w\|_2 < \eta \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{R}_2 F_{23}(y_0; w)\|_3 < \zeta \cdot \|w\|_2.$$

Rozumując analogicznie w odniesieniu do F_{12} , ustalamy $\delta > 0$, dla którego zachodzi

$$\|v\|_1 < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_3 < \mu \cdot \|v\|_1,$$

żądając dodatkowo, iżby był spełniony warunek

$$\delta \cdot (\|\mathbf{D}F_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) < \eta.$$

Wobec tożsamości

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2(F_{23} \circ F_{12})(x_0; v) &= \mathcal{R}_2 F_{23}(y_0; \mathbf{D}F_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)) \\ &\quad + \mathbf{D}F_{23}(y_0)(\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)) \end{aligned}$$

oraz nierówności, słusznej dla $\|v\|_1 < \delta$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}F_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_2 &\leq (\|\mathbf{D}F_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) \cdot \|v\|_1 \\ &< \delta \cdot (\|\mathbf{D}F_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) < \eta, \end{aligned}$$

otrzymujemy pożądane oszacowanie

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_2(F_{23} \circ F_{12})(x_0; v)\|_3 &\leq \|\mathcal{R}_2 F_{23}(y_0; \mathbf{D}F_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v))\|_3 \\ &\quad + \|\mathbf{D}F_{23}(y_0)(\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v))\|_3 \\ &\leq \zeta \cdot \|\mathbf{D}F_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_2 \\ &\quad + \|\mathbf{D}F_{23}(y_0)\|_{\text{op}} \cdot \|\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_2 \\ &\leq \zeta \cdot (\|\mathbf{D}F_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) \cdot \|v\|_1 \\ &\quad + \|\mathbf{D}F_{23}(y_0)\|_{\text{op}} \cdot \mu \cdot \|v\|_1 < \varepsilon \cdot \|v\|_1, \end{aligned}$$

dowodzące różniczkowalności (w sensie Frécheta) odwzorowania $F_{23} \circ F_{12}$. Struktura analityczna zapostulowanego tu wzoru na pochodną tego odwzorowania przesądza o słuszności pozostałej części tezy dowodzonego stwierdzenia. \square

Dalsza analiza odwzorowań różniczkowalnych na przestrzeniach Banacha oraz przyszłe jej zastosowania w dyskusji interesujących nas zagadnień odwołują się często do elementarnych wyników teorii całki na przestrzeniach Banacha, której fundamentem w wygodnym (i w pełni wystarczającym dla naszych potrzeb¹) sformułowaniu Dieudonnégo jest

DEFINICJA 63. Przyjmijmy zapis Def. 60 oraz Stw. 75 i niechaj $a, b \in \mathbb{R}$ spełniają warunek $a < b$. Odwzorowanie $\sigma : [a, b] \rightarrow X$ o wartościach w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|_V)$ nazywamy **odwzorowaniem schodkowym**, jeśli istnieje podział odcinka $[a, b]$ postaci

$$a \equiv a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N \equiv b,$$

który będziemy oznaczać jako (a_0, a_1, \dots, a_N) , oraz wektory $v_n \in V$, $n \in \overline{1, N}$ o własności

$$(1.4.9) \quad \forall_{n \in \overline{1, N}} \forall_{t \in]a_{n-1}, a_n[} : \sigma(t) = \sigma_n.$$

Domknięcie podprzestrzeni \mathbb{K} -liniowej $\mathbf{Map}_{\text{step}}([a, b], V)$ odwzorowań schodkowych w przestrzeni \mathbb{K} -liniowej $\mathbf{Map}_b([a, b], V)$ **odwzorowań ograniczonych** na $[a, b]$, tj. tych $F : [a, b] \rightarrow V$ o własności

$$\exists_{C_F \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \forall_{t \in [a, b]} : \|F(t)\|_V \leq C_F,$$

w topologii indukowanej przez normę supremum nosi miano **przestrzeni odwzorowań regulowanych** i będzie oznaczane symbolem

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V) \equiv \overline{\mathbf{Map}_b([a, b], V)}.$$

Sumocalką odwzorowania schodkowego o wartościach w V po odcinku $[a, b]$ (skierowanym) nazywamy odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\int_{[a, b]; V} : \mathbf{Map}_{\text{step}}([a, b], V) \rightarrow V : \sigma \mapsto \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n-1}) \triangleright \sigma_n,$$

przy czym $(a_0 \equiv a, a_1, \dots, a_N \equiv b)$ jest *dowolnym* podziałem jak w Równ. (1.4.9).

Całka (regulowana) Cauchy'ego–Bochnera o wartościach w V po odcinku $[a, b]$ (skierowanym) to ograniczone rozszerzenie liniowe (w rozumieniu Tw. 1.4.3)

$$\int_{[a, b]; V} : \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V) \rightarrow V, \quad \int_{[a, b]; V} \upharpoonright_{\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V)} \equiv \int_{[a, b]; V}$$

¹Tytułem uzasadnienia przyjętego tu punktu widzenia przytoczmy – na prawach anegdoty studzającej konserwatywną jego krytykę – stosowny komentarz Jeana Dieudonnégo zamieszczony w jego klasycznym traktacie [Die65]: „[...] the reader will probably observe the conspicuous absence of a time-honored topic in calculus courses, the "Riemann integral". It may well be suspected that, had it not been for its prestigious name, this would have been dropped long ago, for (with due reverence to Riemann's genius) it is certainly quite clear to any working mathematician that nowadays such a "theory" has at best the importance of a mildly interesting exercise in the general theory of measure and integration [...]. Only the stubborn conservatism of academic tradition could freeze it into a regular part of the curriculum, long after it had outlived its historical importance. Of course, it is perfectly feasible to limit the integration process to a category of functions which is large enough for all purposes of elementary analysis [...], but close enough to the continuous functions to dispense with any consideration drawn from measure theory; this is what we have done by defining only the integral of regulated functions [...]. ”

sumocalki odwzorowania schodkowego po tymże odcinku do przestrzeni odwzorowań regulowanych. Ciągłość dodawania w V implikuje addytywność całki Cauchy'ego–Bochnera względem podziałów dziedziny, tj. dla dowolnych $a \leq c \leq b$ stwierdzamy równość (ograniczonych) odwzorowań liniowych

$$(1.4.10) \quad \int_{[a,b];V} = \int_{[a,c];V} + \int_{[c,b];V} .$$

Tę można rozszerzyć na przypadek dowolnej trójki punktów a, b, c należących do odcinka, na którym odwzorowanie F jest jednostajną granicą ciągu odwzorowań schodkowych, jeśli tylko przyjąć konwencję

$$(1.4.11) \quad \int_{-[a,b] \equiv [b,a];V} \equiv - \int_{[a,b];V} .$$

▲

UWAGA 15. Jest jasne, że podział odcinka $[a, b]$, względem którego odwzorowanie jawi się jako schodkowe, jest wysoce niejednoznaczny. Niezależność sumocalki od wyboru owego podziału jest konsekwencją niezmienniczości definiującej ją sumy względem dowolnych podziału tego rozdrobnień $(a_0 \equiv a, a_1, \dots, a_N \equiv b) \mapsto (a_0 \equiv a, a'_1, a_1, a'_2, a_2, \dots, a'_N, a_N \equiv b)$, która pozwala zastąpić sumy odpowiadające dwóm różnym podziałom odnośnymi sumami odpowiadającymi ich wspólnemu rozdrobieniu – te są tożsame z racji prawostronnej jednoznaczności odwzorowania schodkowego. Liniowość sumocalki jest równie oczywista, a jej ograniczoność wynika wprost z oszacowania

$$\begin{aligned} \left\| \int_{[a,b];V} \sigma \right\|_V &\leq \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n-1}) \cdot \|\sigma_n\|_V \leq (b-a) \cdot \max_{n \in \overline{1, N}} \{\|\sigma_n\|_V\} \\ &= (b-a) \cdot \sup_{t \in [a,b]} \|\sigma(t)\|_V \equiv (b-a) \cdot \|\sigma\|_\infty . \end{aligned}$$

Wobec powyższego istnienie i jednoznaczność całki Cauchy'ego–Bochnera zapewnia Tw. 1.4.3. Warto przy tym podkreślić, że jej definicja obejmuje całki z odwzorowań ciągłych, oto bowiem

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V) \supset C([a, b], V) .$$

Istotnie, każde odwzorowanie ciągłe $F \in C([a, b], V)$ jest na mocy Stw. 74 jednostajnie ciągłe, a to oznacza, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można na $[a, b]$ zadać podział

$$a_n := a + \frac{n}{N_\varepsilon} \cdot (b-a), \quad N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n \in \overline{0, N_\varepsilon}$$

o własności

$$\forall_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} : \sup_{s, t \in]a_{n-1}, a_n[} \|F(s) - F(t)\|_V < \varepsilon ,$$

a wtedy odwzorowanie schodkowe

$$\sigma_F : [a, b] \longrightarrow V, \quad \forall_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} \forall_{t \in]a_{n-1}, a_n[} : \sigma_F(t) = F(a_n)$$

stanowi jednostajną aproksymację F na poziomie dokładności ε ,

$$\begin{aligned} \|F - \sigma_F\|_\infty &\equiv \sup_{t \in [a,b]} \|F(t) - \sigma_F(t)\|_V = \max_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} \left\{ \sup_{t \in]a_{n-1}, a_n[} \|F(t) - \sigma_F(t)\|_V \right\} \\ &\equiv \max_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} \left\{ \sup_{t \in]a_{n-1}, a_n[} \|F(t) - F(a_n)\|_V \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \max_{n \in \mathbb{1}, \overline{N}_\varepsilon} \left\{ \sup_{s, t \in]a_{n-1}, a_n[} \|F(t) - F(s)\|_V \right\} < \varepsilon.$$

Konstrukcja całki (Cauchy'ego–Bochnera) przy użyciu sumocalek, w połączeniu z subaddytywnością normy na przestrzeni wektorowej, podpowiada naturalną relację między normą i całką, stanowiącą jedną z absolutnie podstawowych i nader użytecznych własności tej ostatniej. Zważywszy znaczenie praktyczne tej relacji, formułujemy

STWIERDZENIE 86. *Przyjmijmy zapis Def. 63. Całka Cauchy'ego–Bochnera dowolnego odwzorowania $F \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V)$ spełnia relację*

$$(1.4.12) \quad \left\| \int_{[a, b]; V} F \right\|_V \leq \int_{[a, b]; \mathbb{R}} \|F(\cdot)\|_V \leq |b - a| \cdot \|F\|_\infty.$$

■

Dowód: W pierwszej kolejności należy upewnić się, że druga z całek występujących w Równ. (1.4.12) ma sens, tj. że $\|F(\cdot)\|_V \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \mathbb{R})$. W tym celu wybierzmy (dowolny) ciąg $\sigma_{F, \cdot} : \mathbb{N} \rightarrow C_{\text{step}}([a, b]; V)$ zbieżny do F , a następnie przywołajmy Stw. 70, ażeby otrzymać oszacowanie

$$\begin{aligned} \|\|F(\cdot)\|_V - \|\sigma_{F, n}(\cdot)\|_V\|_\infty &\equiv \sup_{t \in [a, b]} \|\|F(t)\|_V - \|\sigma_{F, n}(t)\|_V\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \|F(t) - \sigma_{F, n}(t)\|_V \\ &\equiv \|F - \sigma_{F, n}\|_\infty, \end{aligned}$$

które pokazuje dowodnie, że odwzorowanie $\|F(\cdot)\|_V$ jest (jednostajną) granicą ciągu $\|\sigma_{F, \cdot}(\cdot)\|_V : \mathbb{N} \rightarrow C_{\text{step}}([a, b]; \mathbb{R})$, w szczególności więc jest odwzorowaniem regulowanym. Wykorzystując ciągłość normy, ustaloną w Stw. 73, oraz wcześniejsze oszacowania, jak również oczywiste własności sumocalki (a w istocie – subaddytywność normy $\|\cdot\|_V$), sprawdzamy słuszność oszacowania (1.4.12) w bezpośrednim rachunku, oto bowiem z jednej strony

$$\begin{aligned} \left\| \int_{[a, b]; V} F \right\|_V &\equiv \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]; V} \sigma_{F, n} \right\|_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{[a, b]; V} \sigma_{F, n} \right\|_V \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]; \mathbb{R}} \|\sigma_{F, n}\|_V \equiv \int_{[a, b]; \mathbb{R}} \|F\|_V \end{aligned}$$

a z drugiej –

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]; \mathbb{R}} \|\sigma_{F, n}\|_V &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |b - a| \cdot \|\sigma_{F, n}\|_\infty \leq |b - a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\|F - \sigma_{F, n}\|_\infty + \|F\|_\infty) \\ &= |b - a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|F\|_\infty \equiv |b - a| \cdot \|F\|_\infty. \end{aligned}$$

□

O naturalności wprowadzonej powyżej operacji całkowania w kategorii liniowej zaświadcza

STWIERDZENIE 87. *Przyjmijmy zapis Def. 27 i 63. Przyporządkowanie przestrzeni odwzorowań regulowanych nad $[a, b]$ przestrzeniom Banacha rozszerza się w kanoniczny sposób do endofunktora kowariantnego*

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \cdot) : \mathbf{Ban}_{\mathbb{K}} \curvearrowright.$$

Całka Cauchy'ego–Bochnera jest transformacją naturalną

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Map}_{\text{reg}}([a,b], \cdot) & \\
 \text{Ban}_{\mathbb{K}} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow f_{[a,b], \cdot} \\ \curvearrowleft \end{array} & \text{Ban}_{\mathbb{K}} \\
 & \text{id}_{\text{Ban}_{\mathbb{K}}} &
 \end{array}$$

■

Dowód: Pierwsza część tezy jest oczywista – każde odwzorowanie $\chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ indukuje odwzorowanie jawnie \mathbb{K} -liniowe

$$\text{Map}_{\text{reg}}([a,b], \chi) : \text{Map}_{\text{reg}}([a,b], V_1) \longrightarrow \text{Map}_{\text{reg}}([a,b], V_2) : F \longmapsto \chi \circ F.$$

Istotnie, jeśli $\sigma_{F, \cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow \text{Map}_{\text{step}}([a,b], V_1)$ jest ciągiem zbieżnym do F , przy czym dla ustalonego $\varepsilon > 0$ (i $\chi \neq 0$ – przypadek odwzorowania zerowego jest trywialny) zachodzi

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\varepsilon : \|F - \sigma_{F,n}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\|\chi\|_{\text{op}}},$$

to wówczas

$$\begin{aligned}
 \|\chi \circ F - \chi \circ \sigma_{F,n}\|_\infty &\equiv \sup_{t \in [a,b]} \|\chi((F - \sigma_{F,n})(t))\|_2 \leq \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \sup_{t \in [a,b]} \|(F - \sigma_{F,n})(t)\|_1 \\
 &\equiv \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \|F - \sigma_{F,n}\|_\infty < \varepsilon,
 \end{aligned}$$

a zarazem

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N} : \|\chi \circ \sigma_{F,n}\|_\infty &\equiv \sup_{t \in [a,b]} \|\chi(\sigma_{F,n}(t))\|_2 \leq \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \sup_{t \in [a,b]} \|\sigma_{F,n}(t)\|_1 \\
 &\equiv \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \|\sigma_{F,n}\|_\infty,
 \end{aligned}$$

konstatujemy zatem, że $\chi \circ \sigma_{F, \cdot}(\mathbb{N}) \subset \text{Map}_{\text{step}}([a,b], V_2) \subset \text{Map}_{\text{b}}([a,b], V_2)$ i ciąg ten jest zbieżny do $\chi \circ F$, czyli $\chi \circ F \in \text{Map}_{\text{reg}}([a,b], V_2)$. Jest przy tym oczywiste, że dla dowolnej przestrzeni Banacha $(V, \|\cdot\|_V)$ zachodzi tożsamość

$$\text{Map}_{\text{reg}}([a,b], \text{id}_V) \equiv \text{id}_{\text{Map}_{\text{reg}}([a,b], V)},$$

a do tego dla dowolnej pary odwzorowań $\chi_\beta \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_\beta, V_{\beta+1})$, $\beta \in \{1, 2\}$ między przestrzeniami Banacha $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ spełniony jest warunek

$$\text{Map}_{\text{reg}}([a,b], \chi_2 \circ \chi_1) = \text{Map}_{\text{reg}}([a,b], \chi_2) \circ \text{Map}_{\text{reg}}([a,b], \chi_1),$$

co przesądza o funktorialności $\text{Map}_{\text{reg}}([a,b], \cdot)$.

W następnej kolejności sprawdzamy naturalność całki Cauchy'ego–Bochnera, co sprowadza się do wykazania przemienności diagramów

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Map}_{\text{reg}}([a,b], V_1) & \xrightarrow{\text{Map}_{\text{reg}}([a,b], \chi)} & \text{Map}_{\text{reg}}([a,b], V_2) \\
 \downarrow f_{[a,b], V_1} & & \downarrow f_{[a,b], V_2} \\
 V_1 & \xrightarrow{\chi} & V_2
 \end{array}$$

$\forall V_1, V_2 \in \text{Obj Ban}_{\mathbb{K}}$
 $\chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$

lub – innymi słowy – do wykazania tożsamości

$$\forall F \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_1) : \int_{[a, b]; V_2} \chi \circ F = \chi \left(\int_{[a, b]; V_1} F \right).$$

Ta jednak wynika wprost z ciągu równości (wykorzystujących wprowadzone wcześniej obserwacje i oznaczenia, jak również liniowość i ciągłość χ)

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]; V_2} \chi \circ F &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]; V_2} \chi \circ \sigma_{F, n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi \left(\int_{[a, b]; V_2} \sigma_{F, n} \right) \\ &= \chi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]; V_2} \sigma_{F, n} \right) \equiv \chi \left(\int_{[a, b]; V_1} F \right). \end{aligned}$$

□

Jako prostą egzemplifikację powyższego odkrywamy

COROLLARIUM 7. *Przyjmijmy zapis Def. 63 oraz Stw. 76 i niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami Banacha, a nadto niech $\chi \in C_{\text{reg}}([a, b], \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2))$. Dla dowolnego wektora $v \in V_1$ spełniona jest tożsamość*

$$\int_{[a, b]; V_2} r_{\text{ev}}(v) \circ \chi = \left(\int_{[a, b]; \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)} \chi \right)(v).$$

■

Dowód: Teza wynika wprost z połączenia (drugiej części) Stw. 76 ze Stw. 87. □

Nietrywialnego przykładu zastosowania całki Cauchy’ego–Bochnera w konstrukcji odwzorowań różniczkowalnych pomiędzy przestrzeniami Banacha nader często spotykanej i wykorzystywanej w matematycznym modelowaniu ewolucji układów fizycznych dostarcza poniższe

STWIERDZENIE 88. *Przyjmijmy zapis Def. 63 oraz Stw. 75. Niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami Banacha i niech $F \in C^k(V_1, V_2)$, $k \in \mathbb{N}^\times$, a nadto niech $a, b, t_0 \in \mathbb{R}$ będą dowolnymi liczbami spełniającymi relację $a < t_0 < b$. Odwzorowanie*

$$\sigma_{F; t_0} : C([a, b], V_1) \longrightarrow C([a, b], V_2) : \gamma \longmapsto \int_{[t_0, \cdot]; V_2} F \circ \gamma$$

jest klasy C^k , przy czym

$$\forall \gamma, v \in C([a, b], V_1) : D\sigma_{F; t_0}(\gamma)(v) = \int_{[t_0, \cdot]; V_2} DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot)).$$

■

Dowód: Oznaczmy na potrzeby niniejszego dowodu $I := [a, b]$. Dokonamy najpierw, przywoławszy (1.4.12), oszacowania normy jawnie \mathbb{K} -liniowego odwzorowania $D\sigma_{F; t_0} \circ \gamma$,

$$\begin{aligned} \|D\sigma_{F; t_0} \circ \gamma\|_{\text{op}} &\equiv \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \frac{\|D\sigma_{F; t_0}(\gamma)(v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} \\ &\equiv \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \sup_{t \in I} \left\| \int_{[t_0, t]; V_2} DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot)) \right\|_2 \right) \\ &\leq \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \sup_{t \in I} |t - t_0| \cdot \|DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot))\|_\infty \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (b-a) \cdot \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \sup_{s \in I} \|DF(\gamma(s))(v(s))\|_2 \right) \\
&\leq (b-a) \cdot \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \sup_{s \in I} (\|DF(\gamma(s))\|_{\text{op}} \cdot \|v(s)\|_1) \right) \\
&\leq (b-a) \cdot \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \sup_{s \in I} \|DF(\gamma(s))\|_{\text{op}} \cdot \sup_{t \in I} \|v(t)\|_1 \right) \\
&\leq (b-a) \cdot \sup_{s \in I} \|DF(\gamma(s))\|_{\text{op}}.
\end{aligned}$$

Wobec ciągłości normy $\|\cdot\|_{\text{op}}$ (orzeczonej w Stw. 73) oraz założonej ciągłości DF i γ odwzorowanie $\|DF(\gamma(\cdot))\|_{\text{op}} : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ jest ciągłe, zatem jego obraz w $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$ jest – w świetle Stw. 68 – zwarty, więc też – na mocy Stw. 81 – ograniczony, co wobec powyższego oszacowania przesądza o ograniczoności $D\sigma_{F;t_0} \circ \gamma$. W podobny sposób (i z wykorzystaniem powyższych wniosków) dowodzimy ciągłości rozpatrywanego tu odwzorowania $D\sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(C(I, V_1), C(I, V_2))$ w (dowolnym) punkcie $\gamma \in C(I, V_1)$, zauważając najpierw

$$\begin{aligned}
&\|D\sigma_{F;t_0}(\gamma_1) - D\sigma_{F;t_0}(\gamma)\|_{\text{op}} \\
&\leq \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left[\frac{(b-a)}{\|v\|_\infty} \cdot \sup_{t \in I} (\|DF(\gamma_1(t)) - DF(\gamma(t))\|_{\text{op}} \cdot \|v(t)\|_1) \right] \\
&\leq (b-a) \cdot \sup_{t \in I} \|DF(\gamma_1(t)) - DF(\gamma(t))\|_{\text{op}},
\end{aligned}$$

a następnie wykorzystując wynikającą ze Stw. 74 jednostajną ciągłość DF na domknięciu kuli $\overline{B_{V_1}(0; \|\gamma\|_\infty + 1)}$ (zakładamy, bez straty ogólności, że odległość γ_1 od γ liczona w metryce na $C(I, V_1)$ indukowanej przez normę supremum nie przekracza 1), która gwarantuje

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon^{(DF)} > 0 \quad \forall w_1, w_2 \in \overline{B_{V_1}(0; \|\gamma\|_\infty + 1)} : \\
(\|w_2 - w_1\|_\infty < \delta_\varepsilon^{(DF)}) \implies \|DF(w_2) - DF(w_1)\|_{\text{op}} < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

i tym samym pozwala – przy ustalonym $\varepsilon > 0$ – dokonać dla

$$\|\gamma_1(t) - \gamma(t)\| \leq \|\gamma_1 - \gamma\|_\infty < \min\{1, \delta_\varepsilon^{(DF)}\} =: \delta_\varepsilon, \quad t \in I$$

ostatecznego oszacowania

$$\|D\sigma_{F;t_0}(\gamma_1) - D\sigma_{F;t_0}(\gamma)\|_{\text{op}} \leq (b-a) \cdot \sup_{t \in I} \|DF(\gamma_1(t)) - DF(\gamma(t))\|_{\text{op}} < \varepsilon.$$

Na zakończenie pierwszej części dowodu przekonujemy się, że rozpatrywane tu odwzorowanie (o wszystkich pożądanых własnościach) jest w istocie pochodną (w sensie Frécheta) odwzorowania $\sigma_{F;t_0}$. W tym celu sprawdzamy zachowanie odnośnej reszty

$$\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma; v) := \sigma_{F;t_0}(\gamma + v) - \sigma_{F;t_0}(\gamma) - D\sigma_{F;t_0}(\gamma)(v)$$

w granicy

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma; v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} \\
&= \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \left\| \int_{[t_0, \cdot]; V_2} [F \circ (\gamma + v)(\cdot) - F(\gamma(\cdot)) - DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot))] \right\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|F \circ (\gamma+v) - F \circ \gamma - DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot))\|_\infty}{\|v\|_\infty} \\ &\equiv (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\sup_{t \in I} \|F \circ (\gamma+v)(t) - F \circ \gamma(t) - DF(\gamma(t))(v(t))\|_2}{\|v\|_\infty}. \end{aligned}$$

Ciągła różniczkowalność F w połączeniu z ciągłością γ i v implikuje – na mocy argumentu analogicznego do tego użytego w dowodzie ograniczoności $D\sigma_{F;t_0} \circ \gamma$ – istnienie punktu $t_* \in I$, w którym jest osiągnięte supremum występujące w liczniku, a zatem

$$\lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma;v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} \leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|F(\gamma(t_*)+v(t_*)) - F(\gamma(t_*)) - DF(\gamma(t_*))(v(t_*))\|_2}{\|v\|_\infty},$$

czyli też – raz jeszcze wobec różniczkowalności F (przy założeniu $v(t_*) \neq 0$, którego niespełnienie automatycznie implikuje pożądaną tezę) –

$$\begin{aligned} \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma;v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} &\leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|v(t_*)\|_1 \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(\gamma(t_*);v(t_*))\|_2}{\|v(t_*)\|_1}}{\|v\|_\infty} \\ &\leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\frac{\|\mathcal{R}F(\gamma(t_*);v(t_*))\|_2 \cdot \sup_{s \in I} \|v(s)\|_1}{\|v(t_*)\|_1}}{\|v\|_\infty} \\ &= (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}F(\gamma(t_*);v(t_*))\|_2}{\|v(t_*)\|_1} = 0. \end{aligned}$$

Jest zatem odwzorowanie $\sigma_{F;t_0}$ jednokrotnie różniczkowalne w sposób ciągły, przy czym pochodna ma postać zapostulowaną w treści dowodzonego stwierdzenia.

W przypadku $k > 1$ ciągłej różniczkowalności $\sigma_{F;t_0}$ klasy C^k dowodzimy przez indukcję względem stopnia $r \in \overline{1, k}$. Udowodniwszy słuszność tezy dla $r = 1$, założmy jej prawdziwość dla $1 \leq r < k$, a następnie powtórzmy rozumowanie z pierwszej części dowodu, zastępując po pierwsze ciągłe odwzorowanie F takimż odwzorowaniem $D^r F : V_1 \rightarrow \mathcal{B}_K^r(V_1, V_2)$ oraz odwzorowanie

$$\sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \rightarrow C(I, V_2) : \gamma \mapsto \int_{[t_0, \cdot]; V_2} F \circ \gamma$$

odwzorowaniem (o definicji stanowiącej składową tezę indukcyjnej)

$$D^r \sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \rightarrow C(I, \mathcal{B}_K^r(V_1, V_2)) : \gamma \mapsto \int_{[t_0, \cdot]; \mathcal{B}_K^r(V_1, V_2)} D^r F \circ \gamma,$$

a po drugie – w konsekwencji poprzedniego – przestrzeń $(V_2, \|\cdot\|_2)$ przestrzenią $(\mathcal{B}_K^r(V_1, V_2), \|\cdot\|_{\text{op}})$. Opisane podstawienie prowadzi, w szczególności, do postulatu dotyczącego postaci odwzorowania

$$D^{r+1} \sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \rightarrow C(I, \mathcal{B}_K^{r+1}(V_1, V_2))$$

wyrażonego wzorem

$$\begin{aligned} \forall_{\gamma, v_1, v_2, \dots, v_{r+1} \in C(I, V_1)} : D^{r+1} \sigma_{F;t_0}(\gamma)(v_1, v_2, \dots, v_{r+1}) \\ = \int_{[t_0, \cdot]; V_2} D^{r+1} F(\gamma(\cdot))(v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots, v_{r+1}(\cdot)). \end{aligned}$$

□

Na podstawie dotychczasowej analizy możemy już sformułować podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego dla odwzorowań (regulowanych) o wartościach w przestrzeni Banacha. Zaczynamy od

TWIERDZENIE 1.4.4 (Podstawowe rachunku różniczkowego i całkowego). *Przyjmijmy zapis Def. 63 i niechaj $F \in C_{\text{reg}}([a, b], V)$, przy czym zakładamy, że F jest ciągła w punkcie $c \in [a, b]$. Wówczas odwzorowanie*

$$I_F : [a, b] \longrightarrow V : t \longmapsto \int_{[a, t]; V} F$$

jest różniczkowalne w c , a jego pochodna jest równa

$$DI_F(c) = F(c).$$

W szczególności

$$(1.4.13) \quad F(b) - F(a) = \int_{[a, b]; V} DF.$$

■

Dowód: Korzystając z Równ. (1.4.10) i (1.4.11), jak również z Cor. 7 (w odniesieniu do stałego odwzorowania $[a, b] \ni t \mapsto \chi(t) \equiv \text{id}_V$), obliczamy wprost, dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$ o własności $c + h \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} I_F(c+h) - I_F(c) - h \triangleright F(c) &= \int_{[a, c+h]; V} F - \int_{[a, c]; V} F - \left(\int_{[c, c+h]; V} \text{id}_V \right) (F(c)) \\ &= \int_{[c, c+h]; V} F - \int_{[c, c+h]; V} r_{\text{ev}}(F(c)) \circ \text{id}_V \\ &\equiv \int_{[c, c+h]; V} (F - F(c)) \end{aligned}$$

i na tej podstawie, a w odwołaniu do Równ. (1.4.12), otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} \|I_F(c+h) - I_F(c) - h \triangleright F(c)\|_V &= \left\| \int_{[c, c+h]; V} (F - F(c)) \right\|_V \\ &\leq |h| \cdot \sup_{t \in [c, c+h]} \|F(t) - F(c)\|_V, \end{aligned}$$

a stąd ostatecznie, uwzględnivszy ciągłość F w c , także pożądany wynik

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|I_F(c+h) - I_F(c) - h \triangleright F(c)\|_V}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [c, c+h]} \|F(t) - F(c)\|_V = 0.$$

□

Pośród nieoczywistych zastosowań Podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego pojawia się

STWIERDZENIE 89 (Nierówność Grönwalla–Bellmana). *Przyjmijmy zapis Def. 62 oraz 63 i ustalmy (dowolnie) liczby $a, b \in \mathbb{R}$ spełniające warunek $a < b$ oraz $t_0 \in I :=]a, b[$. Dla dowolnych funkcji $f, \varphi \in C(I, [0, \infty[)$ i $c \in [0, \infty[$ słuszną jest implikacja²*

$$\forall t \in I : f(t) \leq c + \left| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \varphi \cdot f \right| \implies \forall t \in I : f(t) \leq c \cdot \exp \left(\left| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \varphi \right| \right).$$

²Nie chcąc wychodzić poza zakres pojęć wprowadzonych w niniejszym skrypcie, zapisaliśmy tęzę stwierdzenia w terminach całki Cauchy'ego–Bochnera, jest jednak absolutnie oczywistym, że mamy tu w istocie do czynienia ze standardową całką Riemanna.

■

Dowód: Rozpatrzmy najpierw przypadek $t \in]t_0, b[$. W tym celu zdefiniujemy funkcję

$$F :]t_0, b[\rightarrow [0, \infty[: t \mapsto c + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \varphi \cdot f.$$

W świetle Tw. 1.4.4 funkcja ta jest klasy C^1 i spełnia nierówność

$$F'(t) = \varphi(t) f(t) \leq \varphi(t) F(t), \quad t \in]t_0, b[,$$

a to wobec założonej relacji $f(t) \leq F(t)$. Powyższą nierówność możemy przepisać w zwartej postaci (tutaj $D \equiv \frac{d}{dt}$)

$$D \left(\exp \left(- \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}} \varphi \right) \cdot F(\cdot) \right) (t) \leq 0,$$

a następnie – wobec ciągłej różniczkowalności wyrażenia różniczkowanego – scałkować na odcinku $]t_0, \tau[$ dla dowolnego $\tau \in]t_0, b[$, otrzymując w ten sposób

$$F(\tau) \cdot \exp \left(- \int_{[t_0, \tau]; \mathbb{R}} \varphi \right) - F(t_0) \leq 0,$$

czyli

$$F(\tau) \leq c \cdot \exp \left(\int_{[t_0, \tau]; \mathbb{R}} \varphi \right),$$

skąd na mocy użytej wcześniej nierówności z założenia otrzymujemy oczekiwaną nierówność

$$f(\tau) \leq c \cdot \exp \left(\int_{[t_0, \tau]; \mathbb{R}} \varphi \right).$$

Analogiczne rozumowanie dla $t \in]a, t_0[$ bierze za punkt wyjścia funkcję

$$G :]a, t_0[\rightarrow [0, \infty[: t \mapsto c + \int_{[t, t_0]; \mathbb{R}} \varphi \cdot f.$$

Przypadek $t = t_0$ nie wymaga komentarza. □

Pośród oczywistych natomiast znajdujemy użyteczne

TWIERDZENIE 1.4.5 (Rozwinięcie Taylora dla funkcji wielu zmiennych).
Przyjmijmy zapis Def. 54, 62 oraz 63 i ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N}^\times$, a następnie wprowadźmy notację wielowskaźnikową, w której we współrzędnych kartezjańskich $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{\times n}$ wektorowi $M = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{\times n}$, o długości $\|M\| \equiv \sum_{i=1}^n m_i$, przyporządkowujemy operator pochodnej cząstkowej

$$D_M^{\|M\|} := \frac{\partial^{\|M\|}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}},$$

formę $\|M\|$ -liniową

$$\Lambda^M : \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R} : (r_1, r_2, \dots, r_n) \mapsto \prod_{i=1}^n r_i^{m_i}$$

oraz symbol

$$M! := \prod_{i=1}^n m_i!.$$

Niechaj $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x^n})$ i niech $x \in \mathcal{O}$ oraz $h \in \mathbb{R}^{x^n}$, przy czym zakładamy, że $I_{x,h} := \{x + t \triangleright h \mid t \in [0, 1]\} \subset \mathcal{O}$. Dla dowolnej funkcji $f \in C^{r+1}(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ spełniona jest równość

$$f(x + h) = \sum_{\|M\| \leq r} \frac{1}{M!} \Lambda^M(h) \mathbb{D}_M^{\|M\|} f(x) + \mathcal{R}_{r+1} f(x; h),$$

w której ostatni człon jest resztą rzędu $r + 1$, postaci³

$$\mathcal{R}_{r+1} f(x; h) = (r + 1) \sum_{\|M\| = r+1} \frac{1}{M!} \Lambda^M(h) \int_{[0,1]; \mathbb{R}} (1 - \cdot)^r \mathbb{D}_M^{r+1} f(x + \cdot \triangleright h).$$

■

Dowód: Dla $n = 1$ sprowadza się do wielokrotnego użycia Tw. 1.4.4. Przypadek $n > 1$ redukuje się do poprzedniego poprzez wprowadzenie – dla ustalonych x i h – funkcji pomocniczej $g_{x,h} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(x + t \triangleright h)$. □

W następnej kolejności natrafiamy na

TIWIERDZENIE 1.4.6 (O wartości średniej). *Przyjmijmy zapis Def. 54, 62 oraz 63. Niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami Banacha i niech $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(V_1)$, a do tego niech dla pewnych $v \in \mathcal{O}$ i $w \in V_1$ oraz dowolnego $t \in [0, 1]$ zachodzi $v +_1 t \triangleright w \in \mathcal{O}$. Oznaczmy*

$$\gamma_{v;w} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{O} : t \mapsto v +_1 t \triangleright w.$$

Dowolne odwzorowanie $F \in C^q(\mathcal{O}, V_2)$ spełnia tożsamość

$$F(v +_1 w) - F(v) = \left(\int_{[0,1]; \mathcal{B}_K(V_1, V_2)} \mathbb{D}F \circ \gamma_{v;w} \right) (w),$$

więc też

$$\|F(v +_1 w) - F(v)\|_2 \leq \|w\|_1 \cdot \|\mathbb{D}F \circ \gamma_{v;w}\|_\infty.$$

■

Dowód: Nierówność w tezie twierdzenia wynika wprost z zapostulowanej w nim równości, ograniczoności całki Cauchy’ego–Bochnera oraz oszacowania (1.4.12), pozostaje zatem udowodnić rzeczoną równość. W tym celu wystarczy jednak zauważyć, że w świetle Stw. 85 zachodzi równość

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(F \circ \gamma_{v;w})(t) &= \mathbb{D}F(\gamma_{v;w}(t)) \circ \mathbb{D}\gamma_{v;w}(t) \equiv \mathbb{D}F(\gamma_{v;w}(t))(w) \\ &\equiv r_{\text{ev}}(w) \circ (\mathbb{D}F \circ \gamma_{v;w})(t), \end{aligned}$$

zatem na mocy Równ. 1.4.13 oraz Cor. 7 otrzymujemy oczekiwaną równość

$$\begin{aligned} F(v +_1 w) - F(v) &\equiv F \circ \gamma_{v;w}(1) - F \circ \gamma_{v;w}(0) = \int_{[0,1]; V} \mathbb{D}(F \circ \gamma_{v;w}) \\ &= \int_{[0,1]; V} r_{\text{ev}}(w) \circ (\mathbb{D}F \circ \gamma_{v;w}) \\ &= \left(\int_{[0,1]; \mathcal{B}_K(V_1, V_2)} \mathbb{D}F \circ \gamma_{v;w} \right) (w). \end{aligned}$$

□

³Patrz: przypis do treści Stw. 89.

Lipschitzowskość odwzorowania między przestrzeniami metrycznymi (rozumiana jak w (1.4.8)) implikuje – w świetle Stw. 71 – jego ciągłość. Dzięki powyższemu twierdzeniu możemy udokumentować sytuację, w której zachodzi implikacja odwrotna, co czynimy w

STWIERDZENIE 90. *Przyjmijmy zapis Def. 54, 62 oraz Przykł. 25 (1) i ustalmy $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Niechaj $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_{\mathbb{E}}(\mathbb{R}^{n_1})$, niech $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^{n_2})$ i niech $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ będzie podzbiorem zwartym. Wówczas f spełnia globalnie na \mathcal{K} warunek Lipschitza (jak w Tw. 1.4.2),*

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathcal{K} : \|f(x) - f(y)\|_{n_2} \leq L \cdot \|x - y\|_{n_1} .$$

■

Dowód: Każdy punkt $x \in \mathcal{K}$ jest punktem wewnętrznym \mathcal{O} , przeto jest w tym ostatnim zawarty wraz z pewną otwartą kulą $B^{n_1}(x; \varepsilon_x)$, $\varepsilon_x > 0$. Rodzina kul $\{B^{n_1}(x; \frac{\varepsilon_x}{2})\}_{x \in \mathcal{K}}$ stanowi (otwarte) pokrycie \mathcal{K} , z którego możemy wybrać skończone podpokrycie $\{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})\}_{i \in \overline{1, N}}$. Każda z domkniętych kul $\overline{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})}$ jest (w świetle Stw. 81) zwarta i zawarta w \mathcal{O} , a nadto wypukła, możemy przeto odnieść do niej tezę Tw. 1.4.6, a ponieważ odwzorowanie $\|Df(\cdot)\|_{\text{op}} \upharpoonright_{\overline{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})}}$ jest ograniczone na mocy Stw. 68 i Stw. 81, otrzymujemy

$$\forall_{i \in \overline{1, N}} \exists M_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall_{x, y \in \overline{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})}} : \|f(x) - f(y)\| \leq M_i \cdot \|x - y\| .$$

Wystarczy teraz położyć

$$L := \max_{i \in \overline{1, N}} \{M_i\} .$$

□

Twierdzenie o wartości średniej, mimo swą niezaprzeczalną elementarności, otwiera nam drogę do wyników stanowiących podstawę analizy lokalnej na rozmaitościach różniczkowalnych, z których nieraz przyjdzie nam korzystać w dalszej części kursu. Oto więc mamy

TWIERDZENIE 1.4.7 (O lokalnej odwracalności odwzorowań). *Przyjmijmy zapis Def. 62 i niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem \mathbb{K}), $\mathcal{U} \subset V_1$ podzbiorem otwartym, $F : \mathcal{U} \rightarrow V_2$ zaś – odwzorowaniem klasy C^q , $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Niech dalej $v_* \in \mathcal{U}$ i założymy, że pochodna (Fréchet) $DF(v_*) \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ ma ograniczoną odwrotność. Wówczas F jest lokalnym izomorfizmem klasy C^q , tzn. istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_{v_*} \subset \mathcal{U}$ wektora v_* oraz odwzorowanie $G \in C^q(F(\mathcal{O}_{v_*}), \mathcal{O}_{v_*})$ spełniające warunki*

$$F \circ G = \text{id}_{F(\mathcal{O}_{v_*})}, \quad G \circ F \upharpoonright_{\mathcal{O}_{v_*}} = \text{id}_{\mathcal{O}_{v_*}} .$$

■

Dowód: Po pierwsze zauważmy, że dokonując w razie potrzeby przesunięcia argumentu i wartości o stałe wektory oraz przeskalowania $F \mapsto DF(v_*)^{-1} \circ F$, możemy zawsze sprowadzić rozważane zagadnienie do takiego, w którym mamy do czynienia z odwzorowaniem $F \in C^q(\mathcal{U}, V_1)$ spełniającym w $v_* = 0_1$ warunki $F(0_1) = 0_1$ i $DF(0_1) = \text{id}_{V_1}$, co też uczynimy poniżej. Rozważmy odwzorowanie (klasy C^q)

$$\Phi_F : \mathcal{U} \rightarrow V_1 : v \mapsto v - F(v) ,$$

spełniające warunek

$$\mathbf{D}\Phi_F(0_1) = \text{id}_{V_1} - \mathbf{D}F(0_1) \equiv 0,$$

przy czym wobec ograniczoności pochodnej istnieje takie $r > 0$, dla którego

$$\forall_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; 2r)}} : \|\mathbf{D}\Phi_F(v)\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2}.$$

Na podstawie Tw. 1.4.6 stwierdzamy wówczas, że

$$\forall_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} : \|\Phi_F(v)\|_1 \leq \frac{1}{2} \|v\|_1 < \frac{r}{2},$$

skąd wniosek:

$$\Phi_F(\overline{B_{V_1}(0_1; r)}) \subset \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}.$$

Pokażemy, że odwzorowanie $\Phi_F : \overline{B_{V_1}(0_1; r)} \rightarrow \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}$ jest bijekcją. W tym celu wybierzmy (dowolnie) $w \in \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}$ i rozważmy odwzorowanie

$$\Phi_F^w : \overline{B_{V_1}(0_1; r)} \rightarrow V_1 : v \mapsto w + \Phi_F(v).$$

Jako że $2\|w\|_1, \|v\|_1 \leq r$, mamy

$$\forall_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} : \|\Phi_F^w(v)\|_1 \leq \|w\|_1 + \|\Phi_F(v)\|_1 \leq r,$$

więc w istocie $\Phi_F^w(\overline{B_{V_1}(0_1; r)}) \subset \overline{B_{V_1}(0_1; r)}$, a ponieważ $\|\mathbf{D}\Phi_F^w(v)\|_{\mathcal{B}_K(V_1)} \leq \frac{1}{2}$, przeto

$$\begin{aligned} \forall_{v_1, v_2 \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} : \|\Phi_F^w(v_1) - \Phi_F^w(v_2)\|_1 &= \|\Phi_F^w(v_1 - v_2)\|_1 \\ &\leq \sup_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} \|\mathbf{D}\Phi_F^w(v)\|_{\text{op}} \cdot \|v_1 - v_2\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_1, \end{aligned}$$

więc też – na mocy Tw. 1.4.2 – Φ_F^w ma jednoznacznie określony punkt stały $v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}$, a w nim

$$v = \Phi_F^w(v) \equiv w + v - F(v) \quad \Leftrightarrow \quad w = F(v).$$

Ostatecznie wnioskujemy więc, że odwzorowanie F jest odwracalne na zbiorze domkniętym $F^{-1}(\overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}) =: B$. Bez trudu przekonujemy się o ograniczoności tejże lokalnej odwrotności G , oto bowiem dla dowolnego $v_1, v_2 \in B$ spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned} \|G(F(v_2)) - G(F(v_1))\|_1 &\equiv \|v_2 - v_1\|_1 = \|F(v_2) + \Phi_F(v_2) - F(v_1) - \Phi_F(v_1)\|_1 \\ &\leq \|F(v_2) - F(v_1)\|_1 + \|\Phi_F(v_2) - \Phi_F(v_1)\|_1 \\ &\leq \|F(v_2) - F(v_1)\|_1 + \frac{1}{2} \|v_2 - v_1\|_1 \\ &\equiv \|F(v_2) - F(v_1)\|_1 + \frac{1}{2} \|G(F(v_2)) - G(F(v_1))\|_1, \end{aligned}$$

z której wynika lipschitzowskość G ,

$$\forall_{w_1, w_2 \in \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}} : \|G(w_2) - G(w_1)\|_1 \leq 2\|w_2 - w_1\|_w,$$

z tej zaś – pożądana ciągłość G . W następnej kolejności dowodzimy różniczkwalności G w otwartej kuli $B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})$. W tym celu ustalmy (dowolnie) $w \in B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})$ oraz $h \in V_1$ na tyle małe, aby był spełniony warunek $w + h \in B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})$, a zatem aby istniały (dane jednoznacznie) wektory $v = G(w) \in B_{V_1}(0_1; r)$ oraz

$u = G(w +_1 h) - G(w) \in V_1$. Możemy teraz – w świetle poczynionych założeń – zdefiniować odwzorowanie

$$H := DF(v)^{-1} \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1)$$

i policzyć

$$\|G(w +_1 h) - G(w) - H(w +_1 h - w)\|_1 \equiv \|u - H(F(v +_1 u) - F(v))\|_1,$$

co wobec ciągłej różniczkowości F ,

$$F(v +_1 u) - F(v) = DF(v)(u) + \mathcal{R}_2 F(v; u), \quad \lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}_2 F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} = 0,$$

pozwala zapisać

$$\begin{aligned} \|G(w +_1 h) - G(w) - H(h)\|_1 &= \|u - H \circ DF(v)(u) - H(\mathcal{R}_2 F(v; u))\|_1 \\ &= \|H(\mathcal{R}F(v; u))\|_1 \leq \|H\|_{\text{op}} \cdot \|\mathcal{R}F(v; u)\|_1 \\ &\equiv \|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \cdot \|G(w +_1 h) - G(w)\|_1, \end{aligned}$$

czyli też – biorąc pod uwagę stwierdzoną wcześniej ograniczoność G –

$$\begin{aligned} \|G(w +_1 h) - G(w) - H(h)\|_1 &\leq 2\|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \cdot \|w +_1 h - w\|_1 \\ &\equiv 2\|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \cdot \|h\|_1. \end{aligned}$$

Powyższa formuła dowodzi różniczkowości G , oto bowiem – skoro $\|w\|_1 \leq 2\|h\|_V$ (jak wynika wprost z lipschitzowskością G) –

$$2\|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \xrightarrow{\|h\|_1 \rightarrow 0} 2\|H\|_{\text{op}} \cdot \lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} = 0,$$

a zarazem pozwala stwierdzić – zgodnie z oczekiwaniami – równość

$$(1.4.14) \quad DG(w) = H \equiv DF(G(w))^{-1}.$$

W konsekwencji ciągłości G, DF oraz operacji Inv brania odwrotności (odwzorowania liniowego), formuła powyższa zaświadcza o ciągłości odwzorowania $DG = \text{Inv} \circ DF \circ G : B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2}) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1)$. Wreszcie biorąc pod uwagę gładkość operacji brania odwrotności (i mając na względzie banachowską naturę przestrzeni $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}^k(V_1, V_1)$, $k \in \overline{1, q}$), drogą indukcji dowodzimy przynależności odwzorowania G do klasy C^q , wykorzystując Stw. 85 w rekurencyjnym wzorze $D^k G \equiv D(D^{k-1} G)$. \square Niepoślednią rolę odgrywa także

TWIERDZENIE 1.4.8 (O odwzorowaniu uwikłanym). *Przyjmijmy zapis Def. 62. Niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem \mathbb{K}), $\mathcal{U}_\beta \subset V_\beta$, $\beta \in \{1, 2\}$ podzbiorami otwartymi, $F : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow V_3$ zaś – odwzorowaniem klasy C^q , $q \in \mathbb{N}^\times \cup \{\infty\}$. Niech dalej $(v_*, w_*) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ i załóżmy, że $F(v_*, w_*) = 0$ oraz że pochodna $D_2 F(v_*, w_*) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_2, V_3)$ względem argumentu z \mathcal{U}_2 ma ciągłą odwrotność. Wówczas istnieje takie otoczenie otwarte $\mathcal{O} \ni v_*$, na którym jest jednoznacznie określone odwzorowanie $G \in C^q(\mathcal{O}, \mathcal{U}_2)$ o własnościach*

$$G(v_*) = w_*, \quad \forall_{v \in \mathcal{O}} : F(v, G(v)) = 0.$$

■

Dowód: Przechodząc od F do $D_2F(v_*, w_*)^{-1} \circ F$, możemy zawsze doprowadzić do tego, że pochodna F względem drugiego argumentu jest w (v_*, w_*) odwzorowaniem tożsamościowym na $V_3 \equiv V_2$. Przyjawszy taki właśnie punkt wyjścia, rozważmy odwzorowanie

$$\Phi_F : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow V_1 \times V_2 : (v, w) \longmapsto (v, F(v, w)).$$

Jego pochodna $D\Phi_F : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_K(V_1 \times V_2)$ przyjmuje w (v_*, w_*) prostą postać

$$D\Phi_F(v_*, w_*) = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 \\ D_1F(v_*, w_*) & D_2F(v_*, w_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 \\ D_1F(v_*, w_*) & \text{id}_{V_2} \end{pmatrix},$$

jest zatem jawnie odwracalna,

$$D\Phi_F(v_*, w_*)^{-1} = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 \\ -D_1F(v_*, w_*) & \text{id}_{V_2} \end{pmatrix},$$

co w świetle Tw. 1.4.7 oznacza istnienie na pewnym otoczeniu $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \ni (v_*, w_*)$ odwzorowania

$$\Psi : \Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2) \equiv \mathcal{W}_1 \times F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2) \longrightarrow \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$$

klasy C^q spełniającego warunki

$$\Phi_F \circ \Psi = \text{id}_{\Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2)}, \quad \Psi \circ \Phi_F \upharpoonright_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2} = \text{id}_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2}.$$

Wobec oczywistej własności tego odwzorowania,

$$\text{pr}_1 \circ \Psi = \text{id}_{\mathcal{W}_1},$$

wniosujemy na tej podstawie o istnieniu odwzorowania $\tilde{G} \in C_K^q(\Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2), \mathcal{W}_2)$ spełniającego warunki

$$\forall (v, w) \in \Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2) \quad \forall u \in \mathcal{W}_2 : [F(v, \tilde{G}(v, w)) = w \quad \wedge \quad \tilde{G}(v, F(v, u)) = u].$$

Powyższe formuły podpowiadają zdefiniowanie odwzorowanie

$$G : \mathcal{W}_1 \longrightarrow \mathcal{W}_2 : v \longmapsto \tilde{G}(v, 0_2)$$

klasy C^q , które w oczywisty sposób spełnia warunki z treści dowodzonego twierdzenia (dla $\mathcal{O} \equiv \mathcal{W}_1$),

$$\forall v \in \mathcal{W}_1 : F(v, G(v)) \equiv F(v, \tilde{G}(v, 0)) = 0_2.$$

Na tym etapie pozostaje już tylko udowodnić jednoznaczność wyboru G , co jest konieczne, gdyż w powyższej definicji G dokonaliśmy arbitralnego wyboru przy przejściu od (danego jednoznacznie) odwzorowania \tilde{G} do G . Niech zatem G_* będzie dowolnym ciągłym odwzorowaniem określonym na pewnym otoczeniu otwartym $\tilde{\mathcal{O}} \ni v_*$ i spełniającym warunki

$$G_*(v_*) = w_*, \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{O}} : F(v, G_*(v)) = 0_2.$$

Wówczas dla $v \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{W}_1$ zachodzi tożsamość

$$\Phi_F(v, G_*(v)) = (v, F(v, G_*(v))) = (v, 0_2),$$

jeśli więc tylko $G_*(v) \in \mathcal{W}_2$, a wobec ciągłości G_* wartości $G_*(v)$ są dowolnie bliskie w_* , to stwierdzamy równość

$$(v, G_*(v)) = \Psi \circ \Phi_F(v, G_*(v)) = \Psi(v, 0_2) = (v, G(v)),$$

czyli $G_*(v) = G(v)$ dla $v \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{W}_1 \cap G_*^{-1}(\mathcal{W}_2)$, przy czym to ostatnie przecięcie jest niepustym zbiorem otwartym (zawierającym w szczególności v_*), co dowodzi lokalnej jednoznaczności G . \square

Na zakończenie niniejszej zwięzłej rekapitulacji podstawowych twierdzeń dotyczących rachunku różniczkowego i całkowego na przestrzeniach Banacha przypomnimy jeszcze

TWIERDZENIE 1.4.9 (O rzędzie odwzorowania). *Przyjmijmy zapis Def. 62. Niechaj $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem \mathbb{K}) wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V_\alpha = N_\alpha \in \mathbb{N}$, niech $v \in V_1$ i niech $\mathcal{U}_v \ni v$ będzie jego otwartym otoczeniem w V_1 , wreszcie też niech $F \in C^q(\mathcal{U}_v, V_2)$, $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, przy czym zakładamy, że DF ma stały rząd $\text{rk } DF = r$, tj. odwzorowanie $\mathcal{U}_v \rightarrow \mathbb{N} : v \mapsto \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } DF(v)$ jest stałe. Wówczas istnieje otwarte otoczenie $\mathcal{O}_v \subset \mathcal{U}_v$ wektora v oraz homeomorfizm*

$$\iota_1 : \mathcal{O}_v \xrightarrow{\cong} B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$$

o własnościach $\iota_1 \in C^q(\mathcal{U}_v, B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1))$ oraz $\iota_1^{-1} \in C^q(B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1), \mathcal{U}_v)$, jak również otwarte otoczenie $\mathcal{W} \supset F(\mathcal{U}_v)$ wektora $F(v)$ oraz homeomorfizm

$$\iota_2 : B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1) \xrightarrow{\cong} \mathcal{W}$$

o własnościach $\iota_2 \in C^q(B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1), \mathcal{W})$ oraz $\iota_2^{-1} \in C^q(\mathcal{W}, B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1))$, które zadają rozkład F postaci

$$(1.4.15) \quad F = \iota_2 \circ \pi_{1,2,\dots,r} \circ \iota_1,$$

zapisany przy użyciu odwzorowania

$$\pi_{1,2,\dots,r} : \mathbb{K}^{n_1} \rightarrow \mathbb{K}^{n_2} : (k_1, k_2, \dots, k_{n_1}) \mapsto (k_1, k_2, \dots, k_r, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}).$$

■

Dowód: Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $v = 0_1$ oraz $F(v) = 0_2$ (wystarczy zastąpić odwzorowanie F odwzorowaniem $\mathcal{U}_v \rightarrow V_2 : w \mapsto F(v + w) - F(v)$), co też uczynimy. Dopełnienie proste $\text{Ker } DF(0_1)$ w V_1 , którego istnienie wynika wprost z Cor. 5, jest r -wymiarową podprzestrzenią V_1 , którą będziemy oznaczać symbolem Δ_1 ,

$$V_1 \cong \Delta_1 \oplus \text{Ker } DF(0_1).$$

Wybrawszy w V_1 bazę $\{v_i\}_{i \in \overline{1, n_1}} =: \mathcal{B}_1$ będącą konkatencją baz: $\{v_j\}_{j \in \overline{1, r}}$ w Δ_1 oraz $\{v_{r+k}\}_{k \in \overline{1, n_1-r}}$ w $\text{Ker } DF(0_1)$ (w rozumieniu Stw. 33), a wraz z nią – bazę dualną $\{\varphi_i\}_{i \in \overline{1, n_1}}$ w V_1^* ,

$$\varphi_i(v_l) = \delta_{i,l}^{\mathbb{K}}, \quad i, l \in \overline{1, n_1},$$

definiujemy odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\kappa_1 : V_1 \rightarrow \{\mathbf{0}_r\} \times \mathbb{K}^{\times n_1-r} \subset \mathbb{K}^{\times n_1} : w \mapsto \sum_{k=1}^{n_1-r} \varphi_{r+k}(w) \triangleright_{\mathbb{K}^{n_1}} e_{r+k},$$

gdzie $\{e_i\}_{i \in \overline{1, n_1}}$ jest bazą standardową w $\mathbb{K}^{\times n_1}$ wprowadzoną w Przykł. 13 (5). Wybierzmy następnie w V_2 bazę $\{w_a\}_{a \in \overline{1, n_2}} =: \mathcal{B}_2$ będącą konkatencją baz: $\{w_b \equiv DF(0_1)(v_b)\}_{b \in \overline{1, r}}$ w $\text{Im } DF(0)$ oraz $\{w_{r+c}\}_{c \in \overline{1, n_2-r}}$ w dopełnieniu Δ_2 podprzestrzeni $\text{Im } DF(0) \subset V_2$,

$$V_2 \cong \text{Im } DF(0) \oplus \Delta_2,$$

wraz z odnośną bazą dualną $\{\psi_a\}_{a \in \overline{1, n_2}}$,

$$\psi_a(w_b) = \delta_{a,b}^{\mathbb{K}}, \quad a, b \in \overline{1, n_2},$$

po czym zdefiniujemy odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\kappa_2 : V_2 \longrightarrow \mathbb{K}^{xr} \times \{\mathbf{0}_{n_1-r}\} \subset \mathbb{K}^{xn_1} : w \longmapsto \sum_{b=1}^r \psi_b(w) \triangleright_{\mathbb{K}^{n_1}} e_b,$$

Możemy już teraz określić odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\Phi : \mathcal{U}_{0_1} \longrightarrow \mathbb{K}^{xn_1} : w \longmapsto \kappa_2 \circ F(w) +_{\mathbb{K}^{xn_1}} \kappa_1(w),$$

jawnie różniczkowalne w sposób ciągły, przy czym dla dowolnych $w \in \mathcal{U}_{0_1}$ oraz $u \in V_1$ zachodzi – wprost na mocy definicji odwzorowań κ_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ (i wobec \mathbb{K} -liniowości form φ_i oraz ψ_a) – równość

$$\text{D}\Phi(w)(u) = \kappa_2(\text{D}F(w)(u)) +_{\mathbb{K}^{xn_1}} \kappa_1(\text{id}_{V_1}(u)) \equiv \kappa_2(\text{D}F(w)(u)) +_{\mathbb{K}^{xn_1}} \kappa_1(u), \quad (1.4.16)$$

a zatem w szczególności, dla dowolnego $i \in \overline{1, n_1}$,

$$\begin{aligned} \text{D}\Phi(0_1)(v_i) &= \kappa_2(\text{D}F(0_1)(v_i)) +_{\mathbb{K}^{xn_1}} \kappa_1(v_i) \\ &= \begin{cases} \kappa_2(w_i) +_{\mathbb{K}^{xn_1}} \mathbf{0}_{n_1} = e_i, & \text{gdy } i \notin \overline{1, r} \\ \mathbf{0}_{n_1} +_{\mathbb{K}^{xn_1}} \kappa_1(v_i) = e_i, & \text{gdy } i \in \overline{r+1, n_1} \end{cases} \\ &\equiv e_i. \end{aligned}$$

Macierz pochodnej $\text{D}\Phi(0_1)$ względem baz \mathcal{B}_1 i \mathcal{B}_2 przyjmuje więc postać

$$[\text{D}\Phi(0_1)]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \mathbf{1}_{n_1},$$

a zatem odwzorowanie Φ spełnia założenia Tw. 1.4.7, na mocy którego istnieje otwarte otoczenie $\tilde{\mathcal{O}}_{0_1} \subset \mathcal{U}_{0_1}$ wektora $v = 0_1$ takie, że $\Phi \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{O}}_{0_1}}$ jest lokalnym izomorfizmem klasy C^q (wszak odwzorowania κ_α są klasy C^∞). Co więcej, zważywszy ciągłość odwzorowania $\text{D}\Phi : \mathcal{U}_{0_1} \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, \mathbb{K}^{xn_1})$ możemy wybrać $\tilde{\mathcal{O}}_{0_1}$ na tyle małe, aby $\text{D}\Phi(w)$ było liniową bijekcją dla każdego wektora $w \in \tilde{\mathcal{O}}_{0_1}$ – wystarczy przeciąć dowolne otwarte otoczenie 0_1 , na którym $\Phi \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{O}}_{0_1}}$ jest lokalnym izomorfizmem klasy C^q , z przeciwobrazem (nieodzownie otwartym) dowolnego otwartego otoczenia odwzorowania $\text{D}\Phi(0_1)$ w zbiorze liniowych izomorfizmów, o którego istnieniu przesądza Stw. 79. Skoro zaś $\text{Im DF}(w)$ ma stały wymiar nad $w \in \mathcal{U}_{0_1} \supset \tilde{\mathcal{O}}_{0_1}$, przeto wobec równości $\text{D}\Phi(w)(u) = \kappa_2(\text{D}F(w)(u))$ spełnionej dla dowolnego $u \in \Delta_1$ (oraz bijektywności $\text{D}F(w)$) odwzorowanie $\text{D}F(w)$ jest nieodzownie liniową bijekcją r -wymiarowej podprzestrzeni Δ_1 na r -wymiarową podprzestrzeń $\text{Im DF}(w)$, ograniczenie $\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im DF}(w)}$ zaś – liniową bijekcją $\text{Im DF}(w)$ na $\text{Im D}\Phi(w) \cong \mathbb{K}^{xr}$. Oznaczmy

$$(1.4.17) \quad \Lambda_w := (\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im DF}(w)})^{-1} : \mathbb{K}^{xr} \xrightarrow{\cong} \text{Im DF}(w),$$

co uczyniwszy, otrzymujemy równość

$$\text{D}F(w) = \Lambda_w \circ \kappa_2 \circ \text{D}\Phi(w).$$

Odwzorowanie $\Phi \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{O}}_{0_1}}$ zyskuje tu interpretację lokalnej mapy na dziedzinie F (w przestrzeni modelowej \mathbb{K}^{xn_1}), odwzorowanie $\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im DF}(w)}$ zaś – interpretację takiej mapy na stycznej do obrazu F . Przejdziemy obecnie do uszczegółowienia tak związanego opisu współrzędniowego dziedziny i obrazu odwzorowania F .

W tym celu ustalmy $R \in \mathbb{R}_{>0}$ o własności $B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; R) \subset \Phi(\tilde{\mathcal{O}}_{0_1})$ i oznaczmy

$$\mathcal{O}_{0_1} := \Phi^{-1}(B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; R)) \in \mathcal{T}(V_1)$$

(otwarte otoczenie 0_1) oraz

$$\iota_1 := \ell_{\frac{1}{R}} \circ \Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_{0_1}} : \mathcal{O}_{0_1} \longrightarrow \ell_{\frac{1}{R}}(B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; R)) = B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1),$$

przy czym – podkreślmy – powyższe odwzorowanie (przeskalowana mapa lokalna) jest jawnie odwracalne (z racji odwracalności $\Phi \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{O}}_{0_1} \supset \mathcal{O}_{0_1}}$), pozwala więc zdefiniować

$$F_1 := F \circ \iota_1^{-1} : B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1) \longrightarrow V_2,$$

tj. zadać wygodną połowicznie (w dziedzinie) współrzędnową lokalną prezentację odwzorowania F . Dokonując rozkładu dziedziny F_1 wedle schematu

$$(1.4.18) \quad B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1) \equiv B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1) \cap (\mathbb{K}^{x_r} \times \mathbb{K}^{x_{n_1-r}}),$$

a następnie różniczkując obustronnie tożsamość (zapisaną w obrazie tegoż rozkładu)

$$(1.4.19) \quad F(w) = F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)), \quad w \in \mathcal{O}_{0_1},$$

otrzymujemy – przywoławszy po drodze Stw. 85 oraz Równ. (1.4.16), a dla dowolnego $u \in V_1$ –

$$\begin{aligned} \ell_R \circ DF(w)(u) &= D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) \circ \text{pr}_1 \circ \kappa_2(DF(w)(u)) \\ &\quad + {}_2D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) \circ \text{pr}_2 \circ \kappa_1(u). \end{aligned}$$

Stąd wniosek, że

$$\begin{aligned} &D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) \circ \text{pr}_2 \circ \kappa_1(u) \\ &= (\ell_R \circ \Lambda_w - D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w))) \circ \text{pr}_1 \circ \kappa_2(DF(w)(u)). \end{aligned}$$

Obliczając powyższe dla $u \in \Delta_1 \subset V_1$, konstatujemy, że

$$(\ell_R \circ \Lambda_w - D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w))) \circ \text{pr}_1 \circ \kappa_2 \circ DF(w) \upharpoonright_{\Delta_1} = 0,$$

ponieważ jednak $\text{pr}_1 \circ \kappa_2 \circ DF(w) \upharpoonright_{\Delta_1} : \Delta_1 \longrightarrow \mathbb{K}^{x_r} \times \{\mathbf{0}_{n_1-r}\} \longrightarrow \mathbb{K}^{x_r}$ jest – wprost z konstrukcji – (liniową) bijekcją, przeto stwierdzamy na tej podstawie równość

$$(1.4.20) \quad \ell_R \circ \Lambda_w - D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) = 0.$$

Ta z kolei oznacza, że

$$D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) \circ \text{pr}_2 \circ \kappa_1(u) = 0_2$$

dla *dowolnego* wektora $u \in V_1$, co wobec surjektywności $\text{pr}_2 \circ \kappa_1 : V_1 \longrightarrow \{\mathbf{0}_r\} \times \mathbb{K}^{x_{n_1-r}} \longrightarrow \mathbb{K}^{x_{n_1-r}}$ pozwala wyprowadzić równość

$$D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) = 0.$$

Surjektywność odwzorowania ι_1 zapewnia – w obrazie rozkładu (1.4.18) – słuszność powyższej równości na całej kuli jednostkowej $B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$, czyli

$$D_2 F_1 = 0.$$

Koniec końców możemy zatem zapisać – znów w obrazie rozkładu (1.4.18) –

$$F_1 = \tilde{F}_1 \circ \text{pr}_1$$

dla pewnego odwzorowania $\tilde{F}_1 \in C^q(\text{pr}_1(B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)), V_2) \equiv C^q(B_{\mathbb{K}^{r \times r}}(\mathbf{0}_r; 1), V_2)$, gdzie $B_{\mathbb{K}^{r \times r}}(\mathbf{0}_r; 1)$ należy rozumieć jako „dysk równikowy” będący miejscem zerowym współrzędnych o indeksach $k \in r+1, n_1$ wewnątrz $B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$, przeto także – w świetle Równ. (1.4.19) –

$$\forall_{u \in F(\mathcal{O}_{0_1})} : u = \tilde{F}_1((\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2)(u)).$$

Przywoławszy definicję odwzorowania Φ (i ograniczywszy w niej dziedzinę do \mathcal{O}_{0_1} zgodnie z przedstawionym wyżej tokiem rozumowania), bez trudu zauważamy, że obrazem r -wymiarowej powierzchni $F(\mathcal{O}_{0_1}) \subset V_2$ względem odwzorowania $\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2$ jest dysk $B_{\mathbb{K}^{r \times r}}(\mathbf{0}_r; 1) \equiv \text{pr}_1(B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1))$, ten zaś jest przez \tilde{F}_1 (czyli – równoważnie – przez F_1) przeprowadzany na $F(\mathcal{O}_{0_1})$, przy czym – wobec definicji (ograniczonej) lokalnej mapy $\Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_{0_1}}$ – dowolny punkt dysku $x \in B_{\mathbb{K}^{r \times r}}(\mathbf{0}_r; 1) \times \{\mathbf{0}_{n_1-r}\}$ jest przez $\iota_1^{-1} \equiv \Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_{0_1}}^{-1} \circ \ell_R$ odwzorowywany w punkt $w_x \in \mathcal{O}_{0_1}$, którego obraz $F(w_x)$ spełnia oczywisty warunek

$$\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2(F(w_x)) \equiv \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2(F(w_x)) + \kappa_1(w_x) = x,$$

co zapiszemy zwięźle w postaci

$$\forall_{\underline{x} \in B_{\mathbb{K}^{r \times r}}(\mathbf{0}_r; 1)} : (\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2)(\tilde{F}_1(\underline{x})) = \underline{x}.$$

W podsumowaniu stwierdzamy, że $\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \upharpoonright_{F(\mathcal{O}_{0_1})}$ jest izomorfizmem (klasy C^q) między $F(\mathcal{O}_{0_1})$ a $B_{\mathbb{K}^{r \times r}}(\mathbf{0}_r; 1) \subset B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$ o odwrotności \tilde{F}_1 .

Ostatni etap konstrukcji „kanonicznego” lokalnego opisu odwzorowania F o stałym rzędzie otwiera uzupełnienie dotychczasowej listy odwzorowań pomocniczych o \mathbb{K} -liniowy izomorfizm

$$\kappa_3 : \mathbb{K}^{\times n_2-r} \xrightarrow{\cong} \Delta_2$$

między składową prostą $\mathbb{K}^{\times n_2-r} \cong \{\mathbf{0}_r\} \times \mathbb{K}^{\times n_2-r}$ przestrzeni modelowej $\mathbb{K}^{r \times r} \times \mathbb{K}^{\times n_2-r} \equiv \mathbb{K}^{\times n_2}$ dla przeciwdziedziny V_2 w składową prostą Δ_2 tej ostatniej będącą dopełnieniem podprzestrzeni $\text{Im DF}(0)$, a następnie – o odwzorowanie

$$\iota_2 : B_{\mathbb{K}^{r \times r}}(\mathbf{0}_r; 1) \times B_{\mathbb{K}^{\times n_2-r}}(\mathbf{0}_{n_2-r}; 1) \longrightarrow V_2 : (\underline{x}, \underline{y}) \longmapsto \tilde{F}_1(\underline{x}) +_2 \kappa_3(\underline{y}),$$

jawnie różniczkowalne w sposób ciągły (klasy C^q). W świetle wcześniejszych naszych obserwacji zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} \kappa_2 \circ \iota_2(\underline{x}, \underline{y}) &= \kappa_2 \circ \tilde{F}_1(\underline{x}) \equiv \kappa_2 \circ F_1(\underline{x}, \mathbf{0}_{n_1-r}) \equiv \kappa_2 \circ F \circ \Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_{0_1}}^{-1} \circ \ell_R(\underline{x}, \mathbf{0}_{n_1-r}) \\ &= R \triangleright_{\mathbb{K}^{r \times r}} \underline{x}, \end{aligned}$$

to jednak przesądza o iniektywności ι_2 , oto bowiem $\iota_2(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{y}}) = \iota_2(\underline{x}, \underline{y})$ implikuje $\tilde{\underline{x}} = \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ \iota_2(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{y}}) = \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ \iota_2(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}$, a zatem także $\kappa_3(\tilde{\underline{y}}) = \kappa_3(\underline{y})$, czyli – wobec bijektywności κ_3 – ostatecznie $(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{y}}) = (\underline{x}, \underline{y})$. Na podstawie Równ. (1.4.20) i wyprowadzonej zeń analizy odwzorowania F_1 stwierdzamy dalej, że

$$D\tilde{F}_1(\text{pr}_1 \circ \iota_1(w)) \equiv D\tilde{F}_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w)) = \ell_R \circ \Lambda_w,$$

czyli w obrazie wprowadzonego wcześniej rozkładu (1.4.18), w którym $\iota_1(w) =: (\underline{x}, \underline{y})$,

$$D\tilde{F}_1(\underline{x}) \equiv D\tilde{F}_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w)) = \ell_R \circ \Lambda_{\iota_1^{-1}(\underline{x}, \underline{y})}.$$

W takim jednak razie dla dowolnych $(\underline{x}, \underline{y}) \in B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1) \times B_{\mathbb{K}^{xn_2-r}}(\mathbf{0}_{n_2-r}; 1)$ otrzymujemy formułę

$$D\iota_2(\underline{x}, \underline{y}) : \mathbb{K}^{xr} \times \mathbb{K}^{xn_2-r} \longrightarrow V_2 : (\xi, \zeta) \longmapsto \ell_R \circ \Lambda_{\iota_1^{-1}(\underline{x}, \underline{y})}(\xi) +_2 \kappa_3(\zeta),$$

którą można przepisać, przywoławszy definiującą Równ. (1.4.17), w postaci

$$D\iota_2(\underline{x}, \underline{y})(\xi, \zeta) = (\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}(R \triangleright_{\mathbb{K}^{xr}} \xi) +_2 \kappa_3(\zeta),$$

a ponieważ podprzestrzenie $\text{Im}(\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}$ i $\text{Im } \kappa_3$ w przestrzeni V_2 mają jednopunktowe przecięcie,

$$\begin{aligned} (\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}(\tilde{\xi}) = \kappa_3(\tilde{\zeta}) &\implies \tilde{\xi} = \kappa_2 \circ \kappa_3(\tilde{\zeta}) = \mathbf{0}_{n_2} \\ &\implies (\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}(\tilde{\xi}) = \mathbf{0}_2 = \kappa_3(\tilde{\zeta}), \end{aligned}$$

a ich wymiary sumują się do wymiaru V_2 , przeto $D\iota_2(\underline{x}, \underline{y})$ jawi się liniowym homeomorfizmem. W konsekwencji tego faktu, a na mocy Tw. 1.4.7, każdy punkt ograniczenia $B_{\mathbb{K}^{xn_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1) \subset B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1) \times B_{\mathbb{K}^{xn_2-r}}(\mathbf{0}_{n_2-r}; 1)$ dziedziny odwzorowania ι_2 ma otoczenie otwarte, które jest przez ι_2 odwzorowywane na swój obraz w sposób homeomorficzny (w klasie gładkości C^q), a ponieważ ι_2 jest przy tym – jak to zostało pokazane wcześniej – iniekcją, przeto ι_2 jest homeomorfizmem klasy C^q (o odwrotności różniczkowalnej w sposób ciągły) na całym zbiorze $B_{\mathbb{K}^{xn_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1)$. Tożsamość (1.4.15) wynika już wprost z opisanej tu szczegółowo konstrukcji. \square

Na zakończenie niniejszego zwięzłego przeglądu podstawowych narzędzi i metod analitycznych, do których przyjdzie nam odwoływać się w dyskusji rozmaitych form geometryzacji pojęć algebraicznych, a zarazem w charakterze ilustracji wielu z tych przedstawionych dotychczas wysłowimy obecnie kilka fundamentalnych wyników teorii równań różniczkowych zwyczajnych (i towarzyszących stwierdzeń pomocniczych). Już wkrótce przyjdzie nam zastosować je w analizie istotnych – także z fizykalnego punktu widzenia (jak choćby w nader bogatym i ważnym kontekście rozważań nad symetriami zjawisk fizycznych) – relacji między polami wektorowymi na rozmaitościach i dyfeomorfizmami oraz w badaniu grup topologicznych ze strukturą różniczkową. Zaczniemy od fundamentalnego

TWIERDZENIE 1.4.10 (Picarda–Lindelöfa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy’ego). *Przyjmijmy zapis Def. 54, 62 oraz Przykł. 25 (1) i ustalmy (dowolnie) $N \in \mathbb{N}^{\times}$, $x_0 \in \mathbb{R}^{\times N}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ oraz $\varepsilon, r \in \mathbb{R}_{>0}$. Niechaj będzie dane odwzorowanie*

$$f : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B^N(x_0; r)} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$$

ciągłe w pierwszym argumencie i spełniające warunek Lipschitza (1.4.8) w drugim argumencie ze stałą Lipschitza $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, a nadto oznaczmy

$$\sup_{y \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B^N(x_0; r)}} \|f(y)\|_N =: M.$$

Wówczas zagadnienie początkowe

$$(1.4.21) \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $x \in C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)})$, o ile

$$(1.4.22) \quad 0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{r}{M}\right\}.$$

W konsekwencji powyższego dla dowolnego podzioru zwarteo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{\times 1+N}$ zawar- tego w otwartej dziedzinie \mathcal{O} ciągłości funkcji f istnieje stała $\varepsilon_{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}_{>0}$ taka, że dla dowolnego punktu $(t_0, x_0) \in \mathcal{K}$ zagadnienie początkowe (1.4.21) ma dokładnie jedno rozwiązanie na odcinku $]t_0 - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_0 + \varepsilon_{\mathcal{K}}[$.

■

Dowód: Zaczniemy od takiego przeformułowania zagadnienia początkowego (1.4.21), które pozwoli na zastosowanie Tw. 1.4.2 wobec odwzorowania zwięzającego realizu- jącego iteracyjną metodę odcałkowania (1.4.21). Oto więc na podstawie założenia o ciągłości f (zwróćmy uwagę na to, że warunek Lipschitza względem drugiego argumentu implikuje ciągłość f w tymże argumencie), możemy przepisać (1.4.21) w równoważnej postaci całkowej

$$x(t) = x_0 + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, x(\cdot)).$$

Istotnie, jeśli poszukiwane rozwiązanie jest różniczkowalne w sposób ciągły w t (a takie jest wprost z definicji), to jest też ciągłe w t i możemy odcałkować prawą stronę równania różniczkowego (1.4.21). I odwrotnie, jeśli znajdziemy rozwiązanie wypisanego powyżej zagadnienia całkowego ciągłe w t , to – jak łatwo widać wprost – będzie ono także różniczkowalne w sposób ciągły⁴. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)} & : C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)}) \longrightarrow C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)}) \\ & : g \longmapsto \left(t \longmapsto x_0 + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, g(\cdot)) \right), \end{aligned}$$

zwane **funkcjonałem Picarda**. Funkcja $\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}[g]$ jest jawnie ciągła, pozostaje jedynie sprawdzić, że jej wartości są zawarte w kuli $\overline{B^N(x_0; r)}$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g)(t) - x_0\|_N & = \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, g(\cdot)) \right\|_N \leq M \cdot |t - t_0| \\ & \leq M\varepsilon < r, \end{aligned}$$

przy czym wykorzystaliśmy oszacowanie (1.4.12) oraz założenie (1.4.22). Następnie bez trudu przekonujemy się, że funkcyjonał Picarda jest odwzorowaniem zwięzającym – istotnie, dla dowolnych dwóch odwzorowań $g_1, g_2 \in C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)})$ norma różnicy $\|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2)(\cdot) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1)(\cdot)\|_N$ jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ i jako taka osiąga – w świetle Stw. 68 oraz 81 – swoje kresy, w szczególności istnieje punkt $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ o własności

$$\|(\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1))(t)\|_N = \|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1)\|_{\infty},$$

możemy więc zapisać, przywołując Równ. (1.4.12) oraz warunek Lipschitza dla f ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1)\|_{\infty} & = \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} [f(\cdot, g_2(\cdot)) - f(\cdot, g_1(\cdot))] \right\| \\ & \leq |t - t_0| \cdot \sup_{s \in [t_0, t]} \|f(s, g_2(s)) - f(s, g_1(s))\|_N \end{aligned}$$

⁴W przypadku zagadnienia **autonomicznego** klasy C^k , tj. takiego, w którym funkcja f zależy od t tylko poprzez zależność od x i ta ostatnia jest klasy C^k , rozwiązanie klasy C względem t , będąc – jak w przypadku ogólnym – klasy C^1 , jest automatycznie klasy C^2 , a zatem także klasy C^3 itd., przy czym jedynym ograniczeniem tego ciągu wynikań jest stopień ciągłej różniczkowalności f . Widzimy więc, że rozwiązanie klasy C w t jest zarazem klasy C^{k+1} .

$$\begin{aligned} &\leq L \cdot |t - t_0| \cdot \sup_{s \in [t_0, t]} \|g_2(s) - g_1(s)\|_N \\ &\leq L \cdot \varepsilon \cdot \|g_2 - g_1\|_\infty < \|g_2 - g_1\|_\infty. \end{aligned}$$

Na podstawie dotychczasowych ustaleń stwierdzamy w świetle Tw. 1.4.2 odniesionego tutaj do przestrzeni metrycznej $(C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)}), \|\cdot\|_\infty)$, o której zupełności przesądza Stw. 75, że funkcjonal Picarda ma dokładnie jeden punkt stały,

$$x_0 + \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, x(\cdot)) = \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(x)(\cdot) = x(\cdot),$$

ten zaś jest właśnie rozwiązaniem zagadnienia początkowego (1.4.21) przewidzianym w tezie dowodzonego twierdzenia.

Przejdźmy następnie do drugiej części tezy. Odwzorowanie f jest teraz określone (i ciągle) na pewnym zbiorze otwartym \mathcal{O} zawierającym zwarty podzbiór \mathcal{K} , a nadto spełnia na \mathcal{O} warunek Lipschitza w drugim argumencie ze stałą L . Niechaj $\tilde{\mathcal{K}}$ i (h, r) będą jak w tezie Stw. 84. Zastępując zbiór $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B^N(x_0; r)}$ w definicji stałej M zbiorem zwartym $\tilde{\mathcal{K}}$ (na którym także funkcja f osiąga supremum), pożądaną tezę otrzymujemy wprost z wcześniejszych rozważań, o ile tylko wybierzemy (dowolnie)

$$0 < \varepsilon_{\mathcal{K}} \leq \min\left\{h, \frac{1}{L}, \frac{r}{M}\right\}.$$

□

Pierwszym z pytań, przed jakimi stawia nas powyższe twierdzenie, jest to dotyczące możliwości zszywania rozwiązań lokalnych i jednoznaczności otrzymanego tą drogą wzajemnego przedłużenia tychże rozwiązań na sumę mnogościową (nakładających się na siebie) odnośnych przedziałów określoności. Odpowiedzi na tak postawione pytanie udziela

TWIERDZENIE 1.4.11 (O jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego w dziedzinie określoności). *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.10. Niechaj $I_\alpha := [t_{0\alpha} - \varepsilon_\alpha, t_{0\alpha} + \varepsilon_\alpha] \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ i niech odwzorowania $x_\alpha : I_\alpha \rightarrow \overline{B^N(x_{0\alpha}; r_\alpha)}$ będą odnośnymi rozwiązaniami zagadnienia początkowego (1.4.21) (przy podstawieniu $(t_0, x_0) \mapsto (t_{0\alpha}, x_{0\alpha})$). Ilekroć istnieje $t_0 \in I_1 \cap I_2$, w którym $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, wówczas zachodzi równość*

$$(x_2 - x_1) \upharpoonright_{I_1 \cap I_2} = 0,$$

a odwzorowanie

$$x : I_1 \cup I_2 \rightarrow \overline{B^N(x_{01}; r_1)} \cup \overline{B^N(x_{02}; r_2)} : t \mapsto \begin{cases} x_1(t) & \text{dla } t \in I_1 \\ x_2(t) & \text{dla } t \in I_2 \end{cases}$$

jest rozwiązaniem zagadnienia na $I_1 \cup I_2$.

■

Dowód: Wobec zwartości I_A także $I_1 \cap I_2$ jest zwarty, co wobec ciągłości x_A implikuje zwartość zbioru $\Gamma := (\text{id}_{\mathbb{R}}, x_1)(I_1 \cap I_1) \cup (\text{id}_{\mathbb{R}}, x_2)(I_1 \cap I_1)$ na mocy Stw. 68. Niechaj L będzie stałą Lipschitza dla f na Γ , a wtedy w dowolnym punkcie $t \in I_1 \cap I_2$ stwierdzamy – w odwołaniu do (liniowości całki Cauchy'ego–Bochnera oraz) oszacowania (1.4.12) – równość

$$\|x_2(t) - x_1(t)\|_N = \left\| x_2(t_0) + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, x_2(\cdot)) - x_1(t_0) - \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, x_1(\cdot)) \right\|_N$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^N} [f(\cdot, x_2(\cdot)) - f(\cdot, x_1(\cdot))] \right\|_N \\
&\leq \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \|f(\cdot, x_2(\cdot)) - f(\cdot, x_1(\cdot))\|_N \\
&\leq \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} L \|(x_2 - x_1)(\cdot)\|_N,
\end{aligned}$$

przy czym wykorzystaliśmy równania całkowe definiujące x_α , $\alpha \in \{1, 2\}$, które pozwalają zapisać

$$\begin{aligned}
x_\alpha(t) &= x_{0\alpha} + \int_{[t_{0\alpha}, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) \equiv x_\alpha(t_{0\alpha}) + \int_{[t_{0\alpha}, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) \\
&= x_\alpha(t_0) - x_\alpha(t_{0\alpha}) - \int_{[t_{0\alpha}, t_0]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) + x_\alpha(t_{0\alpha}) + \int_{[t_{0\alpha}, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) \\
&= x_\alpha(t_0) + \int_{[t_0, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)).
\end{aligned}$$

Funkcje $(f, \varphi) = (\|x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\|_N, L)$ spełniają założenia Stw. 89 przy $I = \text{Int}(I_1 \cap I_2)$ dla $c = 0$, co prowadzi do wniosku, że

$$\forall t \in \text{Int}(I_1 \cap I_2) : \|x_2(t) - x_1(t)\|_N = 0,$$

czyli wobec ciągłości obu rozwiązań

$$\forall t \in I_1 \cap I_2 : x_2(t) = x_1(t).$$

Odwzorowanie x z treści dowodzonego twierdzenia jest zatem dobrze określone, klasy C^r i stanowi – w rzeczy samej – rozwiązanie zagadnienia na $I_1 \cup I_2$. \square

Granice opisanej przez nas procedury przedłużania rozwiązań nakreśla następne twierdzenie, które ukazuje zarazem pewną globalną regularność zachowania rozwiązań.

TWIERDZENIE 1.4.12 (O przedłużaniu rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego). *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.10. Dla każdego $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$ rozwiązanie początkowe (1.4.21) przedłuża się do pewnego maksymalnego przedziału określoności $I_f(t_0, x_0) =]a_f(t_0, x_0), b_f(t_0, x_0)[\subset \mathbb{R}$. Ponadto jeśli $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ jest zbiorem wartym zawierającym (t_0, x_0) , to istnieją liczby $a_f(\mathcal{K}), b_f(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}$ spełniające warunek $a_f(t_0, x_0) < a_f(\mathcal{K}) < b_f(\mathcal{K}) \leq b_f(t_0, x_0)$, dla których zachodzi implikacja*

$$\forall t \in I_f(t_0, x_0) \setminus [a_f(\mathcal{K}), b_f(\mathcal{K})] : (t, x(t)) \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{K}.$$

■

Dowód: Zdefiniujmy \mathcal{A} jako zbiór wszystkich przedziałów otwartych $I \subset \mathbb{R}$ zawierających t_0 , na których są określone odnośne rozwiązania $x_I : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ zagadnienia początkowego (1.4.21). Na mocy Tw. 1.4.10 zbiór ten jest niepusty, przeto możemy zdefiniować podzbiór otwarty

$$I_f(t_0, x_0) := \bigcup_{I \in \mathcal{A}} I \subset \mathbb{R}.$$

Skoro $t_0 \in I$, jest jasnym, że $I_f(t_0, x_0)$ jest przedziałem (otwartym), $I_f(t_0, x_0) =]a_f(t_0, x_0), b_f(t_0, x_0)[$, przy czym może to być przedział jedno- lub obustronnie nieograniczony. Rozważmy dowolny punkt $t \in I_f(t_0, x_0)$. Wprost z definicji istnieje $I \in \mathcal{A}$ taki, że $t \in I$, a zatem także rozwiązanie x_I na I . Jeśli także $I' \in \mathcal{A}$ zawiera

t , to na mocy Tw. 1.4.11 jest $(x_{I'} - x_I) \upharpoonright_{I \cap I'} = 0$, czyli w szczególności $x_{I'}(t) = x_I(t)$. Oznacza to, że możemy zdefiniować odwzorowanie

$$x : I_f(t_0, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^N : t \longmapsto x_I(t),$$

gdzie $I \in \mathcal{A}$ jest dowolnym przedziałem zawierającym t . Tak określone odwzorowanie jest – w świetle Tw. 1.4.10 – (jedynym) rozwiązaniem zagadnienia początkowego na $I_f(t_0, x_0)$, co przesądza o maksymalności $I_f(t_0, x_0)$.

Jeśli teraz $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ jest zbiorem zwartym zawierającym (t_0, x_0) , to możemy zdefiniować zbiór

$$G(\mathcal{K}) := \{ t \in I_f(t_0, x_0) \mid (t, x(t)) \in \mathcal{K} \},$$

który na mocy Tw. 1.4.10 jest niepusty. Jako że \mathcal{K} jest zwarty, przeto – w świetle Stw. 81 – $G(\mathcal{K})$ jest ograniczony, a w takim razie

$$b_f(\mathcal{K}) := \sup G(\mathcal{K}) < \infty.$$

Wystarczy pokazać, że $b_f(\mathcal{K}) < b_f(t_0, x_0)$. Niechaj więc $t_* \in G(\mathcal{K})$, co oznacza, że $(t_*, x_*) := (t_*, x(t_*)) \in \mathcal{K}$. W odwołaniu do Tw. 1.4.10 możemy zatem znaleźć na przedziale $]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[\ni t$ (jedyne) rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_*) = x_*,$$

które w świetle Tw. 1.4.11 spełnia warunek

$$(y - x) \upharpoonright_{I_f(t_0, x_0) \cap]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[} = 0$$

i przedłuża się do x na $I_f(t_0, x_0) \cup]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[$. Jednakowoż przedział $I_f(t_0, x_0)$ jest maksymalny, więc koniecznie $I_f(t_0, x_0) \cup]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[= I_f(t_0, x_0)$, to zaś oznacza, że (każde) t_* spełnia nierówność $t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}} \leq b_f(t_0, x_0)$, więc też $\sup_{t_* \in G(\mathcal{K})} (t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}) \leq \sup_{t_* \in G(\mathcal{K})} b_f(t_0, x_0)$, a to pozwala stwierdzić, że

$$b_f(\mathcal{K}) + \varepsilon_{\mathcal{K}} \leq b_f(t_0, x_0) \implies b_f(\mathcal{K}) < b_f(t_0, x_0).$$

Analogicznie rozumiemy w odniesieniu do

$$a_f(\mathcal{K}) := \inf G(\mathcal{K}) > -\infty,$$

przekonując się, że $a_f(\mathcal{K}) > a_f(t_0, x_0)$. \square

Dotychczasowe nasze rozważania przygotowują grunt pod szczegółową analizę funkcjonalnej natury zależności rozwiązań zagadnienia początkowego od danych początkowych (t_0, x_0) . Wyniki tej analizy mają absolutnie kapitalne znaczenie zarówno dla zastosowań równań różniczkowych zwyczajnych w modelowaniu dynamiki układów fizycznych, jak i dla zrozumienia relacji między (gładkimi) rozkładami wektorów na nietrywialnych geometriach (tzw. gładkimi polami wektorowymi) i przekształceniami tych ostatnich, która stanowi punkt wyjścia chociażby do opisu geometrii w terminach topologii różniczkowej, dostarczającej – ze swej strony – głębokiej inspiracji dla konstrukcji funkcyjnego schematu kwantowania. Mając to wszystko na uwadze, przechodzimy obecnie do dokładnego omówienia rzeczonyj zależności, zaczynając od

TWIERDZENIE 1.4.13 (O ciągłej zależności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego od danych początkowych). *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.10 i 1.4.12. Dziedzina całkowalności zagadnienia początkowego (1.4.21) o danych początkowych z \mathcal{O} ,*

$$(1.4.23) \quad \mathcal{D}_f := \{ (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O} \mid t \in I_f(t_0, x_0) \},$$

jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^{2+N} , a odwzorowanie

$$\Phi_f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}^N : (t, t_0, x_0) \longmapsto x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

zwane **potokiem odwzorowania** f , jest ciągłe. Ponadto funkcja

$$b_f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R} : (t_0, x_0) \longmapsto b_f(t_0, x_0)$$

jest półciągła z dołu, a funkcja

$$a_f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R} : (t_0, x_0) \longmapsto a_f(t_0, x_0)$$

jest półciągła z góry. ■

Dowód: Nasz dowód twierdzenia zasadza się na słuszności poniższego

LEMAT 1.4.14. *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.13 i niechaj $I = [a, b]$ będzie dowolnym przedziałem spełniającym warunek $t_0 \in I \subset I_f(t_0, x_0)$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie otoczenie otwarte $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathcal{O}$ punktu (t_0, x_0) , że dla dowolnego $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_\varepsilon$ rozwiązanie zagadnienia początkowego (1.4.21) dla danych początkowych (t_1, x_1) (tj. przy warunku początkowym $x(t_1) = x_1$) jest dobrze określone na I , przy czym potok f spełnia relację*

$$\forall t \in I : \|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Dowód Lematu 1.4.14. Ustalmy $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$ i niech $I = [a, b]$ będzie jak w treści lematu. Rozważmy zbiór zwarty

$$\mathcal{K} := \{ (t, \Phi_f(t, t_0, x_0)) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid t \in I \}$$

i niech $\tilde{\mathcal{K}}$ będzie zwartym pokryciem \mathcal{K} w \mathcal{O} dla pary $(h, r) \in]0, \infty[^{\times 2}$, którego istnienie orzeka Stw. 84. Wreszcie też niech

$$M := \sup_{(t, x) \in \tilde{\mathcal{K}}} \|f(t, x)\|_N$$

(istnienie M zapewnia ciągłość f w połączeniu ze zwartością $\tilde{\mathcal{K}}$, a to na mocy Stw. 73, 68 oraz 81) i niech L będzie stałą Lipschitza dla f (w drugim argumentcie). Ustalwszy (dowolnie) $\varepsilon > 0$ przy $r > \varepsilon$ (warunek ten charakteryzuje r), dobierzemy następnie $\delta > 0$ na tyle małe, iżby otoczenie

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid |t - t_0| < \delta \quad \wedge \quad \|x - x_0\|_N < \delta \}$$

spełniało warunki wymienione w tezie dowodzonego lematu. Oto więc niech $\delta > 0$ będzie dowolną liczbą spełniającą układ relacji

$$\delta < \min\{h, r\} \quad \wedge \quad]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset [a, b] \quad \wedge \quad \delta \cdot (M + 1) \cdot e^{L \cdot (b-a)} < \varepsilon < r,$$

co pociąga za sobą natychmiast relację

$$\mathcal{U}_\varepsilon \subset C_{(h, r)}(t_0, x_0) := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid |t - t_0| < h \quad \wedge \quad \|x - x_0\|_N < r \} \subset \tilde{\mathcal{K}}.$$

Ustalmy (dowolnie) $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_\varepsilon$ i niech $J = [a_1, b_1]$ będzie największym podprzedziałem w $I_f(t_1, x_1)$, dla którego spełniona jest relacja

$$\{ (s, \Phi_f(s, t_1, x_1)) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid s \in J \} \subset \tilde{\mathcal{K}},$$

przy czym Tw. 1.4.10 przesądza o tym, że $J \neq \emptyset$, w szczególności zaś $t_1 \in J$. Skoro przy tym $|t_1 - t_0| < \delta$, to także $t_1 \in I$, zatem $I \cap J \neq \emptyset$, a ponieważ na mocy Tw. 1.4.12

dla dostatecznie dużych (i dostatecznie małych) wartości t punkty $(t, \Phi_f(t, t_1, x_1))$ leżą poza $\tilde{\mathcal{K}}$, przeto $J \not\subset I_f(t_1, x_1)$. Skoro jednak dla dowolnego $t \in I_f(t_\alpha, x_\alpha)$, $\alpha \in \{0, 1\}$ mamy równości

$$\Phi_f(t, t_\alpha, x_\alpha) = x_\alpha + \int_{[t_\alpha, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_\alpha, x_\alpha)),$$

to dla $t \in I \cap J$ otrzymujemy relację

$$\begin{aligned} & \Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0) \\ = & x_1 - x_0 + \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_1, x_1)) - \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0)) \\ \equiv & x_1 - x_0 - \int_{[t_0, t_1]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0)) \\ & + \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{\times N}} [f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_1, x_1)) - f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0))]. \end{aligned}$$

Zważywszy, że dla wszystkich $t \in I \cap J$ oba rozwiązania pozostają w $\tilde{\mathcal{K}}$ (w przypadku (t_0, x_0) rozwiązanie pozostaje wręcz w \mathcal{K} , wprost na mocy definicji tego zbioru), a ponadto cały odcinek I_{01} zawarty między t_0 i t_1 zawiera się wewnątrz I , przeto $\Phi_f(I_{01}, (t_0, x_0)) \subset \mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{K}}$, otrzymujemy – w świetle Stw. 86 – oszacowanie

$$\begin{aligned} & \|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N \\ \leq & \|x_1 - x_0\|_N + |t - t_0| \cdot \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|f(s, \Phi_f(s, t_0, x_0))\|_N \\ & + \left| \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{\times N}} \|f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_1, x_1)) - f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0))\|_N \right| \\ \leq & \delta + M \cdot |t_1 - t_0| + \left| \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{\times N}} L \cdot \|\Phi_f(\cdot, t_1, x_1) - \Phi_f(\cdot, t_0, x_0)\|_N \right| \\ \leq & \delta \cdot (1 + M) + \left| \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{\times N}} L \cdot \|\Phi_f(s, t_1, x_1) - \Phi_f(s, t_0, x_0)\|_N \right|, \end{aligned}$$

z którego na podstawie Stw. 89 (i dotychczasowych założeń) wyprowadzamy

$$\|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N \leq \delta \cdot (1 + M) \cdot e^{L \cdot |t - t_1|}.$$

Skoro jednak $t \in I \cap J \subset I \equiv [a, b]$ oraz $t_1 \in I$, to $|t - t_1| \leq b - a$, a w takim razie – wprost na mocy poczynionych założeń –

$$\|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N \leq \delta \cdot (1 + M) \cdot e^{L \cdot (b - a)} < \varepsilon < r.$$

Nasze rozumowanie pokazuje dowodnie, że na całym odcinku $I \cap J \ni t$ trajektoria $(t, \Phi_f(t, t_1, x_1))$ pozostaje wewnątrz $C_{(h, r)}(t_0, x_0)$, czyli też wewnątrz $\tilde{\mathcal{K}}$. Jednakowoż oba przedziały: I i J są nie tylko domknięte, ale także spójne, więc też sytuacja, w której któryś z końców $k \in \{a_1, b_1\}$ byłby punktem wewnętrznym I byłaby równoważna temu, że punkt $(k, \Phi_f(k, t_1, x_1))$ leży na granicy $\tilde{\mathcal{K}}$. Tymczasem pokazaliśmy właśnie, że punkt ten – jak wszystkie punkty na trajektorii będące obrazami punktów z przecięcia $I \cap J$ – leży wewnątrz $\tilde{\mathcal{K}}$. Wyciągamy stąd prosty wniosek, że $I \subset J$, a stąd już wprost wynika konkluzja, że $\Phi_f(t, t_1, x_1)$ jest dobrze określone (jako rozwiązanie rozważanego zagadnienia początkowego dla danych początkowych (t_1, x_1)) dla dowolnego $t \in I$, nierówności

$$a(t_1, x_1) < a_1 \leq a, \quad b \leq b_1 < b(t_1, x_1)$$

oraz relacja

$$\forall t \in I : \|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \varepsilon.$$

□

Udowodniwszy lemat, możemy powrócić do dowodu twierdzenia. Zaczniemy od wykazania ciągłości Φ_f na \mathcal{D}_f . W tym celu ustalmy punkt $(t, t_0, x_0) \in \mathcal{D}_f$ i wybierzmy stałą $\varepsilon > 0$ oraz przedział $I = [a, b] \subset I_f(t_0, x_0)$ taki, by było $a < t < b$. Następnie ograniczymy rozważania do otoczenia $\mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset \mathcal{O}$ punktu (t_0, x_0) , o którym mowa w tezie Lematu 1.4.14. Wybierzmy punkt $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}$, a wtedy dla dowolnego $t' \in I$ otrzymamy oszacowanie

$$\|\Phi_f(t', t_1, x_1) - \Phi_f(t', t_0, x_0)\|_N < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ciągłość $\Phi_f(t', t_0, x_0)$ w zmiennej $t' \in I$, wynikająca z inkluzji $I \subset I_f(t_0, x_0)$ (oznaczającej, że odwzorowanie to jest na I rozwiązaniem zagadnienia początkowego (1.4.21) przy warunku początkowym (t_0, x_0)), pozwala stwierdzić istnienie $\delta > 0$ o własności $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset I$, dla którego spełniony jest warunek

$$\|\Phi_f(t', t_0, x_0) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \frac{\varepsilon}{2},$$

o ile tylko $|t' - t| < \delta$. W sumie więc dla dowolnego $(t', t_1, x_1) \in]t - \delta, t + \delta[\times \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ obliczamy

$$\begin{aligned} & \|\Phi_f(t', t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N \\ & \leq \|\Phi_f(t', t_1, x_1) - \Phi_f(t', t_0, x_0)\|_N + \|\Phi_f(t', t_0, x_0) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \varepsilon, \end{aligned}$$

dowodząc tym samym ciągłości potoku f na \mathcal{D}_f w rozumieniu Stw. 71. Zauważmy zarazem, że skonstruowany tu zbiór $]t - \delta, t + \delta[\times \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ jest otwartym otoczeniem (dowolnego) punktu dziedziny (t, t_0, x_0) w niej zawartym, skąd wniosek, że \mathcal{D}_f jest w istocie zbiorem otwartym.

Na koniec zajmijmy się zależnością b_f (wzgl. a_f) od argumentu $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$. Wybierzmy (dowolnie) $b < b_f(t_0, x_0)$, a wtedy – na mocy Lematu 1.4.14 – istnieje takie otoczenie otwarte $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathcal{O}$ punktu (t_0, x_0) , którego dowolny punkt $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_\varepsilon$ ma dobrze określoną trajektorię $(t, \Phi_f(t, t_1, x_1))$ dla dowolnego $t \in [t_1, b]$, co oznacza, że $b_f(t_1, x_1) \geq b$. Takie zachowanie funkcji b_f w otoczeniu dowolnego punktu (t_0, x_0) jej dziedziny \mathcal{O} jest równoznaczne z jej półciągłością z dołu. Analogicznie dowodzimy półciągłości z góry funkcji a_f . □

W konkretnych przypadkach zagadnienia początkowego, które przyjdzie nam rozważać w dalszej części niniejszego kursu, zależność odwzorowania definiującego f od parametru ewolucji (pierwszego argumentu) będzie trywialna, nawet jednak w takich okolicznościach droga do odpowiedzi na pytanie o gładkość zależności potoku od danych początkowych wiedzie przez (pomocnicze) zagadnienie początkowe, w którym pojawia się jawna zależność nie tylko od parametru ewolucji, ale wręcz – od parametrów z pewnej topologicznej przestrzeni wektorowej. Tytułem przygotowania do dyskusji przedstawimy

TIWIERDZENIE 1.4.15 (O redukcji zagadnienia Cauchy'ego do postaci autonomicznej). *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.13. Zagadnienie początkowe określone przez odwzorowanie $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{\times N}$ o nietrywialnej zależności od argumentu z $\text{pr}_1(\mathcal{O})$, zwane **zagadnieniem nieautonomicznym**, jest równoważne zagadnieniu określonym przez odwzorowanie $\tilde{f} := (1, f) \circ \text{pr}_{2,3} : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \rightarrow$*

$\mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N}$, niezależne od pierwszego argumentu, zwane **zagadnieniem autonomicznym**. Podobnie **parametryczne zagadnienie początkowe** określane przez odwzorowanie $f : \mathcal{O} \times \Pi \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$ zależne (w sposób ciągły) od parametrów z otwartego podzbioru Π topologicznej przestrzeni wektorowej V jest równoważne zagadnieniu określone przez niezależne od parametrów odwzorowanie $\widehat{f} := (f, 0) : \widehat{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \times \Pi \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N} \times V$ o dziedzinie ciągłości $\widehat{\mathcal{O}}$.

■

Dowód: Zajmiemy się najpierw zagadnieniem nieautonomicznym

$$D_1 \Phi_f(t, t_0, x_0) = f(t, \Phi_f(t, t_0, x_0)), \quad \Phi_f(t_0, t_0, x_0) = x_0 \in \text{pr}_2(\mathcal{O}).$$

Zdefiniowawszy odwzorowanie \widetilde{f} jak w treści twierdzenia, otrzymujemy zagadnienie początkowe

$$D_1 \Phi_{\widetilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0) = \widetilde{f}(t, \Phi_{\widetilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0)), \quad \Phi_{\widetilde{f}}(t_0, t_0, s_0, x_0) = (s_0, x_0) \in \mathcal{O}.$$

Jako że $\Phi_{\widetilde{f}}$ przyjmuje wartości w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N}$, możemy zapisać

$$\Phi_{\widetilde{f}} = (\Phi_{\widetilde{f}}^1, \Phi_{\widetilde{f}}^2),$$

przy czym odwzorowania

$$\Phi_{\widetilde{f}}^1 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_{\widetilde{f}}^2 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$$

spełniają równania

$$\begin{aligned} D_1 \Phi_{\widetilde{f}}^1(t, t_0, s_0, x_0) &= \text{pr}_1 \circ \widetilde{f}(t, (\Phi_{\widetilde{f}}^1, \Phi_{\widetilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) \\ &= \text{pr}_1 \circ (1, f \circ (\Phi_{\widetilde{f}}^1, \Phi_{\widetilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) = 1, \\ D_1 \Phi_{\widetilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0) &= \text{pr}_2 \circ \widetilde{f}(t, (\Phi_{\widetilde{f}}^1, \Phi_{\widetilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) \\ &= \text{pr}_2 \circ (1, f \circ (\Phi_{\widetilde{f}}^1, \Phi_{\widetilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) \\ &= f \circ (\Phi_{\widetilde{f}}^1, \Phi_{\widetilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0) \end{aligned}$$

przy warunkach początkowych

$$\Phi_{\widetilde{f}}^1(t_0, t_0, s_0, x_0) = s_0, \quad \Phi_{\widetilde{f}}^2(t_0, t_0, s_0, x_0) = x_0,$$

których rozwiązanie, jednoznaczne na mocy Tw. 1.4.10, to

$$\Phi_{\widetilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0) = (t - t_0 + s_0, \Phi_{\widetilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)),$$

wobec czego druga składowa zagadnienia nowego początkowego przyjmuje postać

$$D_1 \Phi_{\widetilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0) = f(t - t_0 + s_0, \Phi_{\widetilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)).$$

Oznaczmy

$$\Psi_f(t - t_0 + s_0, s_0, x_0) := \Phi_{\widetilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)$$

i dokonajmy trywialnego przesunięcia $t \longmapsto t + t_0 - s_0$, a wtedy dostajemy zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned} D_1 \Psi_f(t, s_0, x_0) &= f(t, \Psi_f(t, s_0, x_0)), \\ \Psi_f(s_0, s_0, x_0) &\equiv \Phi_{\widetilde{f}}^2(t_0, t_0, s_0, x_0) = \text{pr}_2 \circ \Phi_{\widetilde{f}}(t_0, t_0, s_0, x_0) = \text{pr}_2(s_0, x_0) = x_0, \end{aligned}$$

skąd wniosek, że Ψ_f jest potokiem określonym przez wyjściowe odwzorowanie f , czyli

$$\Psi_f(t, s_0, x_0) \equiv \Phi_f(t - s_0 + t_0, t_0, x_0),$$

a dalej

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0) &= (t - t_0 + s_0, \Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)) \equiv (t - t_0 + s_0, \Psi_f(t - t_0 + s_0, s_0, x_0)) \\ &= (t - t_0 + s_0, \Phi_f(t, t_0, x_0)). \end{aligned}$$

W szczególności więc ilekroć $\Phi_f(t, t_0, x_0)$ jest dobrze określone (dla pewnego $x_0 \in \text{pr}_2(\mathcal{O})$), także $\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0)$ jest dobrze określone.

Następnie przechodzimy do omówienia zagadnienia parametrycznego

$$D_1\Phi_f(t, t_0, x_0, \pi) = f_\pi(t, \Phi_f(t, t_0, x_0, \pi)), \quad \Phi_f(t_0, t_0, x_0, \pi) = x_0.$$

W tym przypadku natrafiamy na stowarzyszone (wg przepisu z treści dowodzonego twierdzenia) zagadnienie początkowe

$$D_1\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, x_0, \pi) = \tilde{f}(t, \Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, x_0, \pi)), \quad \Phi_{\tilde{f}}(t_0, t_0, x_0, \pi) = (x_0, \pi) \in \text{pr}_2(\mathcal{O}) \times \Pi,$$

a ponieważ przeciwdziedzina $\Phi_{\tilde{f}}$ jest tym razem $\mathbb{R}^{\times N} \times X$, przeto możemy rozłożyć

$$\Phi_{\tilde{f}} = (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)$$

w terminach pewnych odwzorowań

$$\Phi_{\tilde{f}}^1 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{\times N}, \quad \Phi_{\tilde{f}}^2 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \Pi \rightarrow V,$$

spełniających równania (nieautonomiczne)

$$D_1\Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi) = f_{\Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, x_0, \pi)}(t, \Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi)), \quad D_1\Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, x_0, \pi) = 0_V$$

przy warunkach początkowych

$$\Phi_{\tilde{f}}^1(t_0, t_0, x_0, \pi) = x_0, \quad \Phi_{\tilde{f}}^2(t_0, t_0, x_0, \pi) = \pi.$$

Ich rozwiązanie jest postaci

$$\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, x_0, \pi) = (\Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi), \pi),$$

przy czym $\Phi_{\tilde{f}}^1$ jest określone przez zagadnienie początkowe

$$D_1\Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi) = f_\pi(t, \Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi)), \quad \Phi_{\tilde{f}}^1(t_0, t_0, x_0, \pi) = x_0,$$

które prowadzi wprost do identyfikacji

$$\Phi_{\tilde{f}}^1 \equiv \Phi_f,$$

a ta – do ostatecznego odszyfrowania postaci potoku stowarzyszonego z nowym odwzorowaniem:

$$\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, x_0, \pi) = (\Phi_f(t, t_0, x_0, \pi), \pi).$$

□

Zwieńczeniem naszej analizy zagadnień początkowych opisywanych przez równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu jest poniższe twierdzenie, w którym ustalamy klasę gładkości funkcjonalnej zależności potoku od warunków początkowych.

TWIERDZENIE 1.4.16 (O różniczkowalności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego). *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.13 i 1.4.15. Jeżeli rozważany układ ma charakter autonomiczny i funkcja f jest klasy C^k , $k \in \mathbb{N}^x \cup \{\infty\}$ (w drugim argumencie, od którego – jako jedyne, wprost z założenia – zależność jest nietrywialną), to wówczas zależność potoku $\Phi_f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}^N$ od warunku początkowego i parametru t , zwanego dalej **czasem**, także jest klasy C^k (przy ustalonym czasie początkowym).* ■

Dowód: Zaczniemy od uwagi porządkującej: autonomiczny charakter zagadnienia oznacza trywialną zależność f od pierwszego argumentu, co podkreśliśmy w dalszej części naszego wyводу zastępując funkcję f funkcją $\underline{f} \in C^k(\underline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^N)$, $\underline{\mathcal{O}} \equiv \text{pr}_2(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^{\times N}$, dla której

$$f(s, y(s)) \equiv \underline{f}(y(s)).$$

Ustalmy dane początkowe $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$ i rozważmy odnośny maksymalny przedział czasowy $I_f(t_0, x_0) =]a_f(t_0, x_0), b_f(t_0, x_0)[$, którego istnienie orzeka Stw. 1.4.12. Wybierzmy (dowolnie) otwarte otoczenie $\mathcal{U}_{x_0} \subset \underline{\mathcal{O}}$ punktu x_0 , na którym funkcja \underline{f} spełnia warunek

$$M_{x_0} := \sup_{x \in \mathcal{U}_{x_0}} \|\underline{D}\underline{f}(x)\|_{\text{op}} < \infty$$

(wystarczy wybrać wewnątrz dowolnego zbioru zwartego, na którym \underline{f} , z założenia różniczkowalna w sposób ciągły na $\underline{\mathcal{O}}$, spełnia ten warunek), a następnie podprzedział $I = [a, b] \subset I_f(t_0, x_0)$ o długości

$$b - a < M_{x_0}$$

zawierający t_0 jako punkt wewnętrzny,

$$a_f(t_0, x_0) < a < t_0 < b < b_f(t_0, x_0).$$

Otoczenie \mathcal{U}_{x_0} będziemy przy tym rozpatrywać jako podzbiór przestrzeni Banacha $(\mathbb{R}^{\times N}, \|\cdot\|_N)$ ze standardową normą euklidesową jak w Przykł. 25 (1). Rozważmy dalej otwarty podzbiór⁵

$$\mathcal{V}_{x_0} := \{ \gamma \in C(I, \mathbb{R}^{\times N}) \mid \gamma(I) \subset \mathcal{U}_{x_0} \}$$

⁵Otwartość \mathcal{V}_{x_0} jest prostym następstwem tego, że każdy punkt ścieżki $\gamma(I)$ leżącej w otwartym zbiorze \mathcal{U}_{x_0} zawiera się w nim wraz z pewną kulą otwartą, suma zaś tych kul wzięta po wszystkich punktach ścieżki definiuje jej otwarte otoczenie w \mathcal{U}_{x_0} . Zastępując każdą z kul koncentryczną z nią kulą o dwukrotnie mniejszym promieniu, uzyskujemy pokrycie ścieżki o tej własności, że jego domknięcie, otrzymane przez zastąpienie każdej z kul otwartych jej domknięciem, zawiera się w \mathcal{U}_{x_0} . Z pokrycia tego możemy – wobec zwartości ścieżki, będącej w świetle Stw. 68 konsekwencją ciągłości γ i zwartości I – wybrać podpokrycie skończone będące rodziną kul $\mathcal{B} := \{B_i^N\}_{i \in \overline{1, M}}$, $M \in \mathbb{N}^x$. Domknięcie $\overline{\Sigma}$ ich (otwartej) sumy mnogościowej Σ jest w oczywisty sposób ograniczone w $\mathbb{R}^{\times N}$ (zawiera się w kuli o środku w $\gamma(a)$ i promieniu większym od $\max_{i \in \overline{1, M}} \sup_{x_i \in B_i^N} \|\gamma(a) - x_i\|_N$), a jego brzeg $\partial \overline{\Sigma}$ jest nie tylko ograniczony (jako podzbiór $\overline{\Sigma}$), lecz także domknięty jako przecięcie $\overline{\Sigma} \cap (\mathbb{R}^{\times N} \setminus \Sigma)$, więc zwarty na mocy Stw. 81. Przywoławszy Stw. 70 oraz 68 i 81, wyznaczamy odległość między $\partial \overline{\Sigma}$ i $\gamma(I)$, daną jako $\inf_{(x, y) \in \gamma(I) \times \partial \overline{\Sigma}} \|x - y\|_N =: \varepsilon_\gamma$, a ponieważ w zwartym podzbiorku $\gamma(I) \times \partial \overline{\Sigma} \subset \mathbb{R}^{\times N} \times \mathbb{R}^{\times N}$ istnieje punkt, w którym infimum to jest osiągnięte, przeto nieodzownie jest ono niezerowe, $\varepsilon_\gamma > 0$ (w przeciwnym razie rodzina \mathcal{B} nie byłaby pokryciem otwartym ścieżki). Jest oczywiste, że kula otwarta w $C(I, \mathbb{R}^{\times N})$ o środku w γ i promieniu ε_γ zawiera się w \mathcal{V}_{x_0} .

przestrzeni Banacha $(C(I, \mathbb{R}^{\times N}), \|\cdot\|_\infty)$ i wreszcie zdefiniujemy odwzorowanie

$$T_{f;t_0} : \mathcal{U}_{x_0} \times \mathcal{V}_{x_0} \rightarrow C(I, \mathbb{R}^{\times N}) : (x_1, \gamma) \mapsto \gamma(\cdot) - x_1 - \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} \underline{f} \circ \gamma,$$

którego znaczenie dla naszych rozważań ujawnia oczywista obserwacja: poziomica zera $T_{f;t_0}$ jest zbiorem (jednoznacznych) lokalnych rozwiązań rozpatrywanego zagadnienia początkowego przy warunkach początkowych z otoczenia \mathcal{U}_{x_0} . Odnosząc Stw. 88 do odwzorowania F będącego dowolnym rozszerzeniem \underline{f} do całej przestrzeni Banacha $(\mathbb{R}^{\times N}, \|\cdot\|_N)$, stwierdzamy ciągłą różniczkowalność klasy C^k odwzorowania $T_{f;t_0}$, przy czym

$$\begin{aligned} DT_{f;t_0}(x_1, \gamma)(\bullet_1, \bullet_2) &= -\text{id}_{\mathbb{R}^{\times N}}(\bullet_1) \oplus \left(\text{id}_{C(I, \mathbb{R}^{\times N})}(\bullet_2) - \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(\bullet_2(\cdot)) \right) \\ &\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N} \oplus C(I, \mathbb{R}^{\times N}), C(I, \mathbb{R}^{\times N})). \end{aligned}$$

Proste oszacowanie

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(\bullet_2(\cdot)) \right\|_{\text{op}} \\ &\equiv \sup_{v \in C(I, \mathbb{R}^{\times N}) \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \left\| \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(v(\cdot)) \right\|_\infty \right) \\ &\equiv \sup_{v \in C(I, \mathbb{R}^{\times N}) \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \sup_{t \in I} \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(v(\cdot)) \right\|_N \right) \\ (1.4.24) \quad &\leq (b-a) \cdot M_{x_0} < 1 \end{aligned}$$

dowodzi – na gruncie Stw. 78 – odwracalności na zbiorze otwartym $\mathcal{U}_{x_0} \times \mathcal{V}_{x_0} \ni (x_1, \gamma)$ ciągłego odwzorowania \mathbb{R} -liniowego

$$D_2 T_{f;t_0}(x_1, \gamma)(\bullet_2) = \text{id}_{C(I, \mathbb{R}^{\times N})}(\bullet_2) - \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(\bullet_2(\cdot)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(C(I, \mathbb{R}^{\times N})).$$

Przywołując tezę Tw. 1.4.8, którego założenia są tutaj w oczywisty sposób spełnione dla $V_1 = \mathbb{R}^{\times N}$, $V_2 = C(I, \mathbb{R}^{\times N})$, $U_1 = \mathcal{U}_{x_0}$, $U_2 = \mathcal{V}_{x_0}$ oraz $F = T_{f;t_0}$, wnioskujemy o istnieniu otwartego otoczenia $\mathcal{O}_{x_0} \subset \mathcal{U}_{x_0}$ warunku początkowego x_0 , na którym jest określone odwzorowanie klasy C^k

$$\begin{aligned} &\Gamma_{x_0}^{(t_0)} : \mathcal{O}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{V}_{x_0} : x_1 \longmapsto \gamma_{x_1}^{(t_0)}, \\ (1.4.25) \quad &\gamma_{x_1}^{(t_0)}(t) = x_1 + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} \underline{f} \circ \gamma_{x_1}^{(t_0)} \equiv \Phi_f(t, t_0, x_1). \end{aligned}$$

Z powyższego wywiedziemy wniosek⁶ o różniczkowalności klasy C^k zależności potoku Φ_f od argumentów (t, x_1) przy ustalonym czasie początkowym t_0 . Tytułem rozgrzewki powtórzmy najpierw dowód ciągłości potoku przy ustalonym t_0 , z której nie korzystaliśmy w dotychczasowych rozważaniach. Oto więc dla dowolnych $(s, x_1), (t, x_2) \in I \times \mathcal{O}_{x_0}$ obliczamy

$$\|\Phi_f(t, t_0, x_2) - \Phi_f(s, t_0, x_1)\|_N \leq \|\Phi_f(t, t_0, x_2) - \Phi_f(t, t_0, x_1)\|_N$$

⁶Należy podkreślić, że istnienie *lokalnych* odwzorowań $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$ klasy C^k przyporządkowujących warunkom początkowym z otoczenia x_0 odnośne (lokalne) rozwiązania zagadnienia początkowego nie przesądza automatycznie o różniczkowalności globalnie (na \mathcal{D}_f) zadanego potoku Φ_f , będącego odwzorowaniem pomiędzy przestrzeniami topologicznymi odmiennymi od (podzbiorów) dziedziny i przeciwdziedziny $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$.

$$\begin{aligned}
& + \|\Phi_f(t, t_0, x_1) - \Phi_f(s, t_0, x_1)\|_N \\
& \equiv \|\gamma_{x_2}^{(t_0)}(t) - \gamma_{x_1}^{(t_0)}(t)\|_N + \|\gamma_{x_1}^{(t_0)}(t) - \gamma_{x_1}^{(t_0)}(s)\|_N \\
& \equiv \|\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2)(t) - \Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(t)\|_N \\
& \quad + \|\gamma_{x_1}^{(t_0)}(t) - \gamma_{x_1}^{(t_0)}(s)\|_N.
\end{aligned}$$

Wobec ciągłości (danych lokalnie) ścieżek $\gamma_{x_1}^{(t_0)}$ oraz ciągłości odwzorowania $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$ na \mathcal{O}_{x_0} , majorantę pojawiającą się po prawej stronie powyższej nierówności możemy uczynić dowolnie małą, co dowodzi ciągłości potoku w otoczeniu (t_0, x_0) (przy ustalonym t_0). Na mocy swej definicji potok, określony w terminach lokalnych odwzorowań $\gamma_{x_1}^{(t_0)}$, jest różniczkowalny, a ponieważ pochodna w argumentach czasowym

$$D_1\Phi_f(t, t_0, x_1) = \underline{f}(\Phi_f(t, t_0, x_1))$$

jest superpozycją funkcji ciągłych, przeto sama jest funkcją ciągłą. Rozważmy następnie pochodną

$$D\Gamma_{x_0}^{(t_0)} : \mathcal{O}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N}, C(I, \mathbb{R}^{\times N})),$$

która – jak wynika wprost z konstrukcji odwzorowania $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$ – jest klasy C^{k-1} , a przy tym spełnia relację (definiującą)

$$(1.4.26) \quad \gamma_{x_1+v}^{(t_0)} - \gamma_{x_1}^{(t_0)} = D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v) + \mathcal{R}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; v), \quad v \in \mathbb{R}^{\times N},$$

gdzie

$$\lim_{\|v\|_N \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; v)\|_{\infty}}{\|v\|_N} = 0.$$

Obliczając obie strony relacji (1.4.26) w chwili $t \in I$, otrzymujemy równość

$$\Phi_f(t, t_0, x_1 + v) - \Phi_f(t, t_0, x_1) = (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) + \mathcal{R}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; v)(t),$$

na podstawie której identyfikujemy

$$D_3\Phi_f(t, t_0, x_1)(v) = (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t),$$

a stąd – wobec założonej ograniczoności $D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ –

$$\begin{aligned}
& \|D_3\Phi_f(t, t_0, x_2)(v) - D_3\Phi_f(s, t_0, x_1)(v)\|_N \\
& \leq \| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) \|_N \\
& \quad + \| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \|_N \\
& \leq \| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2) - D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1))(v) \|_{\infty} \\
& \quad + \| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \|_N \\
& \leq \| D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2) - D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1) \|_{\text{op}} \cdot \|v\|_N \\
& \quad + \| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \|_N.
\end{aligned}$$

Ażeby wygodnie oszacować drugi składnik sumy występującej po prawej stronie powyższej nierówności, musimy zbadać nieco dokładniej elementarne własności potoku Φ_f wynikające z konstrukcji odwzorowania $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$. W tym celu dla ustalonych $w \in \mathbb{R}^{\times N}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dokonajmy we wzorze (1.4.25) podstawienia $x_1 \mapsto x_1 + \lambda \triangleright w$, po czym obliczmy (korzystając z \mathbb{R} -liniowości całki)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \triangleright (\Phi_f(t, t_0, x_1 + \lambda \triangleright w) - \Phi_f(t, t_0, x_1)) \\ &= w + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} \frac{1}{\lambda} \triangleright [f(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1 + \lambda \triangleright w)) - f(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1))]. \end{aligned}$$

Oznaczmy dla wygody

$$\Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)} := D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w) + \frac{1}{\lambda} \triangleright \mathcal{R}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; \lambda \triangleright w).$$

Uwzględnivszy relację (1.4.26) i wzięvwszy pod uwagę \mathbb{R} -liniowość odwzorowania $D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)$, a nadto przywołavwszy Tw. 1.4.6 (w połączeniu z Cor. 7) w odniesieniu do funkcji \underline{f} (klasy C^1) w formie

$$\begin{aligned} & \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1 + \lambda \triangleright w)) - \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1)) \\ &= \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1) + \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)) - \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1)) \\ &= \left(\int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} D\underline{f} \circ \gamma_{\Phi_f(s, t_0, x_1), \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)} \right) (\lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)) \\ &= \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} r_{\text{ev}}(\lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)) \circ D\underline{f} \circ \gamma_{\Phi_f(s, t_0, x_1), \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)} \end{aligned}$$

otrzymujemy tym sposobem równość (indeks $\alpha \in \{1, 2\}$ w oznaczeniu \cdot_α identyfikuje całkę, opatrzoną tym samym indeksem umieszczonym w nawiasie, której odpowiada zmienna symbolizowana przez \cdot_α)

$$\Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(t) = w$$

$$+ \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}}^{(1)} \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})}^{(2)} r_{\text{ev}}(\Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(\cdot_1)) \circ D\underline{f} \circ \gamma_{\Phi_f(\cdot_1, t_0, x_1), \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(\cdot_1)}(\cdot_2)$$

a ponieważ graniczne zachowanie reszty (przy $\lambda \triangleright w \rightarrow 0$) implikuje

$$\frac{1}{\lambda} \triangleright \mathcal{R}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; \lambda \triangleright w) \equiv \left(\frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot \|w\|_N \right) \triangleright \frac{1}{\|\lambda \triangleright w\|_N} \triangleright \mathcal{R}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; \lambda \triangleright w) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

więc też przechodząc obustronnie do granicy $\lambda \rightarrow 0$ w poprzedniej równości (z uwzględnieniem liniowości i ciągłości $D\underline{f}$ oraz obu całek, a także ciągłości pozostałych wykorzystanych powyżej odwzorowań) znajdujemy relację

$$\begin{aligned} & (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w))(t) \\ &= w + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}}^{(1)} \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})}^{(2)} r_{\text{ev}}((D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w))(\cdot_1)) \circ D\underline{f}(\Phi_f(\cdot_1, t_0, x_1)) \\ &\equiv w + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1))((D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w))(\cdot)). \end{aligned}$$

W świetle (1.4.24) daje nam to oszacowanie

$$\| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \|_N$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_{[s,t]; \mathbb{R}^{\times N}} \underline{D}f(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1)) \left((D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(\cdot) \right) \right\|_N \\
&\leq |t-s| \cdot (b-a) \cdot M_{x_0} \cdot \|D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)\|_{\text{op}} \cdot \|v\|_N < |t-s| \cdot \|D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)\|_{\text{op}} \cdot \|v\|_N,
\end{aligned}$$

z którego ostatecznie wynika pożądana nierówność

$$\begin{aligned}
&\|D_3\Phi_f(t, t_0, x_2) - D_3\Phi_f(s, t_0, x_1)\|_{\text{op}} \\
&\leq \|D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2) - D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)\|_{\text{op}} + |t-s| \cdot \|D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)\|_{\text{op}}
\end{aligned}$$

dowodząca – wobec ograniczoności (więc i ciągłości) $D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$ oraz $D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)$ – ciągłości pochodnej $D_3\Phi_f$ (przy ustalonym t_0). W połączeniu z wcześniejszym dowodem ciągłości, prowadzi nas to do wniosku, iż Φ_f jest klasy C^1 w otoczeniu (t_0, x_0) (przy ustalonym t_0). Podkreślmy przy tym, że w dowodzie wykorzystaliśmy jedynie ciągłą różniczkowalność odwzorowania f .

Dotychczasowa dyskusja pozwala nam przeprowadzić indukcyjny (względem stopnia ciągłej różniczkowalności f) dowód różniczkowalności wyższego stopnia potoku (przy ustalonym t_0), do którego punktem wyjścia jest następująca obserwacja:

$$\begin{aligned}
D_3\Phi_f(t, t_0, x_1) &= \text{id}_{\mathbb{R}^{\times N}} + \int_{[t_0,t]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} D_3(\underline{f} \circ \Phi_f)(\cdot, t_0, x_1) \\
&= \text{id}_{\mathbb{R}^{\times N}} + \int_{[t_0,t]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} \underline{D}f(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1)) \circ D_3\Phi_f(\cdot, t_0, x_1),
\end{aligned}$$

wykorzystująca ciągłość pierwszej pochodnej potoku (przy różniczkowaniu wyrażenia podcałkowego z wykorzystaniem Stw. 88 oraz 85). Porównując ją z równaniem całkowym

$$\Phi_f(t, t_0, x_1) = x_1 + \int_{[t_0,t]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} \underline{f} \circ \Phi_f(\cdot, t_0, x_1),$$

konstatujemy, że $D_3\Phi_f$ jest rozwiązaniem, przy warunku początkowym

$$D_3\Phi_f(t_0, t_0, x_1) = \text{id}_{\mathbb{R}^{\times N}},$$

(nieautonomicznego, parametrycznego) \mathbb{R} -liniowego zagadnienia początkowego

$$(1.4.27) \quad D_1(D_3\Phi_f)(t, t_0, x_1) = \underline{D}f(\Phi_f(t, t_0, x_1)) \circ D_3\Phi_f(t, t_0, x_1).$$

Na podstawie Tw. 1.4.15 stwierdzamy, że zagadnienie to jest różniczkowo równoważne pewnemu autonomicznemu bezparametrycznemu zagadnieniu początkowemu, możemy więc odnieść do niego wprost tezę dowodzonego twierdzenia w ujęciu indukcyjnym: oto założymy, że teza ta została wykazana dla odwzorowań klasy C^l dla $l \in \overline{1, k-1}$, a wtedy – wobec przynależności rozważanego przez nas f do klasy C^{k-1} (jako odwzorowania klasy C^k) – wiemy na pewno, że zależność argumentu odwzorowania $\underline{D}f$ od (t, x_0) jest klasy C^{k-1} (x_1 pełni tutaj rolę ciągłego parametru wektorowego), a nadto samo odwzorowanie $\underline{D}f$ jest klasy C^{k-1} , więc też \mathbb{R} -liniowe odwzorowanie określające zagadnienie początkowe (1.4.27) jest tej klasy, co przy powtórny zastosowaniu założenia indukcyjnego implikuje natychmiast ciągłą różniczkowalność stopnia $k-1$ potoku $D_3\Phi_f$ w (t, x_0) przy ustalonym t_0 . Łącząc tę konkluzję z obserwacją (również wykorzystującą hipotezę indukcyjną)

$$D_1\Phi_f(\cdot, t_0, \cdot) = \underline{f} \circ \Phi_f(\cdot, t_0, \cdot) \in C^{k-1}(I \times \text{pr}_2(\mathcal{O}_{x_0}), \mathbb{R}^{\times N}),$$

wnoskujemy, że $D\Phi_f(\cdot, t_0, \cdot)$ (przy ustalonym t_0) jest klasy C^{k-1} , zatem sam potok $\Phi_f(\cdot, t_0, \cdot)$ jest klasy C^k , co należało pokazać. \square

Udowodnione przez nas z mozołem twierdzenie o gładkości potoku odwzorowania definiującego zagadnienie początkowe, tej samej klasy co gładkość tegoż odwzorowania, będzie przez nas wielokrotnie wykorzystywane w następnym rozdziale, jak też w późniejszej dyskusji zastosowań gromadzonych przez nas metod w geometryzacji wyższych struktur algebraicznych.

3. Geometria różniczkowa – algebra liniowa jako model lokalny

Na styku dziedzin przywołanych – w zakresie niezbędnym dla dalszych naszych rozważań – w rozdziałach poprzednich, więc algebry liniowej oraz elementarnej topologii i teorii przestrzeni Banacha, pojawia się możliwość znaczącego poszerzenia zakresu rozważań analitycznych, ograniczonych dotychczas do przestrzeni topologicznych ze strukturą liniową zgodną ze strukturą topologiczną. Możliwość tę, będącą poważnym krokiem na drodze do modelowania rzeczywistych zjawisk, otwiera niezwykle płodna Zasada Lokalnej Trywializacji (ZLT), opisana w Przedmowie. Poniżej zilustrujemy ją na kilku przykładach o fundamentalnym znaczeniu dla modelowania zjawisk i budowania ich areny geometrycznej, jaką jest czasoprzestrzeń. Te nasze wstępne rozważania, stanowiące ledwie przypomnienie i – ewentualnie – wygodne przeformułowanie podstawowych konstrukcji i wyników kursu geometrii różniczkowej, ustalą punkt wyjścia do bardziej zaawansowanych zastosowań ZLT w dalszej części kursu. Naszą dyskusję zaczynamy od zupełnie podstawowych pojęć i konstrukcji geometrii różniczkowej.

DEFINICJA 64. Przyjmijmy zapis Def. 1, 58 i 62 oraz Przykł. 25 (1). Ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N}$ i niechaj $\mathcal{T}_n^{(k)}$ będzie kategorią, w której klasa obiektów to $\text{Obj } \mathcal{T}_n^{(k)} := \mathcal{T}_{\mathbb{E}}(\mathbb{R}^{x^n})$, a zbiór morfizmów między dwoma dowolnymi obiektami $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \text{Obj } \mathcal{T}_n^{(k)}$ to $\text{Hom}_{\mathcal{T}_n^{(k)}}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) := C^k(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$. **Rozmaitość różniczkowalna klasy C^k** , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (zwana też **C^k -rozmaitością**) **wymiaru $\dim M = n$** to przestrzeń Hausdorffa typu Top lokalnie modelowana na kategorii $\mathcal{T}_n^{(k)}$, $n \in \mathbb{N}$, czyli czwórka $((M, \mathcal{T}(M)), \mathcal{O}, \mathcal{U}, \kappa)$ złożona z przestrzeni Hausdorffa $(M, \mathcal{T}(M))$, jej pokrycia otwartego $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(M)$, rodziny podzbiorów $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{E}}(\mathbb{R}^{x^n})$ oraz homeomorfizmów

$$\kappa_i : \mathcal{O}_i \rightsquigarrow \mathcal{U}_i, \quad i \in I,$$

zwanych **mapami** lub (**lokalnymi**) **układami współrzędnych**, o odwzorowaniach odwrotnych

$$\pi_i \equiv \kappa_i^{-1} : \mathcal{U}_i \rightsquigarrow \mathcal{O}_i, \quad i \in I,$$

zwanych **lokalnymi parametryzacjami**, i takich, że dla wszystkich par indeksów $(i, j) \in \langle I^{x2} \rangle_{\mathcal{O}}$ homeomorfizmy

$$(1.4.28) \quad t_{ji} := \kappa_j \circ \kappa_i^{-1} \upharpoonright_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij})} : \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \rightsquigarrow \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}),$$

określane mianem (**lokalnych**) **transformacji współrzędniowych**, są dyfeomorfizmami klasy C^k . Kolekcja map $\{\kappa_i\}_{i \in I} =: \mathcal{A}$ jest określana mianem **atlasu** klasy C^k . Najczęściej przyjmuje się, że definicja rozmaitości różniczkowalnej klasy C^k obejmuje także atlas \mathcal{A} klasy C^k **maksymalny** w tym sensie, że dla każdego

atlasu \mathcal{A} na M klasy C^k zachodzi tożsamość⁷

$$\mathcal{A} \cup \widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}.$$

W przypadku $k = 0$ mówimy o **rozmaitościach topologicznych**. Odtąd będziemy zatem często zapisywać rozmaitość różniczkowalną klasy C^k wymiaru n jako parę $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$, złożoną z przestrzeni Hausdorffa $(M, \mathcal{T}(M))$ j/w oraz atlasu maksymalnego $\widehat{\mathcal{A}}$, lub wręcz – jeśli nie będzie to prowadzić do nieporozumień – jako parę $(M, \widehat{\mathcal{A}})$. Strukturę tę będziemy wymiennie określać mianem **struktury rozmaitości różniczkowalnej (klasy C^k)**, **struktury C^k -rozmaitości** lub po prostu **struktury różniczkowej (klasy C^k)**.

Podrozmaitość wymiaru $k \leq \dim M$ to podprzestrzeń topologiczna $S \subseteq M$ rozmaitości różniczkowalnej $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$ klasy C^k o strukturze różniczkowalnej określonej przez atlas

$$\widehat{\mathcal{A}} \cap S := \{\varphi_i^S := \varphi_i \upharpoonright_{\mathcal{O}_i \cap S}\}_{i \in I_S}, \quad I_S := \{i \in I \mid \mathcal{O}_i \cap S \neq \emptyset\},$$

którego mapy spełniają warunek

$$\mathcal{O}_i \cap S = \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}), \quad i \in I.$$

W tym przypadku liczbę naturalną

$$\text{codim}_M S := n - k$$

określamy mianem **kowymiaru** podrozmaitości $((S, \mathcal{T}_M(S)), \widehat{\mathcal{A}} \cap S)$ w rozmaitości $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$.

Niechaj $((M_\alpha, \mathcal{T}(M_\alpha)), \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema rozmaitościami różniczkowalnymi klasy C^k i niech $f : M_1 \rightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem ciągłym między nimi, przy czym zakładamy, że ustalone (dowolnie) pokrycia $\mathcal{O}_\alpha = \{\mathcal{O}_{i_\alpha}^\alpha\}_{i_\alpha \in I_\alpha} \subset \mathcal{T}(M_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ zostały wybrane tak, że istnieje odwzorowanie $\phi : I_1 \rightarrow I_2$ pokrywające f w sensie relacji

$$f(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2, \quad i_1 \in I_1,$$

co nie stanowi ograniczenia ogólności naszych rozważań, patrz: przypis do Def. 1. Odwzorowanie f nazywamy **odwzorowaniem różniczkowalnym klasy C^p** , $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, lub po prostu **C^p -odwzorowaniem**, jeśli ma ono **prezentację lokalną**

$$f_{i_1} := \kappa_{\phi(i_1)}^2 \circ f \circ (\kappa_{i_1}^1)^{-1} : \kappa_{i_1}^1(\mathcal{O}_{i_1}^1) \rightarrow \kappa_{\phi(i_1)}^2(\mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2), \quad i_1 \in I_1$$

teżże klasy, czyli ilekroć

$$\forall_{i_1 \in I_1} : f_{i_1} \in C^p(\kappa_{i_1}^1(\mathcal{O}_{i_1}^1), \kappa_{\phi(i_1)}^2(\mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2)).$$

Biorąc pod uwagę stopień ciągłej różniczkowalności transformacji współrzędnych (1.4.28), zasadnym jest ograniczenie rozważań do $p \leq k$.

Kategoria rozmaitości różniczkowalnych klasy C^k , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{Man}^{(k)},$$

⁷Każdy atlas klasy C^k można rozszerzyć do atlasu maksymalnego klasy C^k uzupełniając go o wszystkie mapy o transformacjach współrzędnych z mapami wyjściowymi będących klasy C^k .

to podkategoria kategorii Top , której obiektami są rozmaitości różniczkowalne klasy C^k , morfizmami zaś – odwzorowania różniczkowalne klasy C^k między nimi, oznaczane symbolami

$$C^k(M_1, M_2) \equiv \text{Hom}_{\mathbf{Man}^{(k)}}(((M_1, \mathcal{T}(M_1)), \widehat{\mathcal{A}}_1), ((M_2, \mathcal{T}(M_2)), \widehat{\mathcal{A}}_2)).$$

Izomorfizmy w tej kategorii (tj. bijekcje klasy C^k o odwzorowaniach odwrotnych także klasy C^k) określamy mianem **dyfeomorfizmów klasy C^k** lub po prostu **C^k -dyfeomorfizmów** i oznaczamy symbolami $\text{Diff}^k(M_1, M_2)$. W szczególności automorfizmy rozmaitości różniczkowalnej klasy C^k na $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$ oznaczamy symbolem $\text{Diff}^k(M)$. W przypadku $k = 0$ mamy do czynienia z textbkategorią rozmaitości topologicznych

$$\mathbf{Man}^{(0)} \equiv \mathbf{TopMan},$$

w której dyfeomorfizmami są homeomorfizmy. ▲

UWAGA 16. Należy podkreślić, że klasa gładkości odwzorowania między rozmaitościami różniczkowalnymi klasy C^k jest dobrze określona – ilekroć odwzorowanie takie ma prezentację lokalną klasy C^p , każda inna jego prezentacja lokalna stowarzyszona z tym samym atlasem maksymalnym jest także klasy C^p . Istotnie, superpozycja odwzorowań klas C^k i C^p , $p \leq k$ jest klasy C^p , tymczasem dla dowolnego $j_1 \in I_1$ o własności $\mathcal{O}_{i_1 j_1}^1 \neq \emptyset$ zachodzi

$$f_{j_1} \equiv \tau_{\phi(j_1)\phi(i_1)}^2 \circ f_{i_1} \circ (\tau_{j_1 i_1}^1)^{-1}.$$

PRZYKŁAD(Y) 26.

- (1) **Struktura produktowa rozmaitości** dla pary $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ rozmaitości różniczkowalnych klasy C^k o atlasach $\widehat{\mathcal{A}}_\alpha = \{\varphi_{i_\alpha}^\alpha\}_{i_\alpha \in I_\alpha}$ to struktura różniczkowalna klasy C^k na iloczynie kartezjańskim $M_1 \times M_2$ (wyposażonym w standardową topologię produktową z Przykł. 24 (5)) określona przez atlas

$$\widehat{\mathcal{A}}_1 \times \widehat{\mathcal{A}}_2 := \{\varphi_{i_1}^1 \times \varphi_{i_2}^2\}_{(i_1, i_2) \in I_1 \times I_2}$$

złożony z map

$$\varphi_{i_1}^1 \times \varphi_{i_2}^2 : \mathcal{O}_{i_1}^1 \times \mathcal{O}_{i_2}^2 \rightsquigarrow \mathcal{U}_{i_1}^1 \times \mathcal{U}_{i_2}^2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \equiv \mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

- (2) **Struktura cofnięta rozmaitości** na przestrzeń topologiczną M wzdłuż odwzorowania $f : M \rightarrow N$, będącego homeomorfizmem M na obraz $f(M) \subset N$, z rozmaitości różniczkowalnej $(N, \widehat{\mathcal{A}})$ o atlasie $\widehat{\mathcal{A}} = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ to struktura różniczkowalna klasy C^p na M określona przez atlas

$$f^* \widehat{\mathcal{A}} := \{f^* \varphi_i\}_{i \in I}$$

złożony z map

$$f^* \varphi_i : f^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad i \in I.$$

✓

Istnienie topologicznie trywialnego lokalnego modelu ma swoje dalekosiężne konsekwencje, spośród których wymienimy tutaj tylko przydatne w dalszej części wykładu

STWIERDZENIE 91. *Każda rozmaitość spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności i jest lokalnie zwarta, więc też lokalnie przewarta.*

■

Dowód: Dowolny punkt $x \in M$ rozmaitości (M, \mathcal{A}) wymiaru n należy do dziedziny $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M)$ pewnej lokalnej mapy $\kappa : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{x^n}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\mathbb{E}}(\mathbb{R}^{x^n})$, przy czym $\kappa(x)$ zawiera się w \mathcal{U} wraz z pewną domkniętą kulą $\overline{B^n(\kappa(x); \varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$, która w świetle Stw. 81 jest zwarta. Na mocy Stw. 68 homeomorficzny przeciwobraz tejże kuli w \mathcal{O} , który wprost z konstrukcji zawiera x , także jest zwarty. To rozumowanie przesądza o lokalnej zwartości przestrzeni M , a ponieważ ta ostatnia jest przestrzenią Hausdorffa, przeto wskazany uprzednio jej zwarty podzbiór zawierający x jest zarazem przewarty jako zbiór domknięty, co implikuje lokalną przewartość M . Spełnianie przez M pierwszego aksjomatu przeliczalności jest trywialną konsekwencją tej samej własności lokalnego modelu \mathbb{R}^{x^n} . □

Dużo mniej oczywistą, a zarazem nader istotną z homologicznego, więc także fizycznego punktu widzenia⁸ konsekwencją użycia w definicji rozmaitości lokalnego modelu o trywialnej topologii i naturalnej strukturze liniowej jest istnienie szczególnie prostych topologicznie pokryć otwartych tejże rozmaitości, które opisuje

DEFINICJA 65. Przyjmijmy zapis Def. 64 i dla dowolnego pokrycia otwartego $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ rozmaitości różniczkowalnej (klasy C^k) M oznaczmy, uogólniając, dla dowolnego $N \in \mathbb{N}^{\times}$, zapis Def. 1,

$$\langle I^{xN} \rangle_{\mathcal{O}} := \{ (i_1, i_2, \dots, i_N) \in I^{xN} \mid \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N} \equiv \mathcal{O}_{i_1} \cap \mathcal{O}_{i_2} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{i_N} \neq \emptyset \}.$$

Pokrycie \mathcal{O} nazywamy **dobrym klasy C^k** , jeśli jest ono lokalnie skończone, jego elementy są przewarte, a nadto każde niepuste ich przecięcie,

$$\mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}, \quad (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \langle I^{xN} \rangle_{\mathcal{O}}, \quad N \in \mathbb{N}^{\times},$$

jest **C^k -ściągalne**, co oznacza, że istnieje dyfeomorfizm klasy C^k

$$\rho : [0, 1] \times \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N} \rightarrow \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}$$

o własnościach

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}} : \rho(0, x) = x_* \quad \wedge \quad \rho(1, x) = x$$

dla pewnego punktu $x_* \in \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}$. Dyfeomorfizm taki określamy mianem **retrakcji różniczkowalnej (klasy C^k)** zbioru $\mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}$.

▲

Mamy fundamentalne

TWIERDZENIE 1.4.17 (de Rhama–Weila o istnieniu pokrycia dobrego). *Na każdej rozmaitości różniczkowalnej klasy C^k o $k \geq 2$ istnieje pokrycie dobre klasy C^k .*

■

⁸Patrz: Rozdz. 6.

Dowód: Za Ref. [Wei52]. □

Obok wymienionych powyżej, istnieje wiele innych jeszcze naturalnych schematów indukcji struktury różniczkowej – niektóre z nich napotkamy w dalszej części kursu. Szczególne miejsce pośród nich zajmuje kanoniczna i zarazem naturalna (tj. funktorialna) konstrukcja, która z dowolną rozmaitością $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ klasy C^k wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$ stowarzysza rozmaitość klasy C^k dwukrotnie większego wymiaru, kodującą – jak się okaże – informację o klasach (współ)stycznych krzywych w M i tym samym otwierającą możliwość przetransportowania naturalnej struktury liniowej z przestrzeni modelowej \mathbb{R}^{xn} . Jej wprowadzenie do naszych rozważań pozwoli uporządkować dyskusję głównych typów odwzorowań różniczkowalnych, niezbędną dla naszych przyszłych celów, a zarazem da nam do ręki potężne narzędzie lokalnej (zlinearyzowanej) analizy automorfizmów (czyli symetrii) struktur różniczkowych, o oczywistych i nader istotnych konotacjach fizykalnych. Istnieje kilka (równoważnych) definicji rzeczonyj konstrukcji, kładących nacisk na jej różne aspekty geometryczne (struktura rozmaitości, struktura wiązki wektorowej, związek z różniczkowaniami algebry funkcji na M). Poniżej wybierzemy tę z nich, która wydaje się być najbardziej elementarną (choć niekoniecznie najbardziej „intuicyjną”), a zarazem dostarczy prostej i czytelnej ilustracji ogólnego schematu budowania obiektów geometrycznych o analogicznej (produktowej) strukturze lokalnej, który sformalizujemy i wykorzystamy już wkrótce. Punktem wyjścia jest tutaj dekonstrukcja rozmaitości M w terminach lokalnych map (czyli też parametryzacji), tj. spojrzenie na M jako sumę rozłączną swych lokalnych modeli,

$$(1.4.29) \quad M \cong \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) / \sim,$$

w których punkty zostały utożsamione wedle reguły

$$(x, i) \sim (y, j) \quad \iff \quad \pi_i(x) = \pi_j(y) \in \mathcal{O}_{ij}.$$

Lokalnie rozmaitość można zatem traktować jako podzbiór (otwarty) \mathbb{R}^{xn} , co pozwala modelować przestrzeń styczną do M w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_i$ tej rozmaitości na stycznej do odnośnego obrazu w $\kappa_i(x) \in \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{xn}$ przestrzeni \mathbb{R}^{xn} . Ten sposób myślenia o wyjściowej rozmaitości M prowadzi nas wprost do

DEFINICJA 66. Przyjmijmy zapis Def. 64, Przykł. 19 oraz 24 (4) i (5). **Wiązka styczna** C^{k+1} -rozmaitości $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$, o atlasie $\widehat{\mathcal{A}} = \{\kappa_i\}_{i \in I}$ stowarzyszonym z pokryciem otwartym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, to C^k -rozmaitość $(TM, T\widehat{\mathcal{A}})$ utworzona, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$TM := \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn} \right) / \sim_{Dt.}$$

relacji

$$(x, i, v) \sim (y, j, w) \quad \iff \quad \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ w = Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v) \end{cases},$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{TM} : TM \longrightarrow M : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt.}} \longmapsto x,$$

zwane **rzutem kanonicznym (na bazę wiązki)**, którego poziomice

$$T_x M := \pi_{TM}^{-1}(\{x\})$$

noszą miano **włókien**;

- topologia zbioru TM jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektynego rzutu

$$\pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n} \longrightarrow \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n} \right) / \sim_{Dt..} : (x, i, v) \longmapsto [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni $\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n}$, o iniekcjach kanonicznych

$$j_i : \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n} \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times \mathbb{R}^{x_n} : (x, v) \longmapsto (x, i, v), \quad i \in I,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{S}(TM) := \left\{ \mathcal{O} \subset TM \mid \forall i \in I : j_i^{-1}(\pi_{\sim}^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n}) \right\};$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej TM definiują (jawnie homeomorficzne) odwzorowania

$$T\kappa_i : \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{x_n} : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \longmapsto (\kappa_i(x), v), \quad i \in I,$$

zwane **mapami naturalnymi**, które określają transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} Tt_{ji} := T\kappa_j \circ (T\kappa_i)^{-1} \upharpoonright_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{x_n}} & : \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{x_n} \twoheadrightarrow \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{x_n} \\ & : (\kappa_i(x), v) \longmapsto (\kappa_j(x), Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v)), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób należące do klasy C^r .

Klasę abstrakcji

$$(1.4.30) \quad V(x) := [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \in T_x M$$

określamy mianem **wektora stycznego** do C^{k+1} -rozmaitości (M, \mathcal{A}) (zaczepionego) w punkcie $x \in M$.

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy C^k)

$$\mathbf{0}_{TM} : M \longrightarrow TM : x \longmapsto [(x, i, \mathbf{0}^n)]_{\sim_{Dt..}}$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki stycznej TM . ▲

UWAGA 17. Homeomorficzny charakter map naturalnych wymaga skromnego komentarza. Po pierwsze zauważmy, że dowolna klasa $[(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \in \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \subset TM$ zawiera dokładnie jednego reprezentanta $(x, i, v) \in \mathcal{O}_i \times \{i\} \times \mathbb{R}^{x_n}$ (o *ustalonym* indeksie pokrycia), oto bowiem – wprost z definicji –

$$(y, i, w) \in [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \implies (y, w) = (x, Dt_{ii}(\kappa_i(x))(v)) \equiv (x, v),$$

a ponieważ także

$$\forall (x, v) \in \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n} : (x, i, v) \in [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}},$$

przeto otrzymujemy homeomorfizm

$$\tau_i : \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n} : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \longmapsto (x, v).$$

Jego złożenie z produktem homeomorfizmów

$$\kappa_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^{x_n}} : \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n} \twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{x_n} : (x, v) \longmapsto (\kappa_i(x), v)$$

odtworza mapę naturalną

$$\mathbb{T}\kappa_i \equiv (\kappa_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^{\times n}}) \circ \tau_i.$$

Należy ponadto podkreślić, że w opisanej topologii także rzut kanoniczny jest odwzorowaniem ciągłym.

Wreszcie pojawienie się liniowych odwzorowań Dt_{ji} zarówno w definicji ilorazu (por. Równ. (1.4.29)), jak i w definicji transformacji współrzędniowych dla map naturalnych, jest całkowicie naturalne, jeśli myśleć o wektorach stycznych do M w punkcie x jako o klasach współstyczności ścieżek przechodzących przez ten punkt, te zaś – wyreprezentować przy użyciu linii prostych przecinających się w obrazie x względem lokalnej mapy κ_i (wzgl. κ_j). Oczywiście przywołany argument opiera się na założeniu, że myślenie takie jest usprawiedliwione, co zbadamy poniżej.

Jakkolwiek w tworzeniu terminologii matematycznej powszechnie dochodzi do głosu zasada „świnki morskiej”, wedle której „wektor styczny” nie musi być ani wektorem w rozumieniu algebraicznym, ani obiektem stycznym do M w żadnym sensie podpowiadającym przez intuicję wyrobioną w geometrii euklidesowej, to jednak pojawia się naturalne pytanie o ewentualną równoważność powyższej definicji z inną naturalną geometryczną definicją wektora stycznego jako klasy (współ)styczności ścieżek przechodzących przez punkt $x \in M$, reprezentujących możliwe trajektorie ucieczki (z określoną „prędkością”) z punktu x , i tym samym – elementu pewnej wyróżnionej przestrzeni \mathbb{R} -liniowej przypisanej do tego punktu. Nasza odpowiedź na to pytanie będzie dwuczłonowa: najpierw wykazemy istnienie naturalnej struktury \mathbb{R} -liniowej na włóknie wiązki stycznej nad dowolnym punktem, następnie zaś udowodnimy strukturalną (w kategorii \mathbb{R} -liniowej) równoważność obu definicji wektora stycznego. Oto więc zaczniemy od oczywistego

STWIERDZENIE 92. *Przyjmijmy zapis Def. 66 oraz Przykł. 11 (10). Wybierzmy dowolny punkt $x \in \mathcal{O}_i \subset M$ C^k -rozmaitości (M, \mathcal{A}) wymiaru $n \in \mathbb{N}^*$, a wówczas odwzorowanie*

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x \kappa_i &: \mathbb{T}_x M \xrightarrow{\mathbb{T}\kappa_i} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \xrightarrow{\text{Pr}_2} \mathbb{R}^{\times n} \\ &: [(x, i, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}} \mapsto (\kappa_i(x), v) \mapsto v, \end{aligned}$$

będące złożeniem lokalnej mapy naturalnej na $\mathbb{T}M$ z kanonicznym rzutem na drugą składową iloczynu kartezjańskiego, jest bijekcją i jako takie w kanoniczny sposób indukuje na $\mathbb{T}_x M$ strukturę przestrzeni \mathbb{R} -liniowej,

$$\mathbb{T}_x M \underset{\mathbb{R}\text{-lin.}}{\cong} \mathbb{R}^{\times n},$$

określaną mianem **przestrzeni stycznej do rozmaitości M w punkcie x** . ■

Dowód: Strukturę \mathbb{R} -liniowa, o której mowa w tezie stwierdzenia, określa formuła

$$\lambda_1 \triangleright [(x, i, v_1)]_{\sim_{\text{Dt.}}} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, v_2)]_{\sim_{\text{Dt.}}} := [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_{\text{Dt.}}},$$

zapisana dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Wobec \mathbb{R} -liniowego charakteru relacji z Def. 66, struktura ta jest dobrze określona. Istotnie, niechaj $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i niech $w_\alpha := Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$, a wtedy

$$\lambda_1 \triangleright [(x, j, w_1)]_{\sim_{\text{Dt.}}} + \lambda_2 \triangleright [(x, j, w_2)]_{\sim_{\text{Dt.}}} = [(x, j, \lambda_1 \triangleright w_1 + \lambda_2 \triangleright w_2)]_{\sim_{\text{Dt.}}}$$

$$\begin{aligned}
&= [(x, j, \lambda_1 \triangleright Dt_{j_i}(\kappa_i(x))(v_1) + \lambda_2 \triangleright Dt_{j_i}(\kappa_i(x))(v_2))]_{\sim_{Dt..}} \\
&= [(x, j, Dt_{j_i}(\kappa_i(x))(\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2))]_{\sim} = [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_{Dt..}} \\
&\equiv \lambda_1 \triangleright [(x, j, w_1)]_{\sim_{Dt..}} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, v_2)]_{\sim_{Dt..}} .
\end{aligned}$$

□

Powyższe pozwala nam wysłowić porządkujące

STWIERDZENIE 93. *Przyjmijmy zapis Stw. 92. Rozważmy relację równoważności na zbiorze ścieżek klasy C^1 w C^k -rozmaitości (M, \mathcal{A}) wymiaru $n \in \mathbb{N}^{\times}$ przechodzących przez jej punkt x ,*

$$\gamma :] - \varepsilon_{\gamma}, \varepsilon_{\gamma}[\longrightarrow M, \quad \varepsilon_{\gamma} > 0, \quad \gamma(0) = x,$$

określaną przez warunek (współ)styczności w x ,

$$\tilde{\gamma} \sim_x \gamma \iff \begin{cases} \tilde{\gamma}(0) = x = \gamma(0) \\ D(\kappa \circ \tilde{\gamma})(0) = D(\kappa \circ \gamma)(0) \end{cases},$$

wypowiedziany w terminach dowolnej mapy $\kappa : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}$ określonej na otoczeniu otwartym $\mathcal{O} \ni x$. Oznaczywszy $v_{\gamma} := D(\kappa \circ \gamma)(0) \in \mathbb{R}^{\times n}$ dla skrótu, na zbiorze P_x klas abstrakcji ścieżek względem powyższej relacji określamy strukturę grupy przemiennej z działaniem

$$\begin{aligned}
&P_x \times P_x \longrightarrow P_x \\
&: ([\gamma_1]_{\sim_x}, [\gamma_2]_{\sim_x}) \longmapsto [] - \varepsilon, \varepsilon [\exists t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2})) \in \mathcal{O}]_{\sim_x} \\
&=: [\gamma_1]_{\sim_x} + [\gamma_2]_{\sim_x}
\end{aligned}$$

i elementem neutralnym danym w postaci klasy $[\gamma_x]_{\sim_x}$ ścieżki stałej

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow M : t \longmapsto x,$$

a następnie działanie ciała \mathbb{R}

$$\mathbb{R} \times P_x \longrightarrow P_x : (\lambda, [\gamma]_{\sim_x}) \longmapsto [] - \varepsilon, \varepsilon [\exists t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \cdot \lambda \triangleright v_{\gamma}) \in \mathcal{O}]_{\sim_x},$$

przy czym w obu przypadkach $\varepsilon > 0$ jest dobrane tak, ażeby ścieżka będąca wynikiem działania leżała w całości w \mathcal{O} . Tak zdefiniowana przestrzeń \mathbb{R} -liniowa jest izomorficzna z przestrzenią \mathbb{R} -liniową o nośniku $T_x M$ opisaną w Stw. 92. ■

Dowód: Zaczniemy od spostrzeżenia, że relacja współstyczności nie zależy od wyboru lokalnej mapy – istotnie, jeśli $\psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}$ jest lokalną mapą na otoczeniu otwartym $\mathcal{U} \ni x$, to dla ścieżek γ i $\tilde{\gamma}$ z treści stwierdzenia zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned}
D(\psi \circ \tilde{\gamma})(0) &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \tilde{\gamma}(0)) \circ D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0) \\
&= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0) \\
&= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma(0)) \circ D(\varphi \circ \gamma)(0) = D(\psi \circ \gamma)(0).
\end{aligned}$$

Bez trudu sprawdzamy też analogiczną własność definicji struktury \mathbb{R} -liniowej na zbiorze ścieżek, a to za sprawą tożsamości

$$\begin{aligned} & \psi^{-1}(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) \upharpoonright_{t=0} = \psi^{-1} \circ \psi(x) = x \\ \equiv & \quad \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) \upharpoonright_{t=0} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \psi^{-1}(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) = \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2 \\ = & \quad \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)). \end{aligned}$$

Możemy następnie przystąpić do konstrukcji pożądanego izomorfizmu przestrzeni \mathbb{R} -liniowych. Oto więc klasie współstyczności ścieżek przez $x \in \mathcal{O}_i$ przyporządkowujemy punkty we włóknie $\Gamma_x M$ wedle formuły (w oczywisty sposób dobrze określonej)

$$(1.4.31) \quad V_x : [\gamma]_{\sim_x} \mapsto [(\gamma(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{D_t..}},$$

i odwrotnie – punktowi $[(x, i, v)]_{\sim_{D_t..}}$ w tymże włóknie przypisujemy klasę ścieżki (trajektorii) „ruchu jednostajnego prostoliniowego” wedle formuły

$$\Gamma_x : [(x, i, v)]_{\sim_{D_t..}} \mapsto [-\varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \varphi_i^{-1}(\varphi_i(x) + t \triangleright v) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x},$$

przy czym liczba $\varepsilon > 0$ w ostatnim wzorze jest dobrana tak, by warunek $\kappa_i(x) + t \triangleright v \in \kappa_i(\mathcal{O}_i)$ był spełniony dla dowolnego $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ (jej istnienie jest konsekwencją otwartości $\kappa_i(\mathcal{O}_i)$). Zauważmy, że oba przyporządkowania są dobrze określone, oto bowiem dla $x \in \mathcal{O}_{ij}$ dostajemy z jednej strony

$$\begin{aligned} [(\gamma(0), j, D(\kappa_j \circ \gamma)(0))]_{\sim} &= [(\gamma(0), j, Dt_{ji}(\kappa_i \circ \gamma(0)) \circ D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{D_t..}} \\ &\equiv [(\gamma(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{D_t..}}, \end{aligned}$$

a z drugiej, dla $w := Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v)$,

$$\Gamma_x([(x, j, w)]_{\sim_{D_t..}}) = [\gamma_j^w :] - \varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \kappa_j^{-1}(\kappa_j(x) + t \triangleright w) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x},$$

więc też

$$\gamma_j^w(0) = \kappa_j^{-1}(\kappa_j(x) + 0 \triangleright w) \equiv \kappa_j^{-1} \circ \kappa_j(x) = x = \gamma_i^v(0)$$

oraz

$$\begin{aligned} D(\kappa_i \circ \gamma_j^w)(0) &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (t_{ij}(\kappa_j(x) + t \triangleright w)) = Dt_{ij}(\kappa_j(x))(w) \\ &\equiv Dt_{ij}(\kappa_j(x)) \circ Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v) = \text{Did}_{\kappa_i(\mathcal{O}_i)}(\kappa_i(x))(v) \\ &= \text{id}_{\Gamma_{\kappa_i(x)} \mathbb{R}^n}(v) = v = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\kappa_i(x) + t \triangleright v) = D(\kappa_i \circ \gamma_i^v)(0), \end{aligned}$$

co implikuje pożądaną równoważność

$$\gamma_j^w \sim \gamma_i^v.$$

Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowania te są wzajem odwrotne. Istotnie, jak pokazuje powyższy rachunek,

$$V_x \circ \Gamma_x([(x, i, v)]_{\sim_{D_t..}}) = V_x([\gamma_i^v]_{\sim_x}) = [(\gamma_i^v(0), j, D(\kappa_j \circ \gamma_i^v)(0))]_{\sim_{D_t..}} = [(x, i, v)]_{\sim_{D_t..}},$$

a ponadto

$$\Gamma_x \circ V_x([\gamma]_{\sim_x}) = [\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)} :]_{-\varepsilon, \varepsilon} [\exists t \mapsto \kappa_i^{-1}(\kappa_i \circ \gamma(0) + t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x},$$

przy czym

$$\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}(0) = \kappa_i^{-1} \circ \kappa_i \circ \gamma(0) = \gamma(0)$$

oraz

$$D(\kappa_i \circ \gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)})(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\kappa_i \circ \gamma(0) + t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) = D(\kappa_i \circ \gamma)(0)$$

więc też

$$[\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}]_{\sim_x} = [\gamma]_{\sim_x},$$

zgodnie z wysłowionym wcześniej stwierdzeniem.

Na zakończenie dowodzimy liniowości obu przyporządkowań. W tym celu w definicji kombinacji liniowej klas ścieżek współstycznych w x wybierzmy lokalną mapę $\kappa \equiv \kappa_i$ i oznaczmy

$$\gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i}(t) := \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)),$$

a wtedy

$$\begin{aligned} V_x(\lambda_1 \triangleright [\gamma_1]_{\sim_x} + \lambda_2 \triangleright [\gamma_2]_{\sim_x}) &\equiv [(\gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i}(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i})(0))]_{\sim_x} \\ &= [(\kappa_i^{-1} \circ \kappa_i(x), i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_x} = [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_x} \\ &\equiv \lambda_1 \triangleright [(x, i, D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0))]_{\sim_x} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0))]_{\sim_x} \\ &\equiv \lambda_1 \triangleright V_x([\gamma_1]_{\sim_x}) + \lambda_2 \triangleright V_x([\gamma_2]_{\sim_x}). \end{aligned}$$

Jako odwrotność \mathbb{R} -liniowej bijekcji odwzorowanie Γ_x jest automatycznie \mathbb{R} -liniowe. \square

Jak zapowiadaliśmy na wstępie, przyporządkowanie rozmaitości jej wiązki stycznej ma charakter naturalny, co precyzuje poniższe

STWIERDZENIE 94. *Odwzorowanie*

$$\mathbb{T} : \text{Obj } \mathbf{Man}^{(k+1)} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Man}^{(k)} : (M, \widehat{\mathcal{A}}) \longmapsto (\mathbb{T}M, \mathbb{T}\widehat{\mathcal{A}})$$

opisane w Def. 66 rozszerza się kanonicznie do funktora kowariantnego

$$\mathbb{T} : \mathbf{Man}^{(k+1)} \rightarrow \mathbf{Man}^{(k)},$$

zwanego **funktorem stycznym**. \blacksquare

Dowód: Mając dane C^{k+1} -rozmaitości $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ $\alpha \in \{1, 2\}$ wymiaru $\dim M_\alpha = n_\alpha$, a na nich lokalne mapy $\kappa_{i_\alpha}^\alpha : \mathcal{O}_{i_\alpha}^\alpha \twoheadrightarrow \mathcal{U}_{i_\alpha}^\alpha \subset \mathbb{R}^{n_\alpha}$, $i_\alpha \in I_\alpha$ o dyskutowanej wcześniej własności $f(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2$ (zapisanej dla pewnego odwzorowania $\phi : I_1 \rightarrow I_2$) oraz stowarzyszone z nimi mapy naturalne $\mathbb{T}\kappa_{i_\alpha}^\alpha : \pi_{\mathbb{T}M_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_{i_\alpha}^\alpha) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_{i_\alpha}^\alpha \times \mathbb{R}^{n_\alpha}$, zdefiniujemy dla dowolnego C^{k+1} -odwzorowania

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

o prezentacjach lokalnych $f_{i_1} = \kappa_{\phi(i_1)}^2 \circ f \circ (\kappa_{i_1}^1)^{-1}$ lokalne odwzorowania

$$\mathbb{T}_{i_1} f : \pi_{\mathbb{T}M_1}^{-1}(\mathcal{O}_{i_1}^1) \longrightarrow \pi_{\mathbb{T}M_2}^{-1}(\mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2)$$

$$: [(x, i_1, v)]_{\sim_{Dt..}} \mapsto [(f(x), \phi(i_1), Df_{i_1}(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{Dt..}} .$$

Powyższa definicja nie zależy od wyboru reprezentanta klasy równoważności, o czym przekonuje krótki rachunek

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}_{j_1} f([(x, i_1, v)]_{\sim_{Dt..}}) \equiv \mathbb{T}_{j_1} f([(x, j_1, Dt_{j_1 i_1}^1(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{Dt..}}) \\ &= [(f(x), \phi(j_1), Df_{j_1}(\kappa_{j_1}^1(x)) \circ Dt_{j_1 i_1}^1(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{Dt..}} \\ &\equiv [(f(x), \phi(i_1), Dt_{\phi(i_1)\phi(j_1)}^2(\kappa_{\phi(j_1)}^2 \circ f(x)) \circ Df_{j_1}(\kappa_{j_1}^1(x)) \circ Dt_{j_1 i_1}^1(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{Dt..}} \\ &= [(f(x), \phi(i_1), D(t_{\phi(i_1)\phi(j_1)}^2 \circ f_{j_1} \circ t_{j_1 i_1}^1)(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{Dt..}} \\ &= [(f(x), \phi(i_1), Df_{i_1}(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{Dt..}} \\ &\equiv \mathbb{T}_{i_1} f([(x, i_1, v)]_{\sim_{Dt..}}) , \end{aligned}$$

przeprowadzony dla dowolnego $x \in \mathcal{O}_{i_1 j_1}^1$, a wykorzystujący jedynie definicje występujących weń klas abstrakcji oraz Stw. 85. Z tej to przyczyny mamy do czynienia z zadanym globalnie C^k -odwzorowaniem

$$\mathbb{T}f : \mathbb{T}M_1 \longrightarrow \mathbb{T}M_2$$

o lokalnej postaci

$$\mathbb{T}f \upharpoonright_{\pi_{\mathbb{T}M_1}^{-1}(\mathcal{O}_{i_1}^1)} = \mathbb{T}_{i_1} f ,$$

zwanym **odwzorowaniem stycznym** do f . Odwzorowanie to pokrywa f w sensie, jaki wyraża diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}M_1 & \xrightarrow{\mathbb{T}f} & \mathbb{T}M_2 \\ \pi_{\mathbb{T}M_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{T}M_2} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array} .$$

Teza Stw. 85 gwarantuje także przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccccc}
 & & TM_2 & & \\
 & \nearrow Tf_{12} & \uparrow & \nwarrow Tf_{23} & \\
 TM_1 & \xrightarrow{\quad} & TM_2 & \xrightarrow{\quad} & TM_3 \\
 & \searrow \pi_{TM_1} & \downarrow \pi_{TM_2} & \swarrow \pi_{TM_3} & \\
 & & M_2 & & \\
 & \nearrow f_{12} & \uparrow & \nwarrow f_{23} & \\
 M_1 & \xrightarrow{\quad} & M_2 & \xrightarrow{\quad} & M_3 \\
 & \searrow f_{23 \circ f_{12}} & & &
 \end{array}$$

dla dowolnej trójki C^{k+1} -rozmaitości $(M_\beta, \mathcal{A}_\beta)$, $\beta \in \{1, 2, 3\}$ i pary C^{k+1} -odwzorowań $f_{\gamma\gamma+1} : M_\gamma \rightarrow M_{\gamma+1}$, $\gamma \in \{1, 2\}$. Mamy też oczywistą tożsamość

$$\text{Tid}_M = \text{id}_{TM},$$

wynikającą wprost z definicji (lokalnej postaci) Tf . \square

UWAGA 18. Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że odwzorowanie styczne Tf respektuje wprowadzoną wcześniej strukturę \mathbb{R} -liniową na (włóknie) TM_α , $\alpha \in \{1, 2\}$, gdyż obcięcia jego lokalnych prezentacji do punktu,

$$(1.4.32) \quad T_x f := Tf \upharpoonright_{T_x M_1}, \quad x \in M_1,$$

są \mathbb{R} -liniowe – w rzeczy samej, wprowadziwszy w $T_x M_1 \cong \mathbb{R}^{\times n_1}$ oraz $T_{f(x)} M_2 \cong \mathbb{R}^{\times n_2}$ odnośne bazy:

$$(1.4.33) \quad \tau_a^1(x) := [(x, i, e_a)]_{\sim_{\text{Dtl.}}}, \quad a \in \overline{1, n_1}, \quad \tau_A^2(x) := [(x, i, e_A)]_{\sim_{\text{Dtl.}}}, \quad A \in \overline{1, n_2},$$

określone przy użyciu baz standardowych $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n_1}}$ w $\mathbb{R}^{\times n_1}$ i $\{e_A\}_{A \in \overline{1, n_2}}$ w $\mathbb{R}^{\times n_2}$ (patrz: Przykł. 13 (5)), a względem pierwszej z nich – rozkład dowolnego wektora stycznego ze wzoru (1.4.30) w postaci

$$V(x) = [(x, i, v^a \triangleright e_a)]_{\sim_{\text{Dtl.}}} \equiv v^a \triangleright \tau_a^1(x),$$

obliczamy

$$\begin{aligned}
 T_x f(V(x)) &\equiv T f_i([(x, i, v)]_{\sim_{\text{Dtl.}}}) = [(f(x), \phi(i), Df_i(\kappa_i^1(x))(v))]_{\sim} \\
 &\equiv Df_i(\kappa_i^1(x))_a^A v^a \triangleright \tau_A^2(x),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$Df_i(\kappa_i^1(x))(e_a) =: Df_i(\kappa_i^1(x))_a^A \triangleright e_A.$$

Zanim przejdziemy do zastosowań funktora stycznego w opisie odwzorowań różniczkowalnych, poczynimy dygresję skromną, a przy tym o tyle naturalną, że spowodowaną wcześniejszymi uwagami o strukturze \mathbb{R} -liniowej na włóknie wiązki

stycznej, które rodzą pytanie o strukturę dualną oraz wielo-dualną, czyli o przestrzeni form wieloliniowych, w szczególności zaś – form alternujących. Wnioski ze zwięzłej dyskusji tego zagadnienia znajdują zastosowanie w rozdziałach późniejszych. Przedstawiony poniżej schemat indukcji struktury różniczkowej jest zdeterminowany przez konstrukcję wiązki stycznej i jako taki stanowi kolejny przykład geometryzacji obiektu algebraicznego. Mamy zatem

DEFINICJA 67. Przyjmijmy zapis Def. 16 i 66. **Wiązka kostyczna** C^{k+1} -rozmaitości $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^*$, o atlasie $\widehat{\mathcal{A}} = \{\kappa_i\}_{i \in I}$ stowarzyszonym z pokryciem otwartym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, to C^k -rozmaitość $(T^*M, T^*\widehat{\mathcal{A}})$ utworzona, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$T^*M := \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{xn})^* \right) / \sim_{Dt^{-1}}$$

relacji

$$(x, i, \Phi) \sim (y, j, \Psi) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ \Psi = \Phi \circ Dt_{ij}(\kappa_j(x)) \equiv \Phi \circ D(t_{ji}^{-1})(\kappa_j(x)) \end{cases},$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{T^*M} : T^*M \longrightarrow M : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt^{-1}}} \longmapsto x,$$

zwane **rzutem kanonicznym (na bazę wiązki)**, którego poziomice

$$T_x^*M := \pi_{T^*M}^{-1}(\{x\})$$

noszą miano **włókien**;

- topologia zbioru T^*M jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektywnego rzutu

$$\pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{xn})^* \longrightarrow \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{xn})^* \right) / \sim_{Dt^{-1}} : (x, i, \Phi) \longmapsto [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt^{-1}}}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni $\mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{xn})^* \cong \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn}$, o injekcjach kanonicznych

$$J_i : \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{xn})^* \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times (\mathbb{R}^{xn})^* : (x, \Phi) \longmapsto (x, i, \Phi), \quad i \in I,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{F}(T^*M) := \left\{ \mathcal{O} \subset T^*M \mid \forall i \in I : J_i^{-1}(\pi_{\sim}^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{xn})^*) \right\};$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej T^*M określają (jawnie homeomorficzne) odwzorowania

$$T^*\kappa_i : \pi_{T^*M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \times (\mathbb{R}^n)^* : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt^{-1}}} \mapsto (\kappa_i(x), \Phi),$$

zwane **mapami naturalnymi**, które definiują transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} T^*t_{ji} := T^*\kappa_j \circ (T^*\kappa_i)^{-1} & : \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times (\mathbb{R}^n)^* \twoheadrightarrow \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times (\mathbb{R}^n)^* \\ & : (\kappa_i(x), \Phi) \mapsto (\kappa_j(x), \Phi \circ Dt_{ij}(\kappa_j(x))), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób należące do klasy C^k .

Klasę abstrakcji

$$\phi(x) := [(x, i, \Phi)]_{\sim_{\text{Dt}^{-1}}} \in \mathbb{T}_x^* M$$

określamy mianem **kowektora** zaczepionego w punkcie $x \in M$.

Analogicznie definiujemy – dla dowolnego $p \in \bar{1}$, $\dim M$ – **wiązkę p -form różniczkowych** na (M, \mathcal{A}) C^k -rozmaitość $(\wedge^p \mathbb{T}^* M, \wedge^p \mathbb{T}^* \mathcal{A})$ utworzoną, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$\wedge^p \mathbb{T}^* M := \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \right) / \sim_{\text{Dt}^{-p}}$$

relacji

$$(x, i, \Phi) \sim (y, j, \Psi) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ \Psi = \Phi \circ \times_{i=1}^p \text{Dt}_{ij}(\kappa_j(x)) \end{cases},$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{\wedge^p \mathbb{T}^* M} : \wedge^p \mathbb{T}^* M \longrightarrow M : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{\text{Dt}^{-1}}} \longmapsto x,$$

zwane **rzutem kanonicznym (na bazę wiązki)**, którego poziomice

$$\wedge^p \mathbb{T}_x^* M := \pi_{\wedge^p \mathbb{T}^* M}^{-1}(\{x\})$$

noszą miano **włókien**;

- topologia zbioru $\wedge^p \mathbb{T}^* M$ jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektywnego rzutu

$$\begin{aligned} \pi_{\sim} & : \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \longrightarrow \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \right) / \sim_{\text{Dt}^{-p}} \\ & : (x, i, \Phi) \longmapsto [(x, i, \Phi)]_{\sim_{\text{Dt}^{-1}}} \end{aligned}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni $\mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \cong \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$, o injekcjach kanonicznych

$$j_i : \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) : (x, \Phi) \longmapsto (x, i, \Phi), \quad i \in I,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{T}(\wedge^p \mathbb{T}^* M) := \left\{ \mathcal{O} \subset \wedge^p \mathbb{T}^* M \mid \forall i \in I : j_i^{-1}(\pi_{\sim}^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n})) \right\};$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej $\wedge^p \mathbb{T}^* M$ określają (jawnie homeomorficzne) odwzorowania

$$\wedge^p \mathbb{T}^* \kappa_i : \pi_{\wedge^p \mathbb{T}^* M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{\text{Dt}^{-1}}} \mapsto (\kappa_i(x), \Phi),$$

zwane **mapami naturalnymi**, które definiują transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \wedge^p \mathbb{T}^* t_{ji} := \wedge^p \mathbb{T}^* \kappa_j \circ (\wedge^p \mathbb{T}^* \kappa_i)^{-1} & : \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \twoheadrightarrow \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \\ & : (\kappa_i(x), \Phi) \mapsto (\kappa_j(x), \Phi \circ \times_{i=1}^p \text{Dt}_{ij}(\kappa_j(x))), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób należące do klasy C^k .

Klasę abstrakcji

$$\phi(x) := [(x, i, \Phi)]_{\sim_{D_{\tau^{-1}}}} \in \bigwedge^p \mathbb{T}_x^* M$$

określamy mianem ***p*-formy** zaczepionej w punkcie $x \in M$. ▲

UWAGA 19. Struktura różniczkowa wiązki kostycznej (a więc także wiązek *p*-form różniczkowych) jest w pełni zdeterminowana przez strukturę różniczkową wiązki stycznnej i wymóg dwoistości. Oto bowiem żądanie, iżby ewaluacja kowektora na wektorze stycznym wykorzystująca kanoniczną dwoistość $(\mathbb{R}^{x^n})^* \times \mathbb{R}^{x^n} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\langle \phi(x), V(x) \rangle := \langle \text{pr}_2 \circ \mathbb{T}^* \kappa_i(\phi(x)), \text{pr}_2 \circ \mathbb{T} \kappa_i(V(x)) \rangle_{\mathbb{R}^{x^n}},$$

była dobrze określona, tj. niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych w $x \in \mathcal{O}_{ij}$, implikuje wypisaną wyżej postać mapy naturalnej na $\pi_{\mathbb{T}^* M}^{-1}(\mathcal{O}_i)$,

$$\begin{aligned} \langle \text{pr}_2 \circ \mathbb{T}^* \kappa_j(\phi(x)), \text{pr}_2 \circ \mathbb{T} \kappa_j(V(x)) \rangle_{\mathbb{R}^{x^n}} &= \langle \Phi \circ D(t_{ji}^{-1})(\kappa_j(x)), Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v) \rangle_{\mathbb{R}^{x^n}} \\ &\equiv \Phi \circ D(t_{ji}^{-1})(\kappa_j(x)) \circ Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v) \\ &= \Phi(v) \equiv \langle \Phi, v \rangle_{\mathbb{R}^{x^n}} \\ &\equiv \langle \text{pr}_2 \circ \mathbb{T}^* \kappa_i(\phi(x)), \text{pr}_2 \circ \mathbb{T} \kappa_i(V(x)) \rangle_{\mathbb{R}^{x^n}}. \end{aligned}$$

I wreszcie na koniec końców wprowadzenia do geometrii stycznnej słowo o globalizacji ($A\pi\alpha\gamma\epsilon \Sigma\alpha\tau\alpha\nu\alpha\varsigma$?!) pojęć z natury swej lokalnych, jakimi są wektory i kowektory zaczepione w punkcie rozmaitości. Rzecz idzie o nadanie sensu postulatowi gładkości lokalnego, czy wręcz globalnego rozkładu takowych obiektów w pewnym rozciągniętym nośniku zawartym w M , czyli w istocie – o geometryzację pojęcia wektora i formy liniowej zgodną z zaproponowanym powyżej schematem geometryzacji pojęcia przestrzeni wektorowej i dualnej do niej. Ogólną metodę postępowania w przypadku przestrzeni topologicznych lokalnie modelowanych na (szczególnych) iloczynach kartezjańskich rozmaitości różniczkowalnych (zw. wiązkami włóknistymi) poznamy w Rozdz. 4.1, tymczasem jednak okazuje się, że aby Słowu temu odpowiednią dać Rzecz w obecnym kontekście, wystarczy przejść – w odwołaniu do konkretnej interpretacji geometrycznej rozpatrywanych tu struktur – od dotychczasowych definicji wektora stycznego (algebraicznej z Def. 66 i 67 oraz geometrycznej ze Stw. 93) do jego definicji analitycznej, niezwykle wygodnej z punktu widzenia późniejszych zastosowań pojęcia pierwotnego. Zaczniemy od

DEFINICJA 68. Przyjmijmy oznaczenia Def. 64. Niechaj $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ będzie $C^{k \geq 1}$ -rozmaitością. **Różniczkowanie w punkcie** $x \in M$ to odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe

$$V : C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

spełniające **warunek Leibniza**

$$\forall_{f, g \in C^1(M, \mathbb{R})} : V(f \cdot g) = V(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot V(g).$$

Zbiór różniczkowań w x wyposażony w punktową strukturę \mathbb{R} -liniową określamy mianem **przestrzeni różniczkowań w x** i oznaczamy jako

$$\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}).$$



Przerzucenie pomostu logicznego pomiędzy wprowadzonym tu nowym pojęciem a wcześniejszymi definicjami wektora stycznego, otwierające drogę do szeregu istotnych zastosowań, wymaga wzbogacenia naszego arsenału narzędzi różniczkowo-geometrycznych o prostą, acz przydatną konstrukcję funkcjonalną stanowiącą podstawę powszechnej w rozważaniach strukturalnych redukcji zagadnień globalnych do postaci lokalnej, pozwalającej na wykorzystanie lokalnego opisu współrzędniowego. Zaczniemy więc od

DEFINICJA 69. Przyjmijmy oznaczenia Def. 64. Niechaj $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ będzie C^k -rozmaitością i niech $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ będzie dowolnym pokryciem otwartym M . **Rozkład jedności klasy C^k podporządkowany \mathcal{O}** to rodzina $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ odwzorowań $\lambda_i \in C^k(M, [0, 1])$ spełniających następujące warunki:

- $\forall i \in I$: $\text{supp } \lambda_i \subset \mathcal{O}_i$, przy czym – przypomnijmy – dla dowolnej funkcji ciągłej $f \in C(M, \mathbb{R})$ zbiór $\text{supp } f$, zwany **nośnikiem** f , jest określony jako domknięcie przeciwobrazu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tj.

$$\text{supp } f := \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})};$$

- rodzina $\{\text{supp } \lambda_i\}_{i \in I}$ jest **lokalnie skończona**, tj. każdy punkt M ma otoczenie otwarte, na którym prawie wszystkie⁹ funkcje λ_i przybierają wartość 0;
- $\forall x \in M$: $\sum_{i \in I} \lambda_i(x) = 1$, przy czym wypisana tu suma ma sens (jest skończona) wobec poprzedniego założenia.

Ostatni z warunków oznacza, że rodzina $\{\text{Int supp } \lambda_i\}_{i \in I}$ stanowi lokalnie skończone podpokrycie \mathcal{O} .



Powyższa definicja byłaby bezużyteczna, gdyby nie

TWIERDZENIE 1.4.18 (O istnieniu rozkładu jedności). *Przyjmijmy oznaczenia Def. 64. Z dowolnym pokryciem otwartym C^k -rozmaitości parazwartej można stowarzyszyć rozkład jedności klasy C^k podporządkowany temu pokryciu.*



Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że w świetle Def. 58 *dowolne* otwarte pokrycie $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ rozmaitości $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ ma lokalnie skończone (otwarte) rozdrobnienie, możemy zatem zacząć od skonstruowania rozkładu jedności dla takiego lokalnie skończonego rozdrobnienia $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ pokrycia \mathcal{O} . Pokażemy najpierw, że pokrycie \mathcal{U} można zastąpić jego lokalnie skończonym (otwartym) rozdrobnieniem $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$ o własności

$$\forall i \in I : \overline{\mathcal{V}_i} \subset \mathcal{U}_i.$$

W tym celu każdemu punktowi $x \in M$ przyporządkujemy otwarte otoczenie $\mathcal{W}_x \ni x$ spełniające warunek

$$\exists i \in I : \mathcal{U}_i \supset \overline{\mathcal{W}_x}.$$

Rodzina $\{\mathcal{W}_x\}_{x \in M}$ jest otwartym rozdrobnieniem \mathcal{U} , dla którego z racji parazwartości M możemy wybrać lokalnie skończone otwarte rozdrobnienie $\mathcal{W}' \equiv \{\mathcal{W}'_j\}_{j \in J}$.

⁹Tj. wszystkie prócz skończonej liczby.

Dla dowolnego $i \in I$ definiujemy następnie podzbiór $J_i := \{ k \in J \mid \overline{W'_k} \subset \mathcal{U}_i \}$ zbioru indeksów pokrycia oraz zbiór otwarty

$$\mathcal{V}_i := \bigcup_{j \in J_i} \mathcal{W}'_j.$$

Założmy, że $\overline{\mathcal{V}_i} \setminus \mathcal{U}_i \ni x$, a wtedy wobec lokalnej skończoności \mathcal{W}' istnieje otwarte otoczenie $\mathcal{U}_x \ni x$ o własności

$$|\{ k \in J_i \mid \mathcal{U}_x \cap \mathcal{W}'_k \neq \emptyset \}| < \infty.$$

Wybrawszy tak określone otoczenie, oznaczmy

$$K_{\mathcal{U}_x; i} := \{ k \in J_i \mid \mathcal{U}_x \cap \mathcal{W}'_k \neq \emptyset \},$$

a następnie rozważmy zbiór otwarty

$$\mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i} := \mathcal{U}_x \setminus \bigcup_{k \in K_{\mathcal{U}_x; i}} \overline{W'_k},$$

który wprost z definicji spełnia warunek

$$\mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i} \cap \mathcal{V}_i = \emptyset.$$

Skoro też $x \notin \mathcal{U}_i$, to wobec inkluzji $\overline{W'_k} \subset \mathcal{U}_i$ słusznej dla dowolnego $k \in K_{\mathcal{U}_x; i} \subset J_i$ stwierdzamy, że $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i}$. Wtedy jednak zbiór $M \setminus \mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i}$ nie zawiera x , a zawiera \mathcal{V}_i , zatem – jako zbiór domknięty – zawiera także $\overline{\mathcal{V}_i}$. Wnioskujemy przeto, że $x \notin \overline{\mathcal{V}_i}$, co jest sprzeczne z początkowym założeniem. Stąd nieodzownie $\overline{\mathcal{V}_i} \setminus \mathcal{U}_i = \emptyset$, czyli – innymi słowy –

$$\overline{\mathcal{V}_i} \subset \mathcal{U}_i,$$

co jest postulowaną relacją.

W następnej kolejności dowodzimy, że dla dowolnego podzbioru domkniętego $\mathcal{C} \subset M$ i dowolnego otwartego otoczenia $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$ istnieje funkcja $f \in C^k(M, \mathbb{R}_{\geq 0})$ spełniająca warunki

$$(1.4.34) \quad f \upharpoonright_{M \setminus \mathcal{U}_{\mathcal{C}}} = 0 \quad \wedge \quad \forall x \in \mathcal{C} : f(x) > 0.$$

W tym celu przekonujemy się najpierw, że dla dowolnego $x \in M$ i dowolnego jego otwartego otoczenia $\mathcal{U}_x \ni x$ istnieje funkcja $f_{\mathcal{U}_x} \in C^k(M, [0, 1])$ o własnościach

$$f_{\mathcal{U}_x}(x) = 1 \quad \wedge \quad f_{\mathcal{U}_x} \upharpoonright_{M \setminus \mathcal{U}_x} = 0.$$

Istotnie, niechaj $\kappa : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{x_n}$, $n = \dim M$ będzie dowolną mapą atlasu $\widehat{\mathcal{A}}$, której dziedzina \mathcal{U} zawiera x , przy czym założymy (dokonując – jeśli zachodzi taka potrzeba – stosownej liniowej transformacji lokalnych współrzędnych, a mianowicie: translacji i jednorodnego przeskalowania), że $\kappa(x) = 0$ oraz $\kappa(\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}) \supset B^n(0; 2)$. Wówczas przykładem odwzorowania, o którym mowa powyżej, jest superpozycja $\lambda \circ \kappa =: f_{\mathcal{U}_x}$ mapy κ z **funkcją typu Uluru** określoną, jak następuje:

$$\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \gamma(\|x\|),$$

gdzie

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \frac{\int_x^2 dt \beta(t)}{\int_1^2 ds \beta(s)}, \quad \beta(t) := \alpha(t-1) \cdot \alpha(2-t)$$

jest zdefiniowane przy użyciu

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0 \end{cases}.$$

Wybermy teraz w każdym punkcie $x \in \mathcal{C}$ takie jego otoczenie \mathcal{U}_x , które jest zawarte w zadanym zbiorze $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$, po czym z każdego \mathcal{U}_x wydzielmy podotoczenie $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$, na którym znaleziona wcześniej funkcja $f_{\mathcal{U}_x}$ spełnia nierówność

$$\forall y \in \mathcal{V}_x : f_{\mathcal{U}_x}(y) > 0,$$

co jest możliwe, gdyż x należy do otwartego zbioru $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$ wraz z pewnym swoim otwartym otoczeniem, a wobec swej ciągłości funkcja $f_{\mathcal{U}_x}$ przyjmuje w otoczeniu x wartości bliskie 1. W konsekwencji domkniętości \mathcal{C} z jego otwartego pokrycia $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in \mathcal{C}}$ możemy – na mocy Stw. 66 – wybrać lokalnie skończone podpokrycie $\{\mathcal{V}_y\}_{y \in A \subset \mathcal{C}}$,

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{y \in A} \mathcal{V}_y,$$

a następnie zdefiniować funkcję

$$f := \sum_{y \in A} f_{\mathcal{U}_y},$$

która w każdym punkcie M jest dobrze określona, gdyż suma jest lokalnie skończona, a nadto spełnia warunki (1.4.34).

Z połączenia dotychczasowych obserwacji wyciągamy następujący wniosek: Stosując dwukrotnie procedurę rozdrabniania lokalnie skończonego pokrycia otwartego rozmaitości M , możemy uzyskać parę lokalnie skończonych otwartych rozdrobnień $\mathcal{V} \equiv \{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{W} \equiv \{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$ pokrycia \mathcal{U} spełniających relacje

$$\forall i \in I : \mathcal{W}_i \subset \overline{\mathcal{W}_i} \subset \mathcal{V}_i \subset \overline{\mathcal{V}_i} \subset \mathcal{U}_i,$$

a następnie dla każdego $i \in I$ wskazać funkcję $g_i \in C^k(M, \mathbb{R}_{\geq 0})$ o własnościach

$$g_i \upharpoonright_{M \setminus \mathcal{V}_i} = 0 \quad \wedge \quad \forall x \in \overline{\mathcal{W}_i} : g_i(x) > 0.$$

Jako że $\overline{\mathcal{W}_i} \subset \text{supp } g_i \subset \mathcal{U}_i$, a \mathcal{U} jest lokalnie skończone, suma $g := \sum_{i \in I} g_i$ jest wszędzie dobrze określona (skończona) jako funkcja klasy C^k , a ponieważ \mathcal{W} jest pokryciem M , przeto

$$\forall x \in M : g(x) > 0.$$

Możemy zatem zdefiniować funkcje

$$\lambda_i := \frac{g_i}{g} \in C^k(M, [0, 1]),$$

które spełniają wszystkie warunki z Def. 69.

Na koniec wykorzystamy $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ do skonstruowania rozkładu jedności dla wyjściowego pokrycia \mathcal{O} . W tym celu dla każdego $i \in I$ ustalamy – przywoławszy warunek (1.4.1) – indeks $\phi(i) \in A$ o własności $\mathcal{O}_{\phi(i)} \supset \mathcal{U}_i$, co określa odwzorowanie $\phi : I \rightarrow A : i \mapsto \phi(i)$. Następnie definiujemy funkcję

$$\rho_\alpha := \sum_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \lambda_i \in C^k(M; \mathbb{R}),$$

przy czym przyjmujemy konwencję, w której $\phi^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$ oznacza $\rho_\alpha = 0$. Wprost z konstrukcji

$$\text{supp } \rho_\alpha \subset \bigcup_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \text{supp } \lambda_i \subset \bigcup_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \mathcal{U}_i \subset \bigcup_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \mathcal{O}_{\phi(i)} = \mathcal{O}_\alpha$$

oraz

$$\forall x \in \mathcal{O}_\alpha : \rho_\alpha(x) \in [0, 1],$$

a nadto

$$\forall_{x \in M} : \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(x) \equiv \sum_{\alpha \in A} \sum_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \lambda_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i(x) = 1.$$

Wreszcie też stwierdzamy, że rodzina $\{\text{supp } \rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest lokalnie skończona. Istotnie, założmy, przeciwnie, że $x \in M$ jest punktem, na którego dowolnym otoczeniu nieskończenie wiele funkcji ρ_α przyjmuje wartość większą od 0. Każdej z nich odpowiada przynajmniej jedna funkcja λ_i , $i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})$, która nie znika w x , otrzymujemy zatem nieskończenie wiele funkcji λ_i o własności $\lambda_i(x) > 0$, co przeczy lokalnej skończoności rodziny $\{\text{supp } \lambda_i\}_{i \in I}$. Konstatujemy więc na koniec, że $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest pożądanym rozkładem jedności stowarzyszonym z (dowolnym) pokryciem otwartym \mathcal{O} . \square

Odwracając logikę powyższego dowodu, bez trudu otrzymujemy przydatne

STWIERDZENIE 95. *Przyjmijmy zapis Def. 69. Niechaj $\mathcal{C} \subset M$ będzie zbiorem domkniętym. Dla dowolnego otwartego otoczenia $\mathcal{O} \supset \mathcal{C}$ istnieje funkcja $f \in C^k(M; \mathbb{R})$ o własnościach*

$$\forall_{x \in \mathcal{C}} : f(x) = 1 \quad \wedge \quad \text{supp } f \subset \mathcal{O}.$$

Co więcej, jeśli dany jest dowolny punkt $p \in M \setminus \mathcal{C}$, to otoczenie \mathcal{O} oraz funkcję f można dobrać tak, ażeby był spełniony dodatkowy warunek

$$f(p) = 0.$$

■

Dowód: Rozważmy rozkład jedności $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ klasy C^k stowarzyszony z (lokalnie skończonym) pokryciem otwartym $\{\mathcal{O}_1 := \mathcal{O}, \mathcal{O}_2 := M \setminus \mathcal{C}\}$ rozmaitości M , którego istnienie gwarantuje Tw. 1.4.18. Kładąc $f := \lambda_1$, otrzymujemy $\text{supp } f \equiv \text{supp } \lambda_1 \subset \mathcal{O}_1 \equiv \mathcal{O}$, a nadto – wobec oczywistej tożsamości $\lambda_2|_{\mathcal{C}} = 0$ –

$$f|_{\mathcal{C}} \equiv \lambda_1|_{\mathcal{C}} = \left(\sum_{i \in \{1,2\}} \lambda_i \right)|_{\mathcal{C}} = 1|_{\mathcal{C}} = 1.$$

Jako \mathcal{O} można wybrać sumę mnogościową otwartych otoczeń \mathcal{O}_x punktów $x \in \mathcal{C}$ niezawierających p (ich istnienie zapewnia hausdorffowskość M),

$$\mathcal{O} := \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{O}_x, \quad \forall_{x \in \mathcal{C}} : \mathcal{O}_x \not\ni p,$$

a wtedy

$$\text{supp } f \equiv \text{supp } \lambda_1 \subset \mathcal{O}_1 \equiv \mathcal{O} \subset M \setminus \{p\}.$$

□

Prostej ilustracji przydatności rozkładu jedności, z której przyjdzie nam skorzystać już niebawem, dostarcza

STWIERDZENIE 96 (O rozszerzaniu funkcji). *Przyjmijmy oznaczenia Def. 69. Niechaj $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ będzie rozkładem jedności klasy C^k podporządkowanym pokryciu otwartemu $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ C^k -rozmaitości (M, \mathcal{A}) i niech $\{f_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną funkcji $f_i \in C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})$. Wówczas funkcja*

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{i \in \{j \in I \mid \mathcal{O}_j \ni x\}} \lambda_i(x) \cdot f_i(x)$$

jest klasy C^k . W szczególności dla dowolnego podzbioru $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M)$ oraz dowolnych: domkniętego $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$ oraz otwartego $\mathcal{U} \supset \mathcal{C}$ każda funkcja $f \in C^k(\mathcal{O}; \mathbb{R})$ ma rozszerzenie $\tilde{f} \in C^k(M; \mathbb{R})$ o własnościach

$$\tilde{f} \upharpoonright_{\mathcal{C}} = f \upharpoonright_{\mathcal{C}} \quad \wedge \quad \text{supp } \tilde{f} \subset \mathcal{U}.$$

■

Dowód: Celem wykazania pierwszej części tezy wystarczy zauważyć, że dowolną funkcję $\lambda_i \cdot f_i$ możemy rozszerzyć przez 0 na $M \setminus \text{supp } \lambda_i$, otrzymując tym sposobem funkcję klasy C^k , a następnie – wysumować wszystkie takie rozszerzenia, przy czym tak otrzymana suma f odwzorowań klasy C^k jest lokalnie skończona, więc dobrze określona.

Dla ustalonych $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$ oraz $\mathcal{U} \supset \mathcal{C}$ rozważmy indeksowaną przez $\mathcal{C} \ni x$ rodzinę otoczeń otwartych $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{U}$ oraz odnośnych funkcji (dowolnych) $f_x \in C^k(\mathcal{O}_x; \mathbb{R})$ o własności

$$f_x \upharpoonright_{\mathcal{O}_x \cap \mathcal{C}} = f \upharpoonright_{\mathcal{O}_x \cap \mathcal{C}}.$$

Rodzina $\{\mathcal{O}_x\}_{x \in \mathcal{C}} \cup \{\mathcal{O}_* := M \setminus \mathcal{C}\}$ jest pokryciem otwartym M , z którym w świetle Tw. 1.4.18 możemy stowarzyszyć rozkład jedności $\{\lambda_x\}_{x \in \mathcal{C}} \cup \{\lambda_*\}$ o własności $\text{supp } \lambda_i \subset \mathcal{O}_i$, $i \in \mathcal{C} \cup \{*\}$. Każdą z funkcji $f_x \cdot \lambda_x \upharpoonright_{\mathcal{O}_x} \in C^k(\mathcal{O}_x; \mathbb{R})$, $x \in \mathcal{C}$ możemy następnie rozszerzyć przez 0 do funkcji tej samej klasy C^k , kładąc jednocześnie $f_* := 0$, co pozwala określić – w odwołaniu do udowodnionej już pierwszej części tezy – zdefiniować funkcję

$$\begin{aligned} \tilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \sum_{z \in \{x \in \mathcal{C} \mid \mathcal{O}_x \ni y\}} \lambda_z(y) \cdot f_z(y) &\equiv \sum_{x \in \mathcal{C}} \lambda_x(y) \cdot f_x(y) \\ &\equiv \sum_{i \in \mathcal{C} \cup \{*\}} \lambda_i(y) \cdot f_i(y), \end{aligned}$$

przy czym pierwsza z wypisanych równości wynika wprost z implikacji

$$y \notin \mathcal{O}_x \supset \text{supp } \lambda_x \quad \implies \quad \lambda_x(y) = 0.$$

Biorąc $y \in \mathcal{C}$, wprost z konstrukcji funkcji f_x dostajemy $f_x(y) = f(y)$ dla wszystkich x o własności $\mathcal{O}_x \ni y$, a nadto $\lambda_*(y) = 0$ (wszak $y \in M \setminus \mathcal{O}_*$), co pozwala zapisać

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) &= \sum_{z \in \{x \in \mathcal{C} \mid \mathcal{O}_x \ni y\}} \lambda_z(y) \cdot f(y) \equiv \sum_{x \in \mathcal{C}} \lambda_x(y) \cdot f(y) = f(y) \cdot \sum_{x \in \mathcal{C}} \lambda_x(y) \\ &\equiv f(y) \cdot \sum_{i \in \mathcal{C} \cup \{*\}} \lambda_i(y) = f(y), \end{aligned}$$

czyli w istocie

$$\tilde{f} \upharpoonright_{\mathcal{C}} = f \upharpoonright_{\mathcal{C}}.$$

Zarazem jest oczywiste, że funkcja \tilde{f} jest tożsamościowo równa zero na dopełnieniu sumy mnogościowej nośników funkcji λ_x , $x \in \mathcal{C}$, czyli (tym bardziej) na dopełnieniu sumy mnogościowej zbiorów \mathcal{O}_x , te jednak zawierają się w \mathcal{U} , przeto niechybnie

$$\text{supp } \tilde{f} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{O}_x \subset \mathcal{U}.$$

□

Jako proste, acz pożyteczne corollarium do Stw. 95 i 96 dostajemy

STWIERDZENIE 97. *Przyjmijmy zapis Def. 68. Ilekroć istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_x \ni x$, na którym dwie funkcje $f_1, f_2 \in C^1(M; \mathbb{R})$ pokrywają się,*

$$\forall_{y \in \mathcal{O}_x} : f_1(y) = f_2(y),$$

zachodzi

$$\forall_{V \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R})} : V(f_1) = V(f_2).$$

■

Dowód: Wobec addytywności różniczkowań wystarczy sprawdzić słuszność implikacji

$$\forall_{y \in \mathcal{O}_x} : f(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall_{V \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R})} : V(f) = 0.$$

Odniosłszy tezę Stw. 95 do zbioru domkniętego $\mathcal{C} := \text{supp } f$ oraz punktu $p := x \in M \setminus \text{supp } f$, stwierdzamy istnienie otoczenia otwartego $\mathcal{O} \supset \text{supp } f$ oraz funkcji $\chi \in C^1(M; \mathbb{R})$ o własnościach

$$\forall_{y \in \text{supp } f} : \chi(y) = 1 \quad \wedge \quad \text{supp } \chi \subset \mathcal{O} \quad \wedge \quad \chi(x) = 0,$$

a zatem także

$$f \equiv f \cdot \chi.$$

Postulowana tożsamość staje się teraz prostą konsekwencją warunku Leibniza,

$$V(f) \equiv V(f \cdot \chi) = V(f) \cdot \chi(x) + f(x) \cdot V(\chi) = V(f) \cdot 0 + 0 \cdot V(\chi) = 0.$$

□

Mamy także oczekiwane

STWIERDZENIE 98. *Przyjmijmy zapis Def. 68. Dowolna funkcja $f \in C^1(\mathcal{O}; \mathbb{R})$ stała na pewnym otoczeniu otwartym $x \in M$ spełnia tożsamość*

$$\forall_{V \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R})} : V(f) = 0.$$

■

Dowód: Warunek Leibniza daje nam tożsamość (1 jest tutaj funkcją stałą przyjmującą wartość 1 na otoczeniu x)

$$V(1) \equiv V(1 \cdot 1) = V(1) \cdot 1 + 1 \cdot V(1) = 2V(1) \quad \Rightarrow \quad V(1) = 0,$$

która w połączeniu z \mathbb{R} -liniowością V daje – dla dowolnej (funkcji) stałej $c \in \mathbb{R}$ – równość

$$V(c) \equiv V(c \triangleright 1) = c \cdot V(1) = 0.$$

□

Możemy już teraz bez lęku w sercu powrócić do zasadniczego wątku naszych rozważań, jakim jest relacja między różniczkowaniami w punkcie rozmaitości i zaczepionymi w tymże punkcie wektorami do niej stycznymi. Relację tę określa

TWIERDZENIE 1.4.19. *Przyjmijmy oznaczenia Def. 68 i Stw. 92. Istnieje izomorfizm przestrzeni \mathbb{R} -liniowych*

$$\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{T}_x M.$$

Wynika zeń strukturalne utożsamienie (punkt po punkcie)

$$\text{Der } C^1(M, \mathbb{R}) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{T}M.$$

■

Dowód: Zaczniemy od określenia wygodnej bazy w $\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R})$. W tym celu wprowadźmy **pchnięcie różniczkowania wzdłuż odwzorowania** $F \in C^1(M, N)$ (określonego dla pary $C^{k \geq 1}$ -rozmaitości $M \ni x$ i N) jako odwzorowanie, jawnie \mathbb{R} -liniowe,

$$F_*^x : \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Der}_{F(x)} C^1(N, \mathbb{R}) : V \longmapsto V \circ F^*,$$

zapisane w terminach operacji **cofnięcia funkcji wzdłuż** F

$$F^* : C^1(N, \mathbb{R}) \longrightarrow C^1(M, \mathbb{R}) : f \longmapsto f \circ F.$$

Jest oczywistym, że ilekroć F jest dyfeomorfizmem (klasy C^1), odnośne pchnięcie F_*^x jest izomorfizmem przestrzeni \mathbb{R} -liniowych, oto bowiem pchnięcie wzdłuż F^{-1} w x jest obustronną odwrotnością F_*^x .

W następnej kolejności wykorzystamy wprowadzoną wcześniej technikę rozkładu jedności celem skonstruowania lokalnego modelu (analitycznej) stycznej w punkcie. Oto więc rozważmy włożenie $\iota_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \hookrightarrow M$ dowolnego podzbioru otwartego \mathcal{O} i wybierzmy (dowolnie) punkt $x \in \mathcal{O}$. Bez trudu przekonujemy się, iż pchnięcie wzdłuż odwzorowania $\iota_{\mathcal{O}}$ jest izomorfizmem przestrzeni różniczkowań

$$\iota_{\mathcal{O}*}^x : \text{Der}_x C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)} C^1(M, \mathbb{R}).$$

W rzeczy samej, odwzorowanie to jest iniektywne, a to na mocy Stw. 96, jeśli bowiem $V \in \ker \iota_{\mathcal{O}*}$, to rozszerzając dowolną funkcję $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ do funkcji $\tilde{f} \in C^1(M, \mathbb{R})$ pokrywającej się z f na domknięciu $\overline{\mathcal{O}_x}$ pewnego otoczenia otwartego \mathcal{O}_x punktu x , które wybieramy na tyle małym, aby był spełniony konieczny warunek $\overline{\mathcal{O}_x} \subset \mathcal{O}$ (co zawsze możemy osiągnąć, choćby wybierając jako \mathcal{O}_x przeciwobraz dostatecznie małej kuli otwartej względem lokalnej mapy na otoczeniu x), stwierdzamy, przywoławszy Stw. 97, że

$$V(f) = V(\tilde{f} \circ \iota_{\mathcal{O}}) \equiv \iota_{\mathcal{O}*}^x V(\tilde{f}) = 0,$$

czyli $V = 0$. Jest ono również surjektywne. Istotnie, rozważmy dowolne różniczkowanie $W \in \text{Der}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)} C^1(M, \mathbb{R})$. Możemy z nim stowarzyszyć odwzorowanie

$$\underline{W} : C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto W(\tilde{f}),$$

w którego definicji wykorzystujemy *dowolne* rozszerzenie f , tj. dowolną funkcję $\tilde{f} \in C^1(M, \mathbb{R})$ pokrywającą się z f na domknięciu $\overline{\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}}$ pewnego otoczenia otwartego $\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}$ punktu $\iota_{\mathcal{O}}(x)$, które wybieramy na tyle małym, aby był spełniony konieczny warunek $\overline{\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}} \subset \mathcal{O}$. Odwzorowanie to jest dobrze określone, tzn. nie zależy od wyboru rozszerzenia, jeśli bowiem \tilde{f}' jest innym rozszerzeniem, to różnica $\Delta := \tilde{f}' - \tilde{f}$ jest tożsamościowo równa zeru na (otwartym) przecięciu odnośnych otoczeń $\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}$, a zatem raz jeszcze na mocy Stw. 97

$$W(\tilde{f}') = W(\tilde{f}).$$

Wynik ten automatycznie implikuje liniowość \underline{W} , gdyż jako rozszerzenie kombinacji \mathbb{R} -liniowej $\lambda_1 \triangleright f_1 + \lambda_2 \triangleright f_2$ funkcji $f_1, f_2 \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ o współczynnikach $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ możemy zawsze wybrać kombinację liniową $\lambda_1 \triangleright \tilde{f}_1 + \lambda_2 \triangleright \tilde{f}_2$ odnośnych rozszerzeń, a następnie wykorzystać \mathbb{R} -liniowość W . Jest więc $\underline{W} \in \text{Der}_x C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, a przy tym dla dowolnej funkcji $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ zachodzi równość

$$(\iota_{\mathcal{O}*}^x \underline{W})(f) \equiv W(\widetilde{f \circ \iota_{\mathcal{O}}}) = W(f),$$

co daje nam pożądaną równość

$$\iota_{\mathcal{O}_*}^x W = W.$$

Łącząc dotychczasowe obserwacje, konstatujemy istnienie \mathbb{R} -liniowego izomorfizmu

$$\mathrm{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \xrightarrow[\iota_{\mathcal{O}_*}^x]{\cong} \mathrm{Der}_x C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \xrightarrow[\kappa_x^*]{\cong} \mathrm{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow[\iota_{\mathcal{U}_*}^{\kappa(x)}]{\cong} \mathrm{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R})$$

indukowanego przez dowolną mapę $\kappa : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ atlasu $\widehat{\mathcal{A}}$ na (dowolnym) otwartym otoczeniu \mathcal{O} punktu x – ta jest wszakże (tautologicznie) dyfeomorfizmem klasy C^k swej dziedziny na homeomorficzny z nią podzbiór $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{x^n}$. Na obecnym etapie wystarczy zatem wykazać istnienie izomorfizmu (czy – co na jedno wychodzi – równość wymiarów \mathbb{R} -liniowych) przestrzeni $\mathrm{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R})$ i $\mathbb{T}_x M$. W tym celu wyznaczmy naturalną bazę pierwszej z nich. Oznaczmy $\kappa(x) =: u_*$, wprowadźmy na \mathbb{R}^{x^n} standardowe współrzędne kartezjańskie (czyli funkcje współrzędniowe) y^i , $i \in \overline{1, n}$, w których $y \equiv (y^1, y^2, \dots, y^n)$, i przywołajmy treść Tw. 1.4.5 dla dowolnej funkcji $f \in C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R})$,

$$f(u_* + y) = f(u_*) + y^i \int_{[0,1];\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_* + \cdot \triangleright y).$$

Ewaluacja różniczkowania $V \in \mathrm{Der}_{u_*} C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R})$ na funkcji f daje zatem – wobec \mathbb{R} -liniowości V i spełnianego przezeń warunku Leibniza – wynik

$$\begin{aligned} V(f) &= V(f(u_*)) + V(y^i) \int_0^1 dt \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_* + t \triangleright 0) + 0 \cdot \int_0^1 dt V\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}(u_* + t \triangleright y)\right) \Big|_{y=0} \\ &= V(f(u_*)) + V(y^i) \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_*). \end{aligned}$$

Ten na gruncie Stw. 98 redukujemy do postaci

$$V(f) = V(y^i) \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_*),$$

która pokazuje dowodnie, iż różniczkowania

$$D_i : C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(u_*)$$

stanowią układ generujący dla przestrzeni $\mathrm{Der}_{u_*} C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R})$. O tym, że jest to układ liniowo niezależny, przekonujemy się natychmiast dokonując ewaluacji kombinacji \mathbb{R} -liniowej $\lambda^i \triangleright D_i = 0$ na funkcjach współrzędniowych i dostając tym sposobem oczekiwany wynik $\lambda^i = 0$, $i \in \overline{1, n}$. Mamy zatem antycypowaną równość

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R}) = n = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M,$$

ta zaś implikuje istnienie izomorfizmu (oraz globalnego utożsamienia), o którym mowa w treści dowodzonego twierdzenia. \square

Powyższe przeformułowanie opisu przestrzeni stycznej do rozmaitości w jej dowolnym punkcie otwiera drogę do dyskusji odwzorowań $M \rightarrow \mathbb{T}M$ o dowolnym stopniu gładkości, określonym lokalnie lub globalnie i ograniczonym w naturalny sposób przez stopień gładkości samej rozmaitości. Odwzorowania te stanowią poszukiwaną przez nas geometryzację algebraicznego pojęcia wektora. Możemy więc wprowadzić

DEFINICJA 70. Przyjmijmy oznaczenia Def. 66 i 68. **Pole wektorowe** na C^k -rozmaitości $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ to przyporządkowanie

$$\mathcal{V} : M \longrightarrow \mathrm{Der} C^1(M, \mathbb{R}) (\equiv \mathbb{T}M) : x \longmapsto \mathcal{V}(x) \in \mathrm{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}),$$

które kanonicznie określa \mathbb{R} -liniowe odwzorowanie

$$D_{\mathcal{V}} : C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^M : f \longmapsto (M \ni x \longmapsto \mathcal{V}(x)(f) \in \mathbb{R}),$$

zwane **różniczkowaniem wzdłuż** (lub **w kierunku**) \mathcal{V} . Dla dowolnego $l < k$ pole wektorowe \mathcal{V} nazywamy **różniczkowalnym klasy C^l na zbiorze** (otwartym) $S \subseteq M$, jeśli dla dowolnej lokalnej mapy $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{x^n}$ na otoczeniu \mathcal{O} dowolnego punktu $x \in S$ odwzorowania $D_{\mathcal{V}}x^i$, $i \in \overline{1, n}$ są funkcjami różniczkowalnymi klasy C^l na $\mathcal{O} \cap S$. Zbiór pól wektorowych klasy C^l na M , wyposażony w naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem $C^l(M, \mathbb{R})$, oznaczamy symbolami

$$\mathfrak{X}^l(M) \equiv \Gamma^l(TM),$$

dla przypadku¹⁰ $l = k$ rezerwując symbole

$$\mathfrak{X}(M) \equiv \Gamma(TM).$$

▲

Jedną z fundamentalnych operacji na polach wektorowych, z jakich przyjdzie nam korzystać w dalszej części kursu, jest ich transport stycznościowy wzdłuż dyfeomorfizmów. Opiszemy go w

DEFINICJA 71. Przyjmijmy zapis Def. 70 oraz dowodu Tw. 1.4.19 i niechaj $F : M_1 \longrightarrow M_2$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^{r+1} między C^k -rozmaitościami ($k > r$) $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$. **Pchnięcie (stycznościowe) pola wektorowego** na M_1 wzdłuż dyfeomorfizmu F to odwzorowanie

$$F_* : \mathfrak{X}^l(M_1) \longrightarrow \mathfrak{X}^{\min(l,r)}(M_2) : \mathcal{V} \longmapsto F_*^{F^{-1}(\cdot)}(\mathcal{V} \circ F^{-1}(\cdot)).$$

▲

UWAGA 20. Warto wypisać jawną postać lokalną pola pchniętego, używając do tego lokalnych map: $\kappa_2 \equiv (y^1, y^2, \dots, y^{n_2}) : \mathcal{O}_2 \rightsquigarrow \mathcal{U}_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{x^{n_2}})$, $n_2 = \dim M_2$ na otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_2 \ni F(m)$ oraz $\kappa_1 \equiv (x^1, x^2, \dots, x^{n_1}) : \mathcal{O}_1 \rightsquigarrow \mathcal{U}_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{x^{n_1}})$, $n_1 = \dim M_1$ na otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_1 \ni m$. Przywoławszy definicję pchnięcia różniczkowania (w punkcie) z dowodu Tw. 1.4.19, otrzymujemy – dla dowolnych $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^l(M_1)$ oraz $f \in C^1(M_2; \mathbb{R})$ –

$$\begin{aligned} (F_*\mathcal{V})(F(m))(f) &\equiv F_*^m(\mathcal{V}(m))(f) = \mathcal{V}(m)(f \circ F) \\ &= \mathcal{V}(m)(x^i) \frac{\partial(f \circ F \circ \kappa_1^{-1})}{\partial x^i}(\kappa_1(m)) \\ &= \mathcal{V}(m)(x^i) \frac{\partial(f \circ \kappa_2^{-1})}{\partial y^a}(\kappa_2(m)) \frac{\partial(y^a \circ F \circ \kappa_1^{-1})}{\partial x^i}(\kappa_1(m)), \end{aligned}$$

czyli

$$(F_*\mathcal{V})(F(m))(y^a) = \mathcal{V}(m)(x^i) \frac{\partial(y^a \circ F \circ \kappa_1^{-1})}{\partial x^i}(\kappa_1(m)),$$

co dowodnie pokazuje, że pchnięcie pola wektorowego stanowi naturalną adaptację odwzorowania stycznościowego (którego elementy macierzowe w naturalnej bazie współrzędniowej odnajdujemy po prawej stronie powyższej formuły). Odtąd będziemy (często) wymiennie stosować oba zapisy, dokonując *implicite* utożsamienia

¹⁰Nie ma sensu rozważać pól wektorowych o klasie gładkości C^l , $l > k$ na rozmaitości klasy C^k .

$\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{T}_x M$. Wymóg bijektywności F staje się oczywisty, kiedy przypomnimy sobie, że obrazem pola wektorowego ma być gładki rozkład nad całą przeciwdziedzina F (stąd potrzeba surjektywności) *jednoznacznie* określonych w każdym punkcie (stąd potrzeba injektywności) różniczkowań $C^1(M_2; \mathbb{R})$.

Jedną z podstawowych, a nader użytecznych własności operacji pchnięcia pola wektorowego opisuje

STWIERDZENIE 99. *Przyjmijmy zapis Def. 71 i i niechaj $F : M_1 \rightarrow M_2$ oraz $G : M_2 \rightarrow M_3$ będą odwzorowaniami klasy C^1 między C^k -rozmaitościami $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Zachodzi tożsamość*

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

■

Dowód: Wynika wprost z definicji pchnięcia pola wektorowego. □

Przedstawiony tu analityczny schemat konstrukcji pól wektorowych na rozmaitości pozwala bez trudu zidentyfikować nader istotną dodatkową strukturę na $\mathfrak{X}(M)$, o której mówi

DEFINICJA 72. Przyjmijmy zapis Def. 70. **Komutator pól wektorowych** to odwzorowanie dwuliniowe skośnie symetryczne

$$[\cdot, \cdot]_M : \mathfrak{X}^1(M) \times \mathfrak{X}^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}^0(M)$$

określone (jednoznacznie) przez warunek

$$\forall \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}^1(M) : D_{[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_M} = D_{\mathcal{V}_1} \circ D_{\mathcal{V}_2} - D_{\mathcal{V}_2} \circ D_{\mathcal{V}_1}.$$

Parę

$$(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot]_M)$$

określamy mianem **algebry pól wektorowych na M** .

▲

UWAGA 21. O sensowności powyższej definicji najłatwiej przekonać się w bezpośrednim rachunku przeprowadzonym na dziedzinie $\mathcal{O} \ni m$ lokalnej mapy $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $n = \dim M$, w której to nawias pól $\mathcal{V}_\alpha \in \mathfrak{X}^1(M)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o odnośnych wartościach $\mathcal{V}_\alpha(m) = \mathcal{V}_\alpha^i(m) \frac{\partial}{\partial x^i}(m)$, $\mathcal{V}_\alpha^i(m) \equiv \mathcal{V}_\alpha(m)(x^i)$ przybiera postać

$$[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_M(m) = \left(\mathcal{V}_1^j \circ \kappa^{-1} \frac{\partial(\mathcal{V}_2^i \circ \kappa^{-1})}{\partial x^j} - \mathcal{V}_2^j \circ \kappa^{-1} \frac{\partial(\mathcal{V}_1^i \circ \kappa^{-1})}{\partial x^j} \right) (\kappa(m)) \frac{\partial}{\partial x^i}(m). \quad (1.4.35)$$

Podstawową własność tej struktury, która obsadza ją w roli obiektu modelowego dla kategorii struktur opisanych w Rozdz. 1.5, nazywa

STWIERDZENIE 100. *Przyjmijmy zapis Def. 72. Odwzorowanie trójliniowe*

$$\text{Jac}_M : \mathfrak{X}^2(M) \times \mathfrak{X}^2(M) \times \mathfrak{X}^2(M) \rightarrow \mathfrak{X}^0(M)$$

$$: (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3) \mapsto [[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_M, \mathcal{V}_3]_M + [[\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_1]_M, \mathcal{V}_2]_M + [[\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3]_M, \mathcal{V}_1]_M,$$

*zwane **jakobiatorem pól wektorowych na M** , jest tożsamościowo równe zeru.*

■

Dowód: Trywialny rachunek bezpośredni w (dowolnej) prezentacji lokalnej. □

O naturalności wskazanej przez nas dodatkowej struktury algebraicznej w kategorii rozmaiłości różniczkowalnych zaświadcza

STWIERDZENIE 101. *Przyjmijmy zapis Def. 71 oraz 72 i niechaj $F : M_1 \rightarrow M_2$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^{r+1} między C^k -rozmaiściami ($k > r > 0$) $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Wówczas zachodzi tożsamość*

$$[\cdot, \cdot]_{M_2} \circ (F_* \times F_*) = F_* \circ [\cdot, \cdot]_{M_1}.$$

■

Dowód: Sprawdzamy prawdziwość postulowanej formuły lokalnie w otoczeniu punktów $F(m) \in M_2$ i $m \in M_1$, stosując notację jak w treści Uwagi 20, oznaczając $F_1 \equiv F \circ \kappa_1^{-1}$ oraz $f_2 \equiv f \circ \kappa_2^{-1}$ dla skrótu i przywołując po drodze Równ. 1.4.35. Niechaj $f \in C^1(M_2; \mathbb{R})$ i $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}^1(M_1)$, a wtedy

$$\begin{aligned} & [F_* \mathcal{V}_1, F_* \mathcal{V}_2]_{M_2}(F(m))(f) \\ &= [\mathcal{V}_1^k(m) \frac{\partial(y^j \circ F_1)}{\partial x^k}(\kappa_1(m)) \frac{\partial}{\partial y^j}(\mathcal{V}_2^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m)) \\ & \quad - \mathcal{V}_2^k(m) \frac{\partial(y^j \circ F_1)}{\partial x^k}(\kappa_1(m)) \frac{\partial}{\partial y^j}(\mathcal{V}_1^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m))] \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \\ &= [\mathcal{V}_1^k(m) \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{V}_2^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m)) \\ & \quad - \mathcal{V}_2^k(m) \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{V}_1^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m))] \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \\ &= [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{M_1}(m)(x^l) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\kappa_1(m)) \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \\ &\equiv (F_*[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{M_1})(F(m))(y^i) \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \equiv (F_*[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{M_1})(F(m))(f) \end{aligned}$$

□

UWAGA 22. W antycypacji dyskusji z Rozdz. 1.5, możemy zwięźle zreasumować powyższą dyskusję, jak następuje: przypisanie rozmaiłościom różniczkowalnym przestrzeni \mathbb{R} -liniowych pól wektorowych na nich, wraz z komutatorem pól wektorowych, a dyfeomorfizmom pomiędzy rozmaiściami – odnośnych pchnięć stycznościowych pól wektorowych to składowe – odpowiednio – obiektowa i morfizmowa funktora (kowariantnego) z (ograniczonej) kategorii rozmaiłości różniczkowalnych z dyfeomorfizmami jako morfizmami w kategorię rzeczywistych algebr Liego z izomorfizmami jako morfizmami.

Okazuje się, że transport nawiasu pól wektorowych jest możliwy w dużo ogólniejszej sytuacji, z którą będziemy mieli do czynienia w dalszej części kursu, a którą opisuje poniższa

DEFINICJA 73. Przyjmijmy zapis Def. 70 oraz dowodu Tw. 1.4.19 i niechaj $F : M_1 \rightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 między rozmaiściami $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ klasy C^{k_α} , $k_\alpha \geq 1$. Powiemy, że **para** $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ **pól wektorowych** $\mathcal{V}_\alpha \in$

$\mathfrak{X}^{l_\alpha}(M_\alpha)$, $l_\alpha \leq k_\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ jest w relacji określonej przez odwzorowanie różniczkowalne F , jeśli zachodzi tożsamość

$$F_*^{(\cdot)} \mathcal{V}_1(\cdot) = \mathcal{V}_2 \circ F.$$

▲

W opisanej tu sytuacji słusznym jest

STWIERDZENIE 102. *Przyjmijmy zapis Def. 72 oraz 73. Dla dowolnych dwóch par: $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ i $(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$ pól wektorowych (klasy C^1) w relacji określonej przez odwzorowanie $F \in C^2(M_1, M_2)$ między C^2 -rozmaitościami para pól wektorowych $([\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}, [\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2})$ również jest w takowej relacji, tj. zachodzi tożsamość*

$$F_*^{(\cdot)} [\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}(\cdot) = [\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2} \circ F.$$

■

Dowód: Zaczniemy od wyprowadzenia, w dowolnym punkcie $x \in M_1$ i dla dowolnej funkcji $f \in C^1(M_2; \mathbb{R})$, równości

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{V}_1}(f \circ F)(x) &\equiv \mathcal{V}_1(x)(f \circ F) = F_*^x \mathcal{V}_1(x)(f) = (\mathcal{V}_2 \circ F)(x)(f) \equiv D_{\mathcal{V}_2} f(F(x)) \\ &= (D_{\mathcal{V}_2} f) \circ F(x), \end{aligned}$$

czyli tożsamości funkcjonalnej

$$D_{\mathcal{V}_1}(f \circ F) = (D_{\mathcal{V}_2} f) \circ F,$$

i analogicznej tożsamości dla drugiej pary pól w relacji,

$$D_{\mathcal{W}_1}(f \circ F) = (D_{\mathcal{W}_2} f) \circ F.$$

Na ich podstawie obliczamy (rekursywnie), tym razem dla $f \in C^2(M_2; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} F_*^x [\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}(x)(f) &\equiv [\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}(x)(f \circ F) \\ &= D_{\mathcal{V}_1}(D_{\mathcal{W}_1}(f \circ F))(x) - D_{\mathcal{W}_1}(D_{\mathcal{V}_1}(f \circ F))(x) \\ &= D_{\mathcal{V}_1}((D_{\mathcal{W}_2} f) \circ F)(x) - D_{\mathcal{W}_1}((D_{\mathcal{V}_2} f) \circ F)(x) \\ &= (D_{\mathcal{V}_2}(D_{\mathcal{W}_2} f)) \circ F(x) - (D_{\mathcal{W}_2}(D_{\mathcal{V}_2} f)) \circ F(x) \\ &= (D_{\mathcal{V}_2}(D_{\mathcal{W}_2} f) - D_{\mathcal{W}_2}(D_{\mathcal{V}_2} f))(F(x)) \\ &\equiv [\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2}(F(x))(f) \equiv ([\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2} \circ F)(x)(f), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Z polami wektorowymi możemy w naturalny sposób stowarzyszać 1-wymiarowe podrozmaitości w ich nośniku, o czym mówi

DEFINICJA 74. Przyjmijmy oznaczenia Def. 70 oraz Przykł. 25 (1). Ustalmy (dowolnie) $l \leq k \in \mathbb{N}^\times$ oraz $a < b \in \mathbb{R}$ i niechaj $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ będzie **zwartą ścieżką różniczkowalną klasy C^l w M** , tj. ograniczeniem pewnego C^l -odwzorowania $\tilde{\gamma} : \mathcal{U} \rightarrow M$ określonego na otwartym podzbiórze $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_E(\mathbb{R})$

zawierającym $[a, b]$. **Wektorem stycznym do γ** (klasy C^1) w $\gamma(t_*)$, $t_* \in]a, b[$ nazywamy różniczkowanie w $\gamma(t_*)$ dane wzorem

$$\dot{\gamma}(t_*) : C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_*).$$

Niechaj teraz $\mathcal{V} \in \text{Der } C^1(M, \mathbb{R})$ będzie polem wektorowym na M . Ścieżkę γ określimy mianem **krzywej całkowej** (lub **trajektorii**) \mathcal{V} , jeśli spełnia warunek

$$(1.4.36) \quad \forall_{t \in]a, b[} : \dot{\gamma}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)).$$

▲

Mamy proste, acz istotne

STWIERDZENIE 103. *Przyjmijmy oznaczenia Def. 74 i niechaj $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^1(M)$. Przez dowolny punkt $x_* \in M$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa $\gamma_{x_*} : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$, zdefiniowana dla pewnego $\varepsilon > 0$, spełniająca warunek początkowy $\gamma_{x_*}(0) = x_*$. Przy tym jeśli $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^l(M)$, $l \in \mathbb{N}$, to krzywa ta jest klasy $C^{\min(l+1, k)}$.*

■

Dowód: W lokalnym układzie współrzędnych $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $n = \dim M$ na pewnym otoczeniu $\mathcal{O} \ni x_*$ krzywa całkowa pola \mathcal{V} przechodząca przez x_* jest (lokalnie) prezentowana przez odwzorowanie $(\gamma_{x_*}^i \equiv x^i \circ \gamma_{x_*}) \in C([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R}^{x^n})$ będące rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{x_*}^i}{dt}(t) &\equiv \frac{d(x^i \circ \gamma_{x_*})}{dt}(t) \equiv \dot{\gamma}_{x_*}(t)(x^i) = \mathcal{V}(\gamma_{x_*}(t))(x^i) \equiv D_{\mathcal{V}}(x^i)(\gamma_{x_*}(t)), \\ \gamma_{x_*}^i(0) &= x^i(x_*), \quad i \in \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Wobec lokalnej lipschitzowskości odwzorowań $D_{\mathcal{V}}(x^i)$ (tj. ich lipschitzowskości na zwartych podzbiorach dziedziny, wynikającej z ich ciągłej różniczkowalności, por. Stw. 90), Tw. 1.4.10 przesądza o lokalnym istnieniu jedynego rozwiązania powyższego zagadnienia, co wobec homeomorficzności lokalnego układu współrzędnych kończy dowód stwierdzenia. Stwierdzenie dotyczące klasy różniczkowalności γ_{x_*} jest oczywistą konsekwencją Tw. 1.4.16 oraz struktury zagadnienia początkowego. Istotnie, w dowodzie rzeczonego twierdzenia, w którym stopień gładkości l zależności potoku (zagadnienia autonomicznego, z jakim mamy tutaj do czynienia) od obu zmiennych został wyznaczony w jednym kroku, bez rozdzielania tych zmiennych. Przywoławszy rekursywny argument z tegoż dowodu do definiującego potok Równ. (1.4.36), stwierdzamy, że gładkość klasy C^l zależności krzywej całkowej od czasu t oznacza (wobec tego samego stopnia gładkości pola wektorowego), że $\dot{\gamma}_{x_*}$ jest klasy C^l , zatem ostatecznie γ_{x_*} jest klasy $C^{\min(l+1, k)}$ (ograniczenie górne k na stopień gładkości ścieżek w M wynika z założenia o stopniu gładkości transformacji współrzędniowych na M). Jest przy tym oczywistym, że stopień gładkości \mathcal{V} nie pozwala poprowadzić przedstawionego tu argumentu dalej. □

Ostatnie stwierdzenie pozwala nam wprowadzić przydatne pojęcie globalne:

DEFINICJA 75. Przyjmijmy oznaczenia Def. 74 oraz Tw. 1.4.13 i niechaj dla dowolnego $x \in M$ przedział otwarty $I_{\mathcal{V}}(x) \subset \mathbb{R}$ będzie maksymalnym, w rozumieniu Stw. 1.4.12, dla którego jest określone jednoznacznie rozwiązanie γ_x zagadnienia początkowego dla pola wektorowego \mathcal{V} (klasy C^l , $l \leq k$) zdefiniowanego w treści

Stw. 103. Zdefiniujemy **dziedzinę całkowalności pola wektorowego** \mathcal{V}

$$\mathcal{D}_{\mathcal{V}} := \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_{\mathcal{V}}(x) \} \equiv \bigsqcup_{x \in M} I_{\mathcal{V}}(x),$$

por. Równ. (1.4.23). **Potok pola wektorowego** \mathcal{V} to odwzorowanie

$$\Phi_{\mathcal{V}} : \mathcal{D}_{\mathcal{V}} \longrightarrow M : (t, x) \longmapsto \gamma_x(t) \equiv \Phi_{\mathcal{V}}(t, x),$$

które w zgodzie z Tw. 1.4.16 i Stw. 103 jest klasy $C^{\min(l+1, k)}$ w pierwszym i klasy C^l w drugim argumentcie.

Pole wektorowe o dziedzinie całkowalności $\mathcal{D}_{\mathcal{V}} = \mathbb{R} \times M$ nazywamy **zupełnym**. ▲

Zwieńczeniem naszych dotychczasowych wysiłków zmierzających do możliwie precyzyjnego zrozumienia zależności między stopniem gładkości pola wektorowego i stopniem gładkości jego potoku, dokumentującym – *a posteriori* – zapowiadaną wcześniej fundamentalną rolę pól wektorowych w (lokalnym) opisie symetrii struktur różniczkowych i tym samym wskazującym kontekst ich przyszłego zastosowania w dyskusji problemów umotywowanych fizykalnie, jest relacja między polami wektorowymi a (lokalnymi) grupami (lokalnych) dyfeomorfizmów na rozmaitościach różniczkowalnych, którą bez trudu wywiedziemy z wcześniejszych dociekań w odwołaniu do poniższej

DEFINICJA 76. Przyjmijmy zapis Def. 64 i ustalmy $l \leq k \in \mathbb{N}^{\times}$ oraz $\varepsilon > 0$, a następnie oznaczmy $I_{\varepsilon} :=] - \varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}$. **Lokalna jednoparametrowa grupa lokalnych dyfeomorfizmów klasy C^l na zbiorze $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M)$ o skali ε to rodzina**

$$\text{Diff}_{\mathcal{O}, \varepsilon}^l(M) := \{ \mathcal{G} : I_{\varepsilon} \times \mathcal{O} \longrightarrow M \} \subset C^l(I_{\varepsilon} \times \mathcal{O}; M),$$

indeksowana przez przedział otwarty I_{ε} , odwzorowań spełniających następujące aksjomaty

$$\text{(LD1)} \quad \forall t \in I_{\varepsilon} : \mathcal{G}_t \in \text{Diff}^l(\mathcal{O}, \mathcal{G}_t(\mathcal{O}));$$

$$\text{(LD2)} \quad \mathcal{G}_0 = \text{id}_{\mathcal{O}};$$

$$\text{(LD3)} \quad \forall t_1, t_2 \in I_{\varepsilon}, x \in \mathcal{O} : \left((t_1 + t_2 \in I_{\varepsilon} \wedge \mathcal{G}_{t_1}(x) \in \mathcal{O}) \implies \mathcal{G}_{t_2+t_1}(x) = \mathcal{G}_{t_2} \circ \mathcal{G}_{t_1}(x) \right).$$

W przypadku $\varepsilon \rightarrow \infty$ mówimy o **jednoparametrowej grupie lokalnych dyfeomorfizmów klasy C^l na zbiorze \mathcal{O}** , a w przypadku $\mathcal{O} = M$ – o **lokalnej jednoparametrowej grupie dyfeomorfizmów klasy C^l rozmaitości M** . Wreszcie ilekroć $\varepsilon \rightarrow \infty$ i $\mathcal{O} = M$, używamy określenia **jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów klasy C^l** . ▲

UWAGA 23. Powyższa definicja wymaga kilku słów komentarza. Po pierwsze zauważmy, że aksjomat (LD3) ma charakter konstruktywny (tj. zawsze istnieją nietrywialne dyfeomorfizmy $\mathcal{G}_{t_2}, \mathcal{G}_{t_1}$, $t_1, t_2 \neq 0$, które można składać), gdyż wobec założonej ciągłości \mathcal{G} istnieją nietrywialne dyfeomorfizmy dowolnie bliskie $\text{id}_{\mathcal{O}}$, a przy tym wobec otwartości \mathcal{O} każdy punkt poddawany przekształceniu należy do \mathcal{O} wraz z pewnym swoim otwartym otoczeniem, można więc zawsze tak dobrać $t \in I_{\varepsilon}$, aby obraz tego punktu pozostawał w rzeczonym otoczeniu. Po drugie godzi się podkreślić, że mamy tu do czynienia ze wspomnianą wcześniej „świnką morską”, gdyż poza przypadkiem $\varepsilon \rightarrow \infty$ i $\mathcal{O} = M$ superpozycja odwzorowań nie zadaje

na $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$ struktury grupy (z odwrotnością $\mathcal{G}_t \mapsto \mathcal{G}_{-t}$ i jednością \mathcal{G}_0). Napotkaną tu strukturę określa się czasem mianem **grupy częściowej**. I wreszcie w przypadku $\mathcal{O} = M$ aksjomat (LD1) jest konsekwencją dwóch pozostałych, oto bowiem $t \in I_\varepsilon$ implikuje $-t \in I_\varepsilon$ oraz $\mathcal{G}_t(\mathcal{O}), \mathcal{G}_{-t}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$, możemy przeto obliczyć

$$\mathcal{G}_t \circ \mathcal{G}_{-t} = \mathcal{G}_{t+(-t)} = \mathcal{G}_0 = \text{id}_M$$

oraz

$$\mathcal{G}_{-t} \circ \mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{-t+t} = \mathcal{G}_0 = \text{id}_M,$$

skąd wniosek, że

$$\mathcal{G}_{-t} = \mathcal{G}_t^{-1}.$$

Możemy już teraz wypowiedzieć kluczowe

TWIERDZENIE 1.4.20. *Przyjmijmy oznaczenia Def. 70 i 76 oraz dowodu Tw. 1.4.19. Każda lokalna jednoparametrowa grupa lokalnych dyfeomorfizmów $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$ klasy C^l na dowolnym podzbiornie otwartym $\mathcal{O} \subseteq M$ C^k -rozmaitości ($k \geq l$) (M, \mathcal{A}) indukuje pole wektorowe klasy C^{l-1} na \mathcal{O} , którego krzywymi całkowymi są orbity grupy, przy czym zaindukowane pole jest **lokalnie** $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$ -niezmiennicze, tj. spełnia warunek*

$$(1.4.37) \forall_{s \in I_\varepsilon, x \in \mathcal{O}} : \left(\mathcal{G}_s(x) \in \mathcal{O} \implies \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_s(x)) = \mathcal{G}_{s*}^x(\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)) \right).$$

I odwrotnie, niechaj \mathcal{V} będzie dowolnym (lokalnym) polem wektorowym klasy C^l na dowolnym podzbiornie otwartym $\mathcal{U} \subseteq M$. W dowolnym punkcie $x \in \mathcal{U}$ z polem \mathcal{V} można stowarzyszyć lokalną jednoparametrową grupę lokalnych dyfeomorfizmów $\text{Diff}_{\mathcal{O}_x;\varepsilon_x}^l(M)$ na pewnym otwartym otoczeniu $\mathcal{O}_x \ni x$, która indukuje to pole. ■

Dowód: Rozważmy lokalną jednoparametrową grupę $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$ lokalnych dyfeomorfizmów klasy C^l na zbiorze otwartym $\mathcal{O} \subset M$. Określa ona (lokalne) pole wektorowe

$$\mathcal{V}_{\mathcal{G}} : \mathcal{O} \longrightarrow \text{Der } C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) : x \longmapsto \left(C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \ni f \longmapsto \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_t(x) \in \mathbb{R} \right).$$

Istotnie, przyporządkowanie

$$C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \ni f \longmapsto \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_t(x) \in \mathbb{R}$$

jest jawnie \mathbb{R} -liniowe, a nadto dla dowolnych $f, g \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(f \cdot g) &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (f \circ \mathcal{G}_t(x) \cdot g \circ \mathcal{G}_t(x)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (f \circ \mathcal{G}_t(x)) \cdot g \circ \mathcal{G}_0(x) + f \circ \mathcal{G}_0(x) \cdot \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (g \circ \mathcal{G}_t(x)) \\ &= \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(g), \end{aligned}$$

czyli spełniony jest warunek Leibniza. W celu wyznaczenia klasy gładkości $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ różniczkujemy w jego kierunku składową κ^i dowolnej lokalnej mapy $\kappa : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}$ na otoczeniu \mathcal{U} punktu x ,

$$D_{\mathcal{V}_{\mathcal{G}}} \kappa^i \equiv \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(\kappa^i) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \kappa^i \circ \mathcal{G}_t(x).$$

Zależność argumentu odwzorowania κ^i klasy C^k od pary (t, x) jest na mocy założenia klasy C^l , $l \leq k$, przeto $D_{\mathcal{V}_{\mathcal{G}}} \kappa^i$, czyli także (wprost z definicji) $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$, jest

klasy C^{l-1} . W następnej kolejności przekonujemy się, że dla dowolnego punktu $x \in \mathcal{O}$ przechodząca przezeń ścieżka $\gamma_x : I_\varepsilon \rightarrow M : t \mapsto \mathcal{G}_t(x)$ jest krzywą całkową \mathcal{V}_G . Istotnie, dla dowolnej funkcji $f \in C^1(\mathcal{O}; \mathbb{R})$ obliczamy (na gruncie Def. 74 i 76)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x(s)(f) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=s} f \circ \gamma_x(t) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=s} f \circ \mathcal{G}_t(x) = \frac{d}{du} \upharpoonright_{u=0} f \circ \mathcal{G}_{u+s}(x) \\ &= \frac{d}{du} \upharpoonright_{u=0} f \circ \mathcal{G}_u(\mathcal{G}_s(x)) \equiv \frac{d}{du} \upharpoonright_{u=0} f \circ \mathcal{G}_u(\gamma_x(s)) \equiv \mathcal{V}_G(\gamma_x(s))(f), \end{aligned}$$

a stąd – wobec dowolności f – wynika już pożądana relacja

$$\dot{\gamma}_x(s) = \mathcal{V}_G(\gamma_x(s)).$$

Na koniec sprawdzamy słuszność relacji (1.4.37). Poczynione założenia pozwalają skorzystać z aksjomatu (LD3), co daje

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_G(\mathcal{G}_s(x))(f) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_t(\mathcal{G}_s(x)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_{t+s}(x) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_s \circ \mathcal{G}_t(x) \\ &= \mathcal{V}_G(x)(f \circ \mathcal{G}_s) \equiv \mathcal{V}_G(x)(\mathcal{G}_s^* f) \equiv (\mathcal{G}_{s*}(\mathcal{V}_G(x)))(f). \end{aligned}$$

Odwracając tok poprzedniego rozumowania, rozważmy dowolne lokalne pole wektorowe $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^l(\mathcal{O})$. Wybrawszy (dowolnie) punkt $x \in \mathcal{O}$ oraz lokalną mapę $\kappa = (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{R}^{x^n}$ na pewnym jego otoczeniu $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}$, wnioskujemy na gruncie Tw. 1.4.10, że na dowolnym zwartym podzbiorniku $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_x$ zawierającym x możemy globalnie określić stałą $\varepsilon_{\mathcal{K}} > 0$ o tej własności, że dla dowolnego $y \in \mathcal{K}$ zagadnienie początkowe

$$\dot{\gamma}_y(t) = \mathcal{V}(\gamma_y(t)), \quad \gamma_y(0) = y$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, o ile $t \in]-\varepsilon_{\mathcal{K}}, \varepsilon_{\mathcal{K}}[=: I_{\varepsilon_{\mathcal{K}}}$, przy czym zależność owego rozwiązania od danej początkowej $y \in \mathcal{K}$ jest klasy C^l . Tym samym otrzymujemy (ograniczony) potok $\Phi_{\mathcal{V}} \upharpoonright_{I_{\varepsilon_{\mathcal{K}}} \times \mathcal{K}}$ pola \mathcal{V} na $I_{\varepsilon_{\mathcal{K}}} \times \mathcal{K}$ klasy C^l . Ponadto wobec ciągłości potoku oraz jego (współdefiniującej) własności

$$\Phi_{\mathcal{V}}(0, \cdot) = \text{id}_{\mathcal{K}}$$

możemy zawsze dobrać $\varepsilon_x \leq \varepsilon_{\mathcal{K}}$ oraz podzbiór otwarty $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{K}$ będący otoczeniem punktu x tak, by był spełniony warunek

$$(1.4.38) \quad \forall_{(t,y) \in I_{\varepsilon_x} \times \mathcal{O}_x} : \Phi_{\mathcal{V}}(t, y) \in \mathcal{K}.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$\mathcal{G}^{\mathcal{V}} := \Phi_{\mathcal{V}} \upharpoonright_{I_{\varepsilon_x} \times \mathcal{O}_x} : I_{\varepsilon_x} \times \mathcal{O}_x \rightarrow M : (t, y) \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}(t, y) \equiv \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}(y).$$

Warunek (1.4.38) pozwala rozważać złożenia $\mathcal{G}_s^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}$ dla $s, t \in I_{\varepsilon_x}$. Zdefiniujemy ścieżkę (różniczkowalną klasy C^l)

$$\Gamma_{y;s} : I_{\varepsilon_x} \rightarrow M : t \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}(t+s, y).$$

Bez trudu sprawdzamy w bezpośrednim rachunku

$$\dot{\Gamma}_{y;s}(t) \equiv \frac{d}{dt} \Phi_{\mathcal{V}}(t+s, y) = \frac{d}{d\xi} \upharpoonright_{\xi=t+s} \Phi_{\mathcal{V}}(\xi, y) = \mathcal{V}(\Phi(t+s, y)) \equiv \mathcal{V}(\Gamma_{y;s}(t)),$$

że ścieżka ta jest krzywą całkową \mathcal{V} wychodzącą z punktu

$$\Gamma_{y;s}(0) = \Psi(s, y).$$

Ale krzywą taką jest także – wprost z definicji –

$$\gamma_{\Psi(s,y)} : I_{\varepsilon_x} \rightarrow M : t \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}(t, \Phi_{\mathcal{V}}(s, y)),$$

co w świetle jednoznaczności rozwiązania rozważanego tu zagadnienia początkowego oznacza równość

$$(1.4.39) \quad \forall t \in I_{\varepsilon_x} : \Phi_{\mathcal{V}}(t+s, y) \equiv \Gamma_{y;s}(t) = \gamma_{\Psi(s,y)}(t) \equiv \Phi_{\mathcal{V}}(t, \Phi_{\mathcal{V}}(s, y)),$$

którą możemy przepisać w terminach odwzorowań $\mathcal{G}^{\mathcal{V}}$ w znajomej postaci

$$\forall t \in I_{\varepsilon_x} : \mathcal{G}_{t+s}^{\mathcal{V}}(y) = \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_s^{\mathcal{V}}(y).$$

W szczególności dla $s = -t$ (co jest wyborem dozwolonym wobec symetryczności I_{ε_x} względem 0) zachodzi

$$\forall t \in I_{\varepsilon_x} : \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_{-t}^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_{t+(-t)}^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_0^{\mathcal{V}} = \text{id}_{\mathcal{O}_x} \equiv \mathcal{G}_0^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_{-t+t}^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_{-t}^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}},$$

to zaś każe nam skonstatować, że każde z odwzorowań $\mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}$, $t \in I_{\varepsilon_x}$ jest dyfeomorfizmem \mathcal{O}_x na odnośny obraz $\mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}(\mathcal{O}_x) \subset \mathcal{K}$. Na koniec zauważamy, że $\mathcal{G}^{\mathcal{V}}$ w oczywisty sposób indukuje pole \mathcal{V} według opisanego wcześniej schematu, i tym samym kończymy dowód. \square

Powyższe twierdzenie, które nadaje głębszy geometryczny sens założeniu o gładkości rozkładu wektorów w wiązce stycznej nad rozmaitością, znajdzie istotne zastosowania w analizie geometrii grup Liego w Rozdz. 1.5, jak również w studiach nad symetrami modeli fizykalnych w rozdziałach późniejszych.

Tymczasem teraz dokonamy przetransponowania przedstawionego tu punktu widzenia na pojęcie gładkości (równoważnego innym, nierzadko wymagającym dostrzeżenia wyższej struktury różniczkowo-geometrycznej na rozmaitości TM) na odwzorowania z M w wiązki p -form różniczkowych, wprowadzone w Def. 67. Podążając tym tropem napotykamy

DEFINICJA 77. Przyjmijmy oznaczenia Def. 67 i 68. **Pole p -form** na C^k -rozmaitości (M, \mathcal{A}) wymiaru $n := \dim M \geq p$ to przyporządkowanie

$$\omega : M \longrightarrow \bigwedge^p \Gamma^* M : x \longmapsto \omega(x) \in \left(\bigwedge^p \Gamma^* M \right)_x,$$

które kanonicznie określa p -liniowe odwzorowanie alternujące

$$\langle \omega, \cdot \rangle : \times_{i=1}^p \mathfrak{X}^l(M) \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

$$: (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_p) \longmapsto \left(M \ni x \longmapsto \omega(x)(\mathcal{V}_1(x), \mathcal{V}_2(x), \dots, \mathcal{V}_p(x)) \in \mathbb{R} \right),$$

zwane **ewaluacją pola p -form** na polach wektorowych \mathcal{V}_i , $i \in \overline{1, p}$. Na oznaczenie ewaluacji, także w punkcie, będziemy także (wymienne) używać symboli

$$\langle \omega, (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle \equiv \mathcal{V}_p \lrcorner \mathcal{V}_{p-1} \lrcorner \dots \lrcorner \mathcal{V}_1 \lrcorner \omega \equiv \iota_{\mathcal{V}_p} \iota_{\mathcal{V}_{p-1}} \dots \iota_{\mathcal{V}_1} \omega.$$

Dla dowolnego $l < k$ pole p -form ω nazywamy **różniczkowalnym klasy C^l na zbiorze** (otwartym) $S \subseteq M$, jeśli dla dowolnej lokalnej mapy $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{x^n}$ na otoczeniu \mathcal{O} dowolnego punktu $x \in S$ zdefiniowane powyżej odwzorowania $\langle \omega, (\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}) \rangle$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ są funkcjami różniczkowalnymi klasy C^l na $\mathcal{O} \cap S$. Zbiór pól p -form klasy C^l na M , wyposażony w naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem $C^l(M, \mathbb{R})$, oznaczamy symbolami

$$\Omega_{(l)}^p(M) \equiv \Gamma^l \left(\bigwedge^p \Gamma^* M \right),$$

dla przypadku $l = k$ rezerwując symbole

$$\Omega^p(M) \equiv \Gamma \left(\bigwedge^p \Gamma^* M \right).$$

Na potrzeby przyszłych naszych rozważań wprowadzamy także oznaczenia

$$\Omega_{(l)}^0(M) \equiv C^l(M, \mathbb{R}),$$

oraz

$$\Omega^0(M) \equiv C^k(M, \mathbb{R}).$$

Moduł

$$\Omega_{(l)}^\bullet(M) := \bigoplus_{p=0}^n \Omega_{(l)}^p(M)$$

nad pierścieniem $C^l(M, \mathbb{R})$ nazywamy **modułem form różniczkowych** klasy C^l na M . W przypadku $l = \infty$ stosujemy zapis

$$\Omega^\bullet(M) \equiv \Omega_{(\infty)}^\bullet(M).$$

▲

Moduł form różniczkowych na rozmaitości jest wyposażony w naturalną dodatkową strukturę algebraiczną. Poniżej przypominamy ją w sposób dopasowany do jej konkretnych standardowych zastosowań praktycznych. Już niebawem poddamy ją formalizacji, która pozwoli na rozszerzenie zakresu zastosowań i zarazem umieści formy różniczkowe w szerszym kontekście algebraicznym. Zaczynamy od określenia naturalnego mnożenia na przestrzeni form, stanowiącego prostą geometryzację wprowadzonej wcześniej operacji dwuliniowej na formach wieloliniowych alternujących.

DEFINICJA 78. Przyjmijmy zapis Def. 77 oraz Stw. 5. **Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych** to odwzorowanie dwu- $C^l(M, \mathbb{R})$ -liniowe

$$\wedge : \Omega_{(l)}^\bullet(M) \times \Omega_{(l)}^\bullet(M) \longrightarrow \Omega_{(l)}^\bullet(M)$$

o ograniczeniach – określonych dla dowolnych $p_1, p_2 \in \overline{1, n}$ –

$$\forall_{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_{(l)}^{p_1}(M) \times \Omega_{(l)}^{p_2}(M)} \forall_{x \in M} : (\omega_1 \wedge \omega_2)(x) := \omega_1(x) \wedge_{p_1, p_2} \omega_2(x)$$

oraz

$$\forall_{(f, \omega) \in \Omega_{(l)}^0(M) \times \Omega_{(l)}^{p_2}(M)} \forall_{x \in M} : (f \wedge \omega)(x) := f(x) \cdot \omega(x).$$

▲

Podstawowe własności iloczynu zewnętrznego opisuje

STWIERDZENIE 104. *Przyjmijmy zapis Def. 78 i ustalmy (dowolnie) $p_1, p_2, p_3 \in \overline{0, n}$ oraz $\omega_\alpha \in \Omega_{(l)}^{p_\alpha}(M)$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$. Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych spełnia tożsamości:*

$$\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{p_1 p_2} \omega_1 \wedge \omega_2$$

oraz

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3).$$

■

Dowód: Oczywista konsekwencja Stw. 5. □

W następnej kolejności przechodzimy do konstrukcji uwzględniających strukturę analityczną na M (więc i na $\Omega_{(l)}^\bullet(M)$). Oto więc mamy

DEFINICJA 79. Przyjmijmy zapis Def. 70 oraz 78 i ustalmy (dowolnie) $l \in \mathbb{N}^\times$.
Pochodna zewnętrzna to jedyne odwzorowanie

$$d : \Omega_{(l)}^\bullet(M) \longrightarrow \Omega_{(l-1)}^\bullet(M)$$

spełniające aksjomaty:

(ED1) d jest \mathbb{R} -liniowe;

(ED2) w ograniczeniu do $\Omega_{(l)}^0(M) \ni f$ jest ono określone wzorem

$$\langle df, \cdot \rangle : \mathfrak{X}^1(M) \longrightarrow C^{\min(l-1,1)}(M, \mathbb{R}) : \mathcal{V} \longmapsto D_{\mathcal{V}}f,$$

przy czym

$$\forall f \in \Omega_{(l)}^0(M) : d \circ d(f) = 0;$$

(ED3) dla dowolnych $\omega_\alpha \in \Omega_{(l)}^{p_\alpha}(M)$, $p_\alpha \in \overline{0, n}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ zachodzi tożsamość

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{p_1} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

▲

UWAGA 24. Warto przekonać się, że powyższe warunki w istocie określają operator pochodnej zewnętrznej d w pełni jednoznacznie. Rozważmy dziedzinę dowolnej lokalnej mapy $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}$ na otoczeniu \mathcal{O} dowolnego punktu $x \in \mathcal{O}$. Jednoformy $dx^i \in \Omega^1(\mathcal{O})$, $i \in \overline{1, n}$ tworzą bazę modułu $\Omega_{(l)}^1(\mathcal{O})$, oto bowiem w świetle Stw. 8 dowolną p -formę $\omega \in \Omega_{(l)}^p(\mathcal{O})$ można przedstawić (w sposób jednoznaczny) w postaci

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

przy czym dla dowolnych $i_k \in \overline{1, n}$, $k \in \overline{1, p}$ wprowadziliśmy oznaczenie

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} := \langle \omega, \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right) \rangle \in C^l(\mathcal{O}, \mathbb{R}).$$

Wobec oczywistej relacji

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} = \text{sgn}(\sigma) \omega_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(p)}}$$

możemy przepisać powyższy wzór w postaci

$$\omega \equiv \frac{1}{p!} \omega_{j_1 j_2 \dots j_p} \triangleright dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_p},$$

gdzie tym razem każdy ze wskaźników jest wysumowany niezależnie po pełnym zakresie zmienności $\overline{1, n}$. Na mocy przyjętej aksjomatyki, a wobec skośnej symetrii ω , pochodna zewnętrzna $d\omega$ jest równa

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!} \left(d\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} + p \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \wedge d \circ d(x^{i_1}) \right) \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} \lrcorner d\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &\equiv \frac{1}{p!} D \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że aksjomaty nie pozostawiają w definicji pochodnej zewnętrznej p -formy żadnej niejednoznaczności w opisie lokalnym, a ponieważ schemat sklejania opisów lokalnych pozwala w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O} \cap \tilde{\mathcal{O}}$ z przecięcia dziedzin lokalnych map: κ jak wyżej i $\tilde{\kappa} = (y^1, y^2, \dots, y^n) : \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}$ każe utożsamić

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) \triangleright \frac{\partial}{\partial y^j}(x), \quad dx^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(x) \triangleright dy^j(x),$$

przeto wypisana formuła lokalna, w której każdemu obiektowi $\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$ towarzyszy obiekt dx^{i_k} podlegający dualnej transformacji liniowej przy przejściu do opisu lokalnego związanego z $\tilde{\kappa}$, definiuje obiekt globalny. Bez trudu wyprowadzamy też w opisie lokalnym – dla dowolnych pól $\mathcal{V}_\alpha \in \mathfrak{X}^m(M)$, $\alpha \in \overline{0, p}$, $m \leq k$ –

$$\begin{aligned} \langle d\omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle &= \frac{1}{p!} D \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\overline{0, p}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{\sigma(0)}^{i_0} \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{i_1} \dots \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{i_p} \\ &\equiv \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p D_{\mathcal{V}_k} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\overline{0, p}}, \sigma(0)=k} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{i_1} \mathcal{V}_{\sigma(2)}^{i_2} \dots \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \cdot \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{\overline{0, p} \setminus \{k\}}} \operatorname{sgn}(\rho) \mathcal{V}_{\rho(0)}^{i_0} \mathcal{V}_{\rho(1)}^{i_1} \dots \mathcal{V}_{\rho(p)}^{i_p} \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \frac{\mathcal{V}_k^{j_k}}{\mathcal{V}_k^{j_k}} D_{\mathcal{V}_k} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p}. \end{aligned}$$

Bezpośrednim następstwem aksjomatów definiujących pochodną zewnętrzną jest

STWIERDZENIE 105. *Przyjmijmy zapis Def. 79. Zachodzi tożsamość*

$$d \circ d = 0.$$

■

Dowód: W świetle Uwagi 24 i w przyjętej tam notacji, a przywołując po drodze skośną symetrię iloczynu zewnętrznego, możemy zapisać – dla dowolnej p -formy $\omega \in \Omega_{(l)}^p(M)$, $l \geq 2$ –

$$\begin{aligned} d \circ d(\omega) &= \frac{1}{p!} D \frac{\partial}{\partial x^i} \circ D \frac{\partial}{\partial x^j} (\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}) \triangleright dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{2 \cdot p!} [D \frac{\partial}{\partial x^i}, D \frac{\partial}{\partial x^j}] \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \equiv 0. \end{aligned}$$

□

Przydatnej reprezentacji pochodnej zewnętrznej dostarcza poniższe

STWIERDZENIE 106. *Przyjmijmy zapis Def. 72 i 79. Pochodna zewnętrzna pola p -formy $\omega \in \Omega_{(l)}^p(M)$ spełnia tożsamość, słuszną dla dowolnych $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p \in \mathfrak{X}^1(M)$,*

$$\begin{aligned} \langle d\omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle &= \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \langle \omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \langle \omega, ([\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j], \mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle. \end{aligned}$$

■

Dowód: Rozważmy pierwszą z sum po prawej stronie dowodzonej równości,

$$S_1 := \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \langle \omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle,$$

w ograniczeniu do dziedziny \mathcal{O} lokalnej mapy $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Otrzymujemy wyrażenie lokalne (w zapisie Uwagi 24)

$$S_1 = \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} (\mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \frac{\mathcal{V}_k^{j_k}}{\mathcal{V}_k^{j_k}})$$

$$= \sum_{k=0}^p (-1)^k \left(\mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} D_{\mathcal{V}_k} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} + \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} D_{\mathcal{V}_k} \left(\mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) \right).$$

Jej porównanie z formułą z końca Uwagi 24 sprowadza tezę dowodzonego stwierdzenia do tożsamości

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} D_{\mathcal{V}_k} \left(\mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) = \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_0 \dots l_p} \\ \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i] \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}\}}} \text{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_{\sigma([j,i])}} \mathcal{V}_0^{l_{\sigma(0)}} \mathcal{V}_1^{l_{\sigma(1)}} \cdots \mathcal{V}_p^{l_{\sigma(p)}},$$

w której $\mathcal{V}_{[j,i]} = [\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_i]$, przy czym należy zwrócić uwagę na porządek indeksów: $j > i$. Lewą stronę pożądaną tożsamości rozpisujemy i upraszczamy, jak następuje

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} D_{\mathcal{V}_k} \left(\mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l=k+1}^p \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ & \quad + \sum_{k=0}^p \sum_{l=k+1}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ & \quad + \sum_{l=1}^p \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ &\equiv \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_l \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ & \quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \omega_{j_0 j_1 \dots j_l \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_l^{j_l}} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{k-1}^{j_{k-1}} (D_{\mathcal{V}_l} \mathcal{V}_k^{j_k}) \mathcal{V}_{k+1}^{j_{k+1}} \mathcal{V}_{k+2}^{j_{k+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_l \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} [\mathcal{V}_k, \mathcal{V}_l]^{j_l} \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p}, \end{aligned}$$

czyli wobec relacji $k > l$ (i zakresu zmienności obu indeksów)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} D_{\mathcal{V}_k} \left(\mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k+l} \omega_{i_0 i_1 \dots i_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \mathcal{V}_{[k,l]}^i \mathcal{V}_0^{i_0} \mathcal{V}_1^{i_1} \cdots \mathcal{V}_p^{i_p}. \end{aligned}$$

Z kolei strona prawa rozpisuje się do postaci

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_{0, \dots, l_p}} \\
& \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_{\sigma([j,i])}} \mathcal{V}_0^{l_{\sigma(0)}} \mathcal{V}_1^{l_{\sigma(1)}} \dots \mathcal{V}_p^{l_{\sigma(p)}} \\
& = \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_{0, \dots, l_p}} \\
& \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{\sigma([j,i])}^{l_{[j,i]}} \mathcal{V}_{\sigma(0)}^{l_0} \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{l_1} \dots \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{l_p} \\
& = \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_{0, \dots, l_p}} \sum_{k \in \{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}} \\
& \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}}, \sigma(k)=[j,i]} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_k} \mathcal{V}_{\sigma([j,i])}^{l_{[j,i]}} \mathcal{V}_{\sigma(0)}^{l_0} \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{l_1} \dots \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{l_p} \\
& = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_{[j,i]}} \omega_{l_{[j,i]} l_{0, \dots, l_p}} \\
& \cdot \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{\overline{0,p} \setminus \{i,j\}}} \operatorname{sgn}(\rho) \mathcal{V}_{\rho(0)}^{l_0} \mathcal{V}_{\rho(1)}^{l_1} \dots \mathcal{V}_{\rho(p)}^{l_p} \\
& = \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \mathcal{V}_{[j,i]}^l \omega_{l l_{0, \dots, l_p}} \mathcal{V}_0^{l_0} \mathcal{V}_1^{l_1} \dots \mathcal{V}_p^{l_p},
\end{aligned}$$

jest zatem równa stronie lewej, zgodnie z postulowaną tezą. \square

Na zakończenie rekapitulacji elementarnej struktury algebraicznej i analitycznej na zbiorze form różniczkowych na rozmaitości, należy jeszcze wspomnieć o konstrukcji w pewnym sensie dualnej w stosunku do dyskutowanego wcześniej transportu stycznościowego wektorów i pól wektorowych, a stanowiącej uogólnienie operacji cofnięcia funkcji wzdłuż odwzorowania, wprowadzonej w dowodzie Tw. 1.4.19. Mówi o niej

DEFINICJA 80. Przyjmijmy zapis Def. 77 i niechaj $F : M_1 \rightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem klasy C^{r+1} między C^k -rozmaitościami $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$. **Cofnięcie pola form** na M_2 wzdłuż odwzorowania F to odwzorowanie

$$F^* : \Omega_{(l)}^p(M_2) \rightarrow \Omega_{(\min(l,r))}^p(M_1)$$

zadawane w dowolnym punkcie $x \in M_1$ formułą

$$(F^* \omega)(x) := \omega(F(x)) \circ \bigtimes_{k=1}^p \Gamma_x F.$$

\blacktriangle

Kluczowe własności operacji cofnięcia zbiera

STWIERDZENIE 107. Przyjmijmy zapis Def. 80 i niechaj $F : M_1 \rightarrow M_2$ oraz $G : M_2 \rightarrow M_3$ będą odwzorowaniami klasy C^1 między C^k -rozmaitościami ($k > r$) $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Zdefiniowane przez nie cofnięcia pola form spełniają tożsamości

$$F^* \circ \wedge = \wedge \circ (F^* \times F^*),$$

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* ,$$

$$F^* \circ d = d \circ F^* .$$

■

Dowód: Oczywiście – najwygodniej przeprowadzić go w reprezentacji lokalnej, jak w Uwadze 24. □

W dalszej części dyskusji w ramach niniejszego wprowadzenia wykorzystamy functor styczny w klasyfikacji odwzorowań między rozmaitościami różniczkowalnymi, poznając przy tej okazji kilka standardowych metod ich konstrukcji.

DEFINICJA 81. Przyjmijmy zapis Stw. 94 i jego dowodu. Odwzorowanie $f \in C^1(M_1, M_2)$ między dwiema C^k -rozmaitościami $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ (dla $k \geq 1$) nazywamy

- **immersywnym w punkcie** $x \in M_1$, jeśli odwzorowanie styczne $T_x f$ jest iniektywne, tj. $\ker T_x f = \{0\}$;
- **submersywnym w punkcie** $x \in M_1$, jeśli odwzorowanie styczne $T_x f$ jest surjektywne, tj. $\operatorname{im} T_x f = T_{f(x)} M_2$;

Ileokroć odwzorowanie f jest immersywne (wzgl. submersywne) w każdym punkcie swej dziedziny, określamy je mianem **immersji** lub **zanurzenia** (wzgl. **submersji**). Immersja będąca homeomorfizmem na obraz to **włożenie**.

▲

W przyjętym przez nas schemacie interpretacyjnym immersje i submersje jawią się jako geometryzacje znanych dobrze pojęć z algebry liniowej: monomorfizmu i – odpowiednio – epimorfizmu przestrzeni wektorowych. Oczywiście związek między wektorami stycznymi w punkcie rozmaitości i lokalnymi układami współrzędnych w jego otoczeniu w połączeniu z Tw. 18 prowadzi do stwierdzeń o kanonicznej postaci odwzorowania immersywnego (wzgl. submersywnego) w danym punkcie, które przedstawiamy poniżej. Zaczniemy od odwzorowań immersywnych.

STWIERDZENIE 108 (Twierdzenie o lokalnej immersji). *Przyjmijmy zapis Def. 64. Niechaj $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą C^k -rozmaitościami o wymiarach $\dim M_\alpha =: n_\alpha$, $n_2 \geq n_1$ i niech $f \in C^1(M_1, M_2)$ będzie odwzorowaniem immersywnym w punkcie $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$ dla pewnego $y \in M_2$. Wówczas istnieją otoczenia otwarte $\mathcal{O}_1 \ni x$ i $\mathcal{O}_2 \ni y$ oraz lokalne mapy $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n_\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o własnościach*

$$(1.4.40) \quad \kappa_1(x) = 0, \quad \kappa_2(y) = 0$$

oraz

$$(1.4.41) \quad f(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}_2 ,$$

w których lokalna prezentacja odwzorowania f przyjmuje postać

$$\widetilde{f} \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} = \iota_{1,2,\dots,n_1} \upharpoonright_{\kappa_1(\mathcal{O}_1)} ,$$

gdzie odwzorowanie $\iota_{1,2,\dots,n_1}$ jest **immersją kanoniczną**

$$\iota_{1,2,\dots,n_1} : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, 0, 0, \dots, 0) .$$

■

Dowód: Rozważmy lokalną prezentację f względem dowolnych map $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_\alpha}}$ określonych na pewnych otoczeniach $\mathcal{U}_1 \ni x$ i $\mathcal{U}_2 \ni y$, przy czym dokonując – jeśli trzeba – ich trywialnej modyfikacji (translacja wartości o stałą) możemy zawsze wycentrować oba układy współrzędnych na – odpowiednio – $\psi_1(x)$ i $\psi_2(y)$. Przy tym jeśli warunek $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_2$ nie jest spełniony, wystarczy zastąpić mapę ψ_1 podmapą $\psi_1 \upharpoonright_{\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2)}$, o dziedzinie $\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2) =: \mathcal{U}_1^f$. Wprowadźmy oznaczenie $\widehat{f} := \psi_2 \circ f \circ (\psi_1 \upharpoonright_{\mathcal{U}_1^f})^{-1}$. Skoro $T_0\widehat{f}$ jest iniekcją, możemy w świetle Stw. 18 wybrać bazy \mathcal{B}_α w $\mathbb{R}^{x_{n_\alpha}} \cong T_0\mathbb{R}^{x_{n_\alpha}}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ tak, by macierz odwzorowania $T_0\widehat{f}$ względem tych baz miała postać

$$[T_0\widehat{f}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{0}_{(n_2-n_1) \times n_1} \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$G : \psi_1(\mathcal{U}_1^f) \times \mathbb{R}^{x_{n_2-n_1}} \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_2}} : (v, w) \mapsto \widehat{f}(v) + (0, w),$$

którego styczne ma (względem baz wybranych uprzednio) postać $T_0G = \mathbf{1}_{n_2}$, w szczególności więc jest odwracalne. Na mocy Tw. 1.4.7 G jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(\psi_1(\mathcal{U}_1^f) \times \mathbb{R}^{x_{n_2-n_1}})$ punktu 0 na otoczenie \mathcal{V} tegoż punktu w $\mathbb{R}^{x_{n_2}}$. Zauważmy jednak, że

$$\widehat{f} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})} = G \circ \iota_{1,2,\dots,n_1} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})},$$

co wobec lokalnej odwracalności G możemy przepisać jako

$$((G \upharpoonright_{\mathcal{U}})^{-1} \circ \psi_2) \circ f \circ \psi_1^{-1} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})} = \iota_{1,2,\dots,n_1} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})}.$$

Mapy $\kappa_1 := \psi_1 \upharpoonright_{\psi_1^{-1} \circ \iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})}$ oraz $\kappa_2 := (G \upharpoonright_{\mathcal{U}})^{-1} \circ \psi_2 \upharpoonright_{\psi_2^{-1}(\mathcal{V})}$ są tymi właśnie, o których mowa w tezie dowodzonego stwierdzenia. \square

Odpowiednikiem powyższego dla odwzorowań submersywnych jest

STWIERDZENIE 109 (Twierdzenie o lokalnej submersji). *Przyjmijmy zapis Def. 64. Niechaj $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą C^k -rozmaitościami o wymiarach $\dim M_\alpha =: n_\alpha$, $n_2 \leq n_1$ i niech $f \in C^1(M_1, M_2)$ będzie odwzorowaniem submersywnym w punkcie $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$ dla pewnego $y \in M_2$. Wówczas istnieją otoczenia otwarte $\mathcal{O}_1 \ni x$ i $\mathcal{O}_2 \ni y$ oraz lokalne mapy $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_\alpha}}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o własnościach (1.4.40) i (1.4.41), w których lokalna prezentacja odwzorowania f przyjmuje postać*

$$\widetilde{f} \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} = \pi_{1,2,\dots,n_2} \upharpoonright_{\kappa_1(\mathcal{O}_1)},$$

gdzie odwzorowanie $\pi_{1,2,\dots,n_2}$ jest **submersją kanoniczną**

$$\pi_{1,2,\dots,n_2} : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2, \dots, x_{n_2}, \dots, x_{n_1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n_2}).$$

■

Dowód: Postępując jak w dowodzie poprzedniego stwierdzenia, otrzymujemy surjekttywne odwzorowanie $T_0\widehat{f}$, w przypadku którego możemy tak dobrać bazy \mathcal{B}_α w $\mathbb{R}^{x_{n_\alpha}}$, aby było

$$[T_0\widehat{f}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = (\mathbf{1}_{n_2} | \mathbf{0}_{n_2 \times (n_1-n_2)}).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$G : \psi_1(\mathcal{U}_1^f) \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_1}}$$

$$: \widehat{x} := (x_1, x_2, \dots, x_{n_2}, \dots, x_{n_1}) \mapsto (\widehat{f}(\widehat{x}), x_{n_2+1}, x_{n_2+2}, \dots, x_{n_1}),$$

którego styczne ma (względem baz wybranych uprzednio) postać $T_0G = \mathbf{1}_{n_1}$, zatem na mocy Tw. 1.4.7 G jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(\psi_1(\mathcal{U}_1^f))$ punktu 0 na otoczenie \mathcal{V} tegoż punktu w $\mathbb{R}^{x_{n_1}}$. Skoro zaś

$$\widehat{f} = \pi_{1,2,\dots,n_2} \circ G,$$

to wobec odwracalności $G|_{\mathcal{U}}$ możemy zapisać

$$\psi_2 \circ f \circ (\psi_1^{-1} \circ (G|_{\mathcal{U}})^{-1}) = \pi_{1,2,\dots,n_2}|_{\mathcal{V}},$$

otrzymując poszukiwane mapy $\kappa_1 := G \circ \psi_1|_{\psi_1^{-1}(\mathcal{U})}$ oraz $\kappa_2 := \psi_2$. \square

Warto zwrócić uwagę, że zarówno obraz immersji kanonicznej, jak i dowolna poziomiczna submersji kanonicznej są podrozmaitościami w – odpowiednio – przeciwdziedzinie i dziedzinie odnośnego odwzorowania. To stwierdzenie traci słuszność w ogólnym przypadku (tj. w przypadku dowolnej immersji¹¹ wzgl. submersji), o czym łatwo jest się przekonać analizując immersje okręgu oraz prostej w \mathbb{R}^{x^2} , których obrazem jest lemniskata, jak również poziomiczne rzutu w \mathbb{R}^{x^3} na pierwszą składową ograniczonego do torusa zanurzonego w \mathbb{R}^{x^3} tak, że leży on w sposób stabilny na płaszczyźnie $x_3 = 0$, a jego środek symetrii jest na osi $x_1 = 0 = x_2$. W dalszej części naszej dyskusji zajmiemy się zbadaniem warunków, jakie muszą być spełnione w każdym z wymienionych przypadków, aby obraz wzgl. przeciwobraz punktu (tudzież innej podrozmaitości) względem C^r -odwzorowania był podrozmaitością. W wyniku naszych dociekań nie tylko uzyskamy wygodne narzędzia konstrukcji nowych podrozmaitości, ale też – jak się okaże – otrzymamy przydatny opis *dowolnej* rozmaitości. Zaczynamy od immersji.

TWIERDZENIE 1.4.21. *Przyjmijmy zapis Def. 64 i niechaj $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ będzie C^k -rozmaitością. Podzbiór $S \subset M$ jest podrozmaitością klasy C^k wtedy i tylko wtedy, gdy jest on obrazem włożenia klasy C^k .*

■

Dowód:

- \Rightarrow Każda podrozmaitość dziedziczy strukturę różniczkową z przestrzeni zanurzenia. Wprost na mocy definicji kanoniczna iniekcja $S \hookrightarrow M$ jest włożeniem względem tej struktury różniczkowej (kanoniczną immersją na poziomie lokalnej prezentacji, identycznościowo wkładającą S w M).
- \Leftarrow W pierwszej kolejności sprowadzimy zagadnienie do analizy włożenia klasy C^k otwartego podzbioru $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{x_{n_1}}$ w $\mathbb{R}^{x_{n_2}}$. W tym celu zauważamy, że dla dowolnej podprzestrzeni $S := f(M_1) \subset M_2$ status podrozmaitości ma charakter lokalny i niezmienny względem dyfeomorfizmów, toteż do jego weryfikacji możemy użyć lokalnych układów współrzędnych:
- $\{ \kappa_{i_2}^2 : \mathcal{O}_{i_2}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_2}} \}_{i_2 \in I_2}$ na M_2 , które pokrywają S oraz
 - $\{ \kappa_{i_1}^1 : \mathcal{O}_{i_1}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_1}} \}_{i_1 \in I_1}$ na M_1 , o własności $f(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2$.
- Istnienie atlasów o tych własnościach wynika z ciągłości f , por. komentarz na str. 7. Wykorzystując ciągłość odwzorowania odwrotnego (oznaczającą otwartość f , a będącą konsekwencją homeomorficznego charakteru f w

¹¹Należy podkreślić, że źródłem obstrukcji może się okazać nie tylko nieiniektynowy charakter odwzorowania, ale też brak ciągłości jego odwrotności w sytuacji, kiedy odwrotność istnieje.

ograniczeniu do obrazu) możemy zrealizować wymóg bardziej szczegółowy: $f(\mathcal{O}_{i_1}^1) = S \cap \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2$ – istotnie, w tym celu należy zastąpić wyjściowe pokrycie $\mathcal{O}_2 = \{\mathcal{O}_{i_2}^2\}_{i_2 \in I_2}$ (ograniczone do S) jego rozdrobnieniem względem pokrycia $f(\mathcal{O}_1) = \{f(\mathcal{O}_{i_1}^1)\}_{i_1 \in I_1}$. Wystarczy teraz wskazać mapy stowarzyszone z pokryciem S otrzymanym tym sposobem, w których S jawi się lokalnie jako otwarty podzbiór $\mathbb{R}^{x_{n_1}} \equiv \mathbb{R}^{x_{n_1}} \times \{\mathbf{0}_{n_2-n_1}\} \subset \mathbb{R}^{x_{n_2}}$. Oznaczmy $\mathcal{U}_{i_1}^1 := \kappa_{i_1}^1(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathbb{R}^{x_{n_1}}$, $i_1 \in I_1$ i rozważmy

$$f_{i_1} = \kappa_{\phi(i_1)}^2 \circ f \circ (\kappa_{i_1}^1)^{-1} : \mathcal{U}_{i_1}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^{x_{n_2}}.$$

Lokalne prezentacje f_{i_1} to – rzecz jasna – włożenia klasy C^k , przeto na mocy Stw. 108 możemy wybrać w ich dziedzinie i przeciwdziedzynie współrzędne, w których te odwzorowania przyjmą postać kanoniczną i które tym samym sparametryzują zbiory $f(\mathcal{O}_{i_1}^1)$ w pożądanym sposób. □

Szczegółowa dyskusja warunków, w których poziomica ustalonego punktu ze zbioru wartości odwzorowania klasy C^k jest podrozmaitością, wymaga wprowadzenia dodatkowych pojęć, co czynimy poniżej.

DEFINICJA 82. Przyjmijmy zapis Def. 81. Jeśli f jest submersywne w punkcie $x \in M_1$, to wówczas x nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania f . W przeciwnym razie mówimy o **punkcie krytycznym**. Punkt przeciwdziedziny $y \in M_2$ będący obrazem punktu krytycznego względem f to **wartość krytyczna**, wszystkie pozostałe punkty przeciwdziedziny (nie wyłączając tych spoza obrazu odwzorowania) noszą miano **wartości regularnych**. Poziomice $f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$ wartości regularnych $y \in M_2$ bywają nazywane **poziomicami regularnymi**, a w przypadku surjektywnej submersji także **włóknami**. ▲

O pierwszorzędnym znaczeniu wprowadzonych tu pojęć w kontekście naszych rozważań przekonuje

TWIERDZENIE 1.4.22 (O wartości regularnej). *Poziomica regularna odwzorowania klasy C^k , $k \in \mathbb{N}^x \cup \{\infty\}$ pomiędzy C^k -rozmaitościami jest podrozmaitością klasy C^k w dziedzinie tegoż odwzorowania, wymiaru równego różnicy wymiarów dziedzin i przeciwdziedziny odwzorowania.* ■

Dowód: Jak stwierdziliśmy uprzednio, status podrozmaitości ma charakter lokalny i niezmienniczy względem dyfeomorfizmów, przeto jego weryfikację wystarczy przeprowadzić w dziedzinie jednej z map na dziedzinie odwzorowania oraz w dziedzinie odnośnej mapy na jego przeciwdziedzynie. Rozważmy zatem otwarte otoczenie punktu regularnego $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$ odwzorowania $f : M_1 \longrightarrow M_2$ klasy C^k między C^k -rozmaitościami M_1 i M_2 . Odwzorowanie f jest submersywne w x , zatem na mocy Stw. 109 istnieją lokalne układy współrzędnych $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{x_{n_\alpha}}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ na zbiorach otwartych $\mathcal{O}_1 \ni x$ i $\mathcal{O}_2 \ni y$ o własnościach (1.4.40) i (1.4.41) i takie, w których lokalna prezentacja $\tilde{f} = \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}$ jest ograniczeniem submersji kanonicznej do $\kappa_1(\mathcal{O}_1)$. Wprost z konstrukcji wynika, że dla każdego punktu $\tilde{x} \in \mathcal{O}_1 \cap f^{-1}(\{y\})$ jest spełniony warunek $x^k(\tilde{x}) = 0$, $k \in \bar{1}, n_2$ dla składowych mapy

$\kappa_1 = (x^1, x^2, \dots, x^{n_2})$, oto bowiem

$$(x^1(\tilde{x}), x^2(\tilde{x}), \dots, x^{n_2}(\tilde{x})) = \tilde{f} \circ \kappa_1(\tilde{x}) \equiv \kappa_2 \circ f(\tilde{x}) = \kappa_2(y) = 0.$$

Jest to jedyny warunek, jaki przyjęte założenia narzucają na $\kappa_1(\tilde{x})$, stąd też podprzestrzeń $\mathcal{O}_1 \cap f^{-1}(\{y\})$ jest parametryzowana przez $n_1 - n_2$ ostatnich współrzędnych na \mathcal{O}_1 ,

$$\kappa_1(\tilde{x}) = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n_2}, x^{n_2+1}(\tilde{x}), x^{n_2+2}(\tilde{x}), \dots, x^{n_1}(\tilde{x}),$$

co daje nam tezę dowodzonego twierdzenia. \square

Warto przy tej okazji odnotować także powszechnie stosowane

STWIERDZENIE 110. *W oznaczeniach dowodu Tw. 1.4.22 zachodzi tożsamość*

$$\mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\}) = \ker \mathbb{T}_x f.$$

■

Dowód: Jako że f jest stałe na swej poziomicy, zachodzi równość

$$\mathbb{T}_x f \upharpoonright_{\mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\})} = 0,$$

więc też

$$\mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\}) \subset \ker \mathbb{T}_x f.$$

Z drugiej strony czysto algebraiczny bilans wymiarów ze Stw. 17 dla odwzorowania liniowego $\mathbb{T}_x f$ daje nam – wobec jego surjektywności, a w świetle Tw. 1.4.22 – równość

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \ker \mathbb{T}_x f &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M_1 - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} \mathbb{T}_x f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M_1 - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_y M_2 \\ &\equiv \dim M_1 - \dim M_2 = \dim f^{-1}(\{y\}) \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\}), \end{aligned}$$

która zamyka dowód. \square

Tytułem rozwinięcia dotychczasowej naszej dyskusji podstawowych typów odwzorowań różniczkowalnych między rozmaitościami omówimy kilka przykładów oraz podstawowe ich własności. Zaczniemy od warunków wystarczających dla bycia immersją.

STWIERDZENIE 111. *Przyjmijmy zapis Def. 64 i ustalmy (dowolnie) $k \in \mathbb{N}^{\times}$. Każde injektywne C^k -odwzorowanie o stałym rzędzie (w rozumieniu Tw. 1.4.9, odniesionego do dowolnej lokalnej prezentacji odwzorowania) między dwiema C^k -rozmaitościami jest immersją.*

■

Dowód: Załóżmy, że C^k -odwzorowanie $f : M_1 \rightarrow M_2$ o stałym rzędzie $\operatorname{rk} DF = r$ między dwiema C^k -rozmaitościami $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ wymiaru $n_\alpha := \dim M_\alpha$ jest wprawdzie injektywne, ale *nie* jest immersją, czyli $r < n_1$. Rozważmy obrazy: dowolnego punktu $x \in M_1$ oraz jego obrazu $f(x) \in M_2$ względem odnośnych lokalnych map $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathcal{U}_\alpha$ określonych na pewnych otwartych otoczeniach: $\mathcal{O}_1 \ni x$ i $\mathcal{O}_2 \ni f(x)$, które są odwzorowywane homeomorficznie w odnośne zbiory otwarte $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^{n_\alpha}$. Odwzorowanie $\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ spełnia założenia Tw. 1.4.9, możemy przeto odnieść do niego tezę tego twierdzenia, która przesądza o istnieniu

na pewnych otoczeniach $\tilde{U}_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ punktów: $\kappa_1(x) \in \tilde{U}_1$ i $\kappa_2 \circ f(x) \in \tilde{U}_2$ lokalnych transformacji współrzędniowych (dyfeomorfizmów) ι_α klasy C^k , które pozwalają sprowadzić lokalną prezentację f do szczególnie prostej postaci danej wzorem (wykorzystującą notację Tw. 1.4.9)

$$\iota_2^{-1} \circ \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \circ \iota_1^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) = (x_1, x_2, \dots, x_r, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_2-r}).$$

To jednak prowadzi nas do wniosku, że wszystkie punkty z dziedziny powyższej lokalnej prezentacji, które są szczególnej postaci $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_r, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n_1-r})$, $\varepsilon_i \in$

\mathbb{R} , $i \in \overline{1, n_1 - r}$, są przez nią przeprowadzane na punkt $\mathbf{0}_{n_2}$, co wobec relacji $r < n_1$ implikuje nieinjektywność tejże lokalnej prezentacji, a zatem także – nieinjektywność f , w sprzeczności z poczynionymi założeniami. \square

Praktyczny opis włożenia zawiera natomiast

STWIERDZENIE 112. *Każda injektywna immersja będąca odwzorowaniem właściwym jest gładkim włożeniem.*

■

Dowód: Odwzorowanie, o którym mowa w treści stwierdzenia, jest na mocy Stw. 67 (które możemy tu zastosować na podstawie Stw. 91) domknięte, co w świetle Stw. 60 oznacza, że jest ono włożeniem topologicznym. \square

Przydatny przykład zastosowania powyższego rezultatu stanowi

STWIERDZENIE 113. *Przyjmijmy zapis Def. 64 i niechaj $f : M_1 \rightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem klasy C^k pomiędzy dwiema C^k -rozmaitościami $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$. **Wykres odwzorowania f** , tj. podzbiór*

$$\text{graph}(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in M_1 \} \subset M_1 \times M_2,$$

wyposażony w topologię produktową, jest podrozmaitością klasy C^k rozmaitości produktowej $M_1 \times M_2$.

■

Dowód: Odwzorowanie $(\text{id}_{M_1}, f) : M_1 \rightarrow M_1 \times M_2$, którego obrazem jest $\text{graph}(f)$, jest w oczywisty sposób injektywną immersją. Ponadto jest ono właściwe. Istotnie, rozważmy dowolny zbiór zwarty $\mathcal{K} \subset M_1 \times M_2$ oraz dowolny ciąg punktów $x_n : \mathbb{N} \rightarrow (\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$ w jego przeciwobrazie w M_1 . Obraz tego ciągu w \mathcal{K} zawiera – w świetle Stw. 65 – pewien podciąg zbieżny $(x_n, f(x_n)) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{K}$ o granicy $(x_*, f(x_*)) \in \mathcal{K}$, której postać jest podyktowana przez założoną ciągłość f . Ów podciąg definiuje podciąg $x_n : \mathbb{N} \rightarrow (\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$ zbieżny do $x_* \in (\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$, co przesądza o zwartości zbioru $(\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$. Na gruncie Stw. 112 konstatujemy, że (id_{M_1}, f) jest gładkim włożeniem, więc też – w odwołaniu do Tw. 1.4.21 – jego obraz $\text{graph}(f)$ jest podrozmaitością klasy C^k , zgodnie z postulowaną tezą. \square

Przejdziemy teraz do dyskusji odwzorowań submersywnych. Prosta, acz istotną ich własność, stanowiącą geometryzację zaawansowanego pojęcia algebry liniowej, jakim jest rozszczepialny krótki ciąg dokładny modułów nad pierścieniem, opisuje

STWIERDZENIE 114. *Przyjmijmy zapis Def. 81. Obraz każdego punktu regularnego $x \in M_1$ odwzorowania $f : M_1 \rightarrow M_2$ klasy C^l , $l \leq k$ (dla $k \geq 1$) ma*

otoczenie $\mathcal{O}_{f(x)} \ni f(x)$, na którym jest określone odwzorowanie $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow M_1$ klasy C^l o własnościach

$$f \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} \quad \wedge \quad \sigma \circ f(x) = x,$$

zwane **cięciem lokalnym** odwzorowania f . ■

Dowód: Teza ma charakter lokalny, możemy zatem ograniczyć rozważania do pewnego otoczenia $\mathcal{O}_x \ni x$ będącego dziedziną lokalnej mapy $\kappa_1 : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x_{n_1}})$, w której $\kappa_1(x) = 0$, a także – do pewnego otoczenia $\tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \ni f(x)$ będącego dziedziną lokalnej mapy $\kappa_2 : \tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \rightarrow \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x_{n_2}})$, w której $\kappa_2 \circ \pi(x) = 0$. Submersywność f w x oznacza, że odwzorowanie styczne

$$T_{\kappa(x)=0}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}) : T_{\kappa_1(x)=0}\mathbb{R}^{x_{n_1}} \cong \mathbb{R}^{x_{n_1}} \rightarrow T_{\kappa_2 \circ f(x)=0}\mathbb{R}^{x_{n_2}} \cong \mathbb{R}^{x_{n_2}}$$

jest epimorfizmem przestrzeni \mathbb{R} -liniowych. Niechaj zatem $V_1 \subset \mathbb{R}^{x_{n_1}}$ będzie (dowolną) podprzestrzenią izomorficznie odwzorowywaną w $\mathbb{R}^{x_{n_2}}$ przez (ograniczenie) $T_{\kappa(x)}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})$, a wtedy odwzorowanie styczne do odwzorowania klasy C^l

$$F := \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}|_{\mathcal{U}_1 \cap V_1} : \mathcal{U}_1 \cap V_1 \rightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{x_{n_2}},$$

o jawnie niepustej dziedzinie (wszak V_1 jest podprzestrzenią w $\mathbb{R}^{x_{n_1}}$, a \mathcal{U}_1 jest otoczeniem wektora 0), jest odwracalne. Istotnie, wobec tożsamości $T_0V_1 \cong V_1$, dziedzina T_0F przyjmuje postać $T_0\mathcal{U}_1 \cap T_0V_1 \cong \mathbb{R}^{x_{n_1}} \cap V_1 = V_1$, co oznacza, że T_0F jest izomorfizmem

$$T_0F \cong T_0(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})|_{V_1}.$$

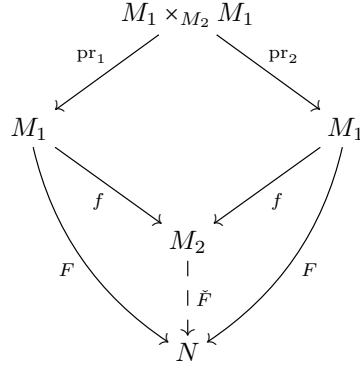
W odwołaniu do Tw. 1.4.7 wnioskujemy zatem, że $F \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}|_{\mathcal{U}_1 \cap V_1}$ ma pożądaną lokalną odwrotność $\kappa_1 \circ \sigma \circ \kappa_2^{-1}|_{F(\mathcal{U}_0)}$ klasy C^l na pewnym otoczeniu $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \cap V_1$ wektora $0 \equiv \kappa_1(x)$. Homeomorficzny przeciwobraz $\kappa_1^{-1}(\mathcal{U}_0)$ tego ostatniego jest postulowanym otoczeniem punktu x , na którym jest określone lokalne cięcie σ klasy C^l . □

I wreszcie na koniec rzut oka na własności submersji, która ukazuje ją jako byt pokrewny dyskutowanym wcześniej algebraicznym strukturom uniwersalnym.

STWIERDZENIE 115 (Kwazi-universalna¹² własność submersji). *Przyjmijmy zapis Def. 48 i 81 oraz Przykł. 21 (1), zakładając przy tym, że $f : M_1 \rightarrow M_2$ jest surjektywną submersją klasy C^k , $k \geq 1$. Niechaj ponadto N będzie C^k -rozmaiłością, a $\tilde{F} : M_2 \rightarrow N$ dowolnym odwzorowaniem. Odwzorowanie \tilde{F} jest klasy C^k wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie złożone $\tilde{F} \circ f : M_1 \rightarrow N$ ma tę własność. W szczególności każdemu C^k -odwzorowaniu $F : M_1 \rightarrow N$ stałemu na poziomicach f odpowiada dokładnie jedno odwzorowanie $\tilde{F} \in C^k(M_2, N)$ o*

¹²Powodem, dla którego wzbraniamy się przed nadaniem tej własności submersji miana „uniwersalnej”, jest to, że klasa obiektów, pośród których para (M_2, f) odgrywa rolę „inicjalną”, jest zdefiniowana w terminach odwzorowania f (chodzi o stałość na poziomicach tego odwzorowania).

własności wyrażonej – wraz z rzeczoną własnością f – przez diagram przemienny



■

Dowód: Ilekcóż g jest klasy C^k , także $g \circ f$ ma tę własność jako superpozycja odwzorowań klasy C^k .

I odwrotnie, niechaj $g \circ f \in C^k(M_1, N)$. Wobec surjektywności f dowolny punkt w M_2 możemy przedstawić w postaci $f(x)$ dla pewnego $x \in M_1$. Wybierzmy zatem (dowolnie) punkt $f(x) \in M_2$ oraz jego otoczenie $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$, na którym jest określone cięcie lokalne $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow M_1$ odwzorowania f spełniające warunki z tezy Stw. 114. Przyjawszy zapis dowodu rzeczzonego stwierdzenia, otrzymujemy tożsamość

$$g \upharpoonright_{\mathcal{O}_{f(x)}} \equiv g \circ \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} = (g \circ f) \circ \sigma,$$

która dowodzi C^k -gładkości $g \upharpoonright_{\mathcal{O}_{f(x)}}$ na gruncie założenia o C^k -gładkości $g \circ f$ oraz wynikającej ze Stw. 114 C^k -gładkości cięcia lokalnego σ . Dowolność wyboru $f(x)$ pozwala wnioskować o globalnej C^k -gładkości g .

Wreszcie na koniec zajmiemy się udowodnieniem istnienia i jednoznaczności odwzorowania $g \in C^k(M_2, N)$, spełniającego tożsamość

$$F = g \circ f.$$

Po pierwsze zauważmy, że każde dwa takie odwzorowania pokrywają się na zbiorze $f(M_1)$, który z racji surjektywności f jest tożsamy z M_2 , przeto odwzorowanie g może być co najwyżej jedno. Postulujemy

$$g : M_2 \rightarrow N : f(x) \mapsto F(x),$$

wykorzystując raz jeszcze surjektywność f . Założona przez nas stałość F na włóknach f przesądza o sensowności powyższego postulat ($F(x)$ nie zależy od wyboru reprezentanta włókna $f^{-1}(\{f(x)\})$), a do tego wprost z definicji zachodzi pożądana tożsamość

$$g \circ f(x) = F(x).$$

□

Dotychczasowe nasze rozważania nieuchronnie prowadzą do pytania o warunki, których spełnienie gwarantuje, że przeciwobraz podrozmaitości w przeciwdziedzinie odwzorowania względem tegoż odwzorowania także jest podrozmaitością. Przy ich wprowadzaniu natrafiamy na naturalne uogólnienie pojęcia „regularności” punktu

przeciwdziedziny, o czytelnej interpretacji geometrycznej. Tak jak poprzednio dociekania nasze prowadzimy na poziomie lokalnym. Stwierdzamy przy tym, że przeciwobraz dowolnej podrozumności $S \subset M_2$ klasy C^k rozumności tejże klasy względem odwzorowania $f : M_1 \rightarrow M_2$ klasy C^k jest podrozumnością klasy C^k wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt $x \in f^{-1}(S)$ ma otoczenie $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M_1)$ o tej własności, że $\mathcal{O} \cap f^{-1}(S)$ jest (pod)rozumnością klasy C^k (tego samego wymiaru). Ustalmy $y \in S$ i przywołajmy treść Tw. 1.4.21, z której wynika, że $S \subset M_2$ jest obrazem włożenia $\iota_S : S \hookrightarrow M_2$ (klasy C^k), zatem też – na mocy Stw. 108 – lokalnie, tj. w pewnym otoczeniu \mathcal{O}_y punktu y , jest wspólną poziomicy zerową układu $\text{codim}_{M_2} S =: s$ liniowo niezależnych funkcji¹³ $w_l := \varphi_2^{\dim S + l}$, $l \in \overline{1, s}$. Wobec tego w pewnym otoczeniu \mathcal{O}_x punktu $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(S) \subset M_1$ zbiór $f^{-1}(S)$ jest wspólną poziomicy zerową układu funkcji $w_l \circ f$, $l \in \overline{1, s}$. Zdefiniujmy submersję¹⁴

$$w := (w_1, w_2, \dots, w_s) : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathbb{R}^{xs},$$

a następnie rozważmy odwzorowanie

$$w \circ f : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{R}^{xs}.$$

W świetle Tw. 1.4.22 podprzestrzeń $(w \circ f)^{-1}(\{0\}) \equiv \mathcal{O}_y$ jest podrozumnością, jeśli 0 jest wartością regularną odwzorowania $w \circ f$. Zachodzi

$$\mathbb{T}_x(w \circ f) = \mathbb{T}_y w \circ \mathbb{T}_x f : \mathbb{T}_x \rightarrow \mathbb{T}_0 \mathbb{R}^{xs} \equiv \mathbb{R}^{xs},$$

wobec czego $\mathbb{T}_x(w \circ f)$ jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{T}_y w$ odwzorowuje im $\mathbb{T}_x f$ na \mathbb{R}^{xs} . Jednakowoż $\ker \mathbb{T}_y w = \mathbb{T}_y S$ na mocy Stw. 110, musimy zatem wobec surjektywności $\mathbb{T}_y w$ zażądać spełnienia warunku, o którym mowa w

DEFINICJA 83. Przyjmijmy zapis Def. 64. Niechaj $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha) \in \text{Obj Man}^{(k)}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ i niech $f \in C^1(M_1, M_2)$, a ponadto niech $S \subset M_2$ będzie podrozumnością klasy C^k . Odwzorowanie f określamy mianem **transwersalnego w punkcie** $f(x) \in S$, $x \in M_1$ **względem** S , co zapisujemy symbolicznie jako

$$f \overline{\mathfrak{h}}_{f(x)} S,$$

jeśli spełnia ono warunek

$$(1.4.42) \quad \text{im } \mathbb{T}_x f + \mathbb{T}_{f(x)} S = \mathbb{T}_{f(x)} M_2$$

(w którego zapisie suma po lewej stronie znaku równości jest sumą algebraiczną przestrzeni \mathbb{R} -liniowych). Ilekroć warunek ten jest spełniony w każdym z punktów poziomicy $f^{-1}(S)$, mówimy, że odwzorowanie f jest **transwersalne względem** S i piszemy $f \overline{\mathfrak{h}} S$. ▲

W podsumowaniu naszej wcześniejszej analizy możemy już wysłowić

TWIERDZENIE 1.4.23. *Przyjmijmy zapis Def. 83 i niechaj $S \subset M_2$ będzie podrozumnością klasy C^k . Jeśli $f \overline{\mathfrak{h}} S$, to także $f^{-1}(S) \subset M_1$ jest podrozumnością klasy C^k , przy czym*

$$\text{codim}_{M_1} f^{-1}(S) = \text{codim}_{M_2} S.$$

¹³Tj. funkcji o różniczkach liniowo niezależnych na pewnym otoczeniu y .

¹⁴Odwzorowanie styczne ma względem odpowiednich baz macierz jednostkową. ■

Dowód: Jedynym stwierdzeniem, które nie zostało dotąd udowodnione, jest to dotyczące kowymiaru przeciwobrazu. Przypomnijmy, że w dotychczasowych naszych rozważaniach kowymiar S przyjęliśmy równym s . Przeciwobraz $f^{-1}(S)$ możemy opisać lokalnie jako wspólną poziomice zerową układu s funkcji $w_l \circ f$, $l \in \overline{1, s}$, przy czym ich jednoczesne zerowanie się jest jedynym warunkiem definiującym tę podrozmaitość. Ich liniowa niezależność wynika wprost z naszej konstrukcji (patrz: rozumowanie prowadzące do wzoru (1.4.42)), oto bowiem

$$\operatorname{im}(\mathbb{T}_x(w_1 \circ f), \mathbb{T}_x(w_2 \circ f), \dots, \mathbb{T}_x(w_s \circ f)) \equiv \operatorname{im} \mathbb{T}_x(w \circ f) = \mathbb{R}^{\times s}.$$

□

UWAGA 25. Ilekroć $S = \{y\}$ (pojedynczy punkt przeciwdziedziny), powyższa konstrukcja daje $\mathbb{T}_y S = \{0\} \subset \mathbb{T}_y M_2$, więc też

$$f \bar{\cap} S \iff \forall_{x \in f^{-1}(\{y\})} : \mathbb{T}_y M_2 = \operatorname{im} \mathbb{T}_x f + 0 \equiv \operatorname{im} \mathbb{T}_x f,$$

co jest równoznaczne z surjektywnością odwzorowania \mathbb{R} -liniowego $\mathbb{T}_x f$ w każdym z punktów poziomiczy. Tym samym odtwarzamy poprzednio wprowadzone pojęcie wartości regularnej jako szczególny przypadek ogólniejszego pojęcia transwersalności odwzorowania względem podrozmaitości. To ostatnie można prosto rozszerzyć do pary podrozmaitości oraz pary odwzorowań o wspólnej przeciwdziedzinie, czym zajmujemy się w dalszej części naszej dyskusji.

DEFINICJA 84. Przyjmijmy zapis Def. 83 i niechaj $S_1, S_2 \subset M$ będą dwiema podrozmaitościami klasy C^k . Powiemy, że są one wzajem **transwersalne**, co zapiszemy symbolicznie jako

$$S_1 \bar{\cap} S_2,$$

jeśli kanoniczna iniekcja $\iota_{S_1} : S_1 \rightarrow M$ spełnia warunek $\iota_{S_1} \bar{\cap} S_2$ (lub – równoważnie – $\iota_{S_2} \bar{\cap} S_1$ dla $\iota_{S_2} : S_2 \rightarrow M$).

Analogicznie, odwzorowania $f_\alpha \in C^1(M_\alpha, M)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ określimy jako wzajem **transwersalne**, zapisując

$$f_1 \bar{\cap} f_2,$$

jeśli dla dowolnej pary punktów $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ o własności $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ spełniona jest tożsamość

$$\mathbb{T}_{f_1(x)} M = \operatorname{im} \mathbb{T}_{x_1} f_1 + \operatorname{im} \mathbb{T}_{x_2} f_2.$$

▲

Należy zwrócić uwagę, że $x \in S_1$ należy do przeciwobrazu $\iota_{S_1}^{-1}(S_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \equiv \iota_{S_1}(x) \in S_1 \cap S_2 \subset M$, a ponieważ $\mathbb{T}_x \iota_{S_1} : \mathbb{T}_x S_1 \rightarrow \mathbb{T}_{\iota_{S_1}(x)} M$ jest kanonicznym monomorfizmem, przeto

$$(1.4.43) \quad S_1 \bar{\cap} S_2 \iff \forall_{x \in S_1 \cap S_2} : \mathbb{T}_x S_1 + \mathbb{T}_x S_2 = \mathbb{T}_x M,$$

co jest zgodne z intuicją geometryczną leżącą u podstaw całej konstrukcji. Znajduje ona dodatkowe solidne podparcie w

STWIERDZENIE 116. *Przyjmijmy oznaczenia Def. 84. Ilekroć $S_1 \bar{\cap} S_2$, podprzestrzeń $S_1 \cap S_2$ ma kanoniczną strukturę podrozmaitości klasy C^k , kowymiaru*

$$(1.4.44) \quad \operatorname{codim}_M(S_1 \cap S_2) = \operatorname{codim}_M S_1 + \operatorname{codim}_M S_2,$$

więc też

$$\forall_{x \in S_1 \cap S_2} : \mathbb{T}_x(S_1 \cap S_2) = \mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2.$$

■

Dowód: W świetle Tw. 1.4.23 (i uwag wypowiedzianych pod jego dowodem) $\iota_{S_1}^{-1}(S_2) \equiv S_1 \cap S_2$ ma kanoniczną strukturę podrozmaitości, a nadto otrzymujemy równość

$$\text{codim}_{S_1}(S_1 \cap S_2) \equiv \text{codim}_{S_1} \iota_{S_1}^{-1}(S_2) = \text{codim}_M S_2,$$

tj.

$$\dim S_1 - \dim(S_1 \cap S_2) = \dim M - \dim S_2,$$

a zatem

$$\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = -\dim(S_1 \cap S_2).$$

Stąd też

$$\begin{aligned} \text{codim}_M S_1 + \text{codim}_M S_2 &\equiv 2\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = \dim M - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &\equiv \text{codim}_M(S_1 \cap S_2), \end{aligned}$$

która pokazuje dowodnie, że $\text{codim}_M S_1$ liniowo niezależnych funkcji definiujących S_1 jako ich wspólną poziomice zerową, wraz z $\text{codim}_M S_2$ liniowo niezależnymi funkcjami definiującymi S_2 tworzy układ liniowo niezależny definiujący w tenże sposób $S_1 \cap S_2$.

Ponadto jest oczywistym, że $\mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2 \subset \mathbb{T}_x(S_1 \cap S_2)$, dla zakończenia dowodu pozostaje więc sprawdzić równość wymiarów obu podprzestrzeni. W tym celu przywołujemy warunek transwersalności (1.4.43), który prowadzi do równości

$$\dim M = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2)$$

i na mocy wcześniej udowodnionej równości kowymiarów (1.4.44) daje pożądaną równość

$$\begin{aligned} \dim M - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x(S_1 \cap S_2) &\equiv \text{codim}_M(S_1 \cap S_2) = \text{codim}_M S_1 + \text{codim}_M S_2 \\ &\equiv 2\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = \dim M - \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2). \end{aligned}$$

□

Przydatnego przeformułowania warunku definiującego parę map transwersalnych dostarcza

STWIERDZENIE 117. *Przyjmijmy zapis Def. 84 oraz Stw. 113 i rozważmy odwzorowania $f_\alpha \in C^k(M_\alpha, M)$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Prawdziwą jest równoważność*

$$f_1 \bar{\pitchfork} f_2 \iff f_1 \times f_2 \bar{\pitchfork} \text{graph}(\text{id}_M) \subset M \times M.$$

■

Dowód: Transwersalność produktu $f_1 \times f_2$ względem $\text{graph}(\text{id}_M)$ jest równoznaczna z równością – dla dowolnego punktu $(x_1, x_2) \in (f_1 \times f_2)^{-1}(\text{graph}(\text{id}_M))$ –

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(f_1 \times f_2)(x_1, x_2)}(M \times M) &= \mathbb{T}_{(f_1 \times f_2)(x_1, x_2)} \text{graph}(\text{id}_M) \\ &\quad + \mathbb{T}_{(x_1, x_2)}(f_1 \times f_2)(\mathbb{T}_{(x_1, x_2)}(M_1 \times M_2)), \end{aligned}$$

którą przepisujemy w postaci

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathbb{T}_{f_2(x_2)}M &= \mathbb{T}_{(f_1(x_1), f_2(x_2))} \text{graph}(\text{id}_M) \\ &+ \mathbb{T}_{x_1} f_1(\mathbb{T}_{x_1} M_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2} f_2(\mathbb{T}_{x_2} M_2), \end{aligned}$$

co po uwzględnieniu $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) \in \text{graph}(\text{id}_M)$ daje

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M &= \mathbb{T}_{(f_1(x_1), f_1(x_1))} \text{graph}(\text{id}_M) \\ &+ \mathbb{T}_{x_1} f_1(\mathbb{T}_{x_1} M_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2} f_2(\mathbb{T}_{x_2} M_2) \\ &\equiv \Delta_{\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M}(\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M) \\ &+ \mathbb{T}_{x_1} f_1(\mathbb{T}_{x_1} M_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2} f_2(\mathbb{T}_{x_2} M_2), \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy w zapisie określone dla dowolnego punktu $y \in M$ diagonalne zanurzenie \mathbb{R} -liniowe

$$\Delta_{\mathbb{T}_y M} : \mathbb{T}_y M \longrightarrow \mathbb{T}_y M \oplus \mathbb{T}_y M : v \longmapsto (v, v).$$

Na tym etapie możemy już przywołać Stw. 28, które w obecnym kontekście pozwala zapisać ustalą równoważność między wypisanym rozkładem algebraicznym $\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M$ i równością

$$\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M = \mathbb{T}_{x_1} f_1(\mathbb{T}_{x_1} M_1) +_G \mathbb{T}_{x_2} f_2(\mathbb{T}_{x_2} M_2),$$

w której rozpoznajemy warunek transwersalności odwzorowań f_1 i f_2 . \square

Dotychczasowe nasze ustalenia pozwalają wysłowić twierdzenie dające nam do ręki ważne i naturalne narzędzie konstrukcyjne, z którego przyjdzie nam nieraz korzystać w dalszej części kursu, poświęconej geometryzacji struktur algebraicznych. Oto więc mamy

TWIERDZENIE 1.4.24. *Przyjmijmy zapis Def. 84 oraz Przykł. 21 (1) i niechaj $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą odwzorowaniami klasy C^k między C^k -rozmaitościami $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ i C^k -rozmaitością (M, \mathcal{A}) . Wyposażmy produkt włóknisty $M_1 \times_M M_2$ domykający kopułkę $((f_1, f_2), M)$ do diagramu przemiennego*

$$\begin{array}{ccc} & M_1 \times_M M_2 & \\ \text{pr}_1 \uparrow_{M_1 \times_M M_2} & & \text{pr}_2 \uparrow_{M_1 \times_M M_2} \\ M_1 & & M_2 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & M & \end{array}$$

w topologię podprzestrzeni indukowaną z topologii produktowej na $M_1 \times M_2$. Ilekroć $f_1 \bar{\cap} f_2$, $M_1 \times_M M_2$ jest podrozmaitością klasy C^k gładko włożoną w $M_1 \times M_2$. W szczególności jest tak, gdy jedno z odwzorowań f_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ jest submersją. \blacksquare

Dowód: W świetle Stw. 117, a z racji założenia o transwersalności f_1 i f_2 – spełniona jest relacja

$$f_1 \times f_2 \overline{\text{graph}}(\text{id}_M),$$

a ponieważ produkt włóknisty spełnia tożsamość

$$M_1 \times_M M_2 = (f_1 \times f_2)^{-1} \text{graph}(\text{id}_M),$$

przeto teza wynika wprost z treści Stw. 1.4.23.

W przypadku, gdy (choć) jedno z odwzorowań – powiedzmy, że f_1 – jest submersją, warunek transwersalności wzajemnej obu odwzorowań z pierwszej części tezy dowodzonego twierdzenia jest spełniony automatycznie, oto bowiem dla dowolnej pary punktów $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ o własności $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ otrzymujemy ciąg inkluzji

$$\mathbb{T}_{f_1(x)}M = \text{im } \mathbb{T}_{x_1}f_1 \subset \text{im } \mathbb{T}_{x_1}f_1 + \text{im } \mathbb{T}_{x_2}f_2 \subset \mathbb{T}_{f_1(x)}M,$$

który dowodzi pożądanej równości

$$\mathbb{T}_{f_1(x)}M = \text{im } \mathbb{T}_{x_1}f_1 + \text{im } \mathbb{T}_{x_2}f_2.$$

□

Grupy topologiczne – struktura i działanie

DEFINICJA 85. Przyjmijmy zapis Def. 54. **Grupa topologiczna** to obiekt grupowy (\bullet jest punktem)

$$(\{\bullet\}, G, m \equiv \cdot, \text{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto e),$$

w kategorii **Top** w rozumieniu Def. 51. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(\star, G, m, \text{Inv}, \star \rightarrow \{e\})$ to grupa topologiczna $(\{\bullet\}, H, m \upharpoonright_{H \times H}, \text{Inv} \upharpoonright_H, \bullet \mapsto e)$, której obiekt morfizmów H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G . **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(\star_1, G_1, m_1, \text{Inv}_1, \bullet_1 \mapsto e_1)$ i $(\star_2, G_2, m_2, \text{Inv}_2, \bullet_2 \mapsto e_2)$ to homomorfizm wewnętrzny w **Top** między tymi obiektami grupowymi. Grupy topologiczne wraz z homomorfizmami topologicznymi między nimi tworzą **kategorię grup topologicznych**, którą będziemy oznaczać symbolem

TopGrp.

Analogicznie definiujemy **grupę Liego** jako obiekt grupowy (j/w) w kategorii $\mathbf{Man}^{(\infty)}$. **Podgrupa Liego** grupy Liego $(\star, G, m, \text{Inv}, \star \rightarrow \{e\})$ to grupa Liego $(\star, H, m \upharpoonright_{H \times H}, \text{Inv} \upharpoonright_H, \star \rightarrow \{e\})$, której obiekt morfizmów H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G . **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm wewnętrzny w $\mathbf{Man}^{(\infty)}$ między tymi obiektami grupowymi. Grupy Liego wraz z homomorfizmami grup Liego tworzą **kategorię grup Liego**, którą będziemy oznaczać symbolem

LieGrp.

▲

PRZYKŁAD(Y) 27.

- (1) $\mathbb{R}^{\times n}$
- (2) $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \text{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$
- (3) $\text{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$
- (4) Grupa liniowa główna $\text{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ z Przykł. 12 (7) dziedziczy topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni $\mathbb{R}(n) \equiv \mathbb{R}^{\times n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{R}_{\neq 0})$ (wszak $\det_{(n)} : \mathbb{R}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym).

✓

LEMAT 1.5.1. *Przyjmijmy zapis Def. 85 i niechaj G będzie grupą topologiczną. Dla dowolnego elementu $g \in G$ i dowolnego otoczenia otwartego $\mathcal{O}_e \in \mathcal{T}(G)$ elementu neutralnego $e \in G$ istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_g \in \mathcal{T}(G)$ elementu g spełniające warunek*

$$m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)(\mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e.$$

■

Dowód: Odwzorowanie $f \equiv m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)$ jest ciągle (w topologii produktowej na swej dziedzinie), przeto istnieją otoczenia otwarte $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ elementu g o własności $f(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_e$. Otwarte otoczenie $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 =: \mathcal{O}_g$ spełnia pożądaną własność $f(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e$. □

STWIERDZENIE 118. *Przyjmijmy zapis Def. 85 i Stw. 94. Funktor styczny \mathbb{T} z kategorii $\mathbf{Man}^{(\infty)}$ indukuje w kanoniczny sposób endofunktor kategorii \mathbf{LieGrp} , przy czym obraz*

$$\{(\bullet, 0)\}, \mathbb{T}G, \mathbb{T}m, \mathbb{T}\text{Inv}, (\bullet, 0) \mapsto 0_{\mathbb{T}_e G} \in \mathbb{T}_e G$$

*grupy Liego $(\star, G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$ nosi miano **stycznej grupy Liego**. Rzut kanoniczny $\pi_{\mathbb{T}G}$ oraz cięcia zerowe $\mathbf{0}_{\mathbb{T}G}$ są homomorfizmami grup Liego spełniającymi relację*

$$(1.5.1) \quad \pi_{\mathbb{T}G} \circ \mathbf{0}_{\mathbb{T}G} = \text{id}_G.$$

■

Dowód: Funktorialność \mathbb{T} zapewnia transport nie tylko pełnej struktury (czyli rozmaitości i odwzorowań) grupy Liego G , ale także jej aksjomatyki – funkcyjnym obrazem diagramów przemiennych (IG1)-(IG3) dla G są analogiczne diagramy dla $\mathbb{T}G$. Jedynym zatem nietrywialnym punktem dowodzonego stwierdzenia jest ten mówiący o homomorficznym charakterze rzutu kanonicznego i cięcia zerowego oraz ich wzajemnej relacji. Zaczniemy od rzutu kanonicznego. Zważywszy definicję odwzorowania stycznego, stwierdzamy, że dla dowolnych $(g, h) \in G^{\times 2}$ jest

$$\mathbb{T}_{(g,h)}m : \mathbb{T}_{(g,h)}(G \times G) \cong \mathbb{T}_g G \oplus \mathbb{T}_h G \longrightarrow \mathbb{T}_{m(g,h)}G,$$

zatem

$$\pi_{\mathbb{T}G} \circ \mathbb{T}m = m \circ (\pi_{\mathbb{T}G} \times \pi_{\mathbb{T}G}),$$

a to jest właśnie definiująca własność homomorfizmu grup, przy czym wobec gładkości m także odwzorowanie styczne jest gładkie, mamy przeto do czynienia z homomorfizmem grup Liego. Aby postąpić dalej, musimy wejrzeć w strukturę $\mathbb{T}_{(g,h)}m$. Wybierzmy lokalne mapy: $\kappa_g \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O}_g \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$, $n = \dim G$ na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_g punktu g , $\kappa_h \equiv (y^1, y^2, \dots, y^n) : \mathcal{O}_h \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_h \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_h punktu h oraz $\kappa_{g \cdot h} \equiv (z^1, z^2, \dots, z^n) : \mathcal{O}_{g \cdot h} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{g \cdot h} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_{g \cdot h}$ punktu $g \cdot h$, a wtedy – dla dowolnych $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g) \in \mathbb{T}_g G$ i $W = W^a \frac{\partial}{\partial y^a}(h) \in \mathbb{T}_h G$ (patrz: dowód Tw. 1.4.19) – dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(g,h)}m(V, W) &= V^i \frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g), \kappa_h(h)) \frac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h) \\ &\quad + W^a \frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g), \kappa_h(h)) \frac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h). \end{aligned}$$

W wyrażeniach $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g), \kappa_h(h))$ i $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g), \kappa_h(h))$ rozpoznajemy elementy macierzy odwzorowań liniowych $\mathbb{T}_g \wp_h$ i $\mathbb{T}_h \ell_g$, odpowiednio, możemy zatem przepisać powyższe w wygodnej postaci

$$(1.5.2) \quad \mathbb{T}_{(g,h)} m = \mathbb{T}_g \wp_h \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \text{pr}_2.$$

Na tej podstawie wnioskujemy o słuszności równości

$$\begin{aligned} \mathbb{T}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \mathbf{0}_{\mathbb{T}G})(g, h) &= \mathbb{T}_{(g,h)} m(0_{\mathbb{T}_g G}, 0_{\mathbb{T}_h G}) = \mathbb{T}_g \wp_h(0_{\mathbb{T}_g G}) + \mathbb{T}_h \ell_g(0_{\mathbb{T}_h G}) \\ &= 0_{\mathbb{T}_{g,h} G} + 0_{\mathbb{T}_{g,h} G} = 0_{\mathbb{T}_{g,h} G} \equiv \mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \circ m(g, h), \end{aligned}$$

która dokumentuje homomorficzny charakter $\mathbf{0}_{\mathbb{T}G}$, przy czym – rzecz jasna – mamy tu do czynienia z homomorfizmem gładkim. Tożsamość (1.5.1) jest oczywista. \square

UWAGA 26. Ażeby do końca oswoić styczną grupę Liego, znajdziemy jeszcze jawną postać morfizmu $\mathbb{T}\text{Inv}$. W tym celu roważymy tożsamości

$$m \circ (\text{id}_G \times \text{Inv}) \circ \Delta = \eta = m \circ (\text{Inv} \times \text{id}_G) \circ \Delta,$$

w których zapisie użyliśmy odwzorowań (jawnie) gładkich

$$\Delta : G \longrightarrow G \times G : g \longmapsto (g, g), \quad \eta : G \circlearrowright : g \longmapsto e,$$

a których funktorialnym obrazem względem \mathbb{T} jest

$$\mathbb{T}m \circ (\text{id}_{\mathbb{T}G} \times \mathbb{T}\text{Inv}) \circ \mathbb{T}\Delta = 0 = \mathbb{T}m \circ (\mathbb{T}\text{Inv} \times \text{id}_{\mathbb{T}G}) \circ \mathbb{T}\Delta.$$

Uwzględniając Równ. (1.5.2), wyprowadzamy stąd tożsamości (dla dowolnych $g \in G$ i $V \in \mathbb{T}_g G$)

$$\mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}}(V) + \mathbb{T}_{g^{-1}} \ell_g \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(V) = 0_{\mathbb{T}_e G} = \mathbb{T}_{g^{-1}} \wp_g \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(V) + \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}(V),$$

czyli

$$\mathbb{T}_g \text{Inv} = -\mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}} = -\mathbb{T}_e \wp_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}.$$

Godzi się przy tym podkreślić, że ostatnia równość nie wymaga powyższego wyprowadzenia, wynika ona bowiem wprost ze wzajemnej przemienności lewego i prawego działania regularnego na G .

STWIERDZENIE 119. *Przyjmijmy zapis Def. 7 i 53, Stw. 118 oraz Przykł. 7 (5). Odwzorowanie*

$$\mathbb{T}_e \ell. : G_{\mathbb{T}_e \text{Ad} \times \mathbb{T}_e G} \longrightarrow \mathbb{T}G : (g, X) \longmapsto \mathbb{T}_e \ell_g(X)$$

jest izomorfizmem grup Liego.

■

Dowód: Na podstawie Równ. (1.5.2) możemy przepisać

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(g,e)} m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \text{id}_{\mathbb{T}_e G})(g, X) &= \mathbb{T}_{(g,e)} m(0_{\mathbb{T}_g G}, X) = \mathbb{T}_g \wp_e(0_{\mathbb{T}_g G}) + \mathbb{T}_e \ell_g(X) \\ (1.5.4) \quad &= \mathbb{T}_e \ell_g(X) \equiv \mathbb{T}_e \ell_g(X), \end{aligned}$$

czyli

$$\mathbb{T}_e \ell. = \mathbb{T}_{(g,e)} m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \text{id}_{\mathbb{T}_e G}),$$

co dowodzi gładkości $\mathbb{T}_e \ell.$. W połączeniu z obserwacją

$$(\mathbb{T}_e \ell.)^{-1} = (\pi_{\mathbb{T}G}, \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{T}G}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\mathbb{T}G}(\cdot)}(\cdot)),$$

którą weryfikujemy w bezpośrednim rachunku (w którym $v \in \text{TG}$):

$$\begin{aligned} & (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot)) \circ \mathbb{T}_e \ell.(g, X) \\ &= (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot)) \circ \mathbb{T}_e \ell_g(X) = (g, \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_e \ell_g(X)) \\ &= (g, \mathbb{T}_e(\ell_{g^{-1}} \circ \ell_g)(X)) = (g, \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}.g}(X)) = (g, \mathbb{T}_e \ell_e(X)) = (g, X), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}_e \ell. \circ (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot))(v) \\ &= \mathbb{T}_e \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)} \circ \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)} \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)^{-1}}(v) = \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)}(\ell_{\pi_{\text{TG}}(v)} \circ \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)^{-1}})(v) \\ &= \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)}(\ell_e)(v) = v, \end{aligned}$$

przekonuje nas to o dyfeomorficznym charakterze tego odwzorowania (zależność $(\mathbb{T}_e \ell.)^{-1}$ od argumentu jest jawnie gładka). Pozostaje zatem upewnić się, że mamy do czynienia z homomorfizmem grup. W tym celu obliczamy – dla dowolnych $X, Y \in \mathbb{T}_e G$ oraz $g, h \in G$, a w odwołaniu do Równ. (1.5.2) –

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}_e \ell.((g, X)_{\mathbb{T}_e \text{Ad} \cdot} (h, Y)) = \mathbb{T}_e \ell.(g \cdot h, \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y) \\ &= \mathbb{T}_e \ell_{g \cdot h}(\mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y) = \mathbb{T}_e(\ell_{g \cdot h \cdot h^{-1}} \circ \wp_h)(X) + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_h(Y) \\ &= \mathbb{T}_e(\wp_h \circ \ell_g)(X) + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_h(Y) = \mathbb{T}_g \wp_h(\mathbb{T}_e \ell_g(X)) + \mathbb{T}_h \ell_g(\mathbb{T}_e \ell_h(Y)) \\ &\equiv \mathbb{T}_{(g, h)} m(\mathbb{T}_e \ell_g(X), \mathbb{T}_e \ell_h(Y)) \equiv \mathbb{T}_{(g, h)} m(\mathbb{T}_e \ell.(g, X), \mathbb{T}_e \ell.(h, Y)). \end{aligned}$$

Warto odnotować na marginesie, że $\mathbb{T}_e \ell.$ jest stycznościowym odpowiednikiem dyfeomorfizmu $\ell. \upharpoonright_{G \times \{e\}} : G \times \{e\} \rightarrow G$. \square

DEFINICJA 86. Przyjmijmy zapis Stw. 94 i dowodu Tw. 1.4.19. **Pole wektorowe lewoniemiennicze** na grupie Liego G to pole wektorowe $\mathcal{V}_L \in \Gamma(\text{TG})$ o własności

$$\forall_{g \in G} : \ell_g * \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Analogicznie, **pole wektorowe prawoniemiennicze** na G to pole wektorowe $\mathcal{V}_R \in \Gamma(\text{TG})$ o własności

$$\forall_{g \in G} : \wp_g * \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

▲

STWIERDZENIE 120. Przyjmijmy zapis Def. 72 i 86. Zbiory

$$\mathfrak{X}_L(G) := \{ \mathcal{V} \in \mathfrak{X}(G) \mid \mathcal{V} \text{ lewoniemiennicze} \},$$

$$\mathfrak{X}_R(G) := \{ \mathcal{V} \in \mathfrak{X}(G) \mid \mathcal{V} \text{ prawoniemiennicze} \}$$

są podprzestrzeniami \mathbb{R} -liniowymi w $\mathfrak{X}(G)$, a ponadto komutator pól wektorowych ogranicza się do każdego z nich,

$$[\cdot, \cdot]_G(\mathfrak{X}_H(G) \times \mathfrak{X}_H(G)) \subset \mathfrak{X}_H(G), \quad H \in \{L, R\}.$$

Parę

$$(\mathfrak{X}_L(G), [\cdot, \cdot]_G \upharpoonright_{\mathfrak{X}_L(G) \times \mathfrak{X}_L(G)})$$

nazywamy **algebrą pól lewniezmienicznych na G** , a parę

$$(\mathfrak{X}_R(G), [\cdot, \cdot]_G \upharpoonright_{\mathfrak{X}_R(G) \times \mathfrak{X}_R(G)})$$

algebrą pól prawniezmienicznych na G . ■

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost z \mathbb{R} -liniowości warunku lewoliniowości (wzgl. prawoliniowości), a druga – ze Stw. 101. Istotnie, dla dowolnego elementu $g \in G$ i dowolnych pól lewniezmienicznych $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}_L(G)$, otrzymujemy

$$\ell_{g*}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_G = [\ell_{g*}\mathcal{V}_1, \ell_{g*}\mathcal{V}_2]_G = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_G.$$

Analogiczny rachunek dowodzi prawniezmieniczności komutatora dowolnej pary pól prawniezmienicznych. □

DEFINICJA 87. Przyjmijmy zapis Def. 16. **Algebra Liego** nad ciałem \mathbb{K} to kolekcja $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V, [\cdot, \cdot]_V)$ złożona z przestrzeni \mathbb{K} -liniowej $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V)$ oraz odwzorowania dwu- \mathbb{K} -liniowego skośnie symetrycznego

$$[\cdot, \cdot]_V : V \times V \longrightarrow V : (v, w) \longmapsto [v, w]_V,$$

zwanego **nawiasem Liego na V** , którego **jakobiator**

$$\text{Jac}_V : V \times V \times V \longrightarrow V$$

$$: (X_1, X_2, X_3) \longmapsto [[X_1, X_2]_V, X_3]_V + [[X_3, X_1]_V, X_2]_V + [[X_2, X_3]_V, X_1]_V$$

jest tożsamościowo równy zeru. Tożsamość w algebrze wyrażająca znikanie jakobiatora nazywa się **tożsamością Jacobiego**.

Podalgebrą Liego algebry Liego $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V, [\cdot, \cdot]_V)$ nazwiemy algebrę Liego $((W, +_W \upharpoonright_{W \times W}, P_W \upharpoonright_W, \bullet \mapsto \mathbf{0}_W), \ell_W \upharpoonright_{\mathbb{K} \times W}, [\cdot, \cdot]_W \upharpoonright_{W \times W})$ o nośniku $W \subseteq V$ będącym podprzestrzenią \mathbb{K} -liniową V .

Homomorfizm algebr Liego między algebrami Liego $((V_\alpha, +_\alpha, P_\alpha, \bullet \mapsto \mathbf{0}_\alpha), \ell_\alpha, [\cdot, \cdot]_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ o własności

$$[\cdot, \cdot]_2 \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot, \cdot]_1.$$

Algebry Liego nad ciałem \mathbb{K} wraz z homomorfizmami algebr Liego tworzą **kategorię algebr Liego nad ciałem \mathbb{K}** , którą będziemy oznaczać symbolem

LieAlg. ▲

STWIERDZENIE 121. *Przyjmijmy zapis Def. 87, Stw. 120 i Przykł. 7 (4). Odwzorowanie*

$$\text{T.Ad.} : \mathfrak{X}_R(G) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_L(G) : \mathcal{V} \longmapsto \text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot))$$

jest izomorfizmem przestrzeni pól prawo- i lewniezmienicznych. Istnieją kanoniczne izomorfizmy (przestrzeni \mathbb{R} -liniowych)

$$H. : \mathfrak{g} \equiv \text{Der}_e C^1(G, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_H(G), \quad H \in \{L, R\},$$

o własności

$$(1.5.5) \quad L \circ (R)^{-1} \equiv \text{T.Ad.}$$

Indukują one na przestrzeni $\mathfrak{g} \cong \text{T}_e G$ nawias Liego

$$[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : (X_1, X_2) \longmapsto [H_{X_1}, H_{X_2}]_{\mathfrak{G}}(e).$$

Algebra Liego

$$(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}) \equiv \text{Lie } G$$

(w której zapisie \mathfrak{g} jest traktowana jako przestrzeń \mathbb{R} -liniowa) nosi miano **algebry Liego grupy Liego** G . ■

Dowód: Dla dowolnego pola prawoniezmienniczego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_R(G)$ sprawdzamy lewoniezmienniczność jego obrazu względem (jawnie \mathbb{R} -liniowego i odwracalnego) T.Ad. w bezpośrednim rachunku, prowadzonym dla dowolnych $g, h \in G$ z uwzględnieniem prawoniezmienniczności \mathcal{V} ,

$$\begin{aligned} \ell_{g*}(\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(h) &= \ell_{g*}^{\ell_{g^{-1}}(h)}((\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(\ell_{g^{-1}}(h))) \\ &= \ell_{g*}^{g^{-1}h}(\text{T}_{g^{-1}h} \text{Ad}_{g^{-1}h}(\mathcal{V}(g^{-1}h))) = \text{T}_{g^{-1}h}(\ell_h \circ \wp_{h^{-1}g})(\mathcal{V}(g^{-1}h)) \\ &= \text{T}_e \ell_h \circ \text{T}_{g^{-1}h} \wp_{h^{-1}g}(\mathcal{V}(g^{-1}h)) = \text{T}_e \ell_h(\mathcal{V}(e)) \equiv \text{T}_e \ell_h \circ \text{T}_h \wp_{h^{-1}}(\mathcal{V}(h)) \\ &\equiv (\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(h). \end{aligned}$$

Poszukiwania izomorfizmu L zaczniemy od zauważenia, że dowolne pole lewoniezmiennicze $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(G)$ spełnia tożsamość

$$\mathcal{V}(g) = (\ell_{g*} \mathcal{V})(g) \equiv \ell_{g*}^{\ell_{g^{-1}}(g)}(\mathcal{V} \circ \ell_{g^{-1}}(g)) = \ell_{g*}^e(\mathcal{V}(e)) \equiv \mathcal{V}(e) \circ \ell_g^*,$$

gdzie ℓ_g^* , $g \in G$ jest cofnięciem zdefiniowanym w dowodzie Tw. 1.4.19. Jako że $\mathcal{V}(e) \in \mathfrak{g}$, powyższa obserwacja podpowiada wprost definicję poszukiwanego izomorfizmu. Określmy odwzorowanie, jawnie \mathbb{R} -liniowe,

$$L : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(G) : X \longmapsto X \circ \ell^* \equiv L_X,$$

Bez trudu sprawdzamy lewoniezmienniczność pól w jego obrazie,

$$\begin{aligned} \ell_{g*} L_X &= \ell_{g*}^{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}(L_X \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)) \equiv (L_X \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)) \circ \ell_g^* \equiv X \circ \ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}^* \circ \ell_g^* \\ &= X \circ (\ell_g \circ \ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)})^* = X \circ \ell_{g \cdot \ell_{g^{-1}}(\cdot)}^* = X \circ \ell^* \equiv L_X, \quad g \in G. \end{aligned}$$

Kierując się wcześniejszym rachunkiem postulujemy odwrotność L w postaci, także jawnie \mathbb{R} -liniowej,

$$\text{ev}_e : \mathfrak{X}_L(G) \longrightarrow \mathfrak{g} : \mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V}(e),$$

oto bowiem zachodzi

$$\mathcal{V} = \text{ev}_e(\mathcal{V}) \circ \ell^* \equiv L_{\text{ev}(\mathcal{V})}.$$

Z drugiej strony obliczamy

$$\text{ev}_e(L_X) = X \circ \ell_e^* = X,$$

więc w istocie

$$\text{ev}_e = (L.)^{-1}.$$

Zastąpiwszy w powyższym rozumowaniu działanie lewe regularne ℓ . jego prawym odpowiednikiem \wp ., możemy powtórzyć to rozumowanie w odniesieniu do pól prawniezmiennicznych, co daje nam izomorfizm

$$R. : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_R(G) : X \longmapsto X \circ \wp^* \equiv R_X,$$

o odwrotności – jak poprzednio –

$$(R.)^{-1} = \text{ev}_e.$$

Tożsamość (1.5.5) jest w oczywisty sposób spełniona. Pozostaje już tylko przekonać się, że jakobiator jawnie skośnie symetrycznego i dwu- \mathbb{R} -liniowego odwzorowania $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ znika tożsamościowo. Czynimy to w bezpośrednim rachunku, w którym wykorzystujemy prostą tożsamość

$$L_{[X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}} \equiv L_{\text{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}]_G)} = [L_{X_1}, L_{X_2}]_G.$$

Oto więc posiłkując się Stw. 100, wyznaczamy

$$\begin{aligned} & \text{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1, X_2, X_3) \\ &= [L_{[X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}}, L_{X_3}]_G(e) + [L_{[X_3, X_1]_{\mathfrak{g}}}, L_{X_2}]_G(e) + [L_{[X_2, X_3]_{\mathfrak{g}}}, L_{X_1}]_G(e) \\ &= [[L_{X_1}, L_{X_2}]_G, L_{X_3}]_G(e) + [[L_{X_3}, L_{X_1}]_G, L_{X_2}]_G(e) + [[L_{X_2}, L_{X_3}]_G, L_{X_1}]_G(e) \\ &\equiv \text{Jac}_G(L_{X_1}, L_{X_2}, L_{X_3})(e) = 0_{\mathfrak{g}}, \end{aligned}$$

co kończy dowód stwierdzenia. \square

DEFINICJA 88. Przyjmijmy zapis Stw. 121 i jego dowodu, przy czym założymy dodatkowo, że $N := \dim G < \infty$. Wybierzmy w przestrzeni wektorowej \mathfrak{g} dowolną bazę $\mathcal{T} := \{t_A\}_{A \in \overline{1, N}}$, a wówczas **stałe struktury algebry Liego** Lie G w bazie \mathcal{T} to liczby $f_{ABC} = -f_{BAC} \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \overline{1, N}$ zdefiniowane przez **równania struktury algebry Liego** Lie G

$$[t_A, t_B] = f_{ABC} \triangleright t_C, \quad A, B \in \overline{1, N}.$$

W konsekwencji znikania jakobiatora na Lie G spełniają one tożsamościowo dwu- \mathbb{R} -liniowe relacje

$$f_{ABD} f_{DCE} + f_{CAD} f_{DBE} + f_{BCD} f_{DAE} = 0, \quad A, B, C, E \in \overline{1, N},$$

zwane **tożsamościami Jacobiego dla stałych struktury** Lie G . Elementy bazy $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu $\mathfrak{X}(G)$ będącej L -wzgl. R -obrazem bazy \mathcal{T} będziemy oznaczać symbolem

$$L_A(\cdot) \equiv T_e \ell.(t_A)$$

wzgl.

$$R_A(\cdot) \equiv T_e \wp.(t_A).$$

▲

TWIERDZENIE 1.5.2 (Funktorialność Lie). *Przyjmijmy zapis Def. 87 i Stw. 121. Przymorządkowanie grupom Liego ich algebr Liego rozszerza się kanonicznie do funktora*

$$\text{Lie} : \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}.$$

o składowej morfizmowej

$$\begin{aligned} \text{Lie} & : \text{Mor } \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}} \\ & : \left(G_1 \xrightarrow{\chi} G_2 \right) \longmapsto \left(\text{Lie } G_1 \xrightarrow{\chi_*^{e_1}} \text{Lie } G_2 \right). \end{aligned}$$

■

Dowód: Odwzorowanie $\chi_*^{e_1}$ jest dobrze określone, pozostaje zatem jedynie wykazać, że jest ono homomorfizmem algebr Liego. Punktem wyjścia będzie dla nas następująca tożsamość funkcjonalna, słuszna dla dowolnego elementu $g_1 \in G$:

$$\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi = \chi \circ \ell_{g_1}.$$

Na jej podstawie obliczamy, dla dowolnych: funkcji $f \in C^1(G_2; \mathbb{R})$ oraz wektora $X \in \mathfrak{g}_1$,

$$\begin{aligned} \chi_*^{g_1}(L_X(g_1))(f) & \equiv L_X(g_1) \circ \chi^*(f) \equiv X \circ \ell_{g_1}^* \circ \chi^*(f) = X \circ (\chi \circ \ell_{g_1})^*(f) \\ & = X \circ (\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi)^*(f) = (X \circ \chi^*) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \\ & \equiv (\chi_*^{e_1} X) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \equiv L_{\chi_*^{e_1} X}(\chi(g_1))(f), \end{aligned}$$

co pozwala skonstatować, że para pól wektorowych $(L_X, L_{\chi_*^{e_1} X})$ jest w relacji określanej przez χ w rozumieniu Def. 73. To pozwala odwołać się do Stw. 102, w świetle którego dla dowolnych wektorów $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$ zachodzi pożądana tożsamość

$$\begin{aligned} [\chi_*^{e_1} X_1, \chi_*^{e_1} X_2]_{\mathfrak{g}_2} & \equiv [L_{\chi_*^{e_1} X_1}, L_{\chi_*^{e_1} X_2}]_{G_2}(e_2) = [L_{\chi_*^{e_1} X_1}, L_{\chi_*^{e_1} X_2}]_{G_2} \circ \chi(e_1) \\ & = \chi_*^{e_1} [L_{X_1}, L_{X_2}]_{G_1}(e_1) \equiv \chi_*^{e_1} [X_1, X_2]_{\mathfrak{g}_1}. \end{aligned}$$

□

STWIERDZENIE 122. *Pola lewo- i prawoniezmiennicze na dowolnej grupie Liego są zupełne w rozumieniu Def. 75.*

■

Dowód: Rozważmy gładką krzywą całkową $\gamma :]a, b[\longrightarrow G$ przez $\gamma(t_0) = g_0 \in G$ w $t_0 \in]a, b[$ pola lewoniezmienniczego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(G)$, tj. rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$D\gamma(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)), \quad t \in]a, b[, \quad \gamma(t_0) = g_0$$

Wyberzmy (dowolnie) czasy pośrednie t_1, t_2 spełniające warunki $a < t_1 < t_2 < b$ i oznaczmy $\Delta t := t_2 - t_1 > 0$. Krzywą γ będziemy teraz dowolnie przedłużać wykorzystując przechodność działania lewego regularnego na G , która pozwala nam wskazać $g_{21} := \gamma(t_2) \cdot \gamma(t_1)^{-1}$. Zdefiniujmy zatem ścieżkę

$$\gamma_{\Delta t} :]a + \Delta t, b + \Delta t[\longrightarrow G : t \longmapsto \ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t).$$

Jest ona rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$D\gamma_{\Delta t}(t) = T_{\gamma(t-\Delta t)} \ell_{g_{21}} \circ D\gamma(t - \Delta t), \quad t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[, \quad \gamma_{\Delta t}(t_2) = \gamma(t_2),$$

a ponieważ $t - \Delta t \in]a, b[$ dla dowolnego czasu $t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[$, przeto – wobec lewonezmienniczości pola \mathcal{V} –

$$D\gamma_{\Delta t}(t) = T_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ \mathcal{V}(\gamma(t-\Delta t)) = \mathcal{V}(\ell_{g_{21}} \circ \gamma(t-\Delta t)) \equiv \mathcal{V}(\gamma_{\Delta t}(t)).$$

Widzimy więc, że także $\gamma_{\Delta t}$ jest gładką krzywą całkową pola \mathcal{V} , stąd też – na mocy Stw. 1.4.11 – na niepustym przedziale $\Delta I :=]a + \Delta t, b[\ni t_2$ zachodzi równość

$$\gamma_{\Delta t} \upharpoonright_{\Delta I} = \gamma \upharpoonright_{\Delta I}$$

i otrzymujemy gładkie przedłużenie $\tilde{\gamma}$ krzywej γ do $]a, b + \Delta t[$ w postaci

$$\tilde{\gamma} :]a, b + \Delta t[\longrightarrow G : \begin{cases} \gamma(t) & \text{dla } t \in]a, b[\\ \gamma_{\Delta t}(t) & \text{dla } t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[\end{cases} .$$

Dokonując iteracji powyższej procedury, możemy gładko przedłużyć wyjściową krzywą w sposób nieograniczony od góry, tj. do przedziału $]a, \infty[$. Podobny argument pokazuje, że jest ona także przedłużalna wstecz, tj. do $] - \infty, b[$, ostatecznie więc stwierdzamy, że γ przedłuża się gładko do \mathbb{R} , co wobec dowolności g_0 (wszak pole \mathcal{V} jest określone na całej rozmaitości G) daje nam postulowaną tezę dla pól lewonezmiennicznych. Dowód w przypadku pól prawonezmiennicznych przebiega w pełni analogicznie. \square

STWIERDZENIE 123. *Przyjmijmy zapis Def. 75 i 76 oraz Stw. 121 i niechaj $X \in \mathfrak{g}$. Jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów grupy Liego G stowarzyszone z polami: lewonezmiennicznym L_X ,*

$$\mathcal{L}_1^X(\cdot_2) \equiv \Phi_{L_X}(\cdot_1, \cdot_2) : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G : (t, g) \longmapsto \Phi_{L_X}(t, g) \equiv \mathcal{L}_t^X(g),$$

oraz prawonezmiennicznym R_X ,

$$\mathcal{R}_1^X(\cdot_2) \equiv \Phi_{R_X}(\cdot_1, \cdot_2) : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G : (t, g) \longmapsto \Phi_{R_X}(t, g) \equiv \mathcal{R}_t^X(g),$$

przyjmując postać, odpowiednio,

$$(1.5.6) \quad \mathcal{L}_t^X = \wp_{\mathcal{L}_t^X(e)}, \quad \mathcal{R}_t^X = \ell_{\mathcal{R}_t^X(e)}.$$

■

Dowód: O tym, że potoki zupełnych (i globalnie gładkich) pól lewo- i prawonezmiennicznych zadają jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów G , przesądza Tw. 1.4.20. Pozostaje sprawdzić słuszność tożsamości (1.5.6). Obliczamy, dla dowolnego $g \in G$,

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathcal{L}_t^X(g) = L_X(g) = T_e \ell_g(L_X(e)) \equiv T_e \ell_g\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathcal{L}_t^X(e)\right) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e),$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy ze Stw. 85. Ścieżki $\mathcal{L}_t^X(g)$ i $\ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e)$, przecinające się w chwili $t = 0$,

$$\ell_g \circ \mathcal{L}_0^X(e) = \ell_g(e) = g \cdot e = g \equiv \mathcal{L}_0^X(g),$$

są zatem współstyczne w tej chwili, a wektorem stycznym jest wartość pola lewonezmiennicznego L_X w g . Obie też są krzywymi całkowymi pola L_X , oto bowiem dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi – wprost z definicji –

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_t^X(g) = L_X \circ \mathcal{L}_t^X(g),$$

a także – wobec lewonezmienniczości L_X –

$$\frac{d}{dt} \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e) = T_{\mathcal{L}_t^X(e)} \ell_g(L_X \circ \mathcal{L}_t^X(e)) = L_X \circ \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e).$$

Na mocy Stw. 103 ścieżki te są tożsame. Analogicznie dowodzimy drugiej równości w Równ. (1.5.6). \square

W dalszej części zajmujemy się zatem wyróżnionymi ścieżkami $\mathcal{L}^X(e)$ oraz $\mathcal{R}^X(e)$.

STWIERDZENIE 124. *Przyjmijmy zapis Stw. 123. Gładkie ścieżki*

$$\lambda_X \equiv \mathcal{L}^X(e) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{G}, \quad \rho_X \equiv \mathcal{R}^X(e) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{G}$$

spełniają tożsamości

$$\forall t \in \mathbb{R} : \left(\lambda_{t \triangleright X}(1) = \lambda_X(t) \quad \wedge \quad \rho_{t \triangleright X}(1) = \rho_X(t) \right).$$

■

Dowód: W świetle Stw. 103 krzywa λ_X jest jednoznacznie określona przez warunki

$$\lambda_X(0) = e \quad \wedge \quad \forall t \in \mathbb{R} : \frac{d}{dt} \lambda_X(t) = L_X \circ \lambda_X(t) \equiv \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(t)}(X).$$

Z drugiego z nich wyprowadzamy tożsamość

$$\forall s, t \in \mathbb{R} : \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}(X) = \frac{d}{d(st)} \lambda_X(st) = \frac{1}{s} \cdot \frac{d}{dt} \lambda_X(st),$$

czyli też równoważną jej (wobec \mathbb{R} -liniowości $\mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}$)

$$\forall s, t \in \mathbb{R} : \frac{d}{dt} \lambda_X(st) = \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}(s \triangleright X),$$

Zdefiniujmy rodzinę ścieżek

$$\gamma_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{G} : t \longmapsto \lambda_X(st), \quad s \in \mathbb{R},$$

a wówczas powyższy warunek możemy zapisać w postaci

$$\forall s, t \in \mathbb{R} : \frac{d}{dt} \gamma_s(t) = \mathbb{T}_e \ell_{\gamma_s(t)}(s \triangleright X),$$

przy czym też

$$\gamma_s(0) \equiv \lambda_X(0) = e,$$

stwierdzamy zatem równość

$$\forall s \in \mathbb{R} : \gamma_s = \lambda_{s \triangleright X},$$

skąd ostatecznie wniosek

$$\lambda_{s \triangleright X}(t) = \gamma_s(t) \equiv \lambda_X(st),$$

czyli także – w szczególności

$$\lambda_{s \triangleright X}(1) = \lambda_X(s).$$

Dowód dla ścieżek wykreślanych przez pola prawoniezmiennicze przebiega w pełni analogicznie. \square

STWIERDZENIE 125. *Przyjmijmy zapis Stw. 124. Gładkie ścieżki λ_X i ρ_X są homomorfizmami addytywnej grupy Liego \mathbb{R} (z naturalną strukturą różniczkową) w \mathbb{G} , spełniającymi warunek początkowy*

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_X(t) = X = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \rho_X(t).$$

I odwrotnie, każdy homomorfizm grup Liego

$$\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{G}$$

spełniający warunek początkowy

$$(1.5.7) \quad \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) = X \in \mathfrak{g}$$

jest postaci

$$\lambda_X = \chi = \rho_X.$$

W szczególności więc ścieżki λ_X i ρ_X są tożsame. ■

Dowód: Jedynym, co wymaga sprawdzenia w przypadku ścieżek $\gamma \in \{\lambda_X, \rho_X\}$, jest warunek homomorfizmu

$$\forall_{s,t \in \mathbb{R}} : \gamma(s+t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t).$$

Zacniemy od $\gamma = \lambda_X$. Ażeby udowodnić powyższą tożsamość, musimy przekonać się o tożsamości ścieżek λ_X i $\gamma_s := \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s+\cdot)$ przy ustalonym (dowolnie) s . W tym celu obliczamy – korzystając przy tym wprost z definicji ścieżki γ oraz z lewniezmienniczości L_X –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma_s(t) &= T_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left(\frac{d}{dt} \lambda_X(t+s) \right) \equiv T_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left(\frac{d}{d(s+t)} \lambda_X(s+t) \right) \\ &= T_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} (L_X \circ \lambda_X(s+t)) = L_X \circ \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s+t) \\ &\equiv L_X \circ \gamma_s(t), \end{aligned}$$

skąd wniosek, że ścieżka γ_s jest krzywą całkową pola L_X tak jak λ_X , a nadto

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma_s(t) = L_X \circ \gamma_s(0) = L_X(e) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma(t)$$

i

$$\gamma_s(0) = e = \gamma(0),$$

zatem są to rozwiązania zagadnienia początkowego (dla tego samego pola wektorowego) przy tych samych warunkach początkowych, co w świetle Stw. 103 przesądza o ich postulowanej tożsamości. W przypadku $\gamma = \rho_X$ powtarzamy rozumowanie dla $\tilde{\gamma}_s := \rho_{\rho_X(s)^{-1}} \circ \rho_X(s+\cdot)$.

Niechaj teraz χ będzie homomorfizmem spełniającym warunek początkowy (1.5.7). Różniczkując relację funkcjonalną wyrażającą homomorficzność χ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \chi(s) &\equiv \frac{d}{d\xi} \upharpoonright_{\xi=s} \chi(\xi) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(s+t) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \ell_{\chi(s)} \circ \chi(t) \\ &= T_{\chi(0)} \ell_{\chi(s)} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) \right) = T_e \ell_{\chi(s)} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) \right) \\ &\equiv L_{\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t)} \circ \chi(s), \end{aligned}$$

stwierdzamy, że χ jest krzywą całkową przez $e = \chi(0)$ (równość ta, użyta w powyższym rachunku, jest konsekwencją homomorficzności χ lewniezmienniczego pola wektorowego będącego obrazem wektora $\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t)$ względem izomorfizmu L ze Stw. 121. Powtarzając to rozumowanie w odniesieniu do relacji

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \chi(t) &\equiv \frac{d}{d\xi} \upharpoonright_{\xi=t} \chi(\xi) = \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s+t) = \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \rho_{\chi(t)} \circ \chi(s) \\ &= T_{\chi(0)} \rho_{\chi(t)} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s) \right) = T_e \rho_{\chi(t)} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s) \right) \\ &\equiv R_{\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s)} \circ \chi(t), \end{aligned}$$

uzyskujemy ostatnią brakującą część tezy. □

STWIERDZENIE 126. *Przyjmijmy zapis Stw. 124. Odwzorowanie*

$$\lambda : \mathfrak{g} \times \mathbb{R} \longrightarrow G : (X, t) \longmapsto \lambda_X(t)$$

jest gładkie.

■

Dowód: Gładkość zależności λ od drugiego argumentu wynika wprost z Tw. 103, oto bowiem dla ustalonego X ścieżka λ_X jest krzywą całkową gładkiego pola L_X . Pozostaje zatem wykazać gładkość zależności λ od pierwszego argumentu. W tym celu przedstawimy λ_X jako krzywą całkową gładkiego pola wektorowego na $\mathfrak{g} \times G$ o danych początkowych (X, e) , co pozwoli nam wywnioskować postulowaną gładkość wprost z tegoż Tw. 103. Będziemy przy tym – jak zazwyczaj – utożsamiać $\text{Der}_0 G$ z $T_e G$. Rozważmy zatem pole wektorowe (jawnie gładkie)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} & : \mathfrak{g} \times G \longrightarrow T(\mathfrak{g} \times G) \\ & : (X, g) \longmapsto (0_{\mathfrak{g}}, T_e \ell_g(X)) \equiv (0_{\mathfrak{g}}, L_X(g)) \in \mathfrak{g} \oplus T_e \ell_g(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus T_g G \\ & \qquad \qquad \qquad \equiv T_{(X, g)}(\mathfrak{g} \times G) \end{aligned}$$

Jego potok $\Phi_{\mathcal{V}}$ spełnia równanie

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\mathcal{V}}(t; t_0, (X_0, g_0)) = \mathcal{V}(\Phi_{\mathcal{V}}(t; t_0, (X_0, g_0))),$$

w którego zapisie (X_0, g_0) jest warunkiem początkowym (w czasie t_0),

$$\Phi_{\mathcal{V}}(t_0; t_0, (X_0, g_0)) = (X_0, g_0).$$

Ustalmy warunek początkowy $(X_0, g_0) := (X, e)$ dla $t_0 := 0$. Rzutując powyższe równanie na drugą składową (tj. na G), w której odbywa się nietrywialna ewolucja, otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e)) & = \text{pr}_2 \circ \frac{d}{dt} \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e)) = \text{pr}_2 \circ \mathcal{V}(\Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))) \\ & = L_{\text{pr}_1 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))}(\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))) \\ & = L_X(\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika wprost z konstrukcji \mathcal{V} (w swej pierwszej składowej warunek początkowy pozostaje niezmienny wobec trywialności tejże składowej pola \mathcal{V}). Otrzymana równość pozwala zidentyfikować $\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e))$ jako (jedyną) krzywą całkową pola L_X wychodzącą z punktu $g_0 = e$, czyli

$$\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e)) = \lambda_X(\cdot),$$

co stanowi właśnie zapowiedzianą wcześniej reinterpretację tejże krzywej całkowej pola L_X . \square

DEFINICJA 89. *Przyjmijmy zapis Stw. 126. Odwzorowanie*

$$\exp \equiv \exp^G := \lambda.(1) : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

określamy mianem **odwzorowania eksponencjalnego na G** .

▲

STWIERDZENIE 127. *Przyjmijmy zapis Def. 89. Istnieją otoczenia otwarte: $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w \mathfrak{g} oraz \mathcal{O}_e elementu e w G takie, że odwzorowanie $\exp|_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}$ jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ na \mathcal{O}_e .*

■

Dowód: Obliczymy odwzorowanie styczne do \exp w $0_{\mathfrak{g}}$ na wektorze $X \in \mathfrak{g} \equiv T_{0_{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}$, odwołując się po drodze do Stw. 124. Znajdujemy

$$T_{0_{\mathfrak{g}}}\exp(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright X) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\lambda_{t \triangleright X}(1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\lambda_X(t) = X,$$

czyli

$$T_{0_{\mathfrak{g}}}\exp = \text{id}_{\mathfrak{g}}.$$

Teza dowodzonego stwierdzenia wynika teraz wprost z Tw. 1.4.7. □

STWIERDZENIE 128 (Naturalność odwzorowania eksponencjalnego). *Przyjmijmy zapis Def. 89 oraz Tw. 1.5.2 i niechaj $\chi : G_1 \rightarrow G_2$ będzie homomorfizmem grup Liego między grupami Liego G_α , $\alpha \in \{1, 2\}$. Poniższy diagram jest przemienny*

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G_1 & \xrightarrow{\text{Lie } \chi} & \text{Lie } G_2 \\ \exp^{G_1} \downarrow & & \downarrow \exp^{G_2} \\ G_1 & \xrightarrow{\chi} & G_2 \end{array}.$$

■

Dowód: Rozważmy ścieżkę gładką

$$\gamma := \chi \circ \lambda_X : \mathbb{R} \rightarrow G_2$$

przez

$$\gamma(0) \equiv \chi \circ \lambda_X(0) = \chi(e_1) = e_2.$$

Na podstawie bezpośredniego rachunku (wykorzystującego definicję ścieżki λ_X oraz lewoniemienniczość L_X , jak również Tw. 85)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\gamma(t) &= T_{\lambda_X(t)}\chi\left(\frac{d}{dt}\lambda_X(t)\right) = T_{\lambda_X(t)}\chi(L_X \circ \lambda_X(t)) = T_{\lambda_X(t)}\chi \circ T_{e_1}\ell_{\lambda_X(t)}^1(X) \\ &= T_{e_1}(\chi \circ \ell_{\lambda_X(t)}^1)(X) = T_{e_1}(\ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1 \circ \chi)(X) = T_{\chi(e_1)}\ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1(T_{e_1}\chi(X)) \\ &= T_{e_2}\ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1(T_{e_1}\chi(X)) \equiv T_{e_2}\ell_{\gamma(t)}^1(\text{Lie } \chi(X)) \equiv L_{\text{Lie } \chi(X)} \circ \gamma(t) \end{aligned}$$

i wreszcie

$$\gamma(0) = e_2 \equiv \lambda_{\text{Lie } \chi(X)}(0),$$

konstatujemy na gruncie Stw. 103, że γ jest spełnioną tożsamość

$$\chi \circ \lambda_X \equiv \gamma = \lambda_{\text{Lie } \chi(X)},$$

co w chwili $t = 1$ daje pożądaną równość

$$\chi \circ \exp^{G_1}(X) \equiv \chi \circ \lambda_X(1) = \lambda_{\text{Lie } \chi(X)}(1) \equiv \exp^{G_2} \circ \text{Lie } \chi(X).$$

□

STWIERDZENIE 129. *Przyjmijmy zapis Def. 88 i niech $((\mathbb{T}_e \text{Ad.})_A^B)_{A, B \in \overline{1, \dim G}}$ o będzie macierzą o wartościach w $C^\infty(G, \mathbb{R})$ określoną równaniami*

$$\mathbb{T}_e \text{Ad.}(t_A) =: (\mathbb{T}_e \text{Ad.})_A^B \triangleright t_B, \quad A \in \overline{1, \dim G}.$$

Pola wektorowe L_A i R_A , $A \in \overline{1, \dim G}$ spełniają relacje (zapisane dla dowolnych $A, B \in \overline{1, \dim G}$)

$$[L_A, L_B] = f_{ABC} \triangleright L_C, \quad [R_A, R_B] = f_{ABC} \triangleright R_C, \quad [L_A, R_B] = 0.$$

Ponadto prawdziwe są tożsamości:

$$(1.5.8) \quad L_A(\cdot) = (\mathbb{T}_e \text{Ad.})_A^B \triangleright R_B(\cdot)$$

oraz

$$\text{Inv}_* L_A = -R_A, \quad \text{Inv}_* R_A = -L_A,$$

a także – dla dowolnego elementu $g \in G$ –

$$\wp_{g*} L_A = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv}(g)})_A^B \triangleright L_B, \quad \ell_{g*} R_A = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B$$

■

Dowód: Pierwsze dwie równości wynikają wprost z definicji komutatora w Lie G. Oto więc wobec lewniezmienniczości komutatora pól lewniezmiennicznych zachodzi

$$\begin{aligned} f_{ABC} L_C(\cdot) &= f_{ABC} \mathbb{T}_e \ell.(L_C(e)) \equiv \mathbb{T}_e \ell.(t_C) = \mathbb{T}_e \ell.([t_A, t_B]) \equiv \mathbb{T}_e \ell.([L_A, L_B](e)) \\ &= [L_A, L_B](\cdot), \end{aligned}$$

a prawoniezmienniczość komutatora pól prawoniezmiennicznych zapewnia słuszność drugiej równości. Komutator bazowego pola lewniezmiennicznego z takimż polem prawoniezmiennicznym obliczamy na dowolnej funkcji $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ w dowolnym punkcie $g \in G$, korzystając przy tym ze Stw. 123,

$$\begin{aligned} [L_A, R_B](f)(g) &\equiv L_A(R_B(f))(g) - R_B(L_A(f))(g) \\ &\equiv L_A\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\right)(g) - R_B\left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\right)(g) \\ &\equiv \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\right) \circ \mathcal{L}_s^{t_A}(g) - \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\right) \circ \mathcal{R}_t^{t_B}(g) \\ &= \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f(\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot (g \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e))) - \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f((\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot g) \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e))\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wreszcie też wyznaczamy wprost, w dowolnym punkcie $g \in G$,

$$\begin{aligned} L_A(g) &= \mathbb{T}_e \ell_g(L_A(e)) \equiv \mathbb{T}_e \ell_g(t_A) = \mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_e \ell_g(t_A) \\ &= \mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_e \text{Ad}_g(t_A) \equiv (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_g(t_B) \\ &\equiv (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_g(R_B(e)) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B(g). \end{aligned}$$

Zachodzi też – w świetle Uwagi 26, a dla dowolnego $g \in G$ –

$$\text{Inv}_* L_A(g) \equiv \mathbb{T}_{g^{-1}} \text{Inv}(L_A(g^{-1})) = \mathbb{T}_{g^{-1}} \text{Inv} \circ \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}}(t_A)$$

$$= -\mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_{g^{-1}} \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}}(t_A) = -\mathbb{T}_e \wp_g(t_A) \equiv -R_A(g),$$

a stąd już wprost

$$\text{Inv}_* R_A = -\text{Inv}_* \circ \text{Inv}_* L_A = -(\text{Inv} \circ \text{Inv})_* L_A = -L_A.$$

Sprawdzamy także – dla dowolnego $h \in G$ –

$$\begin{aligned} (\wp_g * L_A)(h) &\equiv \mathbb{T}_{\wp_{g^{-1}}(h)} \wp_g(L_A \circ \wp_{g^{-1}}(h)) = \mathbb{T}_{hg^{-1}} \wp_g \circ \mathbb{T}_e \ell_{hg^{-1}}(t_A) \\ &= \mathbb{T}_e \ell_h \circ \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv}(g)})_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \ell_h(t_B) \\ &= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv}(g)})_A^B \triangleright L_B(h) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} (\ell_g * R_A)(h) &\equiv \mathbb{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)} \ell_g(R_A \circ \ell_{g^{-1}}(h)) = \mathbb{T}_{g^{-1}h} \ell_g \circ \mathbb{T}_e \wp_{g^{-1}h}(t_A) \\ &= \mathbb{T}_e(\ell_g \circ \wp_h \circ \wp_{g^{-1}})(t_A) = \mathbb{T}_e(\wp_h \circ \text{Ad}_g)(t_A) \\ &= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_h(t_B) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B(h). \end{aligned}$$

□

UWAGA 27. Powyższe stwierdzenie orzeka, że algebry pól lewo- i prawoniezmiennicznych są wzajem izomorficznymi komutującymi podalgebrami Liego w algebrze Liego (gładkich) pól wektorowych na G , przy czym $((\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B)_{A, B \in \overline{1, \dim G}}$ w dowolnym punkcie $g \in G$ jest macierzą przejścia pomiędzy lewo- i prawoniezmienniczną bazą stycznej do grupy w tym punkcie. Tożsamości, w których pojawia się pchnięcie wzdłuż Inv , stanowią stycznościowy (w e) wariant relacji między lewym i prawym działaniem regularnym w grupie i grupie przeciwnej. Ostatnie dwie tożsamości w tezie stwierdzenia określają własności współzmienniczości względem – odpowiednio – prawych i lewych translacji (pchnięć) pól lewo- i prawoniezmiennicznych.

DEFINICJA 90. Przyjmijmy zapis Def. 40, 77 oraz 88 i niechaj $\{\theta_L^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ i $\{\theta_R^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ będą bazami $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu $\Omega^1(G)$ dualnymi do baz – odpowiednio – $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ i $\{R_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu $\mathfrak{X}(G)$,

$$L_A \lrcorner \theta_L^B = \delta_A^B = R_A \lrcorner \theta_R^B, \quad A, B \in \overline{1, \dim G}.$$

Pole 1-form o wartościach w \mathfrak{g} postaci

$$\theta_L := \theta_L^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nosi miano **kanonicznego pola 1-form lewoniezmiennicznych lub lewoniezmiennicznej formy Maurera–Cartana na G** . Analogicznie, pole 1-form

$$\theta_R := \theta_R^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nazywamy **kanonicznym polem 1-form prawoniezmiennicznych lub prawoniezmienniczną formą Maurera–Cartana na G** .

▲

UWAGA 28. Warto odnotować, że formy Maurera–Cartana wraz z odpowiednimi polami niezmienniczymi na grupie dają nam do ręki wygodną reprezentację operatora różniczki zewnętrznej (de Rhama), oto bowiem dla dowolnej funkcji $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ i w dowolnym punkcie $g \in G$ zachodzą tożsamości:

$$df(g) = L_A(f)(g) \triangleright \theta_L^A(g) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \mathcal{L}_t^A)(g) \triangleright \theta_L^A(g)$$

oraz

$$df(g) = R_A(f)(g) \triangleright \theta_R^A(g) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \mathcal{R}_t^A)(g) \triangleright \theta_R^A(g).$$

STWIERDZENIE 130. *Przyjmijmy zapis Def. 80 i 90 oraz Stw. 129. Formy Maurera–Cartana są – odpowiednio – lewo- i prawoniezmiennicze,*

$$(\ell_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = \theta_L, \quad (\wp_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = \theta_R,$$

a ponadto spełniają tożsamości:

$$(1.5.9) \quad \theta_R = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad.}) \circ \theta_L$$

i

$$(1.5.10) \quad (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = -\theta_R, \quad (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = -\theta_L$$

oraz – dla dowolnego elementu $g \in G$ –

$$(\wp_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \theta_L, \quad (\ell_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_g) \circ \theta_R. \quad \blacksquare$$

Dowód: W dowodzie wszystkich relacji wykorzystujemy bazowy charakter układów $\{\theta_H^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$, $H \in \{L, R\}$ (w dowolnym punkcie G) oraz ich dualność względem odpowiedniego układu pól niezmienniczych. I tak z równości, słusznej dla dowolnych $g, h \in G$,

$$(L_A \lrcorner \ell_g^* \theta_L^B)(h) = \theta_L^B(\ell_g(h)) \circ T_h \ell_g(L_A(h)) = \theta_L^B(gh)(L_A(gh)) = \delta_A^B$$

wywdzimy wniosek:

$$\ell_g^* \theta_L^B(h) = \theta_L^B(h),$$

czyli

$$\ell_g^* \theta_L^B = \theta_L^B.$$

Analogicznie dowodzimy prawoniezmienniczości 1-form θ_R^B . W następnej kolejności przywołujemy Równ. (1.5.8) i na tej podstawie obliczamy

$$L_A \lrcorner \theta_R^B = (T_e \text{Ad.})_A^C \triangleright R_C \lrcorner \theta_R^B = (T_e \text{Ad.})_A^C \delta_C^B = (T_e \text{Ad.})_A^B,$$

skąd odczytujemy Równ. (1.5.9). W dowolnym punkcie $g \in G$ jest też na mocy Uwagi 26 spełniona relacja

$$\begin{aligned} R_A \lrcorner \text{Inv}^* \theta_L^B(g) &= \theta_L^B(g^{-1}) \circ T_g \text{Inv}(R_A(g)) = \theta_L^B(g^{-1}) \circ T_g \text{Inv} \circ T_e \wp_g(t_A) \\ &= -\theta_L^B(g^{-1}) \circ T_e \ell_{g^{-1}}(t_A) \equiv -\theta_L^B(g^{-1})(L_A(g)) = -\delta_A^B, \end{aligned}$$

zatem

$$\text{Inv}^* \theta_L^B = -\theta_R^B,$$

czyli także

$$\text{Inv}^* \theta_R^B = -\theta_L^B.$$

Wreszcie na koniec obliczamy – dla dowolnych $g, h \in G$ –

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner (\wp_g^* \theta_L^B)(h) &= \theta_L^B(hg) \circ T_h \wp_g(L_A(h)) = \theta_L^B(hg) \circ T_h \wp_g \circ T_e \ell_h(t_A) \\ &= \theta_L^B(hg) \circ T_e \ell_{hg} \circ T_e \text{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = (T_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \theta_L^B(hg) \circ T_e \ell_{hg}(t_C) \\ &= (T_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \theta_L^B(hg)(L_C(hg)) = (T_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \delta_C^B = (T_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \end{aligned}$$

i na tej podstawie wnioskujemy, że

$$\wp_g^* \theta_L^B = (T_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \theta_L^A.$$

Dowód ostatniej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. \square

DEFINICJA 91. Przyjmijmy zapis Def. 77 oraz Stw. 121, ustalmy (dowolnie) $k \in \mathbb{N}^*$ i niechaj $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ będzie C^k -rozmainością, G zaś – grupą Liego. **Pochodna logarytmiczna lewostronna** na $C^l(M, G)$, $1 < l \leq k$ to odwzorowanie

$$\delta_L \log : C^l(M, G) \longrightarrow \Omega_{(l-1)}^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

określone wzorem

$$\delta_L \log f(x)(v_x) := T_{f(x)} \ell_{f(x)^{-1}} \circ T_x f(v_x),$$

słusznym dla dowolnych: punktu $x \in M$, wektora $v_x \in T_x M$ oraz funkcji $f \in C^l(M, G)$. Podobnie, **pochoďna logarytmiczna prawostronna** na $C^l(M, G)$, $1 < l \leq k$ to odwzorowanie

$$\delta_R \log : C^l(M, G) \longrightarrow \Omega_{(l-1)}^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

zadane w postaci

$$\delta_R \log f(x)(v_x) := T_{f(x)} \wp_{f(x)^{-1}} \circ T_x f(v_x).$$

▲

STWIERDZENIE 131. Przyjmijmy zapis Def. 91. Dla dowolnych $f_1, f_2 \in C^l(M, G)$ (wymnożonych punktowo) i w każdym punkcie $x \in M$ prawdziwe są następujące tożsamości

$$\delta_L \log(f_1 \cdot f_2)(x) = \delta_L \log f_2(x) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_2(x)^{-1}})(\delta_L \log f_1(x)),$$

$$\delta_R \log(f_1 \cdot f_2)(x) = \delta_R \log f_1(x) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1(x)})(\delta_R \log f_2(x)).$$

■

Dowód: Dowodzimy pierwszej tożsamości. Dowód drugiej z nich przebiega analogicznie. Wprost na podstawie definicji, a w odwołaniu do Równ. (1.5.2), obliczamy

$$\begin{aligned} &\delta_L \log(f_1 \cdot f_2)(x) \\ &= T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1} \cdot f_1(x)^{-1}} \circ T_x(f_1 \cdot f_2) \\ &= T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} (\ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \ell_{f_1(x)^{-1}}) \circ T_x(m \circ (f_1, f_2)) \\ &= T_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ T_{(f_1(x), f_2(x))} m \circ T_x(f_1, f_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{T}_{f_2(x)\ell_{f_2(x)^{-1}}} \circ \mathbb{T}_{f_1(x)\cdot f_2(x)\ell_{f_1(x)^{-1}}} \circ (\mathbb{T}_{f_2(x)\ell_{f_1(x)}} \circ \mathbb{T}_x f_2 + \mathbb{T}_{f_1(x)\wp_{f_2(x)}} \circ \mathbb{T}_x f_1) \\
&= \mathbb{T}_{f_2(x)\ell_{f_2(x)^{-1}}} \circ \mathbb{T}_x f_2 + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_2(x)^{-1}}) \circ \mathbb{T}_{f_1(x)\ell_{f_1(x)^{-1}}} \circ \mathbb{T}_x f_1.
\end{aligned}$$

□

STWIERDZENIE 132. *Przyjmijmy zapis Def. 91 i niechaj $f_1, f_2 \in C^l(M, G)$, a wówczas prawdziwe są zdania:*

$$\delta_L \log f_1 = \delta_L \log f_2 \iff \exists_{g \in G} : f_2 = \ell_g \circ f_1$$

oraz

$$\delta_R \log f_1 = \delta_R \log f_2 \iff \exists_{g \in G} : f_2 = \wp_g \circ f_1.$$

■

Dowód: Wynikanie \Leftarrow jest oczywiste, a już z pewnością staje się takim po przeanalizowaniu dowodu wynikania przeciwnego. To udowodnimy dla pochodnej lewostronnej. Dowód dla pochodnej prawostronnej jest w pełni analogiczny. Oto więc, stosując pierwszą z tożsamości ze Stw. 131, otrzymujemy

$$\delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \delta_L \log(\text{Inv} \circ f_1) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_2,$$

a ponieważ na podstawie tej samej tożsamości stwierdzamy też równość

$$0 \equiv \delta_L \log(f_1 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \delta_L \log(\text{Inv} \circ f_1) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1,$$

przeto wobec założonej równości obu pochodnych lewostronnych

$$\begin{aligned}
\delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) &= -(\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_2 \\
&= -(\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Przywołując definicję pochodnej logarytmicznej, przepisujemy powyższe w postaci

$$0 = \delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \mathbb{T}_{f_2(\cdot)\cdot f_1(\cdot)^{-1}} \ell_{f_1(\cdot)\cdot f_2(\cdot)^{-1}} \circ \mathbb{T} \cdot (f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}),$$

albo równoważnej

$$\mathbb{T} \cdot (f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}) = 0,$$

która implikuje równość

$$\forall_{x \in M} \forall_{V \in \mathbb{T}_x M} : V(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}) = 0,$$

czyli

$$\forall_{x \in M} : f_2(x) \cdot f_1(x)^{-1} = \text{const} \in G,$$

co jest właśnie postulowaną tezą. □

STWIERDZENIE 133. *W zapisie Def. 90 i 91 słuszne są tożsamości*

$$\theta_L \equiv \delta_L \log \text{id}_G, \quad \theta_R \equiv \delta_R \log \text{id}_G.$$

■

Dowód: Bez trudu sprawdzamy, dla dowolnego $g \in G$,

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner \delta_L \log \text{id}_G(g) &\equiv \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \text{id}_G(L_A(g)) = \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \text{id}_{\mathbb{T}_g G}(L_A(g)) \\ &= \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_g(L_A(e)) = L_A(e) \equiv t_A, \end{aligned}$$

co wobec bazowego charakteru układu $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$. Dowód w przypadku pochodnej prawostronnej przebiega analogicznie. \square

STWIERDZENIE 134. *Przyjmijmy zapis Def. 80, 90 i Przykł. 7 (4). Formy Maurera–Cartana spełniają – dla dowolnych elementów $g, h \in G$ – tożsamości*

$$\begin{aligned} m^* \theta_L(g, h) &= \theta_L(h) + (\text{id}_{\mathbb{T}^* G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g), \\ m^* \theta_R(g, h) &= \theta_R(g) + (\text{id}_{\mathbb{T}^* G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_g) \circ \theta_R(h). \end{aligned}$$

■

Dowód: Na mocy Stw. 133 (odczytanego w połączeniu z Def. 91), a w odwołaniu do Równ. (1.5.2) stwierdzamy, co następuje:

$$\begin{aligned} \theta_L(g \cdot h) &\equiv m^* \theta_L(g, h) = m^* \circ \mathbb{T}_{g \cdot h} \ell_{(g \cdot h)^{-1}} = \mathbb{T}_{g \cdot h} \ell_{(g \cdot h)^{-1}} \circ \mathbb{T}_{(g, h)} m \\ &= \mathbb{T}_{gh}(\ell_{h^{-1} \cdot g^{-1}}) \circ (\mathbb{T}_g \wp_h \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \text{pr}_2) \\ &\equiv \mathbb{T}_g(\text{Ad}_{h^{-1}} \circ \ell_{g^{-1}}) \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_{h^{-1}} \circ \text{pr}_2 \\ &= \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_{h^{-1}} \circ \text{pr}_2 \\ &\equiv (\text{id}_{\mathbb{T}^* G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g) + \theta_L(h). \end{aligned}$$

Dowód drugiej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. \square

LEMAT 1.5.3. *Przyjmijmy zapis Stw. 124. Niechaj $H \subset G$ będzie grupą domkniętą grupy Liego G w topologii podprzestrzeni i niech $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{g}$ będzie ciągiem wektorów w algebrze Liego \mathfrak{g} tejże grupy, o granicy $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathfrak{g}$, a nadto niech $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ będzie ciągiem liczbowym zbieżnym do $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, przy czym $\lambda_{X_n}(t_n) \in H$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas*

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} : \lambda_X(t) \in H.$$

■

Dowód: Dla ustalonego (dowolnie) $t \in \mathbb{R}$ rozważmy ciąg

$$N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} : n \mapsto E\left(\frac{t}{t_n}\right),$$

gdzie $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest cechą (funkcją *entier*). Jako że $\frac{t}{t_n} - 1 < N_n \leq \frac{t}{t_n}$, $n \in \mathbb{N}$, przeto – na mocy Twierdzenia o trzech ciągach, a wobec założenia poczynionego w odniesieniu do t . –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n = t,$$

wobec czego także

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n \triangleright X_n = t \triangleright X.$$

Na podstawie Stw. 124 oraz 127 (więc ciągłości \exp), jak również Stw. 122 i Równ. (1.4.39) wyznaczamy

$$\begin{aligned}
\lambda_X(t) &= \lambda_{t \triangleright X}(1) \equiv \exp(t \triangleright X) \equiv \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n \triangleright X_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(t_n \cdot N_n \triangleright X_n) \\
&\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \cdot N_n \triangleright X_n}(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \triangleright X_n}(N_n) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n; 0, e) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(1; N_n - 1, \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 1; 0, e)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 1; 0, e) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(1; N_n - 2, \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 2; 0, e)) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 2; 0, e) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1)^2 = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1)^{N_n},
\end{aligned}$$

a ponieważ $H \ni \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1)^{N_n}$ jest domknięta, przeto – zgodnie z tezą stwierdzenia – także

$$\lambda_X(t) \in \bar{H} \equiv H.$$

□

TWIERDZENIE 1.5.4 (Cartana o podgrupie domkniętej). *Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.*

■

Dowód: Niechaj $H \subset G$ będzie podgrupą domkniętą w topologii podprzestrzeni i niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego G . Skonstruujemy bezpośrednio lokalną mapę podrozmaitości na otoczeniu otwartym punktu $e \in H \subset G$, a następnie utworzymy atlas podrozmaitości przesuując ową mapę do każdego z punktów podgrupy. W tym celu rozważmy podzbiór

$$\mathfrak{h} := \{ D\gamma(0) \mid \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, H) \subset C^\infty(\mathbb{R}, G) \wedge \gamma(0) = e \} \subset \mathfrak{g}.$$

Dla dowolnej pary ścieżek $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, H)$ spełniających warunki $\gamma_\alpha(0) = e$, $\alpha \in \{1, 2\}$ i dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ definiujemy ścieżkę złożoną

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow H : t \longmapsto \gamma_1(t_1 \cdot t) \cdot \gamma_2(t_2 \cdot t),$$

po czym obliczamy

$$D\gamma(0) = t_1 \triangleright D\gamma_1(0) + t_2 \triangleright D\gamma_2(0).$$

Wektor styczny do γ w $t = 0$ należy do \mathfrak{h} (wprost z definicji), widzimy zatem, że dowolna \mathbb{R} -liniowa kombinacja elementów zbioru \mathfrak{h} jest w nim zawarta, czyli – innymi słowy – \mathfrak{h} jest podprzestrzenią \mathbb{R} -liniową przestrzeni \mathfrak{g} . W następnej kolejności dowodzimy tożsamości

$$(1.5.11) \quad \mathfrak{h} = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \in H \}.$$

Zawieranie \supseteq jest oczywiste, rozważmy przeto dowolny wektor $X := D\gamma(0) \in \mathfrak{h}$ określony przez pewną ścieżkę $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, H)$ i zdefiniujmy, dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ (na tyle, by ścieżka $\gamma(\cdot - \varepsilon, \varepsilon[\cdot])$ była zawarta w dyfeomorficznym obrazie

otoczenia \mathcal{U}_0 wektora $0 \in \mathfrak{g}$ względem odwzorowania \exp , zgodnie ze Stw. 127),
ścieżkę wektorów

$$\xi :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathfrak{g} : t \longmapsto \exp \upharpoonright_{\mathcal{U}_0}^{-1} \circ \gamma(t).$$

Otrzymujemy, przywoławszy po drodze Równ. (1.5.2),

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} \ni X &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma(t) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp \circ \xi(t) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(\xi(0) + t \triangleright D\xi(0) + \mathcal{O}(t^2)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0) + \mathcal{O}(t^2)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\exp(t \triangleright D\xi(0)) \cdot \exp(\mathcal{O}(t^2))) \\ &= T_{e^r} \exp(\mathcal{O}(t^2)) \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \right) \\ &\quad + T_{e^l} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(\mathcal{O}(t^2)) \right) \\ &= T_{e^r} e \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \right) + T_{e^l} e(0_{\mathfrak{g}}) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{t \triangleright D\xi(0)}(1), \end{aligned}$$

czyli – w świetle Stw. 124 –

$$\mathfrak{h} \ni X = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{D\xi(0)}(t) = D\xi(0).$$

Możemy zatem zapisać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \triangleright \xi\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathfrak{h}.$$

Zdefiniujmy ciągi

$$X : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{g} : n \longmapsto n \triangleright \xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n}\right), \quad t : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : n \longmapsto \frac{1}{n},$$

Na mocy Stw. 124 zachodzi relacja

$$\lambda_{X_n}(t_n) = \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \equiv \lambda_{\xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n}\right)}(1) \equiv \exp \circ \xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n}\right) = \gamma\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n}\right) \in H,$$

możemy więc przywołać Lemat 1.5.3, aby stwierdzić, że

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \equiv \lambda_{D\xi(0)}(t) = \lambda_{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n}(t) \in H,$$

co dowodzi inkluzji

$$\mathfrak{h} \subseteq \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \in H \}.$$

Tym sposobem zidentyfikowaliśmy algebrę Liego podgrupy H . Ta wraz z dowolnym jej dopełnieniem prostym $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$,

$$(1.5.12) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

w przestrzeni \mathbb{R} -liniowej \mathfrak{g} (dopełnienie to nie jest w ogólności podalgebrą Liego algebry \mathfrak{g}) stanowi poszukiwany model lokalnej mapy podrozmaitości na otoczeniu e w $H \subset G$. Ażeby się o tym przekonać, pokażemy najpierw, że istnieje otoczenie otwarte \mathcal{M} wektora $0_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{m}$ o własności $\exp(\mathcal{M}) \cap H = \{e\}$. Istotnie, gdyby tak nie było, można byłoby wybrać ciąg wektorów $Y : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ zbieżny do $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0_{\mathfrak{g}}$ i o własności $\exp(Y_n) \in H$, $n \in \mathbb{N}$, wtedy jednak – wybrawszy (dowolnie) normę $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ na \mathfrak{m} ciągłą w topologii na \mathfrak{g} (zatem np. wzięwszy normę euklidesową indukującą naturalną topologię na \mathfrak{g}) – uzyskalibyśmy ciąg wektorów

$$v : \mathbb{N} \longrightarrow \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m} : n \longmapsto \|Y_n\|^{-1} \triangleright Y_n,$$

z którego wobec zwartości sfery $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$ moglibyśmy następnie wybrać podciąg zbieżny v_n . o granicy $v := \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k} \in \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$, więc też położywszy

$$\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : n \longmapsto \|Y_n\|_{\mathfrak{g}},$$

i sprawdziliśmy relacje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|0_{\mathfrak{g}}\|_{\mathfrak{g}} = 0,$$

$$\lambda_{v_n}(\tau_n) = \lambda_{\|Y_n\|_{\mathfrak{m}} \triangleright v_n}(1) = \lambda_{Y_n}(1) \in \exp(\mathfrak{h}) = \mathbb{H},$$

moglibyśmy ponownie skorzystać z Lematu 1.5.3, dostając

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_v(t) \in \mathbb{H},$$

czyli – w świetle równości (1.5.11) – $v \in \mathfrak{h}$, a zatem – wobec rozkładu (1.5.12) – sprzeczność z wcześniejszym wynikiem $v \in \mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$. Mając pożądane otoczenie $\mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$, wybierzmy następnie takie otoczenia otwarte: $\mathcal{O}_{\mathfrak{h}}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w \mathfrak{h} oraz $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w \mathfrak{m} , a także \mathcal{O}_e elementu e w G , iżby odwzorowanie

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_e : (X, Y) \longmapsto \exp(X) \cdot \exp(Y)$$

było dyfeomorfizmem. O tym, że wybór taki jest możliwy, przesądza analiza rozszerzonego odwzorowania

$$\tilde{\varphi} : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow G : (X, Y) \longmapsto \exp(X) \cdot \exp(Y).$$

Jego styczna w $(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$ to

$$D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}}) : T_{(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}) \equiv \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow T_{\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})}G = T_e G \equiv \mathfrak{g} : (x, y) \longmapsto x + y,$$

co w świetle Stw. 124 oraz Równ. (1.5.2) wynika wprost z rachunku

$$\begin{aligned} D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})(x, y) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright x) \cdot \exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright y)) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\lambda_{t \triangleright x}(1) \cdot \lambda_{t \triangleright y}(1)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\lambda_x(t) \cdot \lambda_y(t)) \\ &= T_e r_{\lambda_y(0)} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \lambda_x(t) \right) + T_e l_{\lambda_x(0)} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \lambda_y(t) \right) \\ &= T_e r_e(x) + T_e l_e(y) = x + y \end{aligned}$$

i dowodzi izomorficznego charakteru $D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$ (wszak $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$), który pozwala odnieść do $\tilde{\varphi}$ Tw. 1.4.7. Niechaj teraz $h \in \mathcal{O}_e \cap \mathbb{H}$, a wtedy $h = \exp(X) \cdot \exp(Y)$ dla pewnych $(X, Y) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$, ale też $\exp(X) \in \exp(\mathfrak{h}) = \mathbb{H}$, więc $\exp(Y) = \exp(X)^{-1} \cdot h \in \mathbb{H} \cdot (\mathcal{O}_e \cap \mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$, co wobec założenia $Y \in \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ oznacza, że $Y = 0_{\mathfrak{g}}$, czyli $h = \exp(X) \in \exp(\mathcal{O}_{\mathfrak{h}})$. Jest przeto $\kappa_e \equiv \varphi^{-1}$ mapą na otoczeniu \mathcal{O}_e elementu neutralnego w G , a przy tym

$$\mathbb{H} \cap \mathcal{O}_e = \kappa_e^{-1}(\{ (X, 0_{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \mid X \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \}).$$

Mapę na otoczeniu punktu $h \in \mathbb{H}$ definiujemy jako

$$\kappa_h := \kappa \circ l_{h^{-1}} : l_h(\mathcal{O}_e) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$$

(podzbiór $l_h(\mathcal{O}_e)$ jest otwarty jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego \mathcal{O}_e). Uzyskujemy tym sposobem atlas podrozmaitości $\{\kappa_h\}_{h \in \mathbb{H}}$ dla $\mathbb{H} \subset G$, w którym operacje grupowe są gładkie jako ograniczenia operacji z G .

I odwrotnie, niech $\mathbb{H} \subset G$ będzie podgrupą i podrozmaitością grupy Liego G . Operacje grupowe na \mathbb{H} są stosownymi złożeniami tychże operacji na G (z

założenia gładkich) z kanonicznymi gładkimi włożeniami $\iota_H : H \rightarrow \iota_H(H) \subset G$ i ich odwrotnościami $\iota_H^{-1} : \iota_H(H) \rightarrow H$,

$$m_H \equiv \iota_H^{-1} \circ m_G \circ (\iota_H \times \iota_H), \quad \text{Inv}_H = \iota_H^{-1} \circ \text{Inv}_G \circ \iota_H,$$

i jako takie są gładkie. Jest zatem H podgrupą Liego. Pozostaje pokazać, że jest ona domknięta. W tym celu rozważmy dowolny punkt $g \in \bar{H}$ z domknięcia \bar{H} podgrupy H , wraz z odnośnym ciągiem $h_n : \mathbb{N} \rightarrow H$ doń zbieżnym, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = g$. Niechaj $\mathcal{O}_e \in \mathcal{T}(G)$ będzie dziedziną lokalnej mapy podrozmaitości κ na otoczeniu $e \in \iota_H(H)$, a $\mathcal{U}_e \in \mathcal{T}(G)$ – pewnym podotoczeniem $\mathcal{O}_e \supset \mathcal{U}_e$ o własności $\bar{\mathcal{U}}_e \subset \mathcal{O}_e$ (wystarczy wybrać \mathcal{U}_e jako przeciwobraz względem κ dostatecznie małej kuli w $\mathbb{R}^{\dim G}$ wokół $\kappa(e)$). Przywoławszy Lemat 1.5.1, ustalmy (dowolnie) otoczenie otwarte \mathcal{O} elementu neutralnego $e \in G$ o własności $m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)(\mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e$, po czym rozważmy ciąg

$$g_n := g^{-1} \cdot h_n : \mathbb{N} \rightarrow G : n \mapsto g^{-1} \cdot h_n$$

o granicy (obliczonej z wykorzystaniem ciągłości mnożenia)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = e.$$

Prawie wszystkie jego wyrazy są zawarte w \mathcal{O} , a zatem – dla dostatecznie dużych $m, n \in \mathbb{N}$ –

$$h_n^{-1} \cdot h_m = g_n^{-1} \cdot g_m \equiv f(g_n, g_m) \in f(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e.$$

Przy tym dla ustalonego n otrzymujemy – wobec ciągłości mnożenia –

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_n^{-1} \cdot h_m = h_n^{-1} \cdot g,$$

a ponieważ granica ciągu punktów z \mathcal{U}_e należy do $\bar{\mathcal{U}}_e \subset \mathcal{O}_e$, przeto także $h_n^{-1} \cdot g \in \mathcal{O}_e$. Przy tym w dziedzinie \mathcal{O}_e mapy podrozmaitości κ przecięcie $H \cap \mathcal{O}_e$ jest homeomorficznym przeciwobrazem względem κ dopełnienia (w $\kappa(\mathcal{O}_e) \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\dim G})$) sumy mnogościowej pary zbiorów otwartych złożonych z punktów o – odpowiednio – ściśle dodatnich i ściśle ujemnych ostatnich $\dim G - \dim H$ współrzędnych (opisujących kierunki transwersalne do obrazu $\kappa(H \cap \mathcal{O}_e) = \mathcal{V} \times \{(0, 0, \dots, 0)\}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\dim H})$), co oznacza, że podzbiór $H \cap \mathcal{O}_e$ jest domknięty w \mathcal{O}_e . Ilekoż zatem mamy do czynienia z ciągiem punktów w $H \cap \mathcal{O}_e$ zbieżnym w \mathcal{O}_e , a takim jest $h_n^{-1} \cdot h_n$, granica jego leży także w $H \cap \mathcal{O}_e$, czyli w szczególności

$$h_n^{-1} \cdot g \in H \cap \mathcal{O}_e \subset H,$$

więc też $g \in H$, to zaś przesądza o postulowanej równości

$$\bar{H} = H.$$

□

PRZYKŁAD(Y) 28.

- (1) Grupa (pseudo)ortogonalna $O_{\mathbb{R}}(p, q)$ z Przykł. 14 (1) jest (jako zbiór) przeciwobrazem $\tau^{-1}(\{\mathbf{0}_n\})$ podzbioru domkniętego $\{\mathbf{0}_n\} \subset \mathbb{R}(p+q)$ względem odwzorowania (jawnie ciągłego)

$$\tau : GL_{\mathbb{R}}(p+q) \rightarrow \mathbb{R}(p+q) : A \mapsto A^T \boxplus \mathbf{1}_{p,q} \boxminus A - \mathbf{1}_{p,q},$$

zapisanego przy użyciu macierzy

$$\mathbf{1}_{p,q} = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_q),$$

jest przeto podgrupą domkniętą grupy Liego $\text{GL}_{\mathbb{R}}(p+q)$ z Przykł. 27 (4), czyli też (pod)grupą Liego. Grupa ta ma wyróżnioną podgrupę Liego

$$\text{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) \equiv \det_{(p+q)}^{-1}(\{1\}),$$

zwaną grupą specjalną ortogonalną.

W przypadku $pq = 0$ ta ostatnia podgrupa zadaje rozkład grupy ortogonalnej na składowe spójne

$$\text{O}_{\mathbb{R}}(p, q) = \text{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) \sqcup \text{P}_{e_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(p, q),$$

w którego zapisie

$$\text{P}_{e_1} : \mathbb{R}^{2p} \supset : (v^1, v^2, \dots, v^p) \mapsto (-v^1, v^2, \dots, v^p)$$

jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu $v^1 = 0$, por.: Def. 26.

W przypadku $pq \neq 0$ podgrupa $\text{SO}_{\mathbb{R}}(p, q)$ rozkłada się na składowe spójne

$$\text{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) = \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup \text{P}_{e_1} \cdot \text{P}_{e_{p+1}} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q),$$

w którym $\text{P}_{e_{p+1}}$ jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu $v^{p+1} = 0$, a (pod)grupę Liego będącą składową spójną jednostki $\text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q)$, zwaną **grupą specjalną ortogonalną ortochroniczną**, tworzą macierze zachowujące zarówno orientację podprzestrzeni $\mathbb{R}^{2p} \times \{\mathbf{0}_q\} \subset \mathbb{R}^{p,q}$, jak i orientację podprzestrzeni $\{\mathbf{0}_p\} \times \mathbb{R}^{2q} \subset \mathbb{R}^{p,q}$ (należy zwrócić uwagę, że przekształcenia ortogonalne zachowują każdą z tych podprzestrzeni, a to z racji określoności formy kwadratowej $\delta_{\mathbb{E}}^{(p,q)}$ w ograniczeniu do każdej z nich). Ostatecznie otrzymujemy rozkład pełnej grupy ortogonalnej na składowe spójne w postaci

$$\text{O}_{\mathbb{R}}(p, q) = \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup \text{P}_{e_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup \text{P}_{e_{p+1}} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup \text{P}_{e_1} \cdot \text{P}_{e_{p+1}} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q). \quad (1.5.13)$$

✓

DEFINICJA 92. Przyjmijmy zapis Def. 12 oraz 85. Parę $((X, \mathcal{T}(X)), \lambda)$ złożoną z przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ oraz działania lewostronnej grupy topologicznej G nazywamy **przestrzenią z działaniem topologicznym lewostronnym** (albo **G-przestrzenią topologiczną lewostronną**) G , jeśli działanie λ jest ciągle. Analogicznie definiujemy **przestrzeń z działaniem topologicznym prawostronnym** (albo **G-przestrzeń topologiczną prawostronną**) G . Ciągle odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) (G) -ekwiwariantne między przestrzeniami z działaniem topologicznym lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania topologicznego lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) (G) -ekwiwariantnego. Przestrzenie z działaniem topologicznym grupy topologicznej G wraz z odnośnymi odwzorowaniami G -ekwiwariantnymi tworzą **kategorię przestrzeni z działaniem topologicznym** G (albo **kategorię G-przestrzeni topologicznych**), którą oznaczamy symbolem

Top_G .

Zastępując w powyższej definicji przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{T}(X))$ rozmaitością różniczkowalną $(M, \widehat{\mathcal{T}})$ klasy C^∞ i grupę topologiczną G grupą Liego (oznaczaną tym samym symbolem), określenie zaś „topologiczny” – określeniem „gładki” (w rozumieniu: klasy C^∞) otrzymujemy, odpowiednio: **rozmaitość z działaniem gładkim lewostronnym** (albo **G-rozmaitość gładką lewostronną**) wzgl. **prawostronnym** (albo **G-rozmaitość gładką prawostronną**), **odwzorowanie gładkie lewostronne** (wzgl. **prawostronne**) (G -)ekwiwariantne. Rozmaitości różniczkowalne klasy C^∞ z działaniem gładkim grupy Liego G wraz z odnośnymi odwzorowaniami G -ekwiwariantnymi tworzą **kategorię rozmaitości z działaniem gładkim** G (albo **kategorię G-rozmaitości gładkich**), którą oznaczamy symbolem

$$\mathbf{Man}_G^{(\infty)}.$$

Wszystkie (pozostałe) pojęcia z Def. 13 i 14 oraz Przykł. 7 (1), (4) i (5) przenoszą się do kategorii \mathbf{Top}_G i $\mathbf{Man}_G^{(\infty)}$, jeśli tylko założyć dodatkowo, że odnośne odwzorowania są – odpowiednio – ciągłe lub różniczkowalne klasy C^∞ . ▲

DEFINICJA 93. Przyjmijmy zapis Def. 92 oraz Stw. 121 i niechaj $((M, \widehat{\mathcal{T}}), \lambda)$ będzie rozmaitością z działaniem gładkim (lewostronnym) grupy Liego G o algebrze Liego \mathfrak{g} . **Pole wektorowe fundamentalne lewostronne** na M to obraz dowolnego elementu $X \in \mathfrak{g}$ względem odwzorowania

$$\mathcal{K}_1(\cdot) \equiv \mathbb{T}_{(e, \cdot)} \lambda(\cdot, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_2 M}) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M) : X \longmapsto \mathbb{T}_{(e, \cdot)} \lambda(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_2 M}) \equiv \mathcal{K}_X(\cdot),$$

przy czym wartość otrzymanego tą drogą pola wektorowego w dowolnym punkcie $x \in M$ to

$$\mathcal{K}_X(x) \equiv \mathbb{T}_{(e, \cdot)} \lambda(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_2 M})(x) \equiv \mathbb{T}_{(e, x)} \lambda(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_x M}) \in \mathbb{T}_x M.$$

Pole wektorowe fundamentalne prawostronne definiujemy analogicznie. ▲

UWAGA 29. Ze względów tak praktycznych, jak i historycznych warto poświęcić chwilę na wyprowadzenie formuły określającej działanie pola fundamentalnego na przestrzeni funkcji (klasy C^1) na rozmaitości M . W tym celu ustalmy (dowolnie) funkcję $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ i policzmy w punkcie $x \in M$, przywołując po drodze Def. 75 i 89 oraz Stw. 124,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_X(f)(x) &\equiv \mathbb{T}_x f(\mathcal{K}_X(x)) = \mathbb{T}_x f \circ \mathbb{T}_{(e, x)} \lambda(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_x M}) = \mathbb{T}_{(e, x)} (f \circ \lambda)(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_x M}) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \lambda)(\mathcal{L}_t^X(e), \Phi_0(t, x)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\mathcal{L}_t^X(e) \triangleright \Phi_0(t, x)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f((e \cdot \exp(t \triangleright X)) \triangleright x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\exp(t \triangleright X) \triangleright x). \end{aligned}$$

W szczególności odnosząc powyższy rachunek do funkcji współrzędniowych na otoczeniu x , otrzymujemy jawną reprezentację pola fundamentalnego w postaci

$$\mathcal{K}_X(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathcal{L}_t^X(e) \triangleright x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp(t \triangleright X) \triangleright x).$$

STWIERDZENIE 135. *Przyjmijmy zapis Def. 72 i 93. Odwzorowanie $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ jest G -ekwiwariantnym homomorfizmem algebr Liego, tj. dla dowolnych $X, Y \in \mathfrak{g}$ i $g \in G$ zachodzą tożsamości:*

$$\lambda_g * \mathcal{K}_X = \mathcal{K}_{\mathrm{T}_e \mathrm{Ad}_g(X)}$$

oraz

$$[\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M = \mathcal{K}_{[X, Y]_{\mathfrak{g}}}.$$

■

Dowód: Pierwszej z postulowanych tożsamości bronimy w bezpośrednim rachunku, wykorzystującym oczywistą relację

$$\lambda_g \circ \lambda = \lambda \circ (\mathrm{Ad}_g \times \lambda_g),$$

a prowadzonym w dowolnym punkcie $x \in M$,

$$\begin{aligned} \lambda_g * \mathcal{K}_X(x) &\equiv \lambda_{g*}^{(\lambda_{g^{-1}}(x))} \mathcal{K}_X \circ \lambda_{g^{-1}}(x) \equiv \mathrm{T}_{g^{-1} \triangleright x} \lambda_g \circ \mathrm{T}_{(e, g^{-1} \triangleright x)} \lambda(X, 0_{\mathrm{T}_{g^{-1} \triangleright x} M}) \\ &= \mathrm{T}_{(e, g^{-1} \triangleright x)} (\lambda_g \circ \lambda)(X, 0_{\mathrm{T}_{g^{-1} \triangleright x} M}) \\ &= \mathrm{T}_{(e, g^{-1} \triangleright x)} (\lambda \circ (\mathrm{Ad}_g \times \lambda_g))(X, 0_{\mathrm{T}_{g^{-1} \triangleright x} M}) \\ &= \mathrm{T}_{e, x} \lambda(\mathrm{T}_e \mathrm{Ad}_g(X), \mathrm{T}_{g^{-1} \triangleright x} \lambda_g(0_{\mathrm{T}_{g^{-1} \triangleright x} M})) = \mathrm{T}_{e, x} \lambda(\mathrm{T}_e \mathrm{Ad}_g(X), 0_{\mathrm{T}_x M}) \\ &\equiv \mathcal{K}_{\mathrm{T}_e \mathrm{Ad}_g(X)}(x). \end{aligned}$$

Celem udowodnienia drugiej homomorficznego charakteru odwzorowania \mathcal{K} sprawdzamy, że pola wektorowe $R_X \oplus \mathbf{0}_{\mathrm{T}M} \in \mathfrak{X}(G) \oplus \mathfrak{X}(M) \equiv \mathfrak{X}(G \times M)$ (gdzie $\mathbf{0}_{\mathrm{T}M}$ jest cięciem zerowym $\mathrm{T}M$, patrz: def:tanbun) i \mathcal{K}_X są w relacji określonej przez odwzorowanie λ w rozumieniu Def. 73. Istotnie, uwzględniając tożsamość

$$\lambda \circ (\wp_g \times \mathrm{id}_M) = \lambda \circ (\mathrm{id}_G \times \lambda_g),$$

słuszną dla dowolnego elementu $g \in G$, obliczamy – dla dowolnych $(g, x) \in G \times M$

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{(g, x)} \lambda((R_X \oplus \mathbf{0}_{\mathrm{T}M})(g, x)) &= \mathrm{T}_{(g, x)} \lambda \circ (\mathrm{T}_e \wp_g \times \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x M})(X, 0_{\mathrm{T}_x M}) \\ &= \mathrm{T}_{(e, x)} (\lambda \circ (\wp_g \times \mathrm{id}_M))(X, 0_{\mathrm{T}_x M}) = \mathrm{T}_{(e, x)} (\lambda \circ (\mathrm{id}_G \times \lambda_g))(X, 0_{\mathrm{T}_x M}) \\ &= \mathrm{T}_{(e, g \triangleright x)} \lambda \circ \mathrm{T}_{(e, x)} (\mathrm{id}_G \times \lambda_g)(X, 0_{\mathrm{T}_x M}) = \mathrm{T}_{(e, g \triangleright x)} \lambda(\mathrm{id}_{\mathrm{T}_e G}(X), \mathrm{T}_x \lambda_g(0_{\mathrm{T}_x M})) \\ &= \mathrm{T}_{(e, g \triangleright x)} \lambda(X, 0_{\mathrm{T}_{g \triangleright x} M}) \equiv \mathcal{K}_X \circ \lambda(g, x). \end{aligned}$$

W świetle Stw. 102 oraz 129 możemy przeto zapisać

$$\begin{aligned} [\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M(x) &= [\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M \circ \lambda(e, x) \\ &= \mathrm{T}_{(e, x)} \lambda([R_X \oplus \mathbf{0}_{\mathrm{T}M}, R_Y \oplus \mathbf{0}_{\mathrm{T}M}]_{G \times M}(e, x)) \\ &= \mathrm{T}_{(e, x)} \lambda([R_X, R_Y]_G(e), \mathbf{0}_{\mathrm{T}M}(x)) \equiv \mathrm{T}_{(e, x)} \lambda([X, Y]_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathrm{T}_x M}) \equiv \mathcal{K}_{[X, Y]_{\mathfrak{g}}}(x). \end{aligned}$$

□

STWIERDZENIE 136. Przyjmijmy zapis Def. 92. Stabilizator G_x punktu $x \in X$ przestrzeni X z działaniem topologicznym grupy topologicznej G jest podgrupą domkniętą w G , a przy tym stabilizatory punktów z tej samej G -orbity są podgrupami wzajem sprzężonymi,

$$\forall_{(g,x) \in G \times X} : G_{g \triangleright x} = gG_xg^{-1}.$$

■

Dowód: Domkniętość stabilizatora punktu $x \in X$ wynika wprost z ciągłości działania λ w drugim argumencie, domkniętości $\{x\} \subset X$ oraz tożsamości

$$G_x \equiv \lambda(\cdot, x)^{-1}(\{x\}).$$

Zachodzi ponadto, dla dowolnego elementu $h \in G$,

$$h \in G_{g \triangleright x} \iff (hg) \triangleright x = h \triangleright (g \triangleright x) = g \triangleright x \iff g^{-1}hg \in G_x.$$

□

TWIERDZENIE 1.5.5 (O rzędzie odwzorowania ekwiwariantnego). Przyjmijmy zapis Def. 62 oraz 92. Niechaj $((M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha), \lambda^\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą rozmaitościami z działaniem gładkim (lewostronnym) grupy Liego G , przy czym zakładamy dodatkowo, że λ^1 jest przechodnie w rozumieniu Def. 14, i niech $F : M_1 \rightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem gładkim (lewostronnie) G -ekwiwariantnym. Wówczas F ma stały rząd, w szczególności zaś przeciwobrazy punktów w M_2 względem F są domkniętymi podrozmaitościami włożonymi w M_1 .

■

Dowód: Wobec przechodniości działania G na rozmaitości M_1 , dla każdej pary punktów $x_1, x_2 \in M_1$ istnieje element $g_{21} \in G$ o własności $x_2 = \lambda_{g_{21}}^1(x_1)$, przy czym z racji G -ekwiwariantności F zachodzi tożsamość funkcjonalna

$$F \circ \lambda_{g_{21}}^1 = \lambda_{g_{21}}^2 \circ F,$$

a zatem także tożsamość

$$\mathbb{T}_{m_1}(F \circ \lambda_{g_{21}}^1) = \mathbb{T}_{m_1}(\lambda_{g_{21}}^2 \circ F),$$

którą możemy przepisać w postaci

$$\mathbb{T}_{m_2}F \circ \mathbb{T}_{m_1}\lambda_{g_{21}}^1 = \mathbb{T}_{F(m_1)}\lambda_{g_{21}}^2 \circ \mathbb{T}_{m_1}F.$$

Z racji dyfeomorficznego charakteru odwzorowań λ^α , $\alpha \in \{1, 2\}$ (przesądżającego o odwracalności odwzorowań do nich stycznych) z powyższej tożsamości wywodziśmy wniosek o tożsamości rzędów:

$$\text{rk } \mathbb{T}_{m_2}F = \text{rk } \mathbb{T}_{m_1}F,$$

który w konsekwencji przechodniości λ^1 możemy rozciągnąć na całą dziedzinę F .

□

DEFINICJA 94. Przyjmijmy zapis Def. 92. Działanie $\lambda : G \times X \rightarrow X$ grupy topologicznej G na przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ nazywamy **właściwym**, ilekroć cechą tę, rozumianą jak w Def. 58, ma odwzorowanie

$$(1.5.14) \quad \Lambda := (\lambda, \text{pr}_2) : G \times X \rightarrow X \times X : (g, x) \mapsto (g \triangleright x, x).$$

▲

STWIERDZENIE 137. *Przyjmijmy zapis Def. 94. Działanie $\lambda : G \times X \rightarrow X$ grupy topologicznej G na przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathcal{T}(X))$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podzbioru zwartego $\mathcal{K} \subset X$ podzbiór*

$$G(\mathcal{K}) := \{ g \in G \mid \lambda_g(\mathcal{K}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset \}$$

jest zwarty.

■

Dowód: Załóżmy najpierw, że działanie λ jest właściwe, tj. przeciwobraz dowolnego podzbioru zwartego w $X \times X$ względem odwzorowania Λ (z Def. 94) jest zwarty. Niechaj $\mathcal{K} \subset X$ będzie wybranym (dowolnie) podzbiorem zwartym, a wtedy podzbiór

$$\begin{aligned} G(\mathcal{K}) &\equiv \{ g \in G \mid \exists_{x \in \mathcal{K}} : g \triangleright x \in \mathcal{K} \} \equiv \{ g \in G \mid \exists_{x \in X} : \Lambda(g, x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \} \\ &= \text{pr}_2(\Lambda^{-1}(\mathcal{K} \times \mathcal{K})) \end{aligned}$$

jest zwarty jako ciągły obraz (rzut kanoniczny pr_2 jest odwzorowaniem ciągłym) przeciwobrazu kwadratu kartezjańskiego zbioru zwartego (czyli zbioru zwartego w topologii produktowej) względem odwzorowania właściwego Λ .

I odwrotnie, niechaj podzbiór $G(\mathcal{K})$ będzie zwarty dla dowolnego podzbioru zwartego $\mathcal{K} \subset X$. Rozważmy dowolny podzbiór zwarty $\tilde{\mathcal{K}} \subset X \times X$. Jego ciągle obrazy $\text{pr}_\alpha(\tilde{\mathcal{K}}) \subset X$, $\alpha \in \{1, 2\}$ są zwarte, przeto własność tę ma także ich suma mnogościowa, $\mathcal{K}_{12} \equiv \text{pr}_1(\tilde{\mathcal{K}}) \cup \text{pr}_2(\tilde{\mathcal{K}}) \subset X$. Przy tym oczywiście ilekroć $(g, x) \in G \times X$ spełnia warunek $\Lambda(g, x) \in \tilde{\mathcal{K}}$, to tym bardziej para ta spełnia warunek $\Lambda(g, x) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$, oto bowiem relacja $(x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{K}}$ implikuje relacje $x_1 \in \text{pr}_1(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$ oraz $x_2 \in \text{pr}_2(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$, więc też $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$, zatem ostatecznie

$$\Lambda^{-1}(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \Lambda^{-1}(\mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}) \equiv \{ (g, x) \in G \times \mathcal{K}_{12} \mid g \triangleright x \in \mathcal{K}_{12} \} \subset G(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12},$$

co w świetle Stw. 66 przesądza o zwartości $\Lambda^{-1}(\tilde{\mathcal{K}})$. Istotnie, podzbiór ten jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc – na mocy Stw. 66 (a wobec hausdorffowskości X , która jest dziedziczona przez $X \times X$) – domkniętego podzbioru $\tilde{\mathcal{K}}$, a ponieważ – jak pokazaliśmy – jest podzbiorem (pod)przestrzeni zwartej $G(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12}$ (iloczynowi kartezjańskiemu zbiorów zwartych), przeto jest – znów na mocy Stw. 66 – także zwarty. □

STWIERDZENIE 138. *Przyjmijmy zapis Def. 94. Działanie $\lambda : G \times X \rightarrow X$ grupy topologicznej G na lokalnie prezwartej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy ze zbieżności dowolnego ciągu punktów*

$$\lambda(g, x) : \mathbb{N} \rightarrow M : n \mapsto g_n \triangleright x_n,$$

określonego dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ oraz dowolnego ciągu elementów $g : \mathbb{N} \rightarrow G$, wynika zbieżność pewnego podciągu ciągu g .

■

Dowód: Załóżmy najpierw, że odwzorowanie Λ jest właściwe i niechaj $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ oraz $g : \mathbb{N} \rightarrow G$ będą ciągami o własnościach

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X, \quad y := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \triangleright x_n \in X.$$

Korzystając z założenia o lokalnej prezwartości X , wybierzmy dowolne zbiory prezwarte $\mathcal{U} \ni x$ oraz $\mathcal{V} \ni y$ zawierające punkty x i – odpowiednio – y wraz z pewnymi

ich otoczeniami (otwartymi). Zbieżność x_n do x (wzgl. $\lambda(g_n, x_n)$ do y) oznacza, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są zawarte w \mathcal{U} (wzgl. \mathcal{V}), więc tym bardziej w zwartym zbiorze $\overline{\mathcal{U}}$ (wzgl. $\overline{\mathcal{V}}$), to jednak oznacza, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $\Lambda(g_n, x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X \times X : n \mapsto (g_n \triangleright x_n, x_n)$ są zawarte w zwartym podzbiorze $\overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{V}}$, a zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu $(g_n, x_n) : \mathbb{N} \rightarrow G \times X : n \mapsto (g_n, x_n)$ są zawarte w podzbiorze $\Lambda^{-1}(\overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{V}})$, który wobec właściwego charakteru Λ jest zwarty. Ta cecha $\Lambda^{-1}(\overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{V}})$ przesądza o istnieniu podciągu zbieżnego ciągu (g_n, x_n) , co w szczególności implikuje zbieżność odnośnego podciągu ciągu g_n .

I odwrotnie, założymy, że spełniona jest implikacja z końca tezy dowodzonego stwierdzenia. Ustalmy podzbiór zwarty $\mathcal{K} \subset X \times X$ i wybierzmy dowolny ciąg (g_n, x_n) (j/w) w zbiorze $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$. Jego obraz w $X \times X$ względem Λ jest zawarty w zwartym podzbiorze \mathcal{K} , można zeń przeto wybrać podciąg zbieżny, którego przeciwobraz przecina się z ciągiem wyjściowym (g_n, x_n) definiując (pod)ciąg, o którym mowa we wspomnianej wcześniej implikacji. Tym sposobem otrzymujemy podciąg (g_n, x_n) w $\Lambda^{-1}(\mathcal{K}) \subset G \times X$ zbieżny w $G \times X$ w topologii produktowej, a ponieważ zbiór $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc też – na mocy Stw. 66 i z racji hausdorffowości $X \times X$ (będącej pochodną hausdorffowości X) – domkniętego podzbioru \mathcal{K} , przeto granica tego zbieżnego podciągu leży w $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$, co ostatecznie dowodzi zwartości $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ i tym samym przekonuje, że Λ jest odwzorowaniem właściwym. \square

STWIERDZENIE 139. *Działanie topologiczne zwartej grupy topologicznej na dowolnej różniczkowalnej różniczkowalnej jest właściwe.* \blacksquare

Dowód: Każdy ciąg elementów grupy ma podciąg zbieżny z racji zwartości grupy, teza wynika zatem wprost ze Stw. 138. \square

STWIERDZENIE 140. *Działanie dowolnej podgrupy domkniętej dowolnej grupy Liego stanowiące ograniczenie do podgrupy działania regularnego prawego (wzgl. lewego) grupy na sobie jest właściwe.* \blacksquare

Dowód: Zastosujemy kryterium ze Stw. 138. Niechaj $g_n : \mathbb{N} \rightarrow G$ będzie ciągiem zbieżnym, $h_n : \mathbb{N} \rightarrow G$ zaś – takim, dla którego ciąg $g_n \cdot h_n : \mathbb{N} \rightarrow G : n \mapsto g_n \cdot h_n$ jest zbieżny. Wobec ciągłości operacji grupowych w G zbieżnym jest wówczas także ciąg $(\text{Inv} \circ g_n) \cdot (g_n \cdot h_n) = h_n$. \square

LEMAT 1.5.6. *Przyjmijmy zapis Def. 92 i niechaj $((X, \mathcal{T}(X)), \lambda)$ będzie przestrzenią z działaniem topologicznym grupy topologicznej G . Rzut kanoniczny*

$$\pi_{X/G} : X \rightarrow X/G$$

na przestrzeń orbit

$$X/G := \{ G \triangleright x \mid x \in X \}$$

jest odwzorowaniem otwartym, w rozumieniu Def. 54, względem topologii ilorazowej na X/G . \blacksquare

Dowód: Rozważmy zbiór otwarty $\mathcal{O} \subset X$. Jego obraz $\pi_{X/G}(\mathcal{O})$ jest – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej – otwarty w X/G , jeśli przeciwobraz tego ostatniego,

$$\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(\mathcal{O})) = \{ \lambda(g, x) \mid (g, x) \in G \times \mathcal{O} \} \equiv G \triangleright \mathcal{O}$$

jest otwarty w X . Tak jednak jest w istocie, oto bowiem zbiór ten jest sumą mnogościową

$$G \triangleright \mathcal{O} = \bigcup_{g \in G} \lambda_g(\mathcal{O})$$

obrazów zbioru otwartego \mathcal{O} względem automorfizmów λ_g przestrzeni X , czyli zbiorów otwartych. \square

TWIERDZENIE 1.5.7 (O rozmaitości ilorazowej). *Przyjmijmy notację Def. 14 i 94 oraz Lemat 1.5.6. Ilekroć działanie grupy Liego G na C^∞ -rozmaitości $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ jest gładkie, swobodne i właściwe, przestrzeń orbit M/G jest rozmaitością topologiczną wymiaru $\dim M - \dim G$ i istnieje na niej jedyna struktura gładka, względem której rzut kanoniczny $\pi_{M/G}$ jest gładką submersją. Przestrzeń orbit z ową wyróżnioną strukturą rozmaitości nosi miano **rozmaitości ilorazowej**.* \blacksquare

Dowód: Zaczniemy od zidentyfikowania struktury rozmaitości topologicznej na zbiorze orbit M/G . Topologia M/G jest topologią ilorazową indukowaną z M : zbiór $\mathcal{O} \subset M/G$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego przeciwobraz $\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O})$ jest otwarty w M . Jest to topologia Hausdorffa. Istotnie, wykorzystajmy relację równoważności \mathcal{R}_λ na M , jaką jest przynależność do tej samej orbity działania G ,

$$\mathcal{R}_\lambda = \Lambda(G \times M) \subset M \times M,$$

gdzie Λ jest odwzorowaniem zdefiniowanym w Równ. 1.5.14. Relacja ta zadaje rozkład M na wzajem rozłączne (w świetle Stw. 2) orbity działania grupy G . Niechaj x i y będą punktami w M , których obrazy $\pi_{M/G}(x)$ i $\pi_{M/G}(y)$ są dwoma różnymi punktami w przestrzeni orbit, tj. $\pi_{M/G}(x) \neq \pi_{M/G}(y)$, a wtedy $(x, y) \notin \mathcal{R}_\lambda$, a ponieważ podzbiór $\mathcal{R}_\lambda \subset M \times M$ jest w świetle Stw. 67 domknięty w topologii produktowej na $M \times M$ jako ciągły obraz zbioru domkniętego $G \times M$ względem odwzorowania właściwego Λ , przeto istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_{(x, y)} \ni (x, y)$ o własności $\mathcal{O}_{(x, y)} \cap \mathcal{R}_\lambda = \emptyset$. Wprost na mocy definicji topologii produktowej otoczenie takie jest sumą mnogościową pewnej rodziny iloczynów kartezjańskich podzbiorów otwartych w M , wybierając zatem dowolny z nich – powiedzmy $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}(M)$ – otrzymujemy relacje $\mathcal{O}_\alpha \ni x_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ oraz $(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \cap \mathcal{R}_\lambda = \emptyset$, a zatem także $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_\alpha) \ni \pi_{M/G}(x_\alpha)$, przy czym koniecznie $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_1) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$, w przeciwnym bowiem razie istniałyby punkty $y_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ należące do wspólnej orbity działania G , a zatem także $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_\lambda \cap (\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$, co przeczyłoby rozłączności $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ i \mathcal{R}_λ . W konsekwencji Lematu 1.5.6 zbioru $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_\alpha)$ są otwartymi otoczeniami punktów $\pi_{M/G}(x_\alpha)$ w przestrzeni orbit.

W następnej kolejności dokonamy rozkładu rozmaitości M na włożone weń gładko orbity działania grupy G , po czym stowarzyszymy z tym rozkładem stosowne lokalne mapy, w których współrzędne kartografujące kierunki transwersalne do (bliskich sobie) orbit zostaną ostatecznie wykorzystane w konstrukcji atlasu przestrzeni orbit. Punktem wyjścia do tak zakreślonej taktyki jest upewnienie się, że orbity działania grupy są w istocie podrozmaitościami gładko włożonymi w M . W

tym celu rozważymy odwzorowanie gładkie, określone dla dowolnego (ustalonego) punktu $x \in M$

$$\Omega_x \equiv \lambda(\cdot, x) : G \longrightarrow M : g \longmapsto \lambda(g, x),$$

o oczywistej własności

$$\Omega_x(G) = G \triangleright x.$$

Odwzorowanie to jest jawnie G -ekwiwariantne,

$$\forall_{g \in G} : \Omega_x \circ \ell_g = \lambda_g \circ \Omega_x,$$

tj. splata ze sobą działania G : lewe regularne na sobie oraz λ na M , a ponieważ pierwsze z tych działań jest przechodnie, przeto możemy odnieść do Ω_x tezę Tw. 1.5.5, wnioskując o stałości rzędu tego odwzorowania. Ponadto jest ono injekcją, oto bowiem równość

$$g_2 \triangleright x = \Omega_x(g_2) = \Omega_x(g_1) = g_1 \triangleright x \iff (g_2^{-1} \cdot g_1) \triangleright x = x$$

oznacza – wobec założenia dotyczącego charakteru działania λ – równość

$$g_2^{-1} \cdot g_1 = e \iff g_2 = g_1.$$

To jednak w połączeniu z wcześniejszą konkluzją, a w odwołaniu do Stw. 111, pozwala stwierdzić, że Ω_x jest immersją. Przy tym ilekroć $\mathcal{K} \subset M$ jest zwarty, więc też – w świetle Stw. 66 – domknięty, jego przeciwobraz $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$ jest domknięty w G wobec ciągłości Ω_x , a ponieważ dla dowolnego należącego doń elementu g zachodzi relacja $g \triangleright x \in \mathcal{K}$, czyli też

$$g \triangleright (\mathcal{K} \cup \{x\}) \cap (\mathcal{K} \cup \{x\}) = (g \triangleright \mathcal{K} \cup \{g \triangleright x\}) \cap (\mathcal{K} \cup \{x\}) \supset \{g \triangleright x\} \neq \emptyset,$$

co implikuje jego zawieranie się

$$\Omega_x^{-1}(\mathcal{K}) \subset G(\mathcal{K} \cup \{x\})$$

w zbiorze $G(\mathcal{K} \cup \{x\})$, który jest zwarty na mocy Stw. 137, przeto $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$ jest zwarty w zgodzie z Stw. 66. To zaś oznacza, że Ω_x jest odwzorowaniem właściwym, a zatem ostatecznie – w konsekwencji poprzednich ustaleń i Stw. 112 – gładkim włożeniem.

Wybermy (dowolnie) punkt $x \in M$, a wraz z nim jego przeciwobraz $g_x \in G$ względem Ω_x , i lokalne mapy: $\kappa_{g_x} : \mathcal{O}_{g_x} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times D}$, $D = \dim G$ na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_{g_x} elementu g_x w G oraz $\kappa_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$, $N = \dim M$ na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_x punktu x w M , w których lokalna prezentacja włożenia Ω_x przybiera postać kanoniczną opisaną w Stw. 108, czyli

$$G \triangleright \{x\} \cap \mathcal{O}_x = \kappa_x^{-1}(\mathcal{U}_x \times \{\mathbf{0}_n\}),$$

gdzie $\mathcal{U}_x \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times D})$ jest homeomorficznym obrazem fragmentu orbity x zawartego w \mathcal{O}_x . Niechaj

$$\Delta_x := \kappa_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times \mathbb{R}^{\times N})$$

będzie podrozmaitością \mathcal{O}_x transwersalną do (fragmentu) rzeczonyj orbity $G \triangleright \{x\}$, wyznaczającą rozkład przestrzeni stycznej

$$\mathbb{T}_x M = \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x,$$

w którym wobec immersywności Ω_x identyfikujemy

$$(1.5.15) \quad \mathbb{T}_e \Omega_x(\mathbb{T}_e G) \equiv \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \subset \mathbb{T}_x M.$$

Oznaczmy dalej

$$\delta_x := \lambda|_{G \times \Delta_x} : G \times \Delta_x \longrightarrow M.$$

Wykażemy, że δ jest dyfeomorfizmem na pewnym otoczeniu punktu $(e, x) \in G \times \Delta_x$. W tym celu wykorzystamy gładkie włożenie

$$\iota_x : G \longrightarrow G \times \Delta_x : g \longmapsto (g, x)$$

do rozłożenia odwzorowania Ω_x wedle schematu

$$\Omega_x = \delta_x \circ \iota_x,$$

a zatem także – stycznego do niego:

$$\mathbb{T}_e \Omega_x = \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_e \iota_x.$$

Zważywszy Równ. (1.5.15), konstatujemy prawdziwość relacji

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x (\mathbb{T}_{(e,x)} (G \times \Delta_x)) &\equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x (\mathbb{T}_e G \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x) \supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x (\mathbb{T}_e G \oplus \{0_{\mathbb{T}_x \Delta_x}\}) \\ &\equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_e \iota_x (\mathbb{T}_e G) = \mathbb{T}_e \Omega_x (\mathbb{T}_e G) = \mathbb{T}_x (G \triangleright \{x\}). \end{aligned}$$

Wprowadźmy dalej gładkie włożenie

$$\iota_e : \Delta_x \longrightarrow G \times \Delta_x : y \longmapsto (e, y)$$

podrozmaitości transwersalnej do (lokalnego fragmentu) orbity $G \triangleright \{x\}$, aby móc rozłożyć gładkie włożenie $J_{\Delta_x} : \Delta_x \longrightarrow M$ w postaci

$$J_{\Delta_x} = \delta_x \circ \iota_e$$

i – co za tym idzie – stycznego do niego:

$$\mathbb{T}_y J_{\Delta_x} = \mathbb{T}_{(e,y)} \delta_x \circ \mathbb{T}_y \iota_e.$$

Wobec oczywistej równości

$$\mathbb{T}_x \iota_e (\mathbb{T}_x \Delta_x) = \{0_{\mathbb{T}_e G}\} \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x$$

otrzymujemy tym razem relację

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x (\mathbb{T}_{(e,x)} (G \times \Delta_x)) &\supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x (\{0_{\mathbb{T}_e G}\} \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x) \equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_x \iota_e (\mathbb{T}_x \Delta_x) \\ &= \mathbb{T}_x J_{\Delta_x} (\mathbb{T}_x \Delta_x) \equiv \mathbb{T}_x \Delta_x \subset \mathbb{T}_x M, \end{aligned}$$

ostatecznie zatem stwierdzamy, że

$$\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x (\mathbb{T}_{(e,x)} (G \times \Delta_x)) \supset \mathbb{T}_x (G \triangleright \{x\}) \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x \equiv \mathbb{T}_x M,$$

skoro zaś zarazem

$$\mathbb{T}_x M \supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x (\mathbb{T}_{(e,x)} (G \times \Delta_x)),$$

to nieuchronnie

$$\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x (\mathbb{T}_{(e,x)} (G \times \Delta_x)) = \mathbb{T}_x M,$$

co dowodzi surjektywności $\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x$, a ponieważ jest też – wobec ustalonej wcześniej immersyjności Ω_x –

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{(e,x)} (G \times \Delta_x) &\equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_e G + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x \Delta_x \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x (G \triangleright \{x\}) + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x \Delta_x \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M, \end{aligned}$$

przeto $T_{(e,x)}\delta_x$ jawi się bijekcją. Na tym etapie możemy już odwołać się do Tw. 1.4.7, aby orzec istnienie pewnego otoczenia otwartego \mathcal{V}_x punktu $(e, x) \in G \times \Delta_x$ odwzorowywanego dyfeomorficznie przez (ograniczenie) δ_x w pewne otoczenie otwarte $\tilde{\mathcal{O}}_x$ punktu $x \in M$. Biorąc pod uwagę naturę topologii (produktowej) na $G \times \Delta_x$ (wedle schematu myślowego wyłożonego na początku niniejszego dowodu w uzasadnieniu hausdorffowskości topologii ilorazowej na przestrzeni orbit), upewniamy się, że pierwsze z tych otoczeń można wybrać w postaci produktowej $\mathcal{V}_x = \mathcal{W}_e \times \mathcal{W}_x$, przy czym z każdego z otoczeń: \mathcal{W}_a , $a \in \{e, [x]\}$ można wyjąć przewarto przeciwobrazy pewnych kul otwartych $B^D(\tilde{\kappa}_e(e) = \mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \equiv \tilde{\kappa}_e(\tilde{\mathcal{W}}_e)$, $\varepsilon_e > 0$ oraz – odpowiednio – $B^{N-D}(\tilde{\kappa}_x(x) = \mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \equiv \tilde{\kappa}_x(\tilde{\mathcal{W}}_x)$, $\varepsilon_x > 0$ względem lokalnych map $\tilde{\kappa}_e : \mathcal{W}_e \rightarrow \mathbb{R}^D$ oraz – odpowiednio – $\tilde{\kappa}_x : \mathcal{W}_x \rightarrow \mathbb{R}^{N-D}$. W dalszej części naszej analizy skupimy uwagę na otoczeniu produktowym $\tilde{\mathcal{V}}_x \equiv \tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x$.

W następnej kolejności pokażemy, że otoczenie $\tilde{\mathcal{W}}_x \subset \Delta_x$ można wybrać na tyle małym, ażeby każda orbita działania G przecinała je w co najwyżej jednym punkcie. Załóżmy przeciwnie i rozważmy przeliczalną bazę otoczeń x w $\tilde{\mathcal{W}}_x$ złożoną z przeciwobrazów względem $\tilde{\kappa}_x$ rodziny kul otwartych $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n)$, $r_n := \frac{1}{E(\varepsilon_x^{-1})+n}$, $n \in \mathbb{N}$. W każdym z przeciwobrazów $\mathcal{B}_n \equiv \tilde{\kappa}_x^{-1}(B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n))$ tkwi para punktów x_n oraz $y_n \neq x_n$ należących do tej samej orbity, tj. spełniających warunek $y_n = g_n \triangleright x_n$ dla pewnego elementu $g_n \in G$. Przy tym wobec założonej postaci bazy otoczeń oba ciągi punktów w (prezwartym) $\tilde{\mathcal{W}}_x$ zbiegają do x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n \triangleright x_n),$$

a zatem – w świetle Stw. 138, a z racji właściwego charakteru λ – ciąg g zdefiniowany przez parę ciągów (x, y) zawiera podciąg g_n zbieżny do pewnego elementu $g \in G$. Ciągłość działania λ pozwala nam zatem zapisać ciąg równości

$$g \triangleright x \equiv \lambda\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k}, x_{n_k})\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x,$$

a ponieważ mamy do czynienia z działaniem wolnym, przeto nieodzownie $g = e$. Jednakowoż dla dostatecznie dużych wartości $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $g_{n_k} \in \tilde{\mathcal{W}}_e$, przy czym $g_{n_k} \neq e$ (wszak $y_{n_k} \neq x_{n_k}$) więc też

$$\lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) = y_{n_k} = \lambda(e, y_{n_k}),$$

co z racji iniektywności $\delta_x \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x} \equiv \lambda \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x}$ implikuje równość

$$(g_{n_k}, x_{n_k}) = (e, y_{n_k}),$$

prowadzącą do jawnej sprzeczności. Otoczenie $\tilde{\mathcal{W}}_x$ o postulowanej cesze zawsze zatem istnieje.

Rozważmy teraz złożenie dyfeomorfizmów

$$\begin{aligned} \phi_x &:= (\tilde{\kappa}_e \times \tilde{\kappa}_x) \circ (\delta_x \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{V}}_x})^{-1} : \tilde{\mathcal{O}}_x \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{V}}_x \equiv \tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x \\ &\xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x). \end{aligned}$$

Pokażemy, że określa on lokalną mapę zgodną z działaniem grupy G w tym naturalnym sensie, że orbity tegoż działania są w tej mapie hiperpłaszczyznami parametryzowanymi przez pierwszych D współrzędnych. Zaczniemy od tego, że wobec otwartości zarówno swojej dziedziny, jak i przeciwdziedziny dyfeomorfizm ϕ_x dopuszcza postulowaną interpretację, pozostaje więc jedynie upewnić się co do słuszności naszych oczekiwań dotyczących opisu fragmentów orbit zawartych w jego dziedzinie.

Mamy

$$\begin{aligned} \phi_x^{-1} : \quad & B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_x \\ & : \quad (\xi, \zeta) \longmapsto \delta_x(\tilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)) \equiv \lambda(\tilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)), \end{aligned}$$

bez trudu przeto stwierdzamy, że dowolna hiperpowierzchnia $\zeta = \zeta_* = \text{const}$ jest zawarta w pojedynczej orbicie, oto bowiem jej dyfeomorficzny przeciwobraz w M względem ϕ_x spełnia relację

$$\phi_x^{-1}(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \{\zeta_*\}) \equiv \lambda(\tilde{\mathcal{W}}_e \times \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}) \subset \lambda(G \times \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}) \equiv G \triangleright \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}.$$

Rozumowanie to pokazuje, że dowolna orbita $G \triangleright \{y\}$, $y \in M$ przecina $\tilde{\mathcal{O}}_x$ wzdłuż sumy mnogościowej (fragmentów) hiperpowierzchni o opisie współrzędnym $\zeta = \zeta_i = \text{const}$, $i \in I_y$ dla pewnego zbioru indeksów I_y . Otoczenie $\tilde{\mathcal{W}}_x$ zostało jednak wybrane tak, iżby dowolna orbita przecinała je w *co najwyżej jednym* punkcie, wobec czego $|I_y| \leq 1$. Lokalna mapa ϕ_x jest zatem – w istocie – zgodna z działaniem G w określonym wyżej znaczeniu i może być wykorzystana w kartografowaniu przestrzeni orbit na otoczeniu punktu $\pi_{M/G}(x) \equiv [x]$.

Skonstruujemy teraz lokalną mapę na otoczeniu $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$ punktu $[x]$, pamiętając, że otwartość zbioru $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \ni [x]$ w topologii ilorazowej jest zapewniona przez otwartość rzutu kanonicznego $\pi_{M/G}$, stwierdzoną w Lemacie 1.5.6. Oznaczmy lokalne cięcia przez x w poprzek orbit zawartych w $\tilde{\mathcal{O}}_x$ symbolem

$$\tilde{\Delta}_x := \phi_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x))$$

i zauważmy, że ograniczenie rzutu kanonicznego

$$\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x} : \tilde{\Delta}_x \longrightarrow \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$$

jest bijekcją w świetle założeń poczynionych w odniesieniu do charakteru przecięć orbit działania G z $\tilde{\mathcal{O}}_x$ oraz z racji potwierdzonej zgodności mapy ϕ_x z tymże działaniem. Przy tym ilekroć $\mathcal{W} \subset \tilde{\Delta}_x$ jest podzbiorem otwartym, jego obraz w przestrzeni orbit

$$\begin{aligned} \pi_{M/G}(\mathcal{W}) & \equiv \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})) \\ & = \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1}(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})) \end{aligned}$$

jest w oczywisty sposób otwarty jako obraz względem złożenia odwzorowań otwartych zbioru $B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})$ otwartego w topologii produktowej – wszak ϕ_x jest homeomorfizmem, więc też odwzorowaniem otwartym, a rzut na drugą składową zadanego przezeń zbioru $\phi_x(\mathcal{W})$ otwartego w topologii produktowej, czyli będącego sumą mnogościową iloczynów kartezjańskich zbiorów otwartych, jest także sumą rzutów tychże iloczynów na drugą składową, więc także zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{\times N-D}$. Koniec końców odwzorowanie ograniczone $\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x}$ jest zatem homeomorfizmem, którego ciągłą odwrotność będziemy oznaczać symbolem

$$\sigma_{[x]} := (\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x})^{-1} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Delta}_x.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \psi_{[x]} := \text{pr}_2 \circ \phi_x \circ \sigma_{[x]} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) & \xrightarrow{\cong} \tilde{\Delta}_x \xrightarrow{\cong} \{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \\ & \longrightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x), \end{aligned}$$

które – jak łatwo widać – jest homeomorfizmem otoczenia otwartego $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$ na kulę otwartą $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \subset \mathbb{R}^{\times N-D}$, czyli – innymi słowy – lokalną mapą klasy C^0 . Należy przy tym podkreślić, że lokalna prezentacja rzutu kanonicznego określona przez lokalną mapę ϕ_x na $\tilde{\mathcal{O}}_x$ oraz stowarzyszoną z nią lokalną mapę $\psi_{[x]}$ na $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$ przyjmuje prostą postać

$$\psi_{[x]} \circ \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1} : B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_x) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \rightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x),$$

o jawnie submersywnym charakterze. Odwzorowanie $\sigma_{[x]}$ ma zatem naturalną interpretację ciecia lokalnego submersji $\pi_{M/G}$ w rozumieniu Stw. 114. Jeśli więc zaindukujemy strukturę rozmierności na M/G z tej na rozmierności M (j/w) przy użyciu podatlasu na M utworzonego przez wszystkie możliwe mapy lokalne na M zgodne z działaniem G i wszystkie cięcia lokalne rzutu kanonicznego nad obrazami – względem tegoż cięcia – ich dziedzin, to dla zakończenia dowodu twierdzenia pozostanie nam jedynie wykazać gładkości odwzorowań przejścia między mapami określonymi na przecinających się niepusto otoczeniach w przestrzeni orbit, a na koniec – jedności tak otrzymanej struktury gładkiej.

Niechaj zatem $\psi_{[x_\alpha]} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_\alpha}) \rightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema lokalnymi mapami spełniającymi warunek $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_1}) \cap \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \neq \emptyset$, a stowarzyszonymi z lokalnymi mapami $\phi_{x_\alpha} : \tilde{\mathcal{O}}_{x_\alpha} \rightarrow B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e; \alpha}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_n; \varepsilon_{x_\alpha})$. Przecinanie się rzutów $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_\alpha})$ otoczeń $\tilde{\mathcal{O}}_{x_\alpha}$ odnośnych punktów x_α oznacza, że są w tych otoczeniach punkty $y_\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}_{x_\alpha}$ należące do tej samej orbity, tj. $y_2 = g_{21} \triangleright y_1$ dla pewnego elementu $g_{21} \in G$, możemy zatem bez straty ogólności (dokonawszy – jeśli trzeba – trywialnego przesunięcia w przeciwdziedzinach obu map ϕ_{x_α}) przyjąć, że $y_\alpha = x_\alpha$ i jest spełniony warunek

$$x_2 = g_{21} \triangleright x_1.$$

Załóżmy najpierw, że $g_{21} = e$, a wtedy możemy wprost rozpatrzyć odwzorowanie przejścia między mapami $\phi_{x_1} = (\xi_1, \zeta_1)$ i $\phi_{x_2} = (\xi_2, \zeta_2)$ na zbiorze $\mathcal{O}_{12} := \tilde{\mathcal{O}}_{x_1} \cap \tilde{\mathcal{O}}_{x_2}$. Jako że przecięcia dowolnej orbity z każdym z otoczeń odpowiadają stałej i jedynej wartości ζ_1 oraz takiejż wartości ζ_2 , przeto gładkie (wprost na mocy konstrukcji) odwzorowanie przejścia między obiema mapami jest postaci

$$\begin{aligned} \phi_{x_2} \circ (\phi_{x_1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{12}})^{-1} & : \phi_{x_1}(\mathcal{O}_{12}) \rightarrow \phi_{x_2}(\mathcal{O}_{12}) \\ & : (\xi_1(y), \zeta_1(y)) \mapsto (F_1 \circ (\xi_1, \zeta_1), F_2 \circ \zeta_1)(y), \end{aligned}$$

gdzie F_1 i F_2 są pewnymi odwzorowaniami gładkimi. W szczególności więc otrzymujemy relację

$$\zeta_2(y) = F_2 \circ \zeta_1(y), \quad y \in \mathcal{O}_{12},$$

z której odczytujemy jawnie gładką postać odwzorowania przejścia między mapami indukowanymi:

$$\begin{aligned} & \psi_{[x_2]} \circ (\psi_{[x_1]} \upharpoonright_{\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12})})^{-1} \\ & : \psi_{[x_1]} \circ \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12}) \rightarrow \psi_{[x_2]} \circ \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12}) \\ & : \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ (\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_{x_1}})^{-1}(\pi_{M/G}(y)) \equiv \zeta_1(y) \mapsto \zeta_2(y) = F_2(\zeta_1(y)). \end{aligned}$$

W przypadku $g_{21} \neq e$ nie możemy wprawdzie *a priori* rozważać odwzorowań przejścia między mapami ϕ_{x_1} i ϕ_{x_2} na \mathcal{O}_{12} (zbiór ten może być w szczególności pusty),

ale możemy zastąpić mapę lokalną ϕ_{x_2} oraz cięcie lokalne $\sigma_{[x_2]}$ użyte w definicji mapy lokalnej $\psi_{[x_2]}$ na $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{x_2})$ innymi z tego samego podatlasu na M i – odpowiednio – zbioru cięć lokalnych rzutu kanonicznego, indukujących mapy lokalne na przestrzeni orbit, które wspólnie wyznaczają tę samą mapę lokalną $\psi_{[x_2]}$ na $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{x_2})$, ale jednocześnie przeprowadzają punkt z jej dziedziny przez zbiór otwarty w nakryciu M przecinający się z \mathcal{O}_{x_1} w pewnym otoczeniu otwartym x_1 , co sprowadza nas do poprzednio zweryfikowanego przypadku. Otóż więc użyjmy automorfizmu $\lambda_{g_{21}}$, aby zdefiniować odwzorowanie

$$\phi_{x_1}^{21} := \phi_{x_2} \circ \lambda_{g_{21}} : \lambda_{g_{21}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \rightarrow B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e;2}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_2})$$

na otwartym (wprost z konstrukcji) otoczeniu $\lambda_{g_{21}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$ punktu x_1 . Jako że automorfizm $\lambda_{g_{21}}$ przeprowadza orbity na orbity, $\phi_{x_1}^{21}$ jest mapą lokalną zgodną z działaniem G . Definicję tę uzupełniamy stosowną definicją lokalnego cięcia rzutu kanonicznego nad $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$,

$$\sigma_{[x_2]}^{21} := \lambda_{g_{21}}^{-1} \circ \sigma_{[x_2]}.$$

Ta ostatnia ma sens, gdyż

$$\pi_{M/G} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \pi_{M/G} \circ \sigma_{[x_2]} = \text{id}_{\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})},$$

a przy tym zgodnie z zapowiedzią odtwarza, w połączeniu z nową mapą lokalną, wyjściową mapę lokalną na $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$, o czym przekonuje bezpośredni rachunek:

$$\psi_{[x_2]}^{21} := \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1}^{21} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \lambda_{g_{21}} \circ \lambda_{g_{21}}^{-1} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} \equiv \psi_{[x_2]}.$$

To kończy dowód istnienia struktury gładkiej, o której jest mowa w tezie twierdzenia. Należy jeszcze wykazać struktury tej jedność.

W tym celu rozważmy dowolne dwie takie struktury na tej samej przestrzeni orbit M/G , oznaczając odnośnie jej kopie indeksem: $(M/G)_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ dla wygodnego odróżnienia. Wprost na mocy poczynionego założenia rzut kanoniczny $\pi_{M/G} : M \rightarrow (M/G)_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ jest w obu przypadkach gładką surjektywną submersją, można zatem odnieść do niego tezę Stw. 115, i to na dwa sposoby: możemy oto zapisać trywialny diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & (M/G)_2 & \\ & \nearrow \pi_{M/G} & \uparrow \text{id}_{M/G} \\ M & \xrightarrow{\pi_{M/G}} & (M/G)_1 \end{array},$$

w którym traktujemy $\pi_{M/G} : M \rightarrow (M/G)_1$ jako submersję, $\pi_{M/G} : M \rightarrow (M/G)_2$ zaś (to samo odwzorowanie) – jako odwzorowanie referencyjne, którego gładkość przesądza o gładkości $\text{id}_{M/G}$; możemy też zamienić miejscami (i rolami) $(M/G)_1$ i $(M/G)_2$, co prowadzi do wniosku, że także wtedy, gdy traktujemy $\text{id}_{M/G}$ jako odwzorowanie z $(M/G)_2$ w $(M/G)_1$, jest ono gładkie, co jest równoznaczne z równoważnością obu struktur różniczkowych. \square

UWAGA 30. Często przyjmuje się, że nośnik struktury różniczkowej topologicznej powinien spełniać drugi aksjomat przeliczalności. Bez trudu przekonujemy się, że przestrzeń orbit M/G ma tę cechę, oto bowiem obraz dowolnej skończonej lub przeliczalnie nieskończonej bazy $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_n\}_{n \in I \subseteq \mathbb{N}}$ topologii M względem

rzutu kanonicznego na przestrzeń orbit, $\pi_{M/G}(\mathcal{O}) = \{\pi_{M/G}(\mathcal{O}_n)\}_{n \in I \subset \mathbb{N}}$, jest – w świetle Lematu 1.5.6 – odpowiednią bazą topologii (ilorazowej) M/G . Istotnie, $\pi_{M/G}(\mathcal{O})$ jest pokryciem otwartym M/G , a ponadto dla dowolnej pary elementów tej rodziny $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}), \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}), n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ o niepustym przecięciu $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni G \triangleright x, x \in M$ istnieje element $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \subset \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2})$ o własności $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \ni G \triangleright x$. W rzeczy samej, z relacji $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni G \triangleright x$ wynika istnienie punktów $x_\alpha \in \mathcal{O}_{n_\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}$ oraz elementu grupy $g_{21} \in G$ spełniającego relację $x_2 = g_{21} \triangleright x_1$, wobec czego zbiór $\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})$ ma niepuste przecięcie z \mathcal{O}_{n_2} , a ponieważ jest otwarty (jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego), przeto jest sumą mnogościową pewnej rodziny elementów bazy \mathcal{O} . Przynajmniej jeden element tej rodziny – oznaczmy go $\mathcal{O}_{n_{12}}$ – przecina się niepusto z \mathcal{O}_{n_2} , a zatem – wprost na mocy definicji bazy topologii – istnieje element $\mathcal{O}_{n_{122}} \in \mathcal{O}$ spełniający warunek

$$\mathcal{O}_{n_{122}} \subset \mathcal{O}_{n_{12}} \cap \mathcal{O}_{n_2} \subset \lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2},$$

z którego wynika już pożądaný warunek

$$\begin{aligned} \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{122}}) &\subset \pi_{M/G}(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2}) \subset \pi_{M/G}(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \\ &= \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}). \end{aligned}$$

Wreszcie na koniec zauważmy, że dla dowolnego zbioru otwartego $\mathcal{O} \subset M/G$ zachodzi – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej oraz wobec bazowego charakteru \mathcal{O} – tożsamość

$$\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{n_i},$$

w której $I \subset \mathbb{N}$ jest pewnym zbiorem indeksów. Wobec powyższego otrzymujemy równość

$$\pi_{M/G}(\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O})) = \pi_{M/G}(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{n_i}) = \bigcup_{i \in I} \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_i}),$$

która przesądza o bazowym charakterze $\pi_{M/G}(\mathcal{O})$.

TWIERDZENIE 1.5.8. *Przyjmijmy zapis Lematu 1.5.6 oraz Przykł. 1 (7) i niechaj G będzie grupą Liego, $H \subset G$ zaś – jej domkniętą podgrupą. Istnieje dokładnie jedna struktura rozmaitości gładkiej na przestrzeni ilorazowej G/H z topologią ilorazową zaindukowaną z G , względem której rzut kanoniczny $\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H$ jest surjektywną submersją. Naturalne lewe działanie*

$$(1.5.16) \quad [\lambda] : G \times (G/H) \rightarrow G/H : (\tilde{g}, gH) \mapsto (\tilde{g} \cdot g)H$$

*jest gładkie względem tej struktury. Gładka rozmaitość G/H z działaniem grupy G określona tym sposobem nosi miano **gładkiej przestrzeni jednorodnej** G .* ■

Dowód: Rozważmy działanie $\wp : G \times H \rightarrow G : (g, h) \mapsto g \cdot h$ podgrupy $H \subset G$ na grupie G otrzymane w wyniku ograniczenia do tejże podgrupy prawego działania regularnego G na sobie. Jest ono jawnie swobodne, a przy tym możemy je zapisać jako superpozycję

$$\wp = m \circ (\text{id}_G \times j_H)$$

odwzorowań gładkich (przy czym gładkość kanonicznego włożenia $j_H : H \rightarrow G$ wynika wprost z Tw. 1.5.4), zatem jest też gładkie. W świetle Stw. 140 jest ono również właściwe, możemy więc odnieść do pary (G, H) tezę Tw. 1.5.7, konstatując prawdziwość pierwszej części tezy twierdzenia dowodzonego. Pozostaje zatem wykazać gładkość działania $[\lambda]$. Zauważmy, że działanie to domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & G/H \\ & \nearrow \pi_{G/H} \circ m & \uparrow [\lambda] \\ G \times G & \xrightarrow{\text{id}_G \times \pi_{M/G}} & G \times (G/H)_1 \end{array},$$

w którym w świetle dowiedzionej części tezy oraz oczywistej submersywności mnożenia grupowego m superpozycja $\pi_{G/H} \circ m$ jest submersją, co pozwala zastosować Stw. 115, aby wywnioskować gładkość $[\lambda]$ z gładkości produktu $\text{id}_G \times \pi_{M/G}$, wynikającej ze stwierdzonej wcześniej gładkości $\pi_{G/H}$. \square

* * *

Literatura uzupełniająca: Szczegółowe omówienie wprowadzonych tu (i wielu innych) struktur algebraicznych można znaleźć w traktatach Bourbakiego [Bou07b, Bou07a], w klasycznym kursie Langa [Lan02] oraz w doskonałej trzytomowej monografii Cohna [Coh82, Coh89, Coh91], jak również w nader przejrzysto napisanej książce Kocka [Koc03]. Warto także sięgnąć do książek Greuba [Gre81, Gre78]. Podstawowe zagadnienia algebry, stanowiące punkt wyjścia do powyższych i – przede wszystkim – dalszych naszych rozważań zostały omówione ze szczegółami w skrypcie wykładowym Autora [Sus13]. Podążając tropem kategoryalnym nie sposób pominąć klasyczną monografię Mac Lane’a [ML98], nie można też przejść obojętnie obok *opus magnum* Borceux [Bor99a, Bor99b, Bor99c]. Rozwinięcie zawartej tu dyskusji zagadnień analitycznych zawierają: monografia Langa [Lan93] oraz monumentalny traktat Dieudonnégo [Die65]. Niezwykle wartościowym opracowaniem z zakresu geometrii różniczkowej są prace Lee [Lee02, Lee09], których lekturę warto podeprzeć dużo prostszą książką Guillemina i Pollacka [GP74] oraz świetną monografią niezmiernianego Langa [Lan99], jak również książką Michora [Mic08]. Geometria grup Liego została gruntownie i w ujęciu dość nowoczesnym zanalizowana w książce Hilgerta i Neeba [HN12]

Część 2

Algebry – struktury ogólne

Algebry

1. Aksjomatyka i podstawowe konstrukcje

Elementarna leksykalna przyzwoitość wymaga, iżby każdy kurs algebry zawierał bodaj wzmiankę o algebrach. W przypadku kursów adresowanych do fizyków – przyszłych i obecnych (przeszłych można z tej wyliczanki wyłączyć) – są po temu powody dodatkowe: oto algebry (najczęściej wyposażone w dodatkową strukturę) odgrywają kluczową rolę w kanonicznym (infinitesimalnym) opisie ciągłych symetrii układów fizycznych, w modelowaniu pól cechowania (stanowiących uogólnienie konstrukcji pola elektromagnetycznego) i pól fermionowych, w różniczkowej analizie foliacji różniczkowych (takich jak czasoprzestrzeń, czy przestrzeń stanów układu fizycznego), wreszcie też w dyskusji struktury obecnej na zbiorze operatorów na przestrzeni Hilberta układu fizycznego, jak również w funktorialnej realizacji procesów fizycznych w kategorii algebraicznej w kategoryalnym schemacie kwantowania Segala i abstrakcyjnym sformułowaniu geometrii różniczkowej, dostarczającym pola dla nader płodnych uogólnień, takich jak geometria nieprzemienne, by nazwać tylko kilka istotnych zastosowań. Pojemność definicji tych struktur, w połączeniu z jej prostotą, usprawiedliwia przeniesienie ich nazwy, oznaczającej pierwotnie¹ „łączenie ze sobą wzgl. w całość części rozproszonych wzgl. rozdzielonych”, na całą gałąź nowoczesnej matematyki i użycie jej przy kwalifikacji odrębnych obszarów nowoczesnej topologii, geometrii itd., w których wykorzystywane są metody tej pierwszej. Wzmocnieni tą świadomością, możemy już wysłowić

DEFINICJA 95. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz 40 i niech $R \in \text{Obj AbRing}$. **Algebra nad pierścieniem** R (albo inaczej R -**algebra**) to kolekcja $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}, \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}})$ złożona z R -modułu $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}, \ell_{\mathfrak{A}})$ oraz odwzorowania dwu- R -liniowego

$$m_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A} : (a, b) \longmapsto a \cdot_{\mathfrak{A}} b \equiv m_{\mathfrak{A}}(a, b),$$

zwanego **mnożeniem**. Równoważnie możemy traktować mnożenie jako odwzorowanie R -liniowe

$$m_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \otimes_R \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A},$$

przeto w dalszej części wykładu będziemy obu wersji definicji używać zamiennie, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień. Podobnie, jeśli tylko struktura rozważanej algebry nie będzie budzić wątpliwości, będziemy czasami gwoli odciążenia

¹Tj. ok. roku 820 n.e., kiedy to Abu Abdullah Muhammad „Pan Tablic” ibn Musa al-Chuwarizmi opublikował swe przełomowe „Kompendium rachunków drogą łączenia członów podobnych i ich wzajemnego znoszenia”, czyli „Al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dżabr wa'l-mukabala”.

zapisu używać skrótu

$$m_{\mathfrak{A}}(a, b) \equiv a.b.$$

Algebra przeciwna do $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}}$ to R -algebra $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}}^{\text{opp}}$ z mnożeniem danym wzorem

$$m_{\mathfrak{A}}^{\text{opp}} := m_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{A}}.$$

Będziemy ją oznaczać symbolem $\mathfrak{A}^{\text{opp}}$.

Algebra przemienna to taka, w której

$$m_{\mathfrak{A}} \equiv m_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{A}}.$$

Algebra łączna to taka, w której mnożenie jest operacją łączną.

Algebra unitalna (zwana także **algebrą z jednością**) to kolekcja $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$ złożona z R -algebry $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}}$ oraz stałej $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$ będącej elementem neutralnym mnożenia, zwanej **jednością** lub **jedynką**.

Podalgebra \mathfrak{B} algebry \mathfrak{A} to taki jej podmoduł, który spełnia warunek domkniętości względem mnożenia,

$$m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}.$$

Homomorfizm R -algebry $((\mathfrak{A}_1, +_{\mathfrak{A}_1}, P_{\mathfrak{A}_1}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}_1}), \ell_{\mathfrak{A}_1}), m_{\mathfrak{A}_1}$ w R -algebrę $((\mathfrak{A}_2, +_{\mathfrak{A}_2}, P_{\mathfrak{A}_2}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}_2}), \ell_{\mathfrak{A}_2}), m_{\mathfrak{A}_2}$ to odwzorowanie $\chi \in \text{Hom}_R(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ o dodatkowej własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1 & \xrightarrow{m_{\mathfrak{A}_1}} & \mathfrak{A}_1 \\ \chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_2 & \xrightarrow{m_{\mathfrak{A}_2}} & \mathfrak{A}_2 \end{array} .$$

Homomorfizm R -algebry z jednością nazwiemy **unitalnym**, jeśli obrazem jedności w jego dziedzinie względem tego homomorfizmu jest jedność w jego przeciwdziedzinie.

Algebry nad pierścieniem R wraz z odnośnymi homomorfizmami tworzą **kategorię algebr nad pierścieniem R** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\text{Alg}_R.$$

Kategorię R -algebr łącznych oznaczymy symbolem

$$\text{AssAlg}_R,$$

natomiast **kategorię R -algebr unitalnych** (z unitalnymi homomorfizmami R -algebr jako morfizmami) – symbolem

$$\text{uAlg}_R.$$

Wreszcie **kategorię unitalnych R -algebr łącznych** oznaczymy symbolem

$$\text{uAssAlg}_R.$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 29.

- (1) Macierze kwadratowe $\text{Mat}(n; R) \equiv R(n)$ (rozmiaru $n \times n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) o współczynnikach z pierścienia przemiennego R z dodawaniem po współrzędnych i takimż braniem przeciwności, a także macierzą zerową w charakterze elementu neutralnego tworzą grupę przemienną, na której jest określone naturalne działanie (po współrzędnych) pierścienia R , czyniące z rzeczony grupy moduł nad R , a nadto – mnożenie (macierzowe), nadające temu R -modułowi strukturę R -algebry (nieprzemiennej dla $n > 1$), zwanej **algebrą macierzową**. Naturalną (standardową) bazę tej algebry tworzą macierze $\{E_{ij}\}_{i,j \in \overline{1,n}}$ o wyrazach

$$(2.1.1) \quad (E_{i,j}^{(n)})_l^k = \delta_{k,i}^R \cdot \delta_{l,j}^R,$$

spełniające prostą algebrę

$$(2.1.2) \quad E_{i,j}^{(n)} \odot E_{k,l}^{(n)} = \delta_{k,j}^K \triangleright E_{i,l}^{(n)}.$$

- (2) Endomorfizmy $\text{End}_R(G)$ modułu G nad pierścieniem przemiennym R z określonym punktowo dodawaniem i braniem przeciwności, a także endomorfizmem zerowym w charakterze elementu neutralnego tworzą grupę przemienną, na której jest określone punktowe działanie pierścienia R , czyniące z rzeczony grupy moduł nad R , a nadto – mnożenie zadawane przez superpozycję endomorfizmów, nadające temu R -modułowi strukturę R -algebry (w ogólności nieprzemiennej), zwanej **algebrą endomorfizmów**.
- (3) Dowolny pierścień jest algebrą łączną nad swym centrum.
- (4) Unitalna \mathbb{R} -algebra **kwaternionów** \mathbb{H} , czyli przestrzeń \mathbb{R} -liniowa \mathbb{R}^4 z **iloczynem Hamiltona** (zapisanym dla dowolnych $r_i, s_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$)

$$\begin{aligned} m_{\mathbb{H}}((r_1, r_2, r_3, r_4), (s_1, s_2, s_3, s_4)) &\equiv (r_1, r_2, r_3, r_4) \cdot_{\mathbb{H}} (s_1, s_2, s_3, s_4) \\ &= (r_1 \cdot s_1 - r_2 \cdot s_2 - r_3 \cdot s_3 - r_4 \cdot s_4, r_1 \cdot s_2 + r_2 \cdot s_1 + r_3 \cdot s_4 - r_4 \cdot s_3, \\ &\quad r_1 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_4 + r_3 \cdot s_1 + r_4 \cdot s_2, r_1 \cdot s_4 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2 + r_4 \cdot s_1) \end{aligned}$$

o elemencie neutralnym

$$1_{\mathbb{H}} := (1, 0, 0, 0).$$

Tak jak w przypadku liczb zespolonych istnieje monomorfizm ciał

$$j_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} : r \mapsto (r, 0, 0, 0),$$

który pozwala zdefiniować działanie $\mathbb{R} \cong j_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ na \mathbb{H} ,

$$\ell : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : (r, q) \mapsto j_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}}(r) \cdot_{\mathbb{H}} q,$$

i uzasadnia zapis

$$\mathbb{H} \ni (a, b, c, d) \equiv a + bi + cj + dk.$$

Wyróżnione wektory

$$i \equiv (0, 1, 0, 0), \quad j \equiv (0, 0, 1, 0), \quad k \equiv (0, 0, 0, 1)$$

spełniają relacje

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} i \cdot_{\mathbb{H}} i &= -1 = j \cdot_{\mathbb{H}} j = k \cdot_{\mathbb{H}} k, \\ i \cdot_{\mathbb{H}} j &= k = -j \cdot_{\mathbb{H}} i, & k \cdot_{\mathbb{H}} i &= j = -i \cdot_{\mathbb{H}} k, & j \cdot_{\mathbb{H}} k &= i = -k \cdot_{\mathbb{H}} j. \end{aligned}$$

W analogii do liczb zespolonych definiujemy \mathbb{R} -liniowe, antymultiplikatywne i inwolutywne **sprzężenie kwaternionowe**

$$\cdot^* : \mathbb{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a - bi - cj - dk$$

i przy jego użyciu **normę kwaternionową**

$$\|\cdot\|_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \ni q \mapsto \sqrt{q \cdot q^*},$$

która dystrybuuje względem mnożenia,

$$\forall_{q_1, q_2 \in \mathbb{H}} : \|q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2\|_{\mathbb{H}} = \|q_1\|_{\mathbb{H}} \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}.$$

Mamy zatem oczywistą tożsamość

$$\forall_{q \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0,0)\}} : q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|_{\mathbb{H}}^2},$$

która pokazuje, że kwaterniony tworzą pierścień z dzieleniem. Można je otrzymać z uniwersalnej konstrukcji Cayleya–Dicksona zastosowanej do liczb zespolonych. Są to więc pary liczb zespolonych (czyli przestrzeń \mathbb{C} -liniowa $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \equiv \langle 1 \rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle j \rangle_{\mathbb{C}}$) z mnożeniem określonym przez sugestywny zapis

$$\mathbb{H} \ni a + bi + cj + dk \leftrightarrow (a + bi) \triangleright 1 + (c + di) \triangleright j \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

W tym ujęciu pojawia się naturalnie monomorfizm \mathbb{R} -algebry

$$(2.1.4) \quad j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H} : a + bi \mapsto (a + bi) \triangleright 1 + (0 + 0i) \triangleright j.$$

Warto też zauważyć, że algebra kwaternionów ma naturalną interpretację geometryczną – oto w obrazie izomorfizmu przestrzeni \mathbb{R} -liniowych

$$(2.1.5) \quad \iota_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} : a + bi + cj + dk \mapsto (a, (b, c, d))$$

iloczyn Hamiltona tłumaczy się, jak łatwo sprawdzić, na mnożenie

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}} := \iota_{\mathbb{H}} \circ m_{\mathbb{H}} \circ (\iota_{\mathbb{H}}^{-1} \times \iota_{\mathbb{H}}^{-1}) & : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3})^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} \\ & : ((r, v), (s, w)) \mapsto (r \cdot s - \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(3)}}(v, w), \end{aligned}$$

$$v \times w + r \triangleright w + s \triangleright v),$$

gdzie $\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(3)}} : \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest standardową (euklidesową) niezwyrodniałą 2-liniową formą symetryczną (czyli iloczynem skalarnym) na $\mathbb{R}^{\times 3}$, symbol $v \times w$ oznacza iloczyn wektorowy v i w , natomiast \triangleright jest kanonicznym działaniem ciała bazowego \mathbb{R} na grupie przemiennej $\mathbb{R}^{\times 3}$, o którym mowa w Przykł. 11 (10). Tym samym kwaterniony w zgrabnej postaci kodują pełną informację o elementarnej strukturze metrycznej i orientacji przestrzeni \mathbb{R} -liniowej $\mathbb{R}^{\times 3}$.

- (5) Mnożenie punktowe funkcji wraz z określonym punktowo działaniem \mathbb{R} nadaje pierścieniowi z Przykł. 3 (5) strukturę przemiennej i łącznej \mathbb{R} -algebry unitalnej.

- (6) Z każdą grupą skończoną G można stowarzyszyć \mathbb{C} -algebrę, w której nośnikiem struktury jest zbiór \mathbb{C}^G funkcji na G o wartościach zespolonych z punktową strukturą \mathbb{C} -liniową (j/w) oraz mnożeniem określonym wzorem

$$\star : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}^G : (f_1, f_2) \longmapsto \sum_{g \in G} f_1(g) \triangleright \ell_{g^{-1}}^* f_2$$

(w notacji Przykł. 7 (5)) i noszącym miano **splotu funkcji**. Algebrę tę określamy mianem **algebry grupowej nad G** . Dyskusję funkcjonalności tego przyporządkowania, jak również szczegółowy opis dodatkowych własności tak określonego obiektu algebraicznego, można znaleźć w Ref. [Sus15].

- (7) Zbiór \mathbb{R}^3 ze standardową strukturą przestrzeni \mathbb{R} -liniowej oraz iloczynem wektorowym jest algebrą niełączną bez jedności.
- (8) Z dowolnym zbiorem S można stowarzyszyć R -algebrę **wolną na S** , daną jako R -moduł wolny (w rozumieniu Przykł. 11 (3)) na słowniku na S , czyli na zbiorze skończonych ciągów elementów S , zwanych słowami, z mnożeniem określonym jako konkatencja słów.
- (9) Dowolna R -algebra \mathfrak{A} z mnożeniem $m_{\mathfrak{A}}$ określa algebrę przemienną o nośniku \mathfrak{A} z mnożeniem

$$\{\cdot, \cdot\}_{m_{\mathfrak{A}}} := m_{\mathfrak{A}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}} + \tau_{\mathfrak{A}}),$$

określanym mianem **antykomutatora**, jak również algebrę antyprzemienną o nośniku \mathfrak{A} z mnożeniem

$$[\cdot, \cdot]_{m_{\mathfrak{A}}} := m_{\mathfrak{A}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}} - \tau_{\mathfrak{A}}),$$

określanym mianem **komutatora**.

- (10) Jądro homomorfizmu algebr jest podalgebrą jego dziedziny, obraz zaś – podalgebrą jego przeciwdziedziny.
- (11) Przecięcie wszystkich podalgebr algebry \mathfrak{A} zawierających podzbiór $S \subset \mathfrak{A}$ zwany jest **podalgebrą generowaną przez S** . Podzbiór S nazywamy w tym kontekście **zbiorem generującym**.
- (12) Podalgebra $S' \equiv C_{\mathfrak{A}}(S)$ algebry łącznej \mathfrak{A} złożona z elementów \mathfrak{A} komutujących (czyli przemiennych) ze wszystkimi elementami podzbioru $S \subset \mathfrak{A}$,

$$C_{\mathfrak{A}}(S) := \{ a \in \mathfrak{A} \mid \forall_{s \in S} : [a, s]_{m_{\mathfrak{A}}} = \mathbf{0}_{\mathfrak{A}} \},$$

jest nazywana **centralizatorem S (w \mathfrak{A})**. Ilekroć S jest podalgebrą, to $S \cap C_{\mathfrak{A}}(S)$ określamy mianem **centrum S** . W szczególności gdy $S = \mathfrak{A}$, mówimy o **centrum algebry \mathfrak{A}** i piszemy $Z(\mathfrak{A}) \equiv C_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$.

✓

Obecność jedności w algebrze pozwala ustalić

STWIERDZENIE 141. *Przyjmijmy zapis Def. 95 i Przykł. 29 (3), zakładając przy tym, że R -algebra \mathfrak{A} ma jedność $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$. Odwzorowanie*

$$\mathcal{J}_R : R \longrightarrow \mathfrak{A} : r \longmapsto r \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$$

jest monomorfizmem R -algebr.

■

Dowód: Oczywisty.

□

UWAGA 31. Monomorfizm, o którym mowa w Stw. 141, pozwala utożsamić pierścień bazowy R z podalgebrą przemienną $\mathcal{J}_R(R) \subset Z(\mathfrak{A})$ (w notacji Przykł. 29 (11)), co też będziemy czynić w dalszej części wykładu.

Elementarne przejście od algebry nieunitalnej do algebry unitalnej opisuje

STWIERDZENIE 142. *Przyjmijmy zapis Def. 32 i 95 oraz Przykł. 11 (2) i niechaj \mathfrak{A} będzie R -algebrą bez jedności. Na sumie prostej R -modułów $\mathfrak{A} \oplus R$ istnieje kanoniczna struktura R -algebry unitalnej z mnożeniem*

$$\begin{aligned} m_{\mathfrak{A} \oplus R} &: (\mathfrak{A} \oplus R)^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A} \oplus R \\ &: ((a, r), (b, s)) \longmapsto (m_{\mathfrak{A}}(a, b) +_{\mathfrak{A}} r \triangleright_{\mathfrak{A}} b +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} a, r \cdot_R s) \end{aligned}$$

i jednością

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A} \oplus R} = (0, 1_R).$$

■

Dowód: Oczywisty. □

Nakreśliwszy kontekst naszych dalszych rozważań, możemy obecnie przystąpić do omówienia w tymże kontekście podstawowych konstrukcji algebraicznych napotkanych w dyskusji modułów nad pierścieniem (lub ogólniej: w kategorii przemiennej) takich jak iloraz algebraiczny, produkt i suma prosta oraz iloczyn tensorowy. Zaczniemy od koniecznej rafinacji pojęcia podalgebry.

DEFINICJA 96. Przyjmijmy zapis Def. 95 i niechaj $\mathcal{J} \subset \mathfrak{A}$ będzie podalgebrą R -algebry \mathfrak{A} . Powiemy, że \mathcal{J} jest **ideałem lewostronnym**, jeśli spełnia warunek

$$\mathfrak{A} \cdot \mathcal{J} \subset \mathcal{J},$$

jeżeli zaś spełniony jest warunek

$$\mathcal{J} \cdot \mathfrak{A} \subset \mathcal{J},$$

to mówimy o **ideałach prawostronnych**. Ideał, który jest zarazem lewo- i prawostronny, nazywamy **ideałem obustronnym**. **Ideał minimalny (lewostronny, prawostronny lub obustronny)** to taki, który nie zawiera niezerowych podideałów właściwych (tego samego typu).

Algebra prosta to taka, która nie zawiera ideałów innych niż $\{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz \mathfrak{A} i w której mnożenie jest nietrywialne, $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$.

▲

PRZYKŁAD(Y) 30.

- (1) Podzbiór $R(n)$ złożony z macierzy, których ostatni rząd tworzą same 0_R , jest (nieobustronnym w ogólności) ideałem prawostronnym w algebrze z Przykł. 29 (1). Podobnie podzbiór złożony z macierzy, których ostatnią kolumnę tworzą same 0_R , jest (nieobustronnym w ogólności) ideałem lewostronnym w tejże algebrze.

- (2) Zbiór funkcji przyjmujących wartość 0 w ustalonym (dowolnie) punkcie dziedziny jest ideałem (z konieczności obustronnym) w algebrze z Przykł. 29 (4). Ideałem takim jest także

$$C_{\setminus L}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) := \{ f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid \exists L > 0 \forall |x| > L : f(x) = 0 \}.$$

- (3) Jądro homomorfizmu R -algebr jest ideałem obustronnym dziedziny.
 (4) Przecięcie wszystkich ideałów lewostronnych (wzgl. prawostronnych, wzgl. obustronnych) zawierających podzbiór $S \subset \mathfrak{A}$ algebry \mathfrak{A} nad pierścieniem R jest ideałem lewostronnym (wzgl. prawostronnym, wzgl. obustronnym), zwanym **ideałem generowanym przez S** ,

$$\mathfrak{I}_S \equiv \langle S \rangle_{\mathfrak{A}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{J} \supset S \\ \mathfrak{J} \subset \mathfrak{A} \text{ ideal}}} \mathfrak{J}.$$

✓

Ważnej egzemplifikacji pojęcia algebry prostej dostarcza

STWIERDZENIE 143. *Przyjmijmy zapis Def. 96 oraz Przykł. 3 (8) i Przykł. 29 (1), (2) i (4). Algebra endomorfizmów $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ dowolnej skończonej wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem \mathbb{K} jest \mathbb{K} -algebrą prostą. W szczególności jest nią algebra macierzowa*

$$\mathbb{K}(n) \equiv \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x^n}), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Algebrami prostymi nad ciałem \mathbb{R} są także pierścienie $R(n)$ macierzy kwadratowych wymiaru n o współczynnikach z pierścienia $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

■

Dowód: Załóżmy, że $\mathfrak{J} \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest nietrywialnym ideałem obustronnym i wybierzmy zeń dowolny element $\chi_0 \in \mathfrak{J} \setminus \{0\}$, a wtedy istnieje $v_0 \in V$ o własności $\chi_0(v_0) \neq 0_V$, który ustalamy. Wziąwszy dowolną bazę $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$, $N \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$ w przestrzeni V , definiujemy endomorfizmy $\{\chi_i\}_{i \in \overline{1, N}} \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będące (jedynymi) \mathbb{K} -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\chi_i(e_j) := \delta_{ij}^{\mathbb{K}} \triangleright v_0,$$

a następnie – dowolne endomorfizmy $\{\psi_i\}_{i \in \overline{1, N}} \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ spełniające warunki

$$\psi_i \circ \chi_0(v_0) := e_i,$$

co wobec niezerowości $\chi_0(v_0)$ zawsze jest możliwe (wystarczy uzupełnić układ liniowo niezależny $\{\chi_0(v_0)\}$ do bazy V , po czym jej elementom różnym od $\chi_0(v_0)$ przyporządkować wektory bazy e_j , $j \neq i$ i ostatecznie dokonać \mathbb{K} -liniowego rozszerzenia tak określonego przyporządkowania). Rozważmy następnie dowolne odwzorowanie $\chi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ o macierzy $(\chi_{ij})_{i, j \in \overline{1, N}}$ względem bazy \mathcal{E} , w której obliczamy

$$\begin{aligned} \chi(e_i) &= \chi_{ij} \triangleright e_j = \chi_{ij} \triangleright \psi_j \circ \chi_0(v_0) \equiv \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0(\delta_{ki}^{\mathbb{K}} \triangleright v_0) \\ &= \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k(e_i), \end{aligned}$$

co pozwala zapisać

$$(2.1.7) \quad \chi = \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k.$$

Jednakowoż zachodzi

$$\psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \circ \mathfrak{J} \circ \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \subset \mathfrak{J},$$

przeto $\chi \in \mathfrak{I}$, czyli $\text{End}_{\mathbb{K}}(V) \subset \mathfrak{I}$, a ponieważ także $\mathfrak{I} \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, zatem ostatecznie $\mathfrak{I} = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

W przypadku \mathbb{R} -algebr $\mathbb{K}(n)$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ dowód opiera się na rozumowaniu identycznym z powyższym, które prowadzimy w odniesieniu do lewego \mathbb{C} -modułu $\mathbb{C}^{\times n}$ wzgl. *prawego* \mathbb{H} -modułu $\mathbb{H}^{\times n}$ ze standardowym działaniem jak w Przykł. 11 (2). W szczególności odwzorowania

$$\mathbb{H}(n) \ni (\chi_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}} : \mathbb{H}^{\times n} \curvearrowright : (q_i)_{i \in \overline{1,n}} \mapsto (\chi_{ij} \cdot_{\mathbb{H}} q_j)_{i \in \overline{1,n}}$$

są jawnie \mathbb{H} -liniowe względem tak określonego (prawego) działania i jest $\mathbb{H}(n) \equiv \text{End}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{\times n})$. Omówione rozumowanie doprowadza nas ostatecznie do równości (2.1.7), która wyraża χ jako kombinację \mathbb{K} -liniową elementów ideału \mathfrak{I} . Każdy z jej współczynników χ_{ij} jest *rzeczywistą* kombinacją liniową liczb $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{C}$ wzgl. liczb $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{H}$, które działają (punktowo) na endomorfizmy ψ_j przekształcając je w inne elementy tej samej (\mathbb{R} -)algebry $\mathbb{K}(n)$ (można o nich myśleć jako o endomorfizmach skalarnych $\lambda \triangleright \mathbf{1}_n$, gdzie $\lambda \in \mathbb{K}$ jest jedną z wyróżnionych liczb o normie jednostkowej). Koniec końców mamy zatem do czynienia z *rzeczywistą* kombinacją liniową elementów ideału, czyli z elementem ideału \mathbb{R} -algebry. \square

O praktycznym znaczeniu pojęcia ideału przekonuje

STWIERDZENIE 144. *Przyjmijmy zapis Def. 96 oraz Przykł. 11 (14) i niechaj $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ będzie ideałem obustronnym R -algebry \mathfrak{A} . Istnieje kanoniczna struktura R -algebry na module ilorazowym $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ indukowana z \mathfrak{A} , z mnożeniem*

$$m_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} : \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \times \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{I} : (a +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}, b +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}) \mapsto m_{\mathfrak{A}}(a, b) +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}.$$

*Struktura ta nosi miano **algebry ilorazowej**. Rzut kanoniczny*

$$\pi_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$$

jest epimorfizmem R -algebr, o jądrze \mathfrak{I} . Istnieje zatem wzajem jednoznaczna odpowiedniość między jądrami homomorfizmów R -algebr i ideałami obustronnymi. \blacksquare

Dowód: Oczywiście. \square

Scharakteryzujemy następnie podstawowe operacje na rodzinach algebr, poczynając od

STWIERDZENIE 145. *Przyjmijmy zapis Def. 31, 32 oraz 95 i niechaj $\mathfrak{A} \in \text{Obj Alg}_R^{\Lambda}$ dla $R \in \text{Obj AbRing}$. Istnieje kanoniczna struktura R -algebry na R -module $\mathfrak{A}^{\square} := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_{\lambda}$ zadawana przez odwzorowanie*

$$m_{\mathfrak{A}^{\square}} : \mathfrak{A}^{\square} \times \mathfrak{A}^{\square} \longrightarrow \mathfrak{A}^{\square} : (a, b) \mapsto a..b.,$$

gdzie

$$a..b. : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_{\lambda} : \lambda \mapsto m_{\mathfrak{A}_{\lambda}}(a_{\lambda}, b_{\lambda}) \in \mathfrak{A}_{\lambda}$$

oraz kanoniczna struktura R -algebry na R -module $\mathfrak{A}^{\oplus} := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_{\lambda}$ zadawana przez odwzorowanie

$$m_{\mathfrak{A}^{\oplus}} \equiv m_{\mathfrak{A}^{\square}} \upharpoonright_{\mathfrak{A}^{\oplus} \times \mathfrak{A}^{\oplus}} : \mathfrak{A}^{\oplus} \times \mathfrak{A}^{\oplus} \longrightarrow \mathfrak{A}^{\oplus}.$$

Pierwszą z tych struktur tę określamy mianem **produktu algebr z rodziny** \mathfrak{A} , a drugą – mianem **sumy prostej algebr z rodziny** \mathfrak{A} . Ilekroć elementy \mathfrak{A} są łączne (wzgl. przemienne, wzgl. unitalne), także $\mathfrak{A}^{\square} \supset \mathfrak{A}^{\oplus}$ mają tę własność.

■

Dowód: Trywialny. □

Obecność mnożenia w algebrze pozwala na podniesienie wniosków ze Stw. 32 do kategorii algebr poprzez naturalną specjalizację Def. 34, którą precyzuje

DEFINICJA 97. Przyjmijmy zapis Def. 95, zakładając przy tym, że \mathfrak{A} jest R -algebrą łączną, oraz Przykł. 29 (11). **Idempotent** to taki jej element $P \in \mathfrak{A}$, który spełnia relację

$$P^2 = P.$$

Wyznacza on podalgebrę

$$\mathfrak{A}_P := P.\mathfrak{A}.P,$$

zwaną **algebrą P -zredukowaną**. Ilekroć $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}_P = 1$, idempotent P określamy mianem **minimalnego**. **Idempotent centralny** to taki, który należy do centrum algebry $Z(\mathfrak{A})$.

Unipotent to taki element $\Omega \in \mathfrak{A}$ łącznej algebry unitalnej \mathfrak{A} , który spełnia relację

$$\Omega^2 = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}.$$

Nazywamy go **centralnym**, jeśli należy do centrum algebry $Z(\mathfrak{A})$. ▲

Ta pozwala wysłowić pożądane

STWIERDZENIE 146. *Przyjmijmy zapis Def. 97 oraz Przykł. 29 (11). Dowlony idempotent centralny $P \in Z(\mathfrak{A})$ wyznacza rozkład R -algebry \mathfrak{A} na sumę prostą podalgebr*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_P \oplus \tilde{\mathfrak{A}}_P,$$

w której dopełnienie proste

$$\tilde{\mathfrak{A}}_P := \{ a - P.a.P \mid a \in \mathfrak{A} \} \equiv \{ a - P.a \mid a \in \mathfrak{A} \}$$

algebry P -zredukowanej \mathfrak{A}_P jest algebrą $(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - P)$ -zredukowaną. W szczególności każdy unipotent centralny $\Omega \in Z(\mathfrak{A})$ w algebrze unitalnej \mathfrak{A} nad pierścieniem R , w którym $2_R := 1_R + 1_R$ jest elementem odwracalnym, wyznacza rozkład \mathfrak{A} na sumę prostą podalgebr

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_+ \oplus \mathfrak{A}_-,$$

której składniki

$$\mathfrak{A}_{\pm} := P_{\Omega}^{\pm}.\mathfrak{A},$$

zapisane w terminach idempotentów centralnych

$$P_{\Omega}^+ := 2_R^{-1} \triangleright (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} + \Omega), \quad P_{\Omega}^- := 2_R^{-1} \triangleright (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - \Omega) \equiv \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - P_{\Omega}^+,$$

są tożsame – odpowiednio – z algebrami zredukowanymi

$$\mathfrak{A}_{\pm} := \mathfrak{A}_{P_{\Omega}^{\pm}} \equiv \tilde{\mathfrak{A}}_{P_{\Omega}^{\mp}}.$$

■

Dowód: Idempotent centralny P wyznacza endomorfizm R -algebry

$$\pi_P : \mathfrak{A}_P \circlearrowleft : a \mapsto P.a.P \equiv P.a \equiv a.P,$$

który jest rzutem definiującym zupełną rodzinę rzutów komplementarnych $\{\pi_P, \text{id}_{\mathfrak{A}} - \pi_P\}$ (będących także endomorfizmami R -algebry), stosuje się tu zatem bezpośrednio Stw. 32. \square

Możemy także prosto opisać szczególną naturę ideałów minimalnych w algebrach prostych, z której przyjdzie nam korzystać niebawem.

STWIERDZENIE 147. *Przyjmijmy zapis Def. 96 i niechaj $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$ będzie minimalnym ideałem lewostronnym (wzgl. prawostronnym) w łącznej algebrze \mathfrak{A} . Jeśli $\mathfrak{J}\mathfrak{J} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to istnieje idempotent $P \in \mathfrak{J}$ o własności $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}.P$ (wzgl. $\mathfrak{J} = P.\mathfrak{A}$).* \blacksquare

Dowód: Rozważmy przypadek ideału lewostronnego. Przypadek ideału prawostronnego rozpatruje się w pełni analogicznie. Skoro $\mathfrak{J}\mathfrak{J} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to istnieje $a \in \mathfrak{J}$ o własności $\mathfrak{J}.a \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, a ponieważ $\mathfrak{J}.a \subset \mathfrak{J}$ jako ideał lewostronny algebry \mathfrak{A} , przeto koniecznie $\mathfrak{J}.a = \mathfrak{J}$ wobec minimalności \mathfrak{J} . To jednak pociąga za sobą istnienie wyróżnionego wektora $P \in \mathfrak{J}$ o własności $P.a = a$, przy czym $P \neq 0_{\mathfrak{A}}$, gdyż $a \neq 0_{\mathfrak{A}}$. Ponadto $(P^2 - P).a = 0_{\mathfrak{A}}$, zatem $P^2 - P \in \{b \in \mathfrak{J} \mid b.a = 0_{\mathfrak{A}}\} \equiv \mathfrak{L}_a$, ale \mathfrak{L}_a jest ideałem lewostronnym zawartym w \mathfrak{J} i spełniającym warunek $\mathfrak{L}_a \neq \mathfrak{J}$ (wszak $P \in \mathfrak{J}$, gdy tymczasem $P.a = a \neq 0_{\mathfrak{A}}$), czyli $\mathfrak{L}_a = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to jednak oznacza, że $P^2 = P$. Wreszcie też ponieważ $\mathfrak{A}.P \subset \mathfrak{J}$ jako ideał lewostronny, a przy tym $\mathfrak{A}.P \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ (wszak $\mathfrak{A}.P \ni P.P = P \neq 0_{\mathfrak{A}}$), zatem koniecznie $\mathfrak{A}.P = \mathfrak{J}$ \square

W następnej kolejności indukujemy strukturę algebry na iloczynie tensorowym algebr.

STWIERDZENIE 148. *Przyjmijmy zapis Def. 40 oraz 95 i niechaj $\mathfrak{A}_{\alpha} \in \text{Obj } \mathbf{Alg}_R$, $\alpha \in \{1, 2\}$ dla $R \in \text{Obj } \mathbf{AbRing}$. Istnieje kanoniczna struktura R -algebry na R -module $\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2$ zadawana przez odwzorowanie*

$$m_{\otimes} = (m_{\mathfrak{A}_1} \otimes m_{\mathfrak{A}_2}) \circ \iota_{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2} : (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \longrightarrow \mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2,$$

w którym ι jest superpozycją kanonicznych izomorfizmów R -modułów opisanych w Tw. 1.2.7 i 1.2.8,

$$\begin{aligned} \iota_{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2} : (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) &\xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2)}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R (\mathfrak{A}_2 \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2)) \\ &\xrightarrow{\text{id}_{\mathfrak{A}_1} \otimes \sigma_{\mathfrak{A}_2, \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2)}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R ((\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R \mathfrak{A}_2) \\ &\xrightarrow{\text{id}_{\mathfrak{A}_1} \otimes \alpha_{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R (\mathfrak{A}_2 \otimes_R \mathfrak{A}_2)) \\ &\xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2 \otimes_R \mathfrak{A}_2}^{-1}} (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_1) \otimes_R (\mathfrak{A}_2 \otimes_R \mathfrak{A}_2). \end{aligned}$$

Struktura ta nosi miano **standardowego iloczynu tensorowego R -algebr**. Ilekroć obie tensorowane R -algebry są łączne wzgl. przemienne, wzgl. unitalne, ich standardowy iloczyn tensorowy także ma tę cechę. \blacksquare

Dowód: Wystarczy zauważyć, że obrazem pary $a_1 \otimes_R a_2, b_1 \otimes_R b_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2$ względem m_\otimes jest

$$(2.1.8) \quad m_\otimes((a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R (b_1 \otimes_R b_2)) = m_{\mathfrak{A}_1}(a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(b_1 \otimes_R b_2).$$

Wszelkie pożądane własności tak zdefiniowanego mnożenia są natychmiastowymi konsekwencjami odnośnych własności $m_{\mathfrak{A}_\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$. \square

Jako corollarium powyższego stwierdzenia otrzymujemy

STWIERDZENIE 149. *Przyjmijmy zapis Def. 41 oraz Stw. 148 i niechaj $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \text{Obj Alg}_R$, a nadto niech $\chi_\alpha \in \text{Hom}_{\text{Alg}_R}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Odwzorowanie $\chi_1 \otimes \chi_2$ jest homomorfizmem R -algebr.* \blacksquare

Dowód: Wprost z konstrukcji $\chi_1 \otimes \chi_2$ jest homomorfizmem R -modułów. Jego dystrybutywność względem mnożenia m_\otimes jest prostą konsekwencją Równ. (2.1.8). \square

Z połączenia powyższego z tezą Tw. 1.2.9 wynika wprost

STWIERDZENIE 150. *Przyjmijmy zapis Tw. 1.2.9 oraz Stw. 144 i 148, niechaj też $\mathfrak{J}_\alpha \subset \mathfrak{A}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą ideałami obustronnymi. Kanoniczny izomorfizm R -modułów*

$$\mathfrak{A}_1/\mathfrak{J}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2/\mathfrak{J}_2 \cong (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2)/T(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2)$$

jest izomorfizmem R -algebr. \blacksquare

Wreszcie też, postępując podobnie jak w przypadku przestrzeni wektorowych (wzgl. kwadratowych), udokumentujemy przydatność iloczynu tensorowego na przykładzie relacji między algebrami rzeczywistymi, zespolonymi i kwaternionowymi.

DEFINICJA 98. Przyjmijmy zapis Def. 45 oraz Stw. 148 i niech $\mathfrak{A} \in \text{Obj Alg}_R$. **Kompleksyfikacja** algebry rzeczywistej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}} : \text{Alg}_R \longrightarrow \text{Alg}_{\mathbb{C}}$$

stanowiący rozszerzenie (w duchu Def. 45) funktora określonego na kategorii przestrzeni \mathbb{R} -liniowych, przy czym istotą rozszerzenia jest odwzorowanie mnożenia $m_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \otimes_R \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ w mnożenie $m_\otimes : (\mathfrak{A} \otimes_R \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathfrak{A} \otimes_R \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{A} \otimes_R \mathbb{C}$, o którym mowa w Stw. 148. \blacktriangle

Na zakończenie dyskusji ogólnej przyjrzymy się bliżej kilku wybranym \mathbb{R} -algebrom unitalnym, których analiza pozwoli nam zilustrować (niemal wszystkie) podstawowe konstrukcje omówione powyżej, a zarazem będzie stanowić ważny przyczynek do przyszłej klasyfikacji rzeczywistych algebr Clifforda. Oto więc dowodzimy

STWIERDZENIE 151. *Przyjmijmy zapis Stw. 145 i 148 oraz Przykł. 29 (1). Istnieją unitalne izomorfizmy R -algebr:*

- (i) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}} : \mathbb{R}(m) \otimes_R \mathbb{K}(n) \cong \mathbb{K}(m \cdot n);$
- (ii) $\mathbb{C} \otimes_R \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C};$
- (iii) $\mathbb{C} \otimes_R \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2);$

(iv) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$. ■

Dowód:

Ad (i) W szczególnym przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ izomorfizm przybiera postać

$$E_{i,j}^{(m)} \otimes_{\mathbb{R}} E_{k,l}^{(n)} \mapsto E_{n(i-1)+k, n(j-1)+l}^{(m \cdot n)}, \quad i, j \in \overline{1, m}, \quad k, l \in \overline{1, n}$$

na bazie standardowej z Przykł. 29 (1). Z kolei dla $n = 1$ jest on postaci

$$E_{i,j}^{(m)} \otimes_{\mathbb{R}} k \mapsto k \triangleright \tilde{J}_{\mathbb{R}}(E_{i,j}^{(m)}), \quad i, j \in \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{K},$$

także na naturalnej bazie i w konwencji, w której $\tilde{J}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}(m) \rightarrow \mathbb{K}(m)$ jest kanonicznym podniesieniem monomorfizmu $J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : r \mapsto (r, 0)$ (wzgl. $J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} : r \mapsto (r, 0, 0, 0)$) do przestrzeni $\mathbb{R}(m) \equiv \mathbb{R}^{m^2}$ (oraz $\mathbb{C}(m) \equiv \mathbb{C}^{m^2}$ wzgl. $\mathbb{H}(m) \equiv \mathbb{H}^{m^2}$). Uzyskane tym sposobem izomorfizmy

$$\mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n) \cong \mathbb{R}(m \cdot n), \quad \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(m)$$

pozwalają wyprowadzić izomorfizm w postaci najogólniejszej (w odwołaniu do Tw. 1.2.8)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}(n) &\cong \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}) \\ &\cong (\mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \\ &\cong \mathbb{R}(m \cdot n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(m \cdot n). \end{aligned}$$

Ad (ii) Izomorfizm stanowi (jedyne) \mathbb{R} -liniowe rozszerzenie przyporządkowania baz

$$1 \otimes_{\mathbb{R}} 1 \mapsto (1, 1), \quad 1 \otimes_{\mathbb{R}} i \mapsto (-i, i), \quad i \otimes_{\mathbb{R}} 1 \mapsto (i, i), \quad i \otimes_{\mathbb{R}} i \mapsto (1, -1).$$

Ad (iii) Na gruncie związanej dyskusji konstrukcji Cayleya–Dicksona przedstawionej w Przykł. 29 (4) możemy dokonać utożsamienia przestrzeni \mathbb{C} -liniowych

$$\mathbb{H} \equiv \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

W tym ujęciu algebra kwaternionów zyskuje naturalną strukturę \mathbb{C} -modułu z działaniem

$$\mathbb{C} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$\begin{aligned} : (x + yi, (a + bi) \triangleright 1 + (c + di) \triangleright j) &\mapsto ((x + yi) \cdot_{\mathbb{C}} (a + bi)) \triangleright 1 \\ &\quad + ((x + yi) \cdot_{\mathbb{C}} (c + di)) \triangleright j. \end{aligned}$$

Wobec powyższego możemy również utożsamić odnośne (\mathbb{C} -, więc też \mathbb{R} -)algebry endomorfizmów

$$\mu_{\mathbb{C}} : \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}(2).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie (por. Równ. (2.1.4))

$$\Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}(2) : (z, q) \mapsto \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q^*) \circ m_{\mathbb{H}}(J_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z), \cdot)) \equiv \Phi_{z,q},$$

gdzie

$$m_{\mathbb{H}}(\cdot, q^*) \circ m_{\mathbb{H}}(J_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z), \cdot) : \mathbb{H} \curvearrowright : q_0 \mapsto J_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z) \cdot_{\mathbb{H}} q_0 \cdot_{\mathbb{H}} q^*.$$

Będąc jawnie dwu- \mathbb{R} -liniowym, indukuje ono (jedyne) odwzorowanie

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}(2)$$

o własności

$$\forall_{(z,q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}} : \tilde{\Phi}(z \otimes_{\mathbb{R}} q) = \Phi_{z,q},$$

przy czym dla dowolnej pary $(z_1, q_1), (z_2, q_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} & \tilde{\Phi}(z_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_1) \circ \tilde{\Phi}(z_2 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) \\ & \equiv \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot)) \circ \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ & = \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot) \circ m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ & = \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ & = \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1) \cdot_{\mathbb{H}} j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ & = \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, (q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2)^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2), \cdot)) \\ & \equiv \tilde{\Phi}((z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2) \otimes_{\mathbb{R}} (q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2)) = \tilde{\Phi} \circ m_{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}}(z_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_1, z_2 \otimes_{\mathbb{R}} q_2), \end{aligned}$$

mamy przeto do czynienia z homomorfizmem \mathbb{R} -algebry. W bezpośrednim rachunku sprawdzamy, że przeprowadza on naturalną bazę swej dziedziny w bazę przeciwdziedziny,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (0,-1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 1, 0)) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) \\ (-1,0) & (0,0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 0, 1)) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,-1) \\ (0,-1) & (0,0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (-1,0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 1, 0)) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) \\ (0,-1) & (0,0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 0, 1)) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

co oznacza, że jest (pożądanym) izomorfizmem.

Ad (iv) Tym razem potraktujemy kwaterniony jako elementy \mathbb{R} -algebry

$$\iota_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} : q \equiv a + bi + cj + dk \longmapsto (a, (b, c, d)) \equiv (\underline{q}, \vec{q}),$$

w zgodzie z Równ. (2.1.5), wykorzystując monomorfizm \mathbb{R} -algebry

$$j_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} : r \longmapsto (r, (0, 0, 0))$$

do wyindukowania na $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$ działania

$$\ell := m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}} \circ (j_1 \times \text{id}_{\mathbb{R}^{\times 3}}) : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$$

$$: (r, (s, v)) \mapsto (r \cdot s, r \triangleright v).$$

Istnienie izomorfizmu \mathbb{R} -algebr (będącego w szczególności izomorfizmem przestrzeni \mathbb{R} -liniowych) pozwala utożsamić odnośne (\mathbb{R} -)algebry endomorfizmów

$$\mu_{\mathbb{R}} : \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}) \cong \mathbb{R}(4).$$

Definiujemy odwzorowanie

$$\Psi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}(4) : (q_1, q_2) \mapsto \mu_{\mathbb{R}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(q_1, \cdot)) \equiv \Psi_{q_1, q_2},$$

gdzie

$$m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(q_1, \cdot) : \mathbb{H} \circlearrowleft : \tilde{q} \mapsto q_1 \cdot_{\mathbb{H}} \tilde{q} \cdot_{\mathbb{H}} q_2^*,$$

które z racji swej dwu- \mathbb{R} -liniowości indukuje (jedyne) odwzorowanie

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}(4)$$

o własności

$$\forall (q_1, q_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} : \tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \Psi_{q_1, q_2},$$

przy czym z tych samych powodów co w przypadku odwzorowania $\tilde{\Psi}$ z dowodu punktu (iii) odwzorowanie indukowane $\tilde{\Psi}$ jawi się homomorfizmem \mathbb{R} -algebr. Dowód jego bijektywności można z powodzeniem przeprowadzić według schematuz punktu poprzedniego, my jednak – gwoli rozbudowania arsenału formalnego – pójdziemy drogą odmienną. Jej początek wyznacza wskazanie na obu rozważanych przestrzeniach \mathbb{R} -liniowych, $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ i $\mathbb{R}(4)$, niezwyrodniałych form kwadratowych:

$$Q_{\otimes} := m_{\mathbb{R}} \circ (\delta_{\mathbb{H}} \otimes \delta_{\mathbb{H}}) : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R},$$

gdzie

$$\delta_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R} : q \mapsto q \cdot_{\mathbb{H}} q^* \equiv \|q\|_{\mathbb{H}}^2,$$

więc też

$$Q_{\otimes}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \|q_1\|_{\mathbb{H}}^2 \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}^2 = \|q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2\|_{\mathbb{H}}^2,$$

oraz

$$Q_{\text{Mat}} : \mathbb{R}(4) \longrightarrow \mathbb{R} : M \mapsto \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(M^{\text{T}} \odot M),$$

gdzie $(\cdot)^{\text{T}}$ jest transpozycją macierzy, $\text{tr}_{(4)}$ zaś – śladem macierzowym na $\mathbb{R}(4)$. W następnym kroku zbadamy izometryczne własności homomorfizmu $\tilde{\Psi}$. W tym celu policzymy bezpośrednio transpozycję $\tilde{\Psi}_{q_1, q_2}^{\text{T}}$, czyli – innymi słowy – sprzężenie endomorfizmu Ψ_{q_1, q_2} względem standardowego euklidesowego iloczynu skalarowego

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}} : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3})^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} : ((r, v), (s, w)) \mapsto r \cdot s + \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(3)}}(v, w),$$

por.: Równ. (2.1.6), przy czym wygodnie będzie przepisać macierz poddawaną transpozycji w postaci

$$\Psi_{q_1, q_2} \equiv r_{(q_2, -\bar{q}_2)} \odot l_{(q_1, \bar{q}_1)},$$

gdzie użyliśmy skrótowego zapisu

$$l_{(q_1, \bar{q}_1)} := m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}}((q_1, \bar{q}_1), \cdot), \quad r_{(q_2, -\bar{q}_2)} := m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}}(\cdot, (q_2, -\bar{q}_2)).$$

Teraz już bez trudu wyznaczamy – dla dowolnych $(r, v), (s, w) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$, a korzystając z interpretacji geometrycznej wyrażenia $\Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \vec{q}_1 \times w)$ jako (zorientowanej) objętości równoległoscianu rozpiętego na trójce wektorów (v, \vec{q}_1, w) , tożsamego z równoległoscianem rozpiętym na trójce (w, v, \vec{q}_1)

$$\begin{aligned} \left\langle (r, v) | l_{(\underline{q}_1, \vec{q}_1)}(s, w) \right\rangle_E &= \left\langle (r, v) | (\underline{q}_1 \cdot s - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\vec{q}_1, w), \vec{q}_1 \times w + \underline{q}_1 \triangleright w + s \triangleright \vec{q}_1) \right\rangle_E \\ &= r \cdot (\underline{q}_1 \cdot s) - r \cdot \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\vec{q}_1, w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \vec{q}_1 \times w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \underline{q}_1 \triangleright w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, s \triangleright \vec{q}_1) \\ &= (\underline{q}_1 \cdot r) \cdot s - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(-\vec{q}_1, v) \cdot s + \Phi_{\delta_E^{(3)}}((-\vec{q}_1) \times v, w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\underline{q}_1 \triangleright v, w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(r \triangleright (-\vec{q}_1), w) \\ &= \left\langle (\underline{q}_1 \cdot r - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(-\vec{q}_1, v), (-\vec{q}_1) \times v + \underline{q}_1 \triangleright v + r \triangleright (-\vec{q}_1)) | (s, w) \right\rangle_E \\ &\equiv \left\langle l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)}(r, v) | (s, w) \right\rangle_E, \end{aligned}$$

czyli też – wobec niezwyrodnienia rozpatrywanego iloczynu skalarnego na $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$ –

$$l_{(\underline{q}_1, \vec{q}_1)}^T = l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)},$$

oraz, analogicznie,

$$\begin{aligned} \left\langle (r, v) | r_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)}(s, w) \right\rangle_E &= \left\langle (r, v) | (s \cdot \underline{q}_2 - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(w, -\vec{q}_2), w \times (-\vec{q}_2) + s \triangleright (-\vec{q}_2) + \underline{q}_2 \triangleright w) \right\rangle_E \\ &= r \cdot (s \cdot \underline{q}_2) - r \cdot \Phi_{\delta_E^{(3)}}(w, -\vec{q}_2) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, w \times (-\vec{q}_2)) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, s \triangleright (-\vec{q}_2)) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \underline{q}_2 \triangleright w) \\ &= (r \cdot \underline{q}_2) \cdot s - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \vec{q}_2) \cdot s + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v \times \vec{q}_2, w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(r \triangleright \vec{q}_2, w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\underline{q}_2 \triangleright v, w) \\ &= \left\langle (r \cdot \underline{q}_2 - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \vec{q}_2), v \times \vec{q}_2 + r \triangleright \vec{q}_2 + \underline{q}_2 \triangleright v) | (s, w) \right\rangle_E \\ &\equiv \left\langle r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)}(r, v) | (s, w) \right\rangle_E, \end{aligned}$$

przeto

$$r_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)}^T = r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)},$$

Koniec końców, biorąc pod uwagę powyższe wyniki oraz przemienność obu czynników macierzy Ψ_{q_1, q_2} , wyznaczamy

$$\Psi_{q_1, q_2}^T \equiv l_{(\underline{q}_1, \vec{q}_1)}^T \odot r_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)}^T = l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)} \odot r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)} = r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)} \odot l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)} \equiv \Psi_{q_1^*, q_2^*}$$

i na tej podstawie także

$$\begin{aligned} \Phi_{Q_{\text{Mat}}}(\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2), \tilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\Psi_{q_1, q_2}^T \odot \Psi_{q_3, q_4}) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi}(q_1^* \otimes_{\mathbb{R}} q_2^*) \odot \tilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi} \circ m_{\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}}(q_1^* \otimes_{\mathbb{R}} q_2^*, q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi}(q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4)). \end{aligned}$$

Rachunek pomocniczy, poprowadzony w bazie standardowej $\{E_0 := (1, 0), E_k := (0, e_k)\}_{k \in \{1, 2, 3\}}$ przestrzeni $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$ i dwoistej do niej $\{E_l^*\}_{l \in \{0, 1, 2, 3\}}$,

w bezpośrednim odwołaniu do Def. 43 oraz Uwagi 7 i z uwzględnieniem relacji $v \times e_k \in \langle e_l \rangle_{\mathbb{R}}^{l \in \{1,2,3\} \setminus \{k\}}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2)) &= \mathrm{tr}_{(4)}(r_{(\underline{q}_2, -\bar{q}_2)} \odot l_{(\underline{q}_1, \bar{q}_1)}) \equiv \sum_{l=0}^3 E_l^*((\underline{q}_1, \bar{q}_1) \cdot E_l(\underline{q}_2, -\bar{q}_2)) \\
&= E_1^*((\underline{q}_1, \bar{q}_1) \cdot (\underline{q}_2, -\bar{q}_2)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^3 (0, e_k^*)((\underline{q}_1, \bar{q}_1) \cdot (\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(e_k, \bar{q}_2), -e_k \times \bar{q}_2 + \underline{q}_2 \triangleright e_k)) \\
&= \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 + \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \\
&\quad + \sum_{k=1}^3 e_k^*(-\bar{q}_1 \times (e_k \times \bar{q}_2) + \underline{q}_2 \triangleright (\bar{q}_1 \times e_k) - \underline{q}_1 \triangleright (e_k \times \bar{q}_2) \\
&\quad\quad\quad + \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \triangleright e_k + \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(e_k, \bar{q}_2) \triangleright \bar{q}_1) \\
&= \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^3 e_k^*(e_k)\right) + \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \\
&\quad + \sum_{k=1}^3 \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(e_k, \bar{q}_2) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(e_k, \bar{q}_1) - \sum_{k=1}^3 e_k^*(\bar{q}_1 \times (e_k \times \bar{q}_2)) \\
&= 4\underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 + 2\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \\
&\quad - \sum_{k=1}^3 e_k^*(\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \triangleright e_k - \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(\bar{q}_1, e_k) \triangleright \bar{q}_2) \\
&= 4\underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \equiv 4\Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1, 1) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2, 1),
\end{aligned}$$

pozwała ostatecznie zapisać

$$\begin{aligned}
\Phi_{Q_{\mathrm{Mat}}}(\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2), \tilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) &= \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3, 1) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4, 1) \\
&= \frac{1}{2} \left((q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3) \cdot 1^* + 1 \cdot (q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3)^* \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{2} \left((q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4) \cdot 1^* + 1 \cdot (q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4)^* \right) \\
&\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1, q_3) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2, q_4) \\
&\equiv \Phi_{Q_{\otimes}}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2, q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4).
\end{aligned}$$

Jest zatem $\tilde{\Psi}$ izometrią, przeto także – wobec niezwyrodnienia obu form kwadratowych – injekcją, oto bowiem równość $\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \mathbf{0}_4$ implikuje

$$\|q_1\|_{\mathbb{H}}^2 \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}^2 = Q_{\otimes}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = Q_{\mathrm{Mat}} \circ \tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) \equiv Q_{\mathrm{Mat}}(\mathbf{0}_4) = 0,$$

a wtedy $q_1 = 0$ lub $q_2 = 0$, więc zawsze $q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2 = 0$. Porównanie wymiarów rzeczywistych dziedziny i przeciwdziedziny $\tilde{\Psi}$ na gruncie Stw. 47,

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) = (\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}))^2 = 4^2 = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}(4)),$$

przesądza o tym, że jest on izomorfizmem. □

Zebrawszy podstawowe operacje na algebrach i ich rodzinach, możemy przystąpić do zwięzłego opisu elementarnych konstrukcji i dodatkowej struktury na algebrach, jakie napotkamy w naszej dalszej eksploracji fizykalnie istotnych obiektów tego rodzaju. Opis ten stanowi doskonałą, choć też – siłą rzeczy – wysoce niekompletną, ilustrację bogactwa, jakie kryje w sobie krótkie słowo „algebra”.

2. Algebra tensorowa modułu

Nasz przegląd algebr zaczniemy od podstawowej konstrukcji algebraicznej przeczuającej naturalny pomost logiczny między kategorią modułów nad pierścieniem (przemiennym) i algebr nad tym samym pierścieniem. Konstrukcja ta leży u podstaw konstrukcji (pochodzącej od V.A. Focka) przestrzeni stanów kwantowych układu o dowolnej liczbie identycznych obiektów elementarnych (np. cząstek) z przestrzeni stanów kwantowych pojedynczego obiektu, stanowi punkt wyjścia do modelowania tak istotnych fizykalnie struktur jak algebry tensorów symetrycznych i skończone symetrycznych (istotne w geometrii różniczkowej, więc także w teorii względności), uniwersalne algebry obwiednie (odgrywające ważną rolę w zaawansowanej teorii grup i algebr Liego oraz grup kwantowych, zatem także w opisie symetrii układów fizykalnych), czy wreszcie algebry Clifforda (zajmujące centralną pozycję w teorii spinorów modelujących lokalnie pola fermionowe).

DEFINICJA 99. Przyjmijmy zapis Def. 32, 42 oraz 44 i niechaj $R \in \text{Obj AbRing}$ oraz $G \in \text{Obj Mod}_R$. **Algebra tensorowa R -modułu G** to R -algebra utworzona przez R -moduł

$$\bigotimes_R G := R \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} G^{\otimes_R n} \equiv \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} G^{\otimes_R N}, \quad G^{\otimes_R n} := \underbrace{G \otimes_R G \otimes_R \cdots \otimes_R G}_{n \text{ razy}},$$

będący sumą prostą **potęg tensorowych modułu $G^{\otimes_R N}$** , wyposażony w mnożenie

$$m : \bigotimes_R G \otimes_R \bigotimes_R G \longrightarrow \bigotimes_R G,$$

które w ograniczeniu do (przeciwoobrazu) iloczynów tensorowych poszczególnych potęg tensorowych G (względem kanonicznych izomorfizmów z Tw. 1.2.10),

$$\forall_{N_1, N_2 \in \mathbb{N}} : m_{N_1, N_2} \equiv m|_{G^{\otimes_R N_1} \otimes_R G^{\otimes_R N_2}} : G^{\otimes_R N_1} \otimes_R G^{\otimes_R N_2} \longrightarrow G^{\otimes_R (N_1 + N_2)}$$

$$\subset \bigotimes_R G,$$

jest określone przez kanoniczne izomorfizmy stanowiące naturalne uogólnienie tych z Tw. 1.2.8 i 44, przyjmujące na tensorach prostych postać

$$m_{0, N_2}(r \otimes_R (g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2})) = (r \triangleright g_1) \otimes_R g_2 \otimes_R g_3 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2},$$

$$m_{N_1, 0}((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1}) \otimes_R r) = (r \triangleright g_1) \otimes_R g_2 \otimes_R g_3 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2},$$

oraz

$$\begin{aligned} & m_{n_1, n_2}((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1}) \otimes_R (h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2})) \\ &= g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1} \otimes_R h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2}. \end{aligned}$$

▲

Jak łatwo widać

STWIERDZENIE 152. *Przyjmijmy zapis Def. 99. Algebra tensorowa $\otimes_R G$ jest łączną R -algebrą unitalną, przy czym jednością jest w niej element*

$$1_{\otimes_R G} = 1_R \in G^{\otimes_R 0} \subset \otimes_R G.$$

■

Dowód: Wynika wprost z definicji. □

W świetle dyskusji otwierającej Rozdz. 1.2 kojąco na świadomość działa poniższe

TWIERDZENIE 2.1.1. *Przyjmijmy zapis Def. 99. Para $(\otimes_R G, J_G)$, w której $J_G : G \rightarrow \otimes_R G$ jest kanonicznym włożeniem składnika prostego $G \equiv G^{\otimes_R 1}$, jest strukturą inicjalną dla warunku tautologicznego $P_{G; \text{id}_{\text{Mod}_R}, F_2} \equiv 1$ na $\text{Obj } \mathbf{uAlg}_R \times \text{Mor } \mathbf{Mod}_R$, w którego zapisie $F_2 : \mathbf{uAlg}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ jest funktorem zapominania.*

■

Dowód: Mamy pokazać, że dla dowolnej R -algebry unitalnej \mathfrak{A} o niepustej klasie $\text{Hom}_R(G, \mathfrak{A}) \ni \varphi$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbf{uAlg}_R}(\otimes_R G, \mathfrak{A})$ o własności wyrażanej przez diagram przemienny (w \mathbf{Mod}_R)

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{A} \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \tilde{\varphi} \\ G & \xrightarrow{J_G} & \otimes_R G \end{array} .$$

Zauważmy najspierw, że rzeczzone odwzorowanie – o ile istnieje – jest jedyne. Istotnie, na mocy definicji mnożenia w $\otimes_R G$ dowolny tensor prosty można zapisać w postaci (zastępując symbol mnożenia w algebrze tensorowej symbolem \cdot i korzystając z jego łączności)

$$G^{\otimes_R n} \ni g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n = J_G(g_1) \cdot J_G(g_2) \cdots J_G(g_n),$$

więc $\tilde{\varphi}$ jako homomorfizm R -algebr ewaluuje się na nim następująco:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n) &= \tilde{\varphi}(J_G(g_1) \cdot J_G(g_2) \cdots J_G(g_n)) \\ &= \tilde{\varphi} \circ J_G(g_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi} \circ J_G(g_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi} \circ J_G(g_n) \\ &= \varphi(g_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_n), \end{aligned}$$

tj. w sposób jednoznacznie określony przez φ , a nadto dla dowolnego $r \in R \equiv G^{\otimes_R 0}$ zachodzi – wobec R -liniowości i unitalności $\tilde{\varphi}$ –

$$\tilde{\varphi}(r) \equiv \tilde{\varphi}(r \triangleright_R 1_R) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(1_R) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} 1_{\mathfrak{A}},$$

tj. znowu w sposób jednoznacznie określony, ponieważ zaś $\otimes_R G$ jest rozpięty nad R na tensorach prostych i 1_R , przeto $\tilde{\varphi}$ jest jednoznacznie zdeterminowany przez swe własności. Pozostaje go skonstruować.

W tym celu skorzystamy z uniwersalności \otimes_R – oto więc każde z odwzorowań (indeksowanych przez liczby $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

$$\varphi_n : G^{\times n} \rightarrow \mathfrak{A} : (g_1, g_2, \dots, g_n) \mapsto \varphi(g_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_n)$$

jest jawnie wielo-śród- R -liniowe, a zatem odpowiada mu (jedyne) odwzorowanie R -liniowe

$$\tilde{\varphi}_n : G^{\otimes_R n} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

o własności

$$\forall_{g_1, g_2, \dots, g_n \in G} : \tilde{\varphi}_n(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \dots \otimes_R g_n) = \varphi_n(g_1, g_2, \dots, g_n).$$

Uzupełniwszy rodzinę odwzorowań $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ o element

$$\tilde{\varphi}_0 : G^{\otimes_R 0} \equiv R \longrightarrow \mathfrak{A} : r \longmapsto r \triangleright_{\mathfrak{A}} 1_{\mathfrak{A}},$$

otrzymujemy pożądane odwzorowanie (R -liniowe wprost z definicji)

$$\tilde{\varphi} := \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} \tilde{\varphi}_N : \bigotimes_R G \longrightarrow \mathfrak{A},$$

o czym przekonują proste obserwacje:

$$\tilde{\varphi} \circ j_G = \tilde{\varphi}_1 \equiv \varphi, \quad \tilde{\varphi}(1_{\bigotimes_R G}) \equiv \tilde{\varphi}(1_R) = \tilde{\varphi}_0(1_R) = 1_{\mathfrak{A}}$$

oraz – dla dowolnych $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $g_1, g_2, \dots, g_{n_1}, h_1, h_2, \dots, h_{n_2} \in G$ –

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}\left((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \dots \otimes_R g_{n_1}) \cdot (h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \dots \otimes_R h_{n_2})\right) \\ & \equiv \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \dots \otimes_R g_{n_1} \otimes_R h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \dots \otimes_R h_{n_2}) \\ & = \varphi_{n_1+n_2}(g_1, g_2, \dots, g_{n_1}, h_1, h_2, \dots, h_{n_2}) \\ & \equiv \varphi_{n_1}(g_1, g_2, \dots, g_{n_1}) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi_{n_2}(h_1, h_2, \dots, h_{n_2}) \\ & = \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \dots \otimes_R g_{n_1}) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \dots \otimes_R h_{n_2}). \end{aligned}$$

□

Niniejszą elementarną dyskusję algebry tensorowej modułu najzgrabniej uzupełnia i podsumowuje

TWIERDZENIE 2.1.2. *Przyjmijmy zapis Def. 99. Przyporządkowanie*

$$\text{Obj } \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{uAssAlg}_R : G \longmapsto \bigotimes_R G$$

rozszerza się kanonicznie do pełnego funktora kowariantnego

$$\bigotimes_R : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{uAssAlg}_R.$$

■

Dowód: Wystarczy zauważyć, że dla $G_1, G_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$ dowolny $\chi \in \text{Hom}_R(G_1, G_2)$ określa odwzorowanie R -liniowe

$$j_{G_2} \circ \chi : G_1 \longrightarrow \bigotimes_R G_2,$$

które jednoznacznie rozszerza się do homomorfizmu algebr

$$\bigotimes_R \chi : \bigotimes_R G_1 \longrightarrow \bigotimes_R G_2$$

o własności

$$\bigotimes_R \chi \circ j_{G_1} = j_{G_2} \circ \chi,$$

którą możemy zapisać w postaci diagramu przemiennego

$$\begin{array}{ccc} \otimes_R G_1 & \xrightarrow{\otimes_R \chi} & \otimes_R G_2 \\ \uparrow J_{G_1} & & \uparrow J_{G_2} \\ G_1 & \xrightarrow{\chi} & G_2 \end{array} .$$

Przy tym na tensorach prostych

$$\bigotimes_R \chi(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n) = \chi(g_1) \otimes_R \chi(g_2) \otimes_R \cdots \otimes_R \chi(g_n).$$

□

3. Algebry z gradacją

Przejdziemy następnie od omówienia algebr z wyróżnionym rozkładem na sumy proste podmodułów, uzgodnionym w naturalny sposób z operacjami określonymi na algebrze. Oto więc mamy

DEFINICJA 100. Przyjmijmy zapis Def. 4 oraz 95 i niechaj $R \in \text{Obj AbRing}$ oraz $\mathfrak{A} \in \text{Obj Alg}_R$. Niech też $(\Delta, +_\Delta, \bullet \rightarrow 0_\Delta)$ będzie monoidem przemiennym. Δ -gradacja na \mathfrak{A} to rozkład \mathfrak{A} na sumę prostą podmodułów (nad R)

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathfrak{A}_\delta$$

o własności

$$(2.1.9) \quad \forall_{\delta_1, \delta_2 \in \Delta} : m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_{\delta_1}, \mathfrak{A}_{\delta_2}) \subset \mathfrak{A}_{\delta_1 +_\Delta \delta_2}.$$

Algebra (nad R) z Δ -gradacją to taka, na której jest określona Δ -gradacja. Element $\delta \in \Delta$ określamy mianem **Δ -stopnia podmodułu \mathfrak{A}_δ** , używając oznaczenia

$$\mathfrak{A}_\delta = \text{deg}^{-1}(\{\delta\}),$$

elementy zaś podmodułu \mathfrak{A}_δ nazywamy **elementami jednorodnymi stopnia δ** . W szczególności element $0_{\mathfrak{A}}$ jest jednorodny *dowolnego* stopnia.

Podalgebra Δ -gradowana algebry z Δ -gradacją \mathfrak{A} to taka jej podalgebra $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, która jest **podmodułem z Δ -gradacją**, tj. ma postać

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathfrak{B}_\delta, \quad \mathfrak{B}_\delta = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}_\delta.$$

W szczególności **ideał Δ -gradowany** to podalgebra Δ -gradowana $\mathfrak{J} = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathfrak{J}_\delta \subset \mathfrak{A}$ o własności (zapisanej dla dowolnych $\lambda, \delta \in \Delta$)

- $m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{J}_\delta) \subset \mathfrak{J}_{\lambda +_\Delta \delta}$ (**lewostronny**), wzgl.
- $m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{J}_\delta, \mathfrak{A}_\lambda) \subset \mathfrak{J}_{\lambda +_\Delta \delta}$ (**prawostronny**), wzgl.
- obu powyższych (**obustronny**).

Homomorfizm stopnia D R -algebry z Δ -gradacją $\mathfrak{A}^{(1)}$ w R -algebrę z Δ -gradacją $\mathfrak{A}^{(2)}$ to odwzorowanie $\chi \in \text{Hom}_{\text{Alg}_R}(\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)})$ o własności

$$\forall_{\delta \in \Delta} : \chi(\mathfrak{A}_\delta^{(1)}) \subset \mathfrak{A}_{\delta +_\Delta D}^{(2)}.$$

Homomorfizm algebr z Δ -gradacją (albo inaczej Δ -gradowany) to dowolny ich homomorfizm stopnia 0_Δ .

Algebry nad R z Δ -gradacją (i odnośnymi homomorfizmami stopnia 0_Δ) tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem $\text{Alg}_R^{\Delta\text{-grad}}$.



UWAGA 32. Powód, dla którego na homomorfizmy algebr z Δ -gradacją nakładamy dodatkowy warunek $D = 0_\Delta$, ilustruje prosty argument: oto z jednej strony

$$\chi \circ m_{\mathfrak{A}^{(1)}}(\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)}, \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(1)}) \subset \chi(\mathfrak{A}_{\delta_1 + \Delta \delta_2}^{(1)}) \subset \mathfrak{A}_{\delta_1 + \Delta \delta_2 + \Delta D}^{(2)},$$

a z drugiej

$$\begin{aligned} \chi \circ m_{\mathfrak{A}^{(1)}}(\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)}, \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(1)}) &= m_{\mathfrak{A}^{(2)}}(\chi(\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)}), \chi(\mathfrak{A}_{\delta_2}^{(1)})) \subset m_{\mathfrak{A}^{(2)}}(\mathfrak{A}_{\delta_1 + \Delta D}^{(2)}, \mathfrak{A}_{\delta_2 + \Delta D}^{(2)}) \\ &\subset \mathfrak{A}_{\delta_1 + \Delta \delta_2 + \Delta D + \Delta D}^{(2)}. \end{aligned}$$

PRZYKŁAD(Y) 31.

- (1) Pierścień wielomianów z Przykł. 3 (7) niesie naturalną strukturę algebry (przemiennej, unitalnej) nad \mathbb{K} o \mathbb{N} -gradacji zadawanej przez stopień wielomianu (wielomian zerowy jest w tym ujęciu elementem każdego stopnia), patrz: [Sus13, Def. 27], przy czym składową jednorodną stopnia n tworzą jednomiany stopnia n (w tym wielomian zerowy). Operator całkowania $\int_{0\mathbb{K}}^t$ (zdefiniowany w oczywisty sposób) jest endomorfizmem stopnia 1.
- (2) Zastępując ciało \mathbb{R} ciałem \mathbb{C} (w roli dziedziny i przeciwdziedziny funkcji) i kładąc $S \equiv \mathbb{C}$ w Przykł. 29 otrzymujemy unitalną \mathbb{C} -algebrę przemiennej $C(\mathbb{C}; \mathbb{C})$. Wybór dowolnego elementu $\omega_n \in \sqrt[n]{1} \setminus \{1\}$ (dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$) określa na $C(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -gradację, względem której elementami jednorodnymi stopnia $[k]_n$ są funkcje f_k spełniające warunek

$$\forall z \in \mathbb{C} : f_k(\omega_n \cdot z) = \omega_n^k \cdot f_k(z).$$

Dowolna funkcja $f \in C(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ ma (jednoznaczny) rozkład

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} f_k, \quad f_k : \mathbb{C} \curvearrowright : z \mapsto \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{-kl} \cdot f(\omega_n^l \cdot z).$$

W szczególności dla $n = 2$ otrzymujemy w ten sposób rozkład $C(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ na sumę prostą podmodułów złożonych z funkcji parzystych i nieparzystych, odpowiednio.

Jeśli funkcje ciągle zastąpić gładkimi, to operator różniczkowania zyskuje interpretację endomorfizmu stopnia $[n-1]_n$.

- (3) Algebra tensorowa modułu G nad pierścieniem przemiennej R jest R -algebrą z \mathbb{N} -gradacją określoną wprost przez definicję tejszej algebry,

$$\deg \upharpoonright_{G^{\otimes_R n}} = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Elementy składowej jednorodnej $G^{\otimes_R n}$ określamy mianem **tensorów stopnia n** .



Jako proste konsekwencje powyższej definicji otrzymujemy

STWIERDZENIE 153. *Przyjmijmy zapis Def. 100, przy czym założymy, że wszystkie elementy monoidu Δ są upraszczalne (w rozumieniu Def. 4). W unitalnej R -algebrze z Δ -gradacją*

- (i) $\deg(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) = 0_{\Delta}$;
- (ii) *odwrotność a^{-1} dowolnego elementu $a \in \mathfrak{A}_{\delta}$ (wzgl. $m_{\mathfrak{A}}$), o ile istnieje, ma stopień $\deg(a^{-1}) = -\delta$, gdzie $-\delta$ jest elementem monoidu spełniającym równość $-\delta +_{\Delta} \delta = 0_{\Delta}$,*

■

Dowód:

Ad (i) Niechaj $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \sum_{\delta \in \Delta} e_{\delta}$ będzie rozkładem jedności na elementy jednorodny. Wówczas dla dowolnego elementu jednorodnego $a \in \mathfrak{A}_{\lambda}$ otrzymujemy tożsamość

$$a = a \cdot_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \equiv \sum_{\delta \in \Delta} a \cdot_{\mathfrak{A}} e_{\delta},$$

która wobec jednoznaczności rozkładu na elementy jednorodny i Równ. (2.1.9) implikuje równość

$$a = a \cdot_{\mathfrak{A}} e_{0_{\Delta}}.$$

Ta, będąc spełnioną dla dowolnego elementu jednorodny, jest z racji R -liniowości mnożenia spełniana przez wszystkie elementy algebry, a zatem w szczególności przez jedność, co wobec neutralności tej ostatniej daje pożądaną równość

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot_{\mathfrak{A}} e_{0_{\Delta}} = e_{0_{\Delta}} \in \mathfrak{A}_{0_{\Delta}}.$$

Ad (ii) Niechaj $a^{-1} = \sum_{\lambda \in \Delta} \alpha_{\lambda}$ będzie rozkładem na elementy jednorodny, a wtedy na mocy poprzednio udowodnionego i jednoznaczności rozkładu oraz Równ. (2.1.9)

$$\mathfrak{A}_{0_{\Delta}} \ni \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = a \cdot_{\mathfrak{A}} a^{-1} \equiv \sum_{\lambda \in \Delta} a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{\lambda} = a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta},$$

a stąd już

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} (a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta}) \equiv (a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta} = \alpha_{-\delta} \in \mathfrak{A}_{-\delta}.$$

□

Ilekoć monoid Δ zadający gradację algebry zawiera elementy, które nie są upraszczalne, teza Stw. 153 nie musi być spełniona. Naturalność wymienionych w niej warunków skłania do uzupełnienia Def. 100 o

DEFINICJA 101. Przyjmijmy zapis Def. 100. **Algebra unitalna (nad R) z Δ -gradacją** to algebra unitalna \mathfrak{A} , na której jest określona Δ -gradacja o własności $\deg(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) = 0_{\Delta}$. Algebry unitalne nad R z Δ -gradacją (i odnośnymi homomorfizmami stopnia 0_{Δ}) tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{uAlg}_R^{\Delta\text{-grad}}$.

▲

Odnotujmy jeszcze, że konstrukcja ilorazowa przenosi się do kategorii z gradacją w naturalny sposób.

STWIERDZENIE 154. *Przyjmijmy zapis Stw. 144 oraz Def. 100 i niechaj $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$ będzie obustronnym ideałem Δ -gradowanym R -algebry z Δ -gradacją \mathfrak{A} . Algebra ilorazowa $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ dziedziczy z \mathfrak{A} kanoniczną Δ -gradację, względem której rzut kanoniczny*

$$\pi_{\mathfrak{A}/\mathfrak{J}} : \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$$

jest homomorfizmem algebr z Δ -gradacją. ■

Dowód: Trywialny. □

Mamy też, nie mniej oczywiste,

TWIERDZENIE 2.1.3 (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie (dla algebr z gradacją)). *Przyjmijmy zapis Stw. 154 oraz Def. 19 i niechaj $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \text{Obj Alg}_R^{\Delta\text{-grad}}$ oraz $\chi \in \text{Hom}_{\text{Alg}_R^{\Delta\text{-grad}}}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$. Wówczas $\text{Ker } \chi \subset \mathfrak{A}_1$ jest obustronnym ideałem Δ -gradowanym, natomiast $\text{Im } \chi \subset \mathfrak{A}_2$ jest podalgebrą Δ -gradowaną. Kanoniczny izomorfizm R -modułów*

$$\mathfrak{A}/\text{Ker } \chi \xrightarrow{\cong} \text{Im } \chi$$

jest izomorfizmem algebr z Δ -gradacją. ■

Dowód: Oczywisty. □

Na zakończenie części poświęconej algebróm z gradacją uzgodnimy konstrukcję iloczynu tensorowego z gradacją (tensorowanych algebr). Przy tym, miast rozpatrywać ogólną teorię iloczynu na module tensorowym (uwzględniającą struktury odmienne od tej wskazanej w Stw. 148), wyłożoną w Ref. [Bou07b], skupimy się na dwóch szczególnych przypadkach, które napotkamy w dalszej części kursu poświęconej algebróm Clifforda. W pierwszej kolejności wysłowimy oczekiwane

STWIERDZENIE 155. *Przyjmijmy zapis Stw. 148 oraz Def. 100 i niechaj $\mathfrak{A}^{(A)} \in \text{Obj Alg}_R^{\Delta\text{-grad}}$, $A \in \{1, 2\}$. Standardowy iloczyn tensorowy R -algebr $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$ niesie naturalną strukturę R -algebry z Δ -gradacją określaną przez kanoniczny izomorfizm R -algebr*

$$\iota : \mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\delta \in \Delta} \bigoplus_{\substack{\delta_1, \delta_2 \in \Delta \\ \delta_1 + \Delta \delta_2 = \delta}} (\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(2)}),$$

patrz: Tw. 1.2.10, tj. składowa jednorodna Δ -stopnia δ jest przeciwobrazem względem tegoż izomorfizmu składnika prostego o indeksie δ ,

$$(\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)})_{\delta} = \iota^{-1} \left(\bigoplus_{\substack{\delta_1, \delta_2 \in \Delta \\ \delta_1 + \Delta \delta_2 = \delta}} (\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(2)}) \right).$$

Tak określona Δ -gradacja nosi miano Δ -gradacji totalnej. ■

Dowód: Oczywisty. □

W szczególnym przypadku $\Delta \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ istnieje istotna alternatywa dla standardowej struktury algebry na iloczynie tensorowym algebr z Δ -gradacją. Opisuje ją

DEFINICJA 102. Przyjmijmy zapis Stw. 148 oraz Def. 100 i niechaj $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)} \in \text{Obj Alg}_R^{\Delta\text{-grad}}$ dla $\Delta \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ (ze standardową strukturą pierścienia z Przykł. 3 (2) wzgl. (3)). **Skośny iloczyn tensorowy R -algebr z Δ -gradacją** (zwany także **super-iloczynem tensorowy R -algebr z Δ -gradacją**) to iloczyn tensorowy odnośnych R -modułów wyposażony w mnożenie

$$m_{\widehat{\otimes}} \equiv \widehat{\cdot} : (\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}) \otimes_R (\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}) \longrightarrow \mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)},$$

które na jednorodnych składowych w $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$ będących przeciwobrazami (sum) R -modułów $\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(2)}$ względem izomorfizmu ι ze Stw. 155 przyjmuje postać

$$m_{\widehat{\otimes}} \uparrow_{\iota^{-1}(\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(2)})} := (-1)^{\delta_1 \cdot \Delta \delta_2} m_{\otimes} \uparrow_{\iota^{-1}(\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(2)})}.$$

Tak określoną R -algebrę (z Δ -gradacją) o nośniku $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$ oznaczamy symbolem

$$\mathfrak{A}^{(1)} \widehat{\otimes}_R \mathfrak{A}^{(2)}.$$

▲

Jak łatwo widać,

STWIERDZENIE 156. *Przyjmijmy zapis Def. 102. Ilekroć obie tensorowane R -algebry są łączne wzgl. unitalne (w rozumieniu Def. 101), ich skośny iloczyn tensorowy także ma tę cechę.*

■

Dowód: O słuszności tezy przekonuje nas prosty rachunek, wykonany dla dowolnych $(a_\alpha, b_\alpha) \in \mathfrak{A}_{1\lambda_\alpha} \times \mathfrak{A}_{2\mu_\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} m_{\widehat{\otimes}}(m_{\widehat{\otimes}}((a_1 \otimes_R b_1) \otimes_R (a_2 \otimes_R b_2)) \otimes_R (a_3 \otimes_R b_3)) &= (-1)^{\mu_1 \cdot \Delta \lambda_2 + \Delta(\mu_1 + \Delta \mu_2) \cdot \Delta \lambda_3} \\ &\cdot m_{\mathfrak{A}_1}(m_{\mathfrak{A}_1}(a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R a_3) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(m_{\mathfrak{A}_2}(b_1 \otimes_R b_2) \otimes_R b_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{\widehat{\otimes}}((a_1 \otimes_R b_1) \otimes_R m_{\widehat{\otimes}}((a_2 \otimes_R b_2) \otimes_R (a_3 \otimes_R b_3))) &= (-1)^{\mu_2 \cdot \Delta \lambda_3 + \Delta \mu_1 \cdot \Delta(\lambda_2 + \Delta \lambda_3)} \\ &\cdot m_{\mathfrak{A}^{(1)}}(a_1 \otimes_R m_{\mathfrak{A}_1}(a_2 \otimes_R a_3)) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(b_1 \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(b_2 \otimes_R b_3)), \end{aligned}$$

w którym

$$(-1)^{\mu_1 \cdot \Delta \lambda_2 + \Delta(\mu_1 + \Delta \mu_2) \cdot \Delta \lambda_3} = (-1)^{\mu_2 \cdot \Delta \lambda_3 + \Delta \mu_1 \cdot \Delta(\lambda_2 + \Delta \lambda_3)},$$

oraz teza (i) Stw. 153, która gwarantuje neutralność $1_{\mathfrak{A}_1} \otimes_R 1_{\mathfrak{A}_2} \in (\mathfrak{A}_1 \widehat{\otimes}_R \mathfrak{A}_2)_{0_\Delta}$ w przypadku algebr unitalnych. □

4. Algebry różniczkowe

5. Algebry Frobeniusa

6. Algebry i algebroidy Liego

7. Superalgebry Liego

Elementy teorii reprezentacji algebr

1. Pojęcia podstawowe

Algebry i struktury pochodne niosące nietrywialną informację fizykalną (jak choćby tę o symetriach stanów i procesów przyrodniczych, czy wreszcie o samej ewolucji stanów) ujawniają swą obecność w opisie obiektów i zjawisk bądź to bezpośrednio (o czym wspomnieliśmy na początku poprzedniego rozdziału), bądź też za pośrednictwem struktur generycznych stowarzyszonych z wyborem algebraicznego zbioru-modelu owych zjawisk i podlegających im obiektów – najbardziej oczywiste przykłady takich wyborów to: konstrukcja algebry (Poissona–)Liego funkcji gładkich na rozmaitości symplektycznej (z nawiasem Poissona określonym przez formę symplektyczną) wykorzystywana do opisu stanów klasycznego układu fizycznego, z którą stowarzyszona jest pojemna struktura algebry Liego symplektycznych pól wektorowych na tejże rozmaitości, oraz konstrukcja przestrzeni Hilberta wykorzystywana do opisu stanów kwantowego układu fizycznego, z którą stowarzyszona jest nie mniej pojemna struktura (C^*) -algebry ograniczonych operatorów liniowych. W tym drugim przypadku relacje konstytutywne rzeczonych algebr są spełniane przez pewien podzbiór elementów struktury generycznej i określają relacje równoważności na zbiorze-modelu będącym jej nośnikiem. Relacje te porządkują elementy zbioru-modelu według kryterium przynależności do ich klas abstrakcji, co zwykle zyskuje interpretację w terminach „opisów równoważnych”, „rodzajów/rodzin obiektów elementarnych”, „multipletów symetrii” lub „sektorów nadwyboru” w zbiorze-modelu zjawisk i obiektów. Abstrakcyjnego aparatu konstrukcji i analizy takiego „zapośredniczonego” schematu manifestacji algebr o znaczeniu fizycznym dostarcza teoria reprezentacji algebr, którą zajmujemy się w niniejszym rozdziale. Zaczynamy zatem od podstawowej

DEFINICJA 103. Przyjmijmy zapis Def. 22 i 95 oraz Przykł. 3 (4), 29 (2) i (12). Niechaj $((\mathfrak{A} + \mathfrak{A}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}, \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}})$ będzie unitalną algebrą łączną nad pierścieniem przemiennym R_1 , $((G, +_G, P_G, \bullet \mapsto 0_G), \ell_G)$ zaś – modulem lewostronnym nad pierścieniem R_2 , przy czym zakładamy, że oba pierścienie wiąże relacja $\mathcal{Z}(R_2) \supseteq R_1$. **Reprezentacja** (typu R_1) algebry \mathfrak{A} na module G to unitalny homomorfizm R_1 -algebr

$$\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(G),$$

przy czym struktura R_1 -algebry na $\text{End}_{R_2}(G)$ jest tutaj indukowana przez włożenie kanoniczne $\mathcal{J}_{R_1} : R_1 \rightarrow R_2$. Modul G określamy w tym wypadku mianem **nośnika reprezentacji**. Kiedy jest on wolny, definiujemy **wymiar reprezentacji** jako rząd modułu G i zapisujemy

$$\dim \rho \equiv \text{rk}_{R_2} G.$$

Jeśli ρ jest monomorfizmem, mówimy o reprezentacji **wiernej**. Centralizator obrazu reprezentacji,

$$C_{\text{End}_{R_2}(G)}(\rho(\mathfrak{A})) \subset \text{End}_{R_2}(G),$$

nazywamy **maksymalną podalgebrą komutującą** reprezentacji.

Podmoduł ρ -niezmienniczy to podmoduł $H \subseteq G$ o własności

$$\forall_{a \in \mathfrak{A}} : \rho(a)(H) \subset H.$$

Wyznacza on **podreprezentację** reprezentacji ρ , czyli reprezentację algebry \mathfrak{A} na podmodule H daną w postaci

$$\rho_{(H)} : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(H) : a \longmapsto (J_H \upharpoonright_{\text{Im } J_H})^{-1} \circ \rho(a) \circ J_H.$$

Ilekoć pierścień bazowy $R_2 = \mathbb{K}$ jest ciałem, mówimy o **podprzestrzeni ρ -niezmienniczej**. Reprezentacja, której jedynymi przestrzeniami niezmienniczymi są G (cały nośnik) i $\{0_G\}$, nosi miano **nieprzywiedlnej**. Reprezentacja, która nie jest nieprzywiedlna, jest określana jako **przywiedlna**. Reprezentacja, której nośnik rozkłada się na sumę prostą przestrzeni niezmienniczych, to reprezentacja **półprosta**. Wreszcie taką, której nośnik nie rozkłada się na sumę prostą *nietrywialnych* przestrzeni niezmienniczych, nazywamy **nierozkładalną**.

Dla dowolnej pary reprezentacji $\rho_\alpha : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_R(G_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ algebry \mathfrak{A} , **homomorfizm reprezentacji**, zwany także **splataczem reprezentacji**, to odwzorowanie $\chi \in \text{Hom}_{R_2}(G_1, G_2)$ spełniające warunek

$$\forall_{a \in \mathfrak{A}} : \rho_2(a) \circ \chi = \chi \circ \rho_1(a).$$

Ilekoć splatacz χ jest izomorfizmem, mówimy o **równoważności reprezentacji** ρ_1 i ρ_2 , którą zapisujemy symbolem

$$\rho_2 \sim \rho_1.$$

Reprezentacje R_1 -algebry \mathfrak{A} na R_2 -modułach lewostronnych wraz z odnośnymi splataczami tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{Rep}_{R_1 \subseteq R_2}(\mathfrak{A})$. ▲

UWAGA 33. Każda reprezentacja nieprzywiedlna jest w oczywisty sposób nierozkładalna. O tym, że w ogólności jest to wynikanie jendokierunkowe, przekonuje analiza prostego przykładu: Oto przestrzeń \mathbb{R} -liniowa $\mathbb{R}^{\times 2}$ jest nośnikiem nierozkładalnej, lecz przywiedlnej reprezentacji unitalnej \mathbb{R} -algebry łącznej $\mathbb{R}[\cdot]$ określonej (jednoznacznie) przez przyporządkowanie generatorowi $t \in \mathbb{R}[\cdot]$ (zmiennej) macierzy

$$\rho(t) := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedyną podprzestrzenią ρ -niezmienniczą jest tutaj $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, przy czym podprzestrzeń ta nie ma (prostego) ρ -niezmienniczego dopełnienia w $\mathbb{R}^{\times 2}$, co wynika z rachunku

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \triangleright \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

PRZYKŁAD(Y) 32.

- (1) **Reprezentacja trywialna** R -algebry \mathfrak{A} na R -module G to taka, która spełnia warunek $\forall_{a \in \mathfrak{A} \setminus \{1_{\mathfrak{A}}\}} : \rho(a) = 0$.

- (2) **Reprezentacja lewa regularna** R -algebry \mathfrak{A} na R -module \mathfrak{A} to $l : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{A}) : a \mapsto m_{\mathfrak{A}}(a, \cdot)$. Analogicznie definiujemy **reprezentację prawą regularną**. Ilekroć \mathfrak{A} jest unitalna, reprezentacje te są wierne.
- (3) **Reprezentacja zredukowana względem ideału** lewostronnego (wzgl. prawostronnego) $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ R -algebry \mathfrak{A} na R -module \mathfrak{I} to odwzorowanie $l^{\mathfrak{I}} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{I})$ indukowane przez reprezentację lewą (wzgl. prawą) regularną wskutek ograniczenia wyjściowego R -modułu \mathfrak{A} do jego podmodułu \mathfrak{I} . Reprezentacja ta jest w oczywisty sposób nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy \mathfrak{I} jest minimalny, tj. gdy \mathfrak{I} nie zawiera podideałów innych niż $\{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz \mathfrak{I} .
- (4) Wybór bazy w R -module G rzędu $\text{rk}_R G = N \in \mathbb{N}$ określa reprezentację macierzową $\text{End}_R(G) \rightsquigarrow \text{End}_R(R^{\times N}) \cong \mathbb{R}(N)$.
- (5) Reprezentacje ciała \mathbb{K} traktowanego jako unitalna \mathbb{Z} -algebra to przestrzenie \mathbb{K} -liniowe.

✓

Naturalne operacje na modułach i algebrach nad pierścieniem przemiennym są dziedziczone przez reprezentacje, czemu daje wyraz

DEFINICJA 104. Przyjmijmy zapis Def. 16 i 103 oraz Stw. 145 i 148. Niechaj $\rho_{\alpha} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{R_2}(G_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą reprezentacjami R_1 -algebry \mathfrak{A} na R_2 -modułach lewostronnych G_{α} . **Suma prosta reprezentacji** ρ_{α} to reprezentacja

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_R(G_1) \oplus \text{End}_R(G_2) : a \mapsto \rho_1(a) \oplus \rho_2(a).$$

Iloczyn tensorowy reprezentacji ρ_{α} to reprezentacja

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{R_2}(G_1) \otimes_{R_1} \text{End}_{R_2}(G_2) : a \mapsto \rho_1(a) \otimes_{R_1} \rho_2(a).$$

Niechaj teraz $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{R_2}(G)$ będzie reprezentacją R_1 -algebry \mathfrak{A} na R_2 -module G , przy czym zakładamy (dla uproszczenia), że także R_2 jest pierścieniem przemiennym. **Reprezentacja dwoista** (lub **dualna**) do ρ to reprezentacja

$$\rho^* : \mathfrak{A}^{\text{opp}} \rightarrow \text{End}_{R_2}(G^*) : a \mapsto \rho(a)^*,$$

gdzie

$$\rho(a)^* : G^* \curvearrowright : \varphi \mapsto \varphi \circ \rho(a).$$

▲

Mając na uwadze przyszłe konkretne zastosowania fizykalne teorii reprezentacji, uzupełnimy dotychczasową jej dyskusję o elementy nawiązujące bezpośrednio do konstrukcji przedstawionych w Def. 45 i 98. Oto więc mamy

DEFINICJA 105. Przyjmijmy zapis Def. 103 oraz Przykł. 29 (4) i niechaj \mathfrak{A} będzie algebrą nad ciałem \mathbb{R} . Jej reprezentację nazwiemy **reprezentacją typu R** dla $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ (tj. **rzeczywistego, zespolonego** lub – odpowiednio – **kwaternionowego**), jeśli jej przeciwdziedzina jest \mathbb{R} -algebra endomorfizmów $\text{End}_{R^{\text{opp}}}(G)$ modułu prawostronnego G nad pierścieniem R , tj.

$$\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{R^{\text{opp}}}(G).$$

▲

Równoważnego opisu reprezentacji typu \mathbb{R}, \mathbb{C} i \mathbb{H} dostarcza oczywiście, lecz zarazem wygodne

STWIERDZENIE 157. *Przyjmijmy zapis Def. 105, Stw. 54 oraz Przykł. 29 (12). Reprezentacja zespolona \mathbb{R} -algebry \mathfrak{A} to taka jej reprezentacja rzeczywista, której maksymalna podalgebra komutująca spełnia warunek*

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(G)}(\rho(\mathfrak{A})) \supset \langle \text{id}_G, I \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}.$$

Reprezentacja kwaternionowa \mathbb{R} -algebry \mathfrak{A} to taka jej reprezentacja rzeczywista, której maksymalna podalgebra komutująca spełnia warunek

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(G)}(\rho(\mathfrak{A})) \supset \langle \text{id}_G, I, J, K \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}.$$

■

Dowód: Bezpośrednia konsekwencja Def. 105 oraz Stw. 54, podparta istnieniem monomorfizmów $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$. □

O dodatkowych mechanizmach indukcji zespolonych reprezentacji algebr rzeczywistych i ich kompleksyfikacji opowiada

STWIERDZENIE 158. *Przyjmijmy zapis Def. 98 oraz 105. Niechaj $\mathfrak{A} \in \text{Obj Alg}_{\mathbb{R}}$ oraz $V \in \text{Obj Vect}_{\mathbb{C}}$ i $W \in \text{Obj Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}$. Dowolna reprezentacja zespolona $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ kanonicznie indukuje reprezentację*

$$\rho^{\mathbb{C}} : \mathfrak{A}^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

stanowiącą jedyne \mathbb{C} -liniowe rozszerzenie przyporządkowania

$$\rho^{\mathbb{C}}(a \otimes_{\mathbb{R}} z) := \rho(a) \circ \ell_z \equiv \ell_z \circ \rho(a),$$

zapisanego dla dowolnych $(a, z) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{C}$. Ponadto dowolna reprezentacja kwaternionowa $\tilde{\rho} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}(W)$ kanonicznie (tożsamościowo) indukuje reprezentację zespoloną

$$\tilde{\rho} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W).$$

■

Dowód: Trywialny. □

Powracając do dyskusji ogólnych własności reprezentacji algebr unitalnych, wypowiemy obecnie wynik strukturalny o fundamentalnym znaczeniu dla całej teorii reprezentacji, mimo całą swą trywialność.

STWIERDZENIE 159 (Lematy Schura). *Przyjmijmy zapis Def. 103 i niechaj $\rho_{\alpha} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema reprezentacjami \mathbb{K} -algebry \mathfrak{A} na odnośnych przestrzeniach wektorowych V_{α} nad ciałem \mathbb{K} , odwzorowanie $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ zaś – homomorfizmem reprezentacji. Wówczas $\text{Ker } \chi$ jest podprzestrzenią ρ_1 -niezmienniczą przestrzeni V_1 , a $\text{Im } \chi$ jest podprzestrzenią ρ_2 -niezmienniczą przestrzeni V_2 . Ilekroć ρ_1 jest nieprzywiedlna, zachodzi alternatywa*

$$\text{Ker } \chi = V_1 \quad \vee \quad \text{Ker } \chi = \{0_{V_1}\},$$

kiedy natomiast to ρ_2 jest nieprzywiedlna, zachodzi alternatywa

$$\text{Im } \chi = \{0_{V_2}\} \quad \vee \quad \text{Im } \chi = V_2.$$

■

Dowód: Oczywiście. □

Jego natychmiastową konsekwencją jest

STWIERDZENIE 160 (Lemat Schura nad ciałem algebraicznie domkniętym).
Przyjmijmy zapis Def. 103 i niechaj $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie nieprzywiedlną reprezentacją \mathbb{K} -algebry unitalnej \mathfrak{A} na przestrzeni wektorowej V nad ciałem algebraicznie domkniętym \mathbb{K} , odwzorowanie $\chi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zaś – endomorfizmem reprezentacji ρ . Wówczas istnieje skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ spełniający warunek

$$\chi = \lambda \triangleright \text{id}_V.$$

■

Dowód: Algebraiczna domkniętość \mathbb{K} przesądza o istnieniu skalaru $\lambda \in \text{Sp}(\chi)$, którego możemy użyć do zdefiniowania endomorfizmu

$$\chi_\lambda := \chi - \lambda \triangleright \text{id}_V$$

reprezentacji ρ . Niech $w_\chi \in \mathbb{K}[t]$ będzie wielomianem charakterystycznym χ , a $P_{w_\chi} : \mathbb{K} \curvearrowright$ – funkcją wielomianową z nim stowarzyszoną. Wobec tożsamości $\det(\chi_\lambda) \equiv P_{w_\chi}(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$ stwierdzamy, że χ_λ nie jest monomorfizmem, co w świetle Stw. 159 implikuje postulowaną tożsamość $\chi_\lambda = 0$. □

Na gruncie dotychczasowych rozważań natury ogólnej możemy obecnie przystąpić do szczegółowej dyskusji reprezentacji algebr, które napotkamy w dalszej części kursu.

2. Reprezentacje algebr prostych

Jednym z wyróżników algebr prostych pośród innych obiektów kategorii $\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$ jest szczególna prostota ich teorii reprezentacji, która pozwoli nam z czasem przeprowadzić wyczerpującą analizę reprezentacji algebr odgrywających istotną rolę w matematycznym modelowaniu zjawisk z udziałem pól fermionowych, czyli rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda. Świadectwa rzeczoności dostarcza poniższe

TWIERDZENIE 2.2.1. *Wszystkie wierne reprezentacje nieprzywiedlne skończonego wymiarowej algebry prostej są wzajem równoważne.*

■

Dowód: Niechaj $\mathfrak{A} \in \text{Obj } \mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$ będzie algebrą prostą skończonego wymiaru. W przypadku $\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$ dowód jest banalny, załóżmy zatem, że \mathfrak{A} jest nietrywialna. Zaczniemy od skonstruowania wyróżnionej reprezentacji referencyjnej. W tym celu wybierzmy dowolny minimalny (niezerowy) ideał lewostronny $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$, którego istnienie zapewnia skończoność wymiaru \mathfrak{A} (wystarczy zacząć jego poszukiwania od ideału \mathfrak{A} , w którym w następnym kroku wybieramy dowolny nietrywialny podideał lewostronny, o ile takowy istnieje, i procedurę powtarzamy (co najwyżej $(\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{A} - 2)$ -krotnie), i rozważmy reprezentację $l^{\mathfrak{I}}$ zredukowaną względem \mathfrak{I} (w rozumieniu Przykł. 32 (3)). Reprezentacja ta jest nieprzywiedlna z racji minimalności \mathfrak{I} , pozostaje zatem zbadać jej wierność. Jeśli $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}$, to $\mathfrak{I}.\mathfrak{I} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ wprost na mocy założenia, a zatem możemy zastosować tezę Stw. 147, która pozwala stwierdzić, że $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}.P \equiv \mathfrak{I}.P$ dla pewnego idempotentu $P \in \mathfrak{I} \equiv \mathfrak{A}$. Załóżmy, że $l^{\mathfrak{I}}$ nie jest

wierna, tj. $\text{Ker } l^{\mathcal{J}} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$, a wtedy nieodzownie $\text{Ker } l^{\mathcal{J}} = \mathfrak{A}$, gdyż $\text{Ker } l^{\mathcal{J}}$ jest ideałem obustronnym. Wobec łączności mnożenia w \mathfrak{A} , to daje nam

$$l^{\mathcal{J}} : \mathfrak{A} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J} : (a, b.P) \longmapsto a.(b.P) \equiv (a.b).P = 0_{\mathfrak{A}},$$

przy czym $a.b \in \mathfrak{A} \equiv \mathcal{J}$, przeto w świetle argumentacji analogicznej do tej z dowodu Stw. 147 (a wobec $P \neq 0_{\mathfrak{A}}$) konstatujemy, że $\forall_{a,b \in \mathfrak{A}} : a.b = 0_{\mathfrak{A}}$, w sprzeczności z założeniem o prostocie \mathfrak{A} . Pozostaje jeszcze rozpatrzyć przypadek $\mathcal{J} \not\subseteq \mathfrak{A}$. I w tym przypadku założymy, że $\text{Ker } l^{\mathcal{J}} = \mathfrak{A}$. Wobec niezerowości \mathcal{J} możemy wybrać $x \in \mathcal{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$, z którym następnie stowarzyszamy ideał prawostronny $x.\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$. Poczynione założenie przesądza o tym, że jest to ideał obustronny, oto bowiem

$$\forall_{a \in \mathfrak{A}} : a.(x.\mathfrak{A}) = (a.x).\mathfrak{A} \equiv l_a^{\mathcal{J}}(x).\mathfrak{A} = 0_{\mathfrak{A}}.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\} \subset x.\mathfrak{A}.$$

Wobec prostoty \mathfrak{A} wnioskujemy, że albo $x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, albo też $x.\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Jeśli $x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, to bez trudu stwierdzamy, że także $\langle x \rangle_{\mathbb{K}}$ jest ideałem obustronnym, gdyż

$$\forall_{(a,\lambda) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{K}} : a.(\lambda \triangleright x) = \lambda \triangleright (a.x) \equiv \lambda \triangleright l_a^{\mathcal{J}}(x) = \lambda \triangleright 0_{\mathfrak{A}} = 0_{\mathfrak{A}}$$

oraz

$$\forall_{(a,\lambda) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{K}} : (\lambda \triangleright x).a = \lambda \triangleright (x.a) \in x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\},$$

a ponieważ $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ (wszak $x \neq 0_{\mathfrak{A}}$), przeto koniecznie $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} = \mathfrak{A}$. Wtedy jednak zachodzi równość $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \equiv \langle x \rangle_{\mathbb{K}}.\mathfrak{A} = x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, co jest w sprzeczności z założeniem o prostocie \mathfrak{A} . Jeżeli natomiast $x.\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, to

$$\forall_{a,b=x.c \in \mathfrak{A}} : a.b \equiv a.(x.c) = (a.x).c \equiv l_a^{\mathcal{J}}(x).c = 0_{\mathfrak{A}}.c = 0_{\mathfrak{A}},$$

znów w sprzeczności z założeniem $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$. Ostatecznie więc nieodzownie $\text{Ker } l^{\mathcal{J}} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$, czyli mamy do czynienia z wierną i – jak pokazaliśmy wcześniej – nieprzywiedlną reprezentacją $l^{\mathcal{J}}$.

Niechaj teraz $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie wierną reprezentacją nieprzywiedlną na przestrzeni wektorowej V . Wierność ρ oznacza, że $\forall_{a \in \mathcal{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}} : \rho(a) \neq 0$, czyli

$$\forall_{a \in \mathcal{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}} \exists_{v \in V} : \rho(a)(v) \neq 0_V.$$

Ustalmy $a_0 \in \mathcal{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$ oraz odnośny wektor $v_0 \in V$ (o powyższej własności) i zdefiniujmy odwzorowanie (jawnie) \mathbb{K} -liniowe

$$\chi_0 : \mathcal{J} \longrightarrow V : a \longmapsto \rho(a)(v_0).$$

Odwzorowanie to spełnia – dla dowolnych $(a, b) \in \mathfrak{A} \times (\mathcal{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\})$ – warunek

$$\chi_0 \circ l_a^{\mathcal{J}}(b) \equiv \chi_0(a \cdot_{\mathfrak{A}} b) \equiv \rho(a \cdot_{\mathfrak{A}} b)(v_0) = \rho(a) \circ \rho(b)(v_0) \equiv \rho(a) \circ \chi_0(b),$$

tj. splata ze sobą nieprzywiedlne reprezentacje \mathfrak{A} : reprezentację zredukowaną względem \mathcal{J} oraz ρ , patrz: Przykł. 32 (3). Ponieważ jednak zarówno $\text{Ker } \chi_0 \neq \mathcal{J}$ (gdyż $\chi_0(a_0) \neq 0_V$), jak i $\text{Im } \chi_0 \neq \{0_V\}$ (z tego samego powodu), przeto – na mocy Stw. 159 – χ_0 jest izomorfizmem. Na tej podstawie wnioskujemy, że każda wierna reprezentacja nieprzywiedlna $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest równoważna reprezentacji zredukowanej $l^{\mathcal{J}}$ względem dowolnego (minimalnego) ideału lewostronnego $\mathcal{J} \subset \mathfrak{A}$. \square

Jego treść uzupełnia w nader istotny sposób

STWIERDZENIE 161. *Wszystkie nietrywialne reprezentacje unitalnej algebry prostej są wiernie.*

■

Dowód: Niechaj $\mathfrak{A} \in \text{Obj } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie algebrą prostą, $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ zaś – jej reprezentacją, przy czym zakładamy, że $\text{Ker } \rho \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$. Wybierzmy dowolny element $a \in \text{Ker } \rho \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$ i wygenerujmy zeń ideał obustronny

$$\langle a \rangle_{\mathfrak{A}} := \left\{ \sum_{i=1}^N b_i \cdot_{\mathfrak{A}} a \cdot_{\mathfrak{A}} c_i \mid b_i, c_i \in \mathfrak{A}, i \in \overline{1, N}, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ideał ów zawiera $a \neq 0_{\mathfrak{A}}$, gdyż $a \equiv \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot a \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, a zatem z racji prostoty \mathfrak{A} zachodzi równość $\langle a \rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, która jednak pociąga za sobą tożsamość (zapisaną symbolicznie)

$$\rho(\mathfrak{A}) \equiv \rho(\mathfrak{A} \cdot a \cdot \mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{A}) \circ \rho(a) \circ \rho(\mathfrak{A}) = 0,$$

więc też trywialność ρ . □

Z połączenia obu poprzednich wyników wyprowadzamy

COROLLARIUM 8. *Wszystkie nietrywialne reprezentacje nieprzywiedlne unitalnej algebry prostej są wzajem równoważne.* ■

W kontekście Stw. 145 i Def. 104 rodzi się naturalne pytanie o konsekwencje, jakie powyższe rozważania niosą dla teorii reprezentacji algebr będących sumami prostymi unitalnych algebr prostych (czyli szczególnymi przypadkami tzw. **algebr półprostych**), przy czym – jak niemal zawsze w niniejszym kursie – ostatecznej sankcji logicznej dla tego pytania dostarczają istotne fizyczne zastosowania owych algebr (patrz: Rozdz. 3.2). Ilościowej odpowiedzi na nie udziela

STWIERDZENIE 162. *Przyjmijmy zapis Def. 104 i 96 oraz Stw. 145. Niechaj $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in \overline{1, N}} \subset \text{Obj } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie rodziną unitalnych algebr prostych nad ciałem \mathbb{K} o odnośnych nietrywialnych reprezentacjach nieprzywiedlnych $\{\rho_i\}_{i \in \overline{1, N}}$, o których mowa w Cor. 8. Dowolna nietrywialna reprezentacja nieprzywiedlna algebry $\bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i$ jest równoważna jednej z reprezentacji*

$$\rho_n := \bigoplus_{i=1}^N n_i \rho_i,$$

$$n. \equiv (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}.$$
■

Dowód: Niechaj $\rho : \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie nietrywialną reprezentacją nieprzywiedlną. Rozważmy kanoniczne włożenia $j_{\mathfrak{A}_i} : \mathfrak{A}_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i$. Bez trudu przekonujemy się, że endomorfizmy

$$\pi_i := \rho \circ j_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i}), \quad i \in \overline{1, N}$$

tworzą zupełną rodzinę rzutów komplementarnych na V w rozumieniu Def. 34, zatem na mocy Stw. 32 zadają rozkład

$$V = \bigoplus_{i=1}^N V_i, \quad V_i := \pi_i(V),$$

którego składnik prosty V_i jest nośnikiem reprezentacji

$$\rho_i := \rho \circ j_{\mathfrak{A}_i} : \mathfrak{A}_i \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$$

o własności

$$\forall_{j \in \overline{1, N} \setminus \{i\}} : \rho_j(\mathfrak{A}_j)(V_i) \equiv \rho_j(\mathfrak{A}_j) \circ \rho \circ j_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})(V) = \rho(j_{\mathfrak{A}_j}(\mathfrak{A}_j) \cdot_{\mathfrak{A}} j_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i}))(V)$$

$$= \rho(\{0_{\mathfrak{A}}\})(V) = \{0_V\},$$

która pozwala zapisać

$$\begin{aligned} \rho(\mathfrak{A})(V_i) &\equiv \rho\left(\bigoplus_{j=1}^N J_{\mathfrak{A}_j}(\mathfrak{A}_j)\right) \circ J_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})(V) = \rho(J_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_i) \cdot_{\mathfrak{A}} J_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i}))(V) \\ &= \rho \circ J_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_i)(V_i) \equiv \rho_i(\mathfrak{A}_i)(V_i). \end{aligned}$$

czyli – innymi słowy –

$$\rho \equiv \bigoplus_{i=1}^N \rho_i \circ \text{pr}_i,$$

gdzie $\text{pr}_i : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_i$ jest rzutem kanonicznym na składową. I odwrotnie, rodzina reprezentacji $\rho_i : \mathfrak{A}_i \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$, $i \in \overline{1, N}$ zadaje reprezentację

$$\rho := \bigoplus_{i=1}^N J_{V_i} \circ \rho_i \circ \text{pr}_i : \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i=1}^N V_i\right)$$

sumy prostej algebr \mathfrak{A}_i na (zewnątrznej) sumie prostej przestrzeni V_i . Wobec prostego charakteru rozkładu ρ na składowe jest jasnym, że nietrywialność i nieprzywiedność ρ wymaga, iżby wszystkie poza jedną z podreprezentacji $\tilde{\rho}_i := (J_{V_i} \circ \rho_i \circ \text{pr}_i)$ były trywialne, a do tego – iżby sama nietrywialna $\tilde{\rho}_i$ była nieprzywiedna, co w świetle Cor. 8 jest równoznaczne z dowodzoną tezą. \square

Możemy już teraz przystąpić do konstruktywnego opisu (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiednych wyróżnionych algebr macierzowych $\mathbb{K}(n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wspomnianych w tezie Stw. 143, które napotkamy w dalszej części wykładu.

TWIERDZENIE 2.2.2. *Przyjmijmy zapis Def. 103. Wszystkie nietrywialne reprezentacje nieprzywiedne dowolnej z \mathbb{K} -algebr $R(n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, o których mowa w Stw. 143 (\mathbb{K} dowolne, gdy $R = \mathbb{K}$ jest ciałem, wzgl. $\mathbb{K} = \mathbb{R} \subset R$, gdy $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$), są równoważne odnośnie **reprezentacji definiującej***

$$\rho_{\text{def}} := \text{id}_{\text{End}_{R^{\text{opp}}}(R^{\times n})}.$$

Ponadto dowolna skończenie wymiarowa nietrywialna reprezentacja algebry $\mathbb{K}(n)$ nad ciałem \mathbb{K} jest równoważna skończonej sumie prostej kopii tejże reprezentacji definiującej. ■

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że reprezentacja ρ_{def} jest nietrywialna i nieprzywiedna, gdyż $\rho_{\text{def}}(\mathbf{1}_n) = \mathbf{1}_n \neq \mathbf{0}_n$ oraz

$$\forall_{\substack{v \in R^{\times n} \setminus \{0\} \\ w \in R^{\times n}}} \exists_{a \in R(n)} : w = a \odot v.$$

Istotnie, dowolny wektor $v \neq 0_{R^{\times n}}$ ma różną od zera jedną ze składowych $v^i \neq 0$ w bazie standardowej $\mathcal{E} \equiv \{e_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ z Przykł. 13 (5), można zatem dla ustalonego $w = w^i \triangleright e_i$ wybrać a w postaci

$$a := \frac{w^i}{v^i} \triangleright E_{j, \bar{i}}^{(n)}$$

gdzie $\{E_{i, j}^{(n)}\}_{i, j \in \overline{1, n}}$ jest bazą standardową pierścienia $R(n)$ wskazaną w Przykł. 29 (1) i gdzie kreska nad indeksem i oznacza, że nie jest on wysumowany. Pierwsza część dowodzonej tezy jest zatem bezpośrednią konsekwencją Cor. 8.

Niech dalej $\rho : \mathbb{K}(n) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ będzie reprezentacją \mathbb{K} -algebry $\mathbb{K}(n)$ na pewnej przestrzeni \mathbb{K} -liniowej V . Łatwo sprawdzamy, że endomorfizmy tej ostatniej dane wzorami

$$\pi_i := \rho(E_{i,i}^{(n)})$$

tworzą zupełną rodzinę rzutów komplementarnych na V , oto bowiem na mocy Równ. (2.1.1) i (2.1.2) zachodzi

$$\pi_i \circ \pi_j \equiv \rho(E_{i,i}^{(n)} \odot E_{j,j}^{(n)}) = \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho(E_{i,j}^{(n)}) = \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho(E_{i,i}^{(n)}) \equiv \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \pi_i$$

oraz

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \equiv \rho\left(\sum_{i=1}^n E_{i,i}^{(n)}\right) = \rho(\mathbf{1}_n) = \text{id}_V.$$

To jednak jest w świetle Stw. 32 równoznaczne z istnieniem rozkładu

$$V = \bigoplus_{i=1}^n \pi_i(V).$$

Rozważmy odwzorowania \mathbb{K} -liniowe

$$\tau_{1 \rightarrow k} := \rho(E_{k,1}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_1(V)} : \pi_1(V) \longrightarrow V$$

o własności

$$\tau_{1 \rightarrow k} \circ \pi_1 \equiv \rho(E_{k,1}^{(n)} \odot E_{1,1}^{(n)}) = \rho(E_{k,k}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)}) \equiv \pi_k \circ \tau_{1 \rightarrow k},$$

która implikuje relacje

$$\text{Im } \tau_{1 \rightarrow k} \subset \pi_k(V).$$

Zdefiniowawszy odwzorowania \mathbb{K} -liniowe

$$\tau_{k \rightarrow 1} := \rho(E_{1,k}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_k(V)} : \pi_k(V) \longrightarrow V$$

o własności

$$\tau_{k \rightarrow 1} \circ \pi_k \equiv \rho(E_{1,k}^{(n)} \odot E_{k,k}^{(n)}) = \rho(E_{1,1}^{(n)} \odot E_{1,k}^{(n)}) \equiv \pi_1 \circ \tau_{k \rightarrow 1},$$

z której wynikają relacje

$$\text{Im } \tau_{k \rightarrow 1} \subset \pi_1(V),$$

stwierdzamy bez trudu, że odwzorowania $\tau_{k \rightarrow 1}$ są obustronnymi odwrotnościami odwzorowań $\tau_{1 \rightarrow k}$,

$$\tau_{1 \rightarrow k} \circ \tau_{k \rightarrow 1} \equiv \rho(E_{k,1}^{(n)} \odot E_{1,k}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_k(V)} = \rho(E_{k,k}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_k(V)} \equiv \pi_k \upharpoonright_{\pi_k(V)} = \text{id}_{\pi_k(V)},$$

$$\tau_{k \rightarrow 1} \circ \tau_{1 \rightarrow k} \equiv \rho(E_{1,k}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_1(V)} = \rho(E_{1,1}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_1(V)} \equiv \pi_1 \upharpoonright_{\pi_1(V)} = \text{id}_{\pi_1(V)},$$

co daje nam do ręki rodzinę izomorfizmów podprzestrzeni

$$\tau_{k \rightarrow 1} : \pi_k(V) \xrightarrow{\cong} \pi_1(V), \quad k \in \overline{1, n}.$$

Określmy następnie odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$T \equiv (\pi_1, \tau_{1 \rightarrow 2}, \tau_{1 \rightarrow 3}, \dots, \tau_{1 \rightarrow n}) : \pi_1(V) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n V$$

i oznaczmy – dla dowolnego wektora $v \in \pi_1(V)$ –

$$(\tau_1^v, \tau_2^v, \dots, \tau_n^v) := T(v).$$

Łatwo sprawdzamy, że przestrzeń $\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \subset V$ jest dla dowolnego $v \neq 0_V$ podprzestrzenią ρ -niezmienniczą – istotnie, układ $\mathcal{T} := \{\tau_k^v\}_{k \in \overline{1, n}}$ jest jawnie \mathbb{K} -liniowo niezależny (wszak jego elementy, będące izomorficznymi obrazami wektora niezerowego, należą do parami różnych składników prostych V), a przy tym wprost na mocy definicji rozpinają przestrzeń $\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}}$, jest zatem jej bazą, w niej zaś stwierdzamy – dla dowolnej macierzy $M = M_{ij} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \in \mathbb{K}(n)$ –

$$\begin{aligned} \rho(M)(\tau_k^v) &= M_{ij} \triangleright \rho(E_{i,j}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)})(v) = M_{ij} \cdot \delta_{j,k}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho(E_{i,1}^{(n)})(v) \\ &\equiv M_{i,k} \triangleright \tau_i^v \in \langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Przy tym zauważamy, że także w przypadku reprezentacji definiującej ρ_{def} są – w bazie standardowej \mathcal{E} przestrzeni $\mathbb{K}^{\times n}$ – spełnione równości

$$\rho_{\text{def}}(M)(e_k) = M_{ij} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \odot e_k = M_{ij} \cdot \delta_{j,k}^{\mathbb{K}} \triangleright e_i \equiv M_{i,k} \triangleright e_i,$$

więc odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\iota_v : \langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$$

będące rozszerzeniem przyporządkowania baz

$$\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \ni \tau_i^v \longmapsto e_i \in \mathbb{K}^{\times n}, \quad i \in \overline{1, n}$$

jest równoważnością reprezentacji

$$\rho \upharpoonright \langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \sim \rho_{\text{def}}.$$

Uwzględniając powyższe, wybierzmy w $\pi_1(V)$ dowolną bazę $\{v_i \equiv \tau_1^{v_i}\}_{i \in \overline{1, D}}$, $D \equiv \dim_{\mathbb{K}} \pi_1(V)$, a wówczas układy wektorów $\{\tau_k^{v_i}\}_{i \in \overline{1, D}} \subset \pi_k(V)$, $k \in \overline{1, n}$ są – jako izomorficzne obrazy układu bazowego – bazami w odnośnych składnikach $\pi_k(V) \subset V$, co w sumie daje nam rozkład (por.: Stw. 33)

$$V = \bigoplus_{k=1}^n \pi_k(V) = \bigoplus_{k=1}^n \bigoplus_{i=1}^D \langle \tau_k^{v_i} \rangle_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{i=1}^D \bigoplus_{k=1}^n \langle \tau_k^{v_i} \rangle_{\mathbb{K}} \equiv \bigoplus_{i=1}^D \langle T(v_i) \rangle_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^D \iota_{v_i}} \bigoplus_{i=1}^D \mathbb{K}^{\times n},$$

a wraz z nim – postulowaną równoważność

$$\rho \sim \bigoplus_{i=1}^D \rho_{\text{def}}.$$

□

Powyższe twierdzenie stanowi zwieńczenie naszej wyczerpującej analizy teorii reprezentacji algebr prostych – jej fizykalnie istotne zastosowania przyniesie Rozdz. 3.3. Jednocześnie tworzy ono naturalny kontekst, w którym możliwe jest lepsze zrozumienie sensu Stw. 157. Oto więc mamy

STWIERDZENIE 163. *Przyjmijmy zapis Tw. 2.2.2 i ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Prawdziwe są następujące zdania:*

- (i) *Reprezentacja definiująca \mathbb{R} -algebry $\mathbb{R}(n)$ jest rzeczywista i nie jest zespolona, więc tym bardziej nie jest też kwaternionowa.*
- (ii) *Reprezentacja definiująca \mathbb{R} -algebry $\mathbb{C}(n)$ jest zespolona i nie jest kwaternionowa.*
- (iii) *Reprezentacja definiująca \mathbb{R} -algebry $\mathbb{H}(n)$ jest kwaternionowa.*

■

Dowód: Punktem wyjścia do udowodnienia tezy stwierdzenia jest zrozumienie strukturalnej różnicy między odwzorowaniem \mathbb{R} -liniowym i odwzorowaniem R^{opp} -liniowym na $R^{\times n}$ dla pierścienia z dzieleniem $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, w którym pierścień \mathbb{R} jest zanurzony poprzez monomorfizm

$$j_R : \mathbb{R} \rightarrow R \cong \mathbb{R}^{\times N} : r \mapsto (r, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N-1 \text{ razy}}),$$

gdzie $N = 1$ dla $R = \mathbb{R}$, $N = 2$ dla $R = \mathbb{C}$ i $N = 4$ dla $R = \mathbb{H}$. Biorąc pod uwagę to zanurzenie, zapiszemy

$$R^{\times n} \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times N},$$

a wtedy

$$\text{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n}) \cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N).$$

Dalej zauważmy, że należące do R współczynniki rozkładu dowolnej macierzy $M = E_{i,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} M_{ij} \in \mathbb{R}(n)$ w bazie standardowej z Przykł. 29 (1) należy przy powyższym rozkładzie rozumieć jako macierze

$$M_{ij} = \sum_{a=1}^N M_{ij}^a \triangleright I_a^R \in \mathbb{R}(N)$$

o współczynnikach rzeczywistych $M_{i,j}^k$, rozpięte na generatorach $I_a^R \in \mathbb{R}(N)$ realizujących działanie (poprzez mnożenie) elementów bazy standardowej 1 (w przypadku $R = \mathbb{R}$) wzgl. $(1, 0)$, $(0, 1)$ (w przypadku $R = \mathbb{C}$) wzgl. $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ (w przypadku $R = \mathbb{H}$) na $\mathbb{R}^{\times N} \cong R$. Widzimy zatem, że

$$\mathbb{R}(n) \cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \bigoplus_{a=1}^N \langle I_a^R \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N) \cong \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n}).$$

Bez trudu znajdujemy jawną postać wyróżnionych macierzy I_a^R (z której wynika ich liniowa niezależność) w bezpośrednim rachunku,

$$1 \cdot_{\mathbb{R}} a = a \quad \Longrightarrow \quad I_1^{\mathbb{R}} = 1,$$

$$(1, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (a, b) = (a, b) \quad \Longrightarrow \quad I_1^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \tilde{\sigma}_0,$$

$$(0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} (a, b) = (-b, a) \quad \Longrightarrow \quad I_1^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \tilde{\sigma}_2,$$

$$(1, 0, 0, 0) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (a, b, c, d) \quad \Longrightarrow \quad I_1^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0,$$

$$(0, 1, 0, 0) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (-b, a, -d, c) \quad \Longrightarrow \quad I_2^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2,$$

$$(0, 0, 1, 0) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (-c, d, a, -b) \quad \Longrightarrow \quad I_3^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} i \triangleright \tilde{\sigma}_3,$$

$$(0, 0, 0, 1) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (-c, d, a, -b) \quad \Longrightarrow \quad I_4^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} i \triangleright \tilde{\sigma}_1,$$

przy czym $\tilde{\sigma}_\mu$, $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ są osławionymi **macierzami Pauliego** (w matematycznie raczej niż fizycznie umotywowanej konwencji¹) o prostych regułach (anty-)komutacji

$$[\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j] = 2\varepsilon_{ijk} \triangleright \tilde{\sigma}_k, \quad \{\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j\} = -2\delta_{i,j} \triangleright \tilde{\sigma}_0,$$

zapisanych przy użyciu **symbolu Levi-Civitty**

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} \text{sign}(\sigma), & \text{gdy } (i, j, k) = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) \text{ dla } \sigma \in \mathfrak{S}_{\{1,2,3\}} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Na tym etapie możemy już wygodnie przeformułować pytanie o postać centralizatora $C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(R^{*n})}(R(n))$ – w wybranej przez nas wygodnej prezentacji $\text{End}_{\mathbb{R}}(R^{*n})$ tworzą go macierze

$$C = C_{ij,ab} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} E_{a,b}^{(N)} \in \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N)$$

przemienne ze wszystkimi generatorami wiernego obrazu $R(n)$ w $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N)$, tj. spełniające układ warunków

$$(2.2.1) \quad \forall_{(i,j,a) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N}} : [C, E_{i,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} I_a^R] = \mathbf{0}_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_N.$$

Wykorzystując algebrę (2.1.2), możemy przepisać powyższe warunki w postaci

$$\forall_{(i,j,a) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N}} : C_{ki,bc} \triangleright E_{k,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} E_{b,c}^{(N)} \odot I_a^R = C_{jk,bc} \triangleright E_{i,k}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} I_a^R \odot E_{b,c}^{(N)}.$$

Dla $a = 1$, a wobec liniowej niezależności wektorów $E_{b,c}^{(N)}$ wnioskujemy na tej podstawie, że

$$\forall_{(i,j,b,c) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N} \times \overline{1,N}} : C_{ki,bc} \triangleright E_{k,j}^{(n)} = C_{jk,bc} \triangleright E_{i,k}^{(n)}.$$

Łatwo widać, że obecność dowolnego niezerowego wyrazu $C_{ki,bc}$ o indeksach $k \neq i$ prowadziłaby do sprzeczności, gdyż oznaczałaby, że wektor $E_{k,j}^{(n)}$ należy do powłoki \mathbb{R} -liniowej wektorów $E_{l,m}^{(n)}$, $l \neq k$, stwierdzamy więc, że niechybnie

$$\forall_{(i,j,a,b) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N} \times \overline{1,N}} : C_{ij,ab} = \delta_{i,j} c_{ab}$$

dla pewnych liczb $c_{ab} \in \mathbb{R}$, czyli – innymi słowy – że

$$C = \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} c$$

dla pewnej macierzy $c \in \mathbb{R}(N)$, która w świetle (2.2.1) spełnia układ warunków przemienności

$$(2.2.2) \quad \forall_{a \in \overline{2,N}} : [c, I_a^R] = \mathbf{0}_N.$$

To pozwala zapisać równość

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{*n})}(\mathbb{R}(n)) = (\mathbf{1}_n)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R},$$

co kończy dowód punktu (i).

W przypadku $R = \mathbb{C}$ mamy do czynienia z macierzą

$$c := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$$

o własności

$$\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

¹Macierze $\tilde{\sigma}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ stanowią bazę algebry Liego \mathfrak{su}_2 , którą w zgodzie z tradycją matematyczną wybieramy w postaci skośnie hermitowskiej.

a zatem

$$c = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

i ostatecznie

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)}(\mathbb{C}(n)) = \langle \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0, \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2 \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C},$$

co pokazuje słuszność punktu (ii). Odnotujmy na marginesie, że \mathbb{R} -liniowy endomorfizm $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2$ przestrzeni \mathbb{C}^n realizuje działanie skalara $(0, 1)$, tj. – w zapisie Stw. 54 – jest strukturą zespoloną na \mathbb{C}^n , co pozwala nadać nowy (i równoważny poprzedniemu) sens pojęciu endomorfizmu \mathbb{C} -liniowego tejże przestrzeni: oto macierze $\mathbb{C}(n)$ są przemienne z tymi i tylko tymi odwzorowaniami \mathbb{R} -liniowymi na \mathbb{C}^n , które realizują działanie ciała \mathbb{C} .

Przechodząc do ostatniego przypadku, $R = \mathbb{H}$, zapisujemy macierz c w postaci

$$c := \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}, \quad A, B, \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}(2),$$

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}, \quad \Gamma := \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad \Delta := \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix},$$

po czym nakładamy po kolei warunki z (2.2.2). Z warunku dla $a = 2$ wyprowadzamy zależność

$$\forall_{x \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}} : (x_3, x_4) = (-x_2, x_1),$$

a z warunku dla $a = 3$ – relacje

$$\Gamma = -B^T, \quad \Delta = A^T.$$

Warunek dla $a = 4$ jest teraz spełniony tożsamościowo i koniec końców otrzymujemy oczekiwaną równość

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^n)}(\mathbb{H}(n))$$

$$= \langle \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_3 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2) \rangle_{\mathbb{R}},$$

przy czym raz jeszcze przekonujemy się, że wyróżnione \mathbb{R} -liniowy endomorfizmy $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_3 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2)$, $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0)$ i $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2)$ realizują na \mathbb{H}^n naturalne działanie *prawostronne* (czyli z prawej strony – patrz: Def. 45) elementów – odpowiednio – $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ i $(0, 0, 0, 1)$ pierścienia bazowego \mathbb{H} , więc definiują nań strukturę kwaternionową w rozumieniu Stw. 54. Macierze $\mathbb{H}(n)$ (po raz wtóry) zyskują interpretację endomorfizmów utworzonej w ten sposób kwaternionowej przestrzeni wektorowej jako wyróżnione odwzorowania \mathbb{R} -liniowe na \mathbb{H}^n , które są przemienne wyłącznie z odwzorowaniami \mathbb{R} -liniowymi na \mathbb{H}^n realizującymi (prawostronne) działanie pierścienia \mathbb{H} . \square

Część 3

Algebry Clifforda i spinory

Ogólne struktury

1. Motywacja

W relatywistycznej teorii pola konfiguracje (nad płaską czasoprzestrzenią $\mathbb{R}^{3,1}$) pola skalarnego $\phi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{C}$, którego wzbudzenie elementarne ma masę (spoczynkową) $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, są opisywane równaniem Kleina–Gordona

$$(\square + m^2)\phi = 0,$$

w którym \square jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu, zwanym d’Alembertjanem i przybierającym w standardowych współrzędnych kartezjańskich (x^0, x^1, x^2, x^3) i metryce Minkowskiego

$$\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes_{\mathbb{R}} dx^\nu = dx^0 \otimes_{\mathbb{R}} dx^0 - \delta_{ij} dx^i \otimes_{\mathbb{R}} dx^j$$

znajomą postać

$$\square = \eta^{-1\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \equiv \partial_t^2 - \Delta, \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Struktura powyższego wyrażenia podpowiada jego naturalną interpretację: jest to wynik obliczenia formy kwadratowej Q o sygnaturze $(3, 1)$ na wyróżnionym elemencie modułu wolnego $\langle E \rangle_R$ rozpiętego na (dowolnym) zbiorze 4-elementowym $E := \{e^0, e^1, e^2, e^3\}$ nad pierścieniem $R = \mathbb{C}[\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3]$ operatorów różniczkowych na $C^\infty(\mathbb{R}^{1,3}; \mathbb{C})$ o współczynnikach rzeczywistych, przy czym przyjmujemy, że forma dwuliniowa β_Q na $\langle E \rangle_R$ stowarzyszona (poprzez formułę polaryzacyjną) z formą kwadratową Q spełnia warunek

$$\beta_Q(e^\mu, e^\nu) = \eta^{-1\mu\nu}.$$

Rzeczonym elementem jest tutaj

$$\mathcal{D} : E \rightarrow \mathbb{C}[\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3] : e^\mu \mapsto \partial_\mu,$$

a wyjściowe równanie możemy przepisać jako

$$(Q(\mathcal{D}) + m^2)\phi = 0.$$

Zapis ten prowadzi nas do pytania: Czy istnieje unitalna R -algebra \mathfrak{A} , w którą moduł $\langle E \rangle_R$ odwzorowywałby się R -liniowo $\gamma : \langle E \rangle_R \rightarrow \mathfrak{A}$ tak, iżby obraz elementu \mathcal{D} spełniał warunek

$$\gamma(\mathcal{D})^2 = Q(\mathcal{D}) \triangleright 1_{\mathfrak{A}},$$

tj. iżby obraz ten był swego rodzaju pierwiastkiem kwadratowym d’Alembertjanu? Sens fizyczny tak postawionego pytania ujawnia następująca obserwacja: Oto gdyby algebrę takową udało się skonstruować, to wówczas stosowny jej moduł funkcjonalny $\tilde{S} := C^\infty(\mathbb{R}^{3,1}; \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} S$, $S \in \text{Obj Vect}_{\mathbb{C}}$ (czyli przestrzeń reprezentacji, będącej unitalnym homomorfizmem R -algebr $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_R(\tilde{S})$) dostarczyłby nam nowych

rozwiązań $\psi \in \tilde{S}$ wyjściowego zagadnienia teoriopolowego, o ile tylko potrafilibyśmy dobrać zależność funkcjonalną tak, iżby spełniony był warunek

$$\rho(\gamma(\mathcal{D}))(\psi) = \varepsilon \text{im} \triangleright \psi, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Rzecz jasna, odrębnym pytaniem byłoby to o istnienie w Naturze pól o tak określonej dynamice. Okazuje się, że odpowiedzi na oba pytania są twierdzące (choć ta dotycząca konstrukcji algebry \mathfrak{A} oraz jej modułów funkcjonalnych nad czasoprzestrzenią wymaga istotnego strukturalnego doprecyzowania wyjściowego pytania) i prowadzą do konstrukcji operatora Diraca $\gamma(\mathcal{D})$ realizowanego na cięciach tzw. wiązki spinorowej nad czasoprzestrzenią (modelujących pola fermionowe), o których więcej powiemy już wkrótce, a prowadzą poprzez algebraiczną konstrukcję algebry unitalnej, w której możliwa jest linearyzacja (czyli „wyciągnięcie pierwiastka kwadratowego z”) formy kwadratowej o ustalonej sygnaturze. Naszą dyskusję zaczniemy od wnikliwego zbadania tejże konstrukcji algebraicznej.

2. Konstrukcja uniwersalna i funktor Cliff

Na wstępie natrafiamy na

DEFINICJA 106. Przyjmijmy zapis Def. 24 oraz 95 i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q)$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem \mathbb{K} , \mathfrak{A} zaś \mathbb{K} -algebrą unitalną. Odwzorowanie $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathfrak{A})$ określimy mianem **odwzorowania Clifforda**, jeśli spełnia warunek

$$\forall v \in V : \varphi(v) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v) = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}.$$

Odwzorowania Clifforda określone na ustalonej przestrzeni kwadratowej tworzą kategorię $C_{(V, Q)}$, której obiektami są pary (\mathfrak{A}, φ) złożone z $\mathfrak{A} \in \text{Obj } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ i odwzorowania Clifforda $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathfrak{A})$, morfizmami zaś – dla ustalonych obiektów $(\mathfrak{A}_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$, utworzonych przez $\mathfrak{A}_\alpha \in \text{Obj } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$ i odwzorowania Clifforda $\varphi_\alpha : V \rightarrow \mathfrak{A}_\alpha$ – odwzorowania

$$\text{Hom}_{C_{(V, Q)}}((\mathfrak{A}_1, \varphi_1), (\mathfrak{A}_2, \varphi_2)) = \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \mid \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1 \}.$$

▲

Ta pozwala nam sformułować fundamentalną

DEFINICJA 107. Przyjmijmy zapis Def. 106. **Algebra Clifforda przestrzeni kwadratowej** $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q)$ to struktura inicjalna

$$(\text{Cliff}(V, Q), j_V^C)$$

dla warunku

$$P_{(V, Q); F_1, F_2}((\mathfrak{A}, \varphi)) = „\varphi : V \rightarrow \mathfrak{A} \text{ jest odwzorowaniem Clifforda}”$$

na $\text{Obj } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}} \times \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, w którego zapisie $F_1 : \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ oraz $F_2 : \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ to funktory zapominania. Składowe tej struktury to \mathbb{K} -algebra $\text{Cliff}(V, Q)$ z jednością $e^C \equiv \mathbf{1}_{\text{Cliff}(V, Q)}$ oraz odwzorowanie Clifforda

$$j_V^C : V \rightarrow \text{Cliff}(V, Q)$$

które będziemy określać mianem **kanonicznego odwzorowania Clifforda**.

▲

UWAGA 34. W dalszej części wykładu będziemy używać pojęcia „algebra Clifforda” w odniesieniu do unitalnej \mathbb{K} -algebry $\text{Cliff}(V, Q)$, o której mówi powyższa definicja. Ponadto, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień, mnożenie i dodawanie w algebrze Clifforda będziemy oznaczać symbolami pozbawionymi indeksów: \cdot i $+$, odpowiednio.

W analogii do konstrukcji iloczynu tensorowego możemy sformułować wygodne

STWIERDZENIE 164. *Przyjmijmy zapis Def. 107. Niechaj $(\mathfrak{A}, \varphi) \in \text{Obj } C_{(V, Q)}$. Poniższe zdania logiczne są równoważne.*

- (i) $((\text{Cliff}(V, Q), j_V^C), j_V^C)$ jest algebrą Clifforda przestrzeni kwadratowej $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V, Q)$.
- (ii) $\text{Cliff}(V, Q)$ jest generowana (jako \mathbb{K} -algebra) przez elementy $\text{Im } j_V^C$, tj.

$$\text{Cliff}(V, Q) = \langle \text{Im } j_V^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

a ponadto dla każdej pary $(\mathfrak{A}, \varphi) \in \text{Obj } C_{(V, Q)}$ jest określone odwzorowanie $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{C_{(V, Q)}}((C, j_V^C), (\mathfrak{A}, \varphi))$, tj. takie, które czyni przemiennym diagram

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{A} \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \tilde{\varphi} \\ V & \xrightarrow{j_V^C} & \text{Cliff}(V, Q) \end{array} .$$

■

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Stw. 39. □

Prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 3.1.1. *Przyjmijmy zapis Def. 107. Algebra Clifforda dowolnej przestrzeni kwadratowej nad dowolnym ciałem \mathbb{K} istnieje i jest określona jednoznacznie z dokładnością do jedynego unitalnego izomorfizmu \mathbb{K} -algebr.*

■

Dowód: W algebrze tensorowej $\otimes_{\mathbb{K}} V$ przestrzeni kwadratowej (V, Q) nad ciałem \mathbb{K} definiujemy ideał obustronny

$$\mathfrak{I}_Q := \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \mid v \in V \rangle_{\otimes_{\mathbb{K}} V},$$

co pozwala nam określić – na gruncie Stw. 144 – algebrę ilorazową

$$(3.1.1) \quad \text{Cliff}(V, Q) := \otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q$$

wraz z odwzorowaniem \mathbb{K} -liniowym (opuszczamy indeks $\otimes_{\mathbb{K}}$ gwoli przejrzystości)

$$j_V^C \equiv \pi_{\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q} \circ j_1 : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) : v \longmapsto v + \mathfrak{I}_Q.$$

Zauważmy, że dla dowolnego wektora $v \in V$ spełniona jest – wobec obustronności \mathfrak{I}_Q – tożsamość

$$\begin{aligned} j_V^C(v)^2 &\equiv (v + \mathfrak{I}_Q) \otimes_{\mathbb{K}} (v + \mathfrak{I}_Q) = v \otimes_{\mathbb{K}} v + v \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{I}_Q + \mathfrak{I}_Q \otimes_{\mathbb{K}} v + \mathfrak{I}_Q \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{I}_Q \\ &= v \otimes_{\mathbb{K}} v + \mathfrak{I}_Q = Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} + (v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) + \mathfrak{I}_Q = Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} + \mathfrak{I}_Q \end{aligned}$$

$$\equiv Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q},$$

czyli $j_V^{\mathbb{C}}$ jest odwzorowaniem Clifforda, a ponieważ algebra $\otimes_{\mathbb{K}} V$ jest generowana (jako \mathbb{K} -algebra) przez $j_1(V) \subset \otimes_{\mathbb{K}} V$ i rzut kanoniczny $\pi_{\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q}$ jest epimorfizmem, przeto $j_V^{\mathbb{C}}(V)$ generuje $\text{Cliff}(V, Q)$ (jako \mathbb{K} -algebrę). Dla zakończenia dowodu musimy jeszcze stowarzyszyć unitalny homomorfizm \mathbb{K} -algebr $\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(V, Q) \rightarrow \mathfrak{A}$ z dowolnym odwzorowaniem Clifforda $\varphi : V \rightarrow \mathfrak{A}$. W tym celu stwierdzamy najpierw, że to ostatnie definiuje – w świetle Tw. 2.1.2 – (jedyne) unitalny homomorfizm \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{\varphi} : \otimes_{\mathbb{K}} V \rightarrow \mathfrak{A}$$

o własności

$$\forall_{v_i \in V, i \in \overline{1, N}, N \in \mathbb{N}} : \tilde{\varphi}(v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2 \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_N) = \varphi(v_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v_N),$$

a ten spełnia – dla dowolnego $v \in V$ – tożsamość

$$\tilde{\varphi}(v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{K}}) = \varphi(v)^2 - Q(v) \triangleright \tilde{\varphi}(\mathbf{1}_{\mathbb{K}}) = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{0}_{\mathfrak{A}},$$

skąd wniosek, że

$$\mathfrak{I}_Q \subset \ker \tilde{\varphi},$$

zatem $\tilde{\varphi}$ kanonicznie indukuje unitalny homomorfizm \mathbb{K} -algebr

$$\underline{\tilde{\varphi}} : \otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q \rightarrow \mathfrak{A} : \tau + \mathfrak{I}_Q \mapsto \tilde{\varphi}(\tau).$$

Przy tym – dla dowolnego $v \in V$ –

$$\underline{\tilde{\varphi}} \circ j_V^{\mathbb{C}}(v) = \underline{\tilde{\varphi}}(j_1(v) + \mathfrak{I}_Q) = \tilde{\varphi} \circ j_1(v) = \varphi(v),$$

możemy przeto położyć

$$\tilde{\varphi} := \underline{\tilde{\varphi}}.$$

□

Na marginesie dotychczasowej dyskusji poczynimy następującą przydatną obserwację.

LEMAT 3.1.2. *Przyjmijmy zapis użyty w dowodzie Tw. 3.1.1, zakładając przy tym, że $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, i zdefiniujmy*

$$\mathfrak{I}_{\Phi_Q} := \langle v \otimes_{\mathbb{K}} w + w \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v, w) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{K}} \mid v, w \in V \rangle_{\otimes_{\mathbb{K}} V},$$

a wówczas zachodzi tożsamość

$$\mathfrak{I}_{\Phi_Q} = \mathfrak{I}_Q.$$

■

Dowód: Z jednej strony – dla dowolnych $v, w \in V$, a wobec Def. 24 – zachodzi równość

$$v \otimes_{\mathbb{K}} w + w \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v, w) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{K}} = (v +_V w) \otimes_{\mathbb{K}} (v +_V w) - Q(v +_V w) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{K}}$$

$$- (v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{K}}) - (w \otimes_{\mathbb{K}} w - Q(w) \triangleright \mathbf{1}_{\mathbb{K}}) \in \mathfrak{I}_Q,$$

więc

$$\mathfrak{I}_{\Phi_Q} \subset \mathfrak{I}_Q,$$

z drugiej zaś trywialnie

$$v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \equiv 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (v \otimes_{\mathbb{K}} v + v \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v, v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) \in \mathfrak{J}_{\Phi_Q},$$

więc

$$\mathfrak{J}_Q \subset \mathfrak{J}_{\Phi_Q}.$$

□

Konstrukcja algebr Clifforda jest osadzona w kategorii przestrzeni wektorowych z dodatkową strukturą, jaką jest forma kwadratowa. Naturalnym więc jest oczekiwać, że homomorfizmy przestrzeni kwadratowych podnoszą się do (unitalnych) homomorfizmów algebr Clifforda (choć nie ma powodów uważać, że są to jedyne (unitalne) homomorfizmy \mathbb{K} -algebr pomiędzy algebraami Clifforda). O tym, że tak jest w istocie, mówi

TWIERDZENIE 3.1.3. *Przyporządkowanie algebr Clifforda przestrzeniom kwadratowym nad danym ciałem ma charakter funktorialny, tj. istnieje funktor kowariantny (patrz: Przykł. 15 (2))*

$$\text{Cliff} : \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}}.$$

■

Dowód: Wobec wcześniejszych naszych ustaleń pozostaje wykazać, że dla dowolnych $((V_{\alpha}, +_{\alpha}, P_{\alpha}, \bullet \mapsto 0_{\alpha}), \ell_{\alpha}), Q_{\alpha}) \in \text{Obj } \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}, \alpha \in \{1, 2, 3\}$ każda izometria $\chi : V_1 \longrightarrow V_2$ indukuje unitalny homomorfizm \mathbb{K} -algebr $\text{Cliff}(\chi)$ o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$(3.1.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi)} & \text{Cliff}(V_2, Q_2) \\ \text{Cliff} \uparrow & & \uparrow \text{Cliff} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi} & V_2 \end{array},$$

w szczególności zaś

$$(3.1.3) \quad \text{Cliff}(\text{id}_V) = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)},$$

a nadto że dla dowolnych dwóch izometrii $\chi_{\alpha} : V_{\alpha} \longrightarrow V_{\alpha+1}, \alpha \in \{1, 2\}$ zachodzi tożsamość

$$\text{Cliff}(\chi_2 \circ \chi_1) = \text{Cliff}(\chi_2) \circ \text{Cliff}(\chi_1).$$

W tym celu rozważmy odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\widehat{\chi} := J_{V_2}^C \circ \chi : V_1 \longrightarrow \text{Cliff}(V_2, Q_2).$$

Łatwo widać, że spełnia ono warunek Clifforda, a to z racji cliffordowskości odwzorowania kanonicznego $J_{V_2}^C$ oraz izometrycznego charakteru χ ,

$$\forall_{v_1 \in V_1} : \widehat{\chi}(v_1)^2 \equiv J_{V_2}^C(\chi(v))^2 = Q_2(\chi(v)) \triangleright e_2^C = Q_1(v) \triangleright e_2^C.$$

Uniwersalność algebry Clifforda przesądza zatem o istnieniu jedynego unitalnego homomorfizmu \mathbb{K} -algebr

$$\text{Cliff}(\chi) : \text{Cliff}(V_1, Q_1) \longrightarrow \text{Cliff}(V_2, Q_2)$$

o własności

$$\text{Cliff}(\chi) \circ J_{V_1}^C = \widehat{\chi} \equiv J_{V_2}^C \circ \chi,$$

ta ostatnia jednak wyraża właśnie przemienność Diag. (3.1.2). Zauważmy przy tym, że odwzorowanie $\text{Cliff}(\chi)$ jest określone jednoznacznie, oto bowiem dowolne dwa podniesienia $\text{Cliff}(\chi)_1$ i $\text{Cliff}(\chi)_2$ pokrywają się wprost na mocy założenia na zbiorze $\text{Im } \mathcal{J}_{V_1}^C$ generującym ich dziedzinę,

$$\text{Cliff}(\chi)_2 \circ \mathcal{J}_{V_1}^C = \mathcal{J}_{V_2}^C \circ \chi = \text{Cliff}(\chi)_1 \circ \mathcal{J}_{V_1}^C.$$

Dokonując konkatenacji diagramów przemiennych odpowiadających podniesieniom $\text{Cliff}(\chi_\alpha)$ izometrii χ_α , $\alpha \in \{1, 2\}$,

$$\begin{array}{ccccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi_1)} & \text{Cliff}(V_2, Q_2) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi_2)} & \text{Cliff}(V_3, Q_3) \\ \uparrow \text{Cliff} & & \uparrow \text{Cliff} & & \uparrow \text{Cliff} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi_1} & V_2 & \xrightarrow{\chi_2} & V_3 \end{array},$$

otrzymujemy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi_2) \circ \text{Cliff}(\chi_1)} & \text{Cliff}(V_3, Q_3) \\ \uparrow \text{Cliff} & & \uparrow \text{Cliff} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi_2 \circ \chi_1} & V_3 \end{array}.$$

Zważywszy jednoznaczność podniesienia, stwierdzamy zatem, że superpozycja podniesień $\text{Cliff}(\chi_2) \circ \text{Cliff}(\chi_1)$ jest jedynym podniesieniem superpozycji izometrii $\chi_2 \circ \chi_1$, co jest wnioskiem pożądanym. Ten sam argument pozwala zidentyfikować funkcjonalny obraz izometrii identycznościowej id_V zgodnie z Równ. (3.1.3). \square

Konstruktywny dowód istnienia algebry Clifforda daje nam do ręki prosty algorytm budowania jej modelu w bezpiecznym środowisku algebry tensorowej. Ażeby przekonać się o jego praktyczności i zarazem wyprowadzić modele algebr Clifforda o fundamentalnym znaczeniu w klasyfikacji wszystkich rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, z którą zmierzmy się już wkrótce, prześledzimy ów algorytm skrupulatnie w odniesieniu do kilku wybranych przestrzeni kwadratowych o szczególnie prostej postaci formy kwadratowej.

PRZYKŁAD(Y) 33. (Struktury)

- (1) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{1,0}$. Zaczniemy od wypisania algebry tensorowej przestrzeni \mathbb{R} , korzystając przy tym ze Stw. 44,

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{R}^{\otimes n} \cong \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}.$$

Wyodrębnione z powyższej sumy prostej pierwsze dwa jej składniki \mathbb{R} to – odpowiednio – ciało bazowe \mathbb{R} oraz sama przestrzeń \mathbb{R} -liniowa \mathbb{R} , pozostałe natomiast to kolejne potęgi tensorowe tej ostatniej, które po redukcji z użyciem kanonicznych izomorfizmów także sprowadzają się do \mathbb{R} . Ażeby odróżnić od siebie dwa pierwsze kanonicznie składniki, wprowadzimy indeksy:

$$(3.1.4) \quad \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^{\otimes n}.$$

Przy zejściu do algebry ilorazowej dokonujemy następujących utożsamień (na bazie):

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \\
&= \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} 1_{(1)}) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(1_{(1)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(1)} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{(1)}, \\
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 4} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
&= \kappa_{(0)}^{-1}(1 \triangleright_{(0)} 1_{(0)}) \equiv \kappa_{(0)}^{-1}(1_{(0)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(0)}]{\cong} \mathbb{R}^{(0)} \quad \text{itd.},
\end{aligned}$$

tak że koniec końców dostajemy, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)}, \quad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{(1)},$$

skąd też

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{J}_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}.$$

Pozostaje w tym momencie ustalić postać iloczynu elementów przestrzeni ilorazowej – tu wystarczy uwzględniając dwuliniowość tegoż iloczynu rachunek na reprezentantach klas (*modulo* $\mathcal{J}_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}}$) w algebrze tensorowej, w której mnożenie sprowadza się do tensorowania, a następnie narzucenie wskazanych wyżej utożsamień. Oto więc dla dowolnych par (x_1, y_1) , $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)} \cong \mathbb{R}^{\times 2}$ obliczamy

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \cdot_{\otimes_{\mathbb{R}}} (x_2, y_2) &\equiv (x_1, y_1) \otimes_{\mathbb{R}} (x_2, y_2) \\
&= x_1 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} x_2 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} + x_1 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} y_2 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \\
&\quad + y_1 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} x_2 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} + y_1 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} y_2 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \\
&= (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\sim (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \cdot \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \\
&= (x_1 \cdot x_2) \triangleright \kappa_{(0)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright \kappa_{(1)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright {}_{(1)}\kappa^{-1}(1_{\mathbb{R}^{(1)}} \cdot 1) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}
\end{aligned}$$

i na tej podstawie wyprowadzamy

$$m_{\mathbb{R}^{\times 2}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2).$$

Określmy izomorfizm przestrzeni \mathbb{R} -liniowych

$$C : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto (x + y, x - y).$$

Łatwo sprawdzamy, że obrazem powyższego „egzotycznego” mnożenia względem tego izomorfizmu,

$$m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} := C \circ m_{\mathbb{R}^{\times 2}} \circ (C^{-1} \times C^{-1}) : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

jest standardowe mnożenie w sumie prostej algebr \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= C\left(\frac{1}{2} \triangleright (x_1 + y_1, x_1 - y_1) \cdot_{\mathbb{R}^{\times 2}} \frac{1}{2} \triangleright (x_2 + y_2, x_2 - y_2)\right) \\ &\equiv \frac{1}{4} \triangleright C\left((x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) + (x_1 - y_1) \cdot (x_2 - y_2),\right. \\ &\quad \left.(x_1 + y_1) \cdot (x_2 - y_2) + (x_1 - y_1) \cdot (x_2 + y_2)\right) \\ &= \frac{1}{2} \triangleright C(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2). \end{aligned}$$

Ostatecznie więc możemy zapisać

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,0}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

domyślnie mając na uwadze standardową strukturę sumy prostej \mathbb{R} -algebr na $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

- (2) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{0,1}$. Tym razem przejście od rozkładu (3.1.4) do struktury ilorazowej wymaga utożsamień

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = -1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\ \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} = -1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \\ &= \kappa_{(1)}^{-1}(-1 \triangleright_{(1)} 1_{(1)}) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(-1_{(1)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(1)} \\ &\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{(1)}, \\ \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 4} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\ &= \kappa_{(0)}^{-1}(1 \triangleright_{(0)} 1_{(0)}) \equiv \kappa_{(0)}^{-1}(1_{(0)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\ &\xrightarrow[\kappa_{(0)}]{\cong} \mathbb{R}^{(0)} \quad \text{itd.}, \end{aligned}$$

tak samo więc jak w poprzednim przypadku dostajemy, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)}, \quad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{(1)},$$

a dalej

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{J}_{\delta_E^{(0,1)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}.$$

Postać iloczynu w otrzymanej tu algebrze odczytujemy z rachunku (którego początek jest identyczny jak poprzednio)

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}} (x_2, y_2) &= (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\ &\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sim (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
& \quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \cdot \delta_E^{(0,1)}(1) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \\
& = (x_1 \cdot x_2) \triangleright \kappa_{(0)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright \kappa_{(1)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
& \quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright {}_{(1)}\kappa^{-1}(1_{\mathbb{R}^{(1)}} \cdot 1) - (y_1 \cdot y_2) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}},
\end{aligned}$$

który prowadzi do łatwo rozpoznawalnej struktury

$$(x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{R}^{\times 2}} (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2).$$

Tym sposobem identyfikujemy

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,1}) \cong \mathbb{C}.$$

(3) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{2,0}$. W algebrze tensorowej tej przestrzeni

$$(3.1.5) \quad \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2,0} = \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} n}$$

utożsamiamy (na bazie):

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) & \sim \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
& = \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (1, 0)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
& \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) & \sim \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\
& = \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (0, 1)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
& \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) & \sim (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
& = {}_{(1)}\kappa^{-1}((0, 1) \triangleleft_{(1)} 1) \equiv {}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
& \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) & \sim \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\
& = \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (0, 1)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
& \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},
\end{aligned}$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (1, 0)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &\sim (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = (1, 2) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
&= {}_{(1)}\kappa^{-1}((1, 0) \triangleleft_{(1)} 1) \equiv {}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
&\xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.},
\end{aligned}$$

a ponieważ także

$$\begin{aligned}
(1, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 1) &= (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) + (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) + (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0), \\
&\text{więc dalej utożsamiamy} \\
(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &= (1, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 1) - (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
&\sim \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(1, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
&= (2 - 1 - 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) &\sim -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
&\sim -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \\
&= -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} = -{}_{(1)}\kappa^{-1}((0, 1) \triangleleft_{(1)} 1) \\
&\equiv -{}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &\sim -(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\
&\sim -(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \\
&= -(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} = -{}_{(1)}\kappa^{-1}((1, 0) \triangleleft_{(1)} 1) \\
&\equiv -{}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

Biorąc to wszystko pod uwagę, stwierdzamy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}, \quad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{\times 2},$$

gdzie

$$\mathbb{R}^{(1)} = \langle (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \rangle_{\mathbb{R}},$$

a zatem ostatecznie

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{J}_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}.$$

Przy tym z tożsamości

$$(a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1, 0) + a_3 \triangleright (0, 1) + a_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1))$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} (b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1, 0) + b_3 \triangleright (0, 1) + b_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\
& \sim (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) \triangleright 1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3) \triangleright (1, 0) \\
& \quad + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) \triangleright (0, 1) \\
& \quad + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1),
\end{aligned}$$

wyznaczonych w odwołaniu do powyższych relacji, wyprowadzamy izomorfizm

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0}) \cong \mathbb{R}(2),$$

który na bazie przybiera postać

$$(1, (1, 0), (0, 1), (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Istotnie, mamy

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} a_1+a_2 & a_3+a_4 \\ a_3-a_4 & a_1-a_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1+b_2 & b_3+b_4 \\ b_3-b_4 & b_1-b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1+a_2) \cdot (b_1+b_2) + (a_3+a_4) \cdot (b_3-b_4) & (a_1+a_2) \cdot (b_3+b_4) + (a_3+a_4) \cdot (b_1-b_2) \\ (a_3-a_4) \cdot (b_1+b_2) + (a_1-a_2) \cdot (b_3-b_4) & (a_3-a_4) \cdot (b_3+b_4) + (a_1-a_2) \cdot (b_1-b_2) \end{pmatrix} \\
& \equiv \begin{pmatrix} (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3) & (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \\ (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) & (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(4) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{0,2}$. W tym przypadku przejście od algebry tensorowej (3.1.5) do stosownej algebry ilorazowej realizują utożsamienia (na bazie):

$$\begin{aligned}
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^2}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^2}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -({}_{(1)}\kappa)^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[({}_{(1)}\kappa)]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -({}_{(1)}\kappa)^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[({}_{(1)}\kappa)]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.},
\end{aligned}$$

a nadto

$$\begin{aligned}
& (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim \delta_E^{(0,2)}(1, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_E^{(0,2)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_E^{(0,2)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
& \quad = (-2 + 1 + 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)
\end{aligned}$$

oraz

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim ({}_{(1)}\kappa)^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[({}_{(1)}\kappa)]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim {}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.}$$

Jak poprzednio, wyłania się rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{J}_{\delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}$$

ze strukturą iloczynu wyznaczoną z rachunku

$$\begin{aligned} & (a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1, 0) + a_3 \triangleright (0, 1) + a_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ & \cdot \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} (b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1, 0) + b_3 \triangleright (0, 1) + b_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ & \sim (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 - a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) \triangleright 1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_4 - a_4 \cdot b_3) \triangleright (1, 0) \\ & \quad + (a_1 \cdot b_3 - a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 + a_4 \cdot b_2) \triangleright (0, 1) \\ & \quad + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), \end{aligned}$$

w której rozpoznajemy bez trudu obraz iloczynu Hamiltona z Przykł. 29 (4) względem izomorfizmu

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2}) \cong \mathbb{H},$$

przybierającego na bazie postać

$$(1, (1, 0), (0, 1), (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \mapsto (1, i, j, k).$$

(5) Algebra Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^{1,1}$. Konstrukcja algebry ilorazowej prowadzi poprzez utożsamienia (na bazie):

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim \kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim \kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim {}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -{}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.},$$

a nadto

$$\begin{aligned} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) & \sim -\delta_{\mathbb{E}}^{(1,1)}(1, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} + \delta_{\mathbb{E}}^{(1,1)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} + \delta_{\mathbb{E}}^{(1,1)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ & = (-0 + 1 - 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \end{aligned}$$

oraz

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -{}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim_{(1)^{\kappa^{-1}}} (1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[(1)^{\kappa}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.}$$

I tym razem uzyskujemy rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{J}_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,1)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}$$

ze strukturą iloczynu określaną przez utożsamienie

$$\begin{aligned} & (a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1, 0) + a_3 \triangleright (0, 1) + a_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ & \cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2}} (b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1, 0) + b_3 \triangleright (0, 1) + b_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ \sim & (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 - a_3 \cdot b_3 + a_4 \cdot b_4) \triangleright 1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_4 - a_4 \cdot b_3) \triangleright (1, 0) \\ & + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) \triangleright (0, 1) \\ & + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), \end{aligned}$$

z której odczytujemy izomorfizm

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,1}) \cong \mathbb{R}(2),$$

przybierający na bazie postać

$$(1, (1, 0), (0, 1), (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

którą bez trudu potwierdzamy w rachunku analogicznym do tego z punktu (3).

- (6) Algebra Clifforda przestrzeni $(\mathbb{C}, \delta_{\mathbb{E}})$, gdzie $\delta_{\mathbb{E}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ jest euklidesową formą kwadratową. Postępując identycznie jak w punkcie (1), odkrywamy izomorfizm

$$\text{Cliff}(\mathbb{C}, \delta_{\mathbb{E}}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

✓

Jakkolwiek argumenty przedstawione w szczegółowej dyskusji poszczególnych przypadków są całkowicie przekonujące, to jednak nie stanowią formalnego dowodu istnienia wskazanych izomorfizmów. Traktując je jako strukturalną wskazówkę, bez trudu dowodzimy poniższego

STWIERDZENIE 165. *Przyjmijmy zapis Def. 107 oraz Przykł. 29 (4) i 33 (1). Istnieją kanoniczne unitalne izomorfizmy \mathbb{K} -algebr*

- (i) $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,0}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$);
- (ii) $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,1}) \cong \mathbb{C}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$);
- (iii) $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0}) \cong \mathbb{R}(2)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$);
- (iv) $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2}) \cong \mathbb{H}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$);
- (v) $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,1}) \cong \mathbb{R}(2)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$);
- (vi) $\text{Cliff}(\mathbb{C}, \delta_{\mathbb{E}}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

■

Dowód: Weryfikację słuszności tezy stwierdzenia opieramy na Stw. 164.

Ad (i) Przywołując postać zanurzenia wyjściowej przestrzeni wektorowej $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^{(1)}$ w module ilorazowym z Przykł. 33 (1), rozważamy odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe

$$J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} : r \longmapsto (r, -r),$$

którego obraz generuje przeciwdziedzinę jako \mathbb{R} -algebrę,

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \langle \text{Im } J_{\mathbb{R}} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Istotnie,

$$\forall_{r,s \in \mathbb{R}} : (r, s) = \frac{1}{2}(r+s) \triangleright J_{\mathbb{R}}(1)^2 + \frac{1}{2}(r-s) \triangleright J_{\mathbb{R}}(1).$$

Niechaj teraz $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}$ będzie odwzorowaniem Clifforda przestrzeni \mathbb{R} w dowolną unitalną \mathbb{R} -algebrę \mathfrak{A} . Jako odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe jest ono jednoznacznie określone przez wartość przyjmowaną na wektorze $1 \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(r) \equiv \varphi(r \triangleright 1) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(1),$$

przy czym element

$$a := \varphi(1) \in \mathfrak{A}$$

spełnia warunek

$$a^2 \equiv \varphi(1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}.$$

Możemy zatem zdefiniować odwzorowanie jawnie \mathbb{R} -liniowe

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A} : (r, s) \longmapsto \frac{1}{2}(r+s) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2}(r-s) \triangleright_{\mathfrak{A}} a,$$

o pożądanых własnościach

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{1}_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}) \equiv \tilde{\varphi}(1, 1) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} : \tilde{\varphi} \circ J_{\mathbb{R}}(r) = \tilde{\varphi}(r, -r) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} a \equiv r \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \varphi(r).$$

Na podstawie rachunków z Przykł. 33 (1) stwierdzamy, że jest to w istocie homomorfizm \mathbb{R} -algebr

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\left((x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} (x_2, y_2)\right) &= \frac{1}{2}(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2}(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \\ &= \frac{1}{2} \triangleright \left((x_1 + y_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_1 - y_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \right) \\ &\quad \cdot_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2} \triangleright \left((x_2 + y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_2 - y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \right) \\ &\equiv \tilde{\varphi}(x_1, y_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Ad (ii) Rozumując analogicznie jak w punkcie poprzednim, określamy odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe

$$J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : r \longmapsto (0, r)$$

o własności

$$\mathbb{C} = \langle \text{Im } J_{\mathbb{R}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

wynikającej z prostej obserwacji:

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : (x, y) = (-x) \triangleright J_{\mathbb{R}}(1) \cdot_{\mathbb{C}} J_{\mathbb{R}}(1) + y \triangleright J_{\mathbb{R}}(1).$$

Dla dowolnego $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{A}$ jak poprzednio definiujemy element

$$a := \varphi(1) \in \mathfrak{A},$$

spełniający warunek

$$a^2 \equiv \varphi(1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \delta_E^{(0,1)}(1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie \mathbb{R} -liniowe

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{A} : (x, y) \mapsto x \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y \triangleright_{\mathfrak{A}} a,$$

o pożądanym własnościach

$$\tilde{\varphi}(1, 0) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} : \tilde{\varphi} \circ J_{\mathbb{R}}(r) = \tilde{\varphi}(0, r) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} a = \varphi(r).$$

Na podstawie rachunków z Przykł. 33 (1) stwierdzamy, że jest to w istocie homomorfizm \mathbb{R} -algebr

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{C}} (x_2, y_2)) &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \\ &= (x_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} (x_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \\ &\equiv \tilde{\varphi}(x_1, y_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Ad (iii) Tym razem bierzemy pod uwagę odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe

$$J_{\mathbb{R}^{\times 2}} : \mathbb{R}^{\times 2} \rightarrow \mathbb{R}(2) : (r, s) \mapsto \begin{pmatrix} r & s \\ s & -r \end{pmatrix}$$

o własności

$$\mathbb{R}(2) = \langle \text{Im } J_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

udokumentowanej, jak następuje:

$$\begin{aligned} \forall_{a,b,c,d \in \mathbb{R}} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{a+d}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}} (1, 0)^2 + \frac{a-d}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}} (1, 0) + \frac{b+c}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}} (0, 1) \\ &\quad + \frac{b-c}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}} (1, 0) \odot_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}} (0, 1). \end{aligned}$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi : \mathbb{R}^{\times 2} \rightarrow \mathfrak{A}$ definiujemy elementy

$$(A, B) := (\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A},$$

poddane więzom

$$A^2 \equiv \varphi(1, 0)^2 = \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, \quad B^2 \equiv \varphi(0, 1)^2 = \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$B \cdot_{\mathfrak{A}} A = (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B)$$

$$= \delta_E^{(2,0)}(1, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B.$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie \mathbb{R} -liniowe

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}(2) \rightarrow \mathfrak{A}$$

$$: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a+d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{a-d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} \frac{b+c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} \frac{b-c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B,$$

o oczekiwanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\tilde{\varphi} \circ J_{\mathbb{R}}(r, s) = \tilde{\varphi} \begin{pmatrix} r & s \\ s & -r \end{pmatrix} = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r, s).$$

W mozołnym, lecz poza tym całkowicie trywialnym rachunku bezpośrednim przekonujemy się, że jest to w istocie homomorfizm \mathbb{R} -algebr.

Ad (iv) Określamy odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe

$$J_{\mathbb{R}^{\times 2}} : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{H} : (r, s) \longmapsto ri + sj$$

o własności

$$\mathbb{H} = \langle \text{Im } J_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

widocznej w stwierdzeniu

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : a + bi + cj + dk = -a \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(1, 0)^2 + J_{\mathbb{R}^{\times 2}}(b, c) + d \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(1, 0) \odot J_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0, 1).$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A}$ definiujemy elementy

$$(A, B) := (\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A},$$

poddane więzom

$$A^2 \equiv \varphi(1, 0)^2 = \delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}(1, 0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, \quad B^2 \equiv \varphi(0, 1)^2 = \delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}(0, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$B \cdot_{\mathfrak{A}} A = (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B)$$

$$= \delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}(1, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B.$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie \mathbb{R} -liniowe

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

$$: a + bi + cj + dk \longmapsto a \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} b \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} c \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} d \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B,$$

o oczekiwanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(1) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\tilde{\varphi} \circ J_{\mathbb{R}}(r, s) = \tilde{\varphi}(ri + sj) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r, s).$$

Łatwo widać, że jest to w istocie homomorfizm \mathbb{R} -algebr.

Ad (v) Punktem wyjścia jest odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe

$$J_{\mathbb{R}^{\times 2}} : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}(2) : (r, s) \longmapsto \begin{pmatrix} r & s \\ -s & -r \end{pmatrix}$$

o własności

$$\mathbb{R}(2) = \langle \text{Im } J_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

udokumentowanej, jak następuje:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{a+d}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(1, 0)^2 + \frac{a-d}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(1, 0) + \frac{b-c}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(0, 1) \\ &+ \frac{b+c}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(1, 0) \odot J_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0, 1). \end{aligned}$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A}$ definiujemy elementy

$$(A, B) := (\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A},$$

poddane więzom

$$\begin{aligned} A^2 &\equiv \varphi(1,0)^2 = \delta_E^{(1,1)}(1,0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, & B^2 &\equiv \varphi(0,1)^2 = \delta_E^{(1,1)}(0,1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, \\ B \cdot_{\mathfrak{A}} A &= (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) \\ &= \delta_E^{(1,1)}(1,1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B. \end{aligned}$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie \mathbb{R} -liniowe

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &: \mathbb{R}(2) \longrightarrow \mathfrak{A} \\ &: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \frac{a+d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{a-d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} \frac{b-c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} \frac{b+c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B, \end{aligned}$$

o oczekiwanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\tilde{\varphi} \circ \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(r, s) = \tilde{\varphi} \left(\begin{pmatrix} r & s \\ -s & -r \end{pmatrix} \right) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r, s).$$

Także i to odwzorowanie okazuje się być homomorfizmem \mathbb{R} -algebr.

Ad (vi) Dowód przebiega identycznie jak w punkcie (i).

□

3. Algebra zewnętrzna jako algebra Clifforda

Model algebry Clifforda stowarzyszonej z daną przestrzenią kwadratową (V, Q) wypracowany w dowodzie Tw. 3.1.1 pozwala nam postrzegać ową algebrę jako wysoce nietrywialne uogólnienie, parametryzowane przez nierównoważne struktury kwadratowe Q na V , pewnej kanonicznej konstrukcji ilorazowej związanej z samą przestrzenią \mathbb{K} -liniową V , którą obecnie opisujemy, a która odgrywa istotną rolę osobną w modelowaniu zjawisk fizykalnych. Rzeczona konstrukcja stanowi specjalizację konstrukcji ilorazowej (3.1.1) do przypadku zwyrodniałej przestrzeni kwadratowej $(V, Q = 0)$ i daje nam

DEFINICJA 108. Przyjmijmy zapis Def. 144 oraz 99 i dowodu Tw. 3.1.1. **Algebra zewnętrzna przestrzeni \mathbb{K} -liniowej V** to przestrzeń ilorazowa

$$\bigwedge^{\bullet} V := \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_0, \quad \mathfrak{I}_0 = \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V},$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} \wedge \equiv m_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_0} &: \bigwedge^{\bullet} V \times \bigwedge^{\bullet} V \longrightarrow \bigwedge^{\bullet} V \\ &: (\alpha + \mathfrak{I}_0, \beta + \mathfrak{I}_0) \longmapsto \alpha \otimes_{\mathbb{K}} \beta + \mathfrak{I}_0 \equiv (\alpha + \mathfrak{I}_0) \wedge (\beta + \mathfrak{I}_0), \end{aligned}$$

zwanym **iloczynem zewnętrznym**. Zapiszemy więc

$$\text{Cliff}(V, 0) \equiv \bigwedge^{\bullet} V.$$

▲

Zachodzi oczywiście

STWIERDZENIE 166. *Przyjmijmy zapis Def. 18, 100 oraz 108 i Przykł. 29 (2). Niechaj $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ będzie dowolną bazą przestrzeni \mathbb{K} -liniowej V . Algebra zewnętrzna tej ostatniej jest algebrą z \mathbb{Z} -gradacją*

$$\bigwedge^\bullet V = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigwedge^n V$$

o składowych jednorodnych

$$\bigwedge^n V := \bigoplus_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N} \langle v_{k_1} \wedge v_{k_2} \wedge \dots \wedge v_{k_n} \rangle_{\mathbb{K}}$$

rozpiętych na klasach tensorów

$$v_{k_1} \wedge v_{k_2} \wedge \dots \wedge v_{k_n} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{1, n}} \operatorname{sgn}(\sigma) v_{k_{\sigma(1)}} \otimes_{\mathbb{K}} v_{k_{\sigma(2)}} \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} v_{k_{\sigma(n)}} + \mathfrak{J}_0.$$

W szczególności więc

$$\forall_{n > N} : \bigwedge^n V = \mathfrak{J}_0,$$

czyli w istocie

$$\bigwedge^\bullet V = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n=1}^N \bigwedge^n V,$$

przy czym

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^n V = \binom{N}{n}.$$

■

Dowód: Prosty wniosek z procedury rzutowania na moduł ilorazowy. □

W następnej kolejności zajmiemy się szczegółowym opisem struktury algebry endomorfizmów algebry zewnętrznej, z którego przyjdzie nam skorzystać niebawem.

STWIERDZENIE 167. *Przyjmijmy zapis Def. 16 i 29 oraz Stw. 166. Algebra endomorfizmów $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V)$ jest generowana przez endomorfizmy*

$$\mu_v : \bigwedge^\bullet V \curvearrowright : \omega \mapsto v \wedge \omega, \quad v \in V$$

oraz (jedyne) \mathbb{K} -liniowe rozszerzenia

$$\begin{aligned} \iota_\varphi &\equiv \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \iota_\varphi^{(n)} : \bigwedge^\bullet V \curvearrowright, & \varphi &\in V^*, \\ \iota_\varphi^{(0)} &\equiv 0 : \bigwedge^0 V \longrightarrow \{0_{\mathbb{K}}\}, & \iota_\varphi^{(n)} &: \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^{n-1} V \end{aligned}$$

przyporządkowań określonych na elementach prostych wzorami

$$\iota_\varphi(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \varphi(v_k) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n \widehat{k}.$$

■

Dowód: Wobec skończoności wymiaru V istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni \mathbb{K} -liniowych

$$(\bigwedge^\bullet V)^* \cong \bigwedge^\bullet V^*,$$

stanowiący stosownie rozszerzoną zantysymetryzowaną wersję udowodnionego wcześniej izomorfizmu (1.2.31). W świetle Równ. (1.2.27) istnieje zatem kanoniczny izomorfizm

$$T_V : \bigwedge^\bullet V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V \xrightarrow{\cong} (\bigwedge^\bullet V)^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V),$$

który przybiera konkretną postać (na tensorach prostych, tj. dla dowolnych $\omega \in \bigwedge^\bullet V^*$ oraz $v \in \bigwedge^\bullet V$)

$$T_V(\omega \otimes_{\mathbb{K}} v) : \bigwedge^\bullet V \circlearrowleft : w \mapsto \langle \omega, w \rangle \triangleright v,$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \bigwedge^\bullet V^* \times \bigwedge^\bullet V \rightarrow \mathbb{K}$ jest dwoistością stanowiącą dwuliniowe rozszerzenie przyporządkowania określonego na elementach jednorodnych w postaci

$$\langle k, l \rangle := k \cdot_{\mathbb{K}} l, \quad k, l \in \mathbb{K},$$

$$\langle k, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle := 0_{\mathbb{K}},$$

$$\langle \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m, l \rangle := 0_{\mathbb{K}},$$

$$\langle \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle := \delta_{m,n}^{\mathbb{K}} \det_{(n)}(\varphi_i(v_j))_{i,j \in \overline{1,n}},$$

zapisanej dla dowolnych $k, l \in \mathbb{K}$, $v_j \in V$, $j \in \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oraz $\varphi_i \in V^*$, $i \in \overline{1,m}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zauważmy, że izomorfizmy te ograniczają się do składowych jednorodnych według schematu

$$T_V \upharpoonright_{\bigwedge^p V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^p V} : \bigwedge^p V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^p V \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^p V, \bigwedge^p V),$$

przy czym wyrażają się formułami

$$T_V(\omega \otimes_{\mathbb{K}} v) \equiv \tilde{\mu}_v \circ \tilde{\iota}_\omega, \quad (\omega, v) \in \bigwedge^p V^* \times \bigwedge^p V,$$

w których $\tilde{\iota}$ jest (jedynym) homomorficznym rozszerzeniem do $\text{Cliff}(V^*, 0) \equiv \bigwedge^\bullet V^*$ odwzorowania Clifforda

$$\iota : V^* \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V) : \varphi \mapsto \iota_\varphi$$

opisanego w treści dowodzonego twierdzenia, $\tilde{\mu}$ zaś jest (jedynym) homomorficznym rozszerzeniem do $\text{Cliff}(V, 0) \equiv \bigwedge^\bullet V$ odwzorowania Clifforda

$$\mu : V \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V) : v \mapsto \mu_v$$

zdefiniowanego tamże. O cliffordowskości obu odwzorowań przekonujemy się w bezpośrednim rachunku – oto więc

$$\begin{aligned} \iota_\varphi^2(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \iota_\varphi \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \varphi(v_k) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l < k}}^n (-1)^{l-1} + \sum_{\substack{l=1 \\ l > k}}^n (-1)^{l-2} \right) \varphi(v_k) \cdot_{\mathbb{K}} \varphi(v_l) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \\ &\equiv \left(\sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l < k}}^n - \sum_{\substack{l=1 \\ l > k}}^n \sum_{k=1}^n \right) (-1)^{k+l} \varphi(v_k) \cdot_{\mathbb{K}} \varphi(v_l) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = \mathbf{0}_{\bigwedge^\bullet V}, \end{aligned}$$

a nadto

$$\mu_v^2(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) = v \wedge v \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \equiv \mathbf{0}_{\bigwedge^\bullet V}.$$

Przy tym w konsekwencji homomorficzności obu rozszerzeń spełnione są – dla dowolnych φ_i i v_j jak wyżej – tożsamości

$$\begin{aligned}\tilde{\iota}_{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_m} &= \iota_{\varphi_1} \circ \iota_{\varphi_2} \circ \dots \circ \iota_{\varphi_m}, \\ \tilde{\mu}_{v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n} &= \mu_{v_1} \circ \mu_{v_2} \circ \dots \circ \mu_{v_n}.\end{aligned}$$

Skoro jednak – na mocy Cor. 4 oraz Równ. (1.2.26), a w konwencji $\wedge^0 V \equiv \mathbb{K}$ – istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni \mathbb{K} -liniowych

$$\begin{aligned}\text{End}_{\mathbb{K}}(\wedge^{\bullet} V) &\equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\wedge^{\bullet} V, \wedge^{\bullet} V) \equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{n=0}^N \wedge^n V, \wedge^{\bullet} V\right) \\ &\cong \bigoplus_{n=0}^N \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\wedge^n V, \wedge^{\bullet} V),\end{aligned}$$

a każdy ze składników prostych ostatniej sumy jest – jak pokazaliśmy wcześniej – generowany (jako \mathbb{K} -algebra) przez endomorfizmy wymienione w tezie dowodzonego stwierdzenia, to także każdy element \mathbb{K} -algebry $\text{End}_{\mathbb{K}}(\wedge^{\bullet} V)$ jest skończoną kombinacją \mathbb{K} -liniową skończonych kombinacji \mathbb{K} -liniowych skończonych iloczynów takowych generatorów, co dowodzi słuszności tezy. \square

4. Podstawowe własności strukturalne

Oswoiwszy się nieco z konstrukcją modelu algebry Clifforda, możemy obecnie przystąpić do omówienia elementarnych jej własności będących konsekwencją definicji. Zaczniemy od

STWIERDZENIE 168. *Przyjmijmy zapis Def. 107. Kanoniczne odwzorowanie Clifforda*

$$j_V^{\mathbb{C}} : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q)$$

jest monomorfizmem przestrzeni \mathbb{K} -liniowych. ■

Dowód: Zaczniemy od prostej obserwacji ogólnej: jeśli $j_V^{\mathbb{C}}$ ma pożądaną własność w konkretnym modelu $\text{Cliff}(V, Q)$ (o kanonicznym odwzorowaniu Clifforda $j_V^{\mathbb{C}}$) algebry Clifforda przestrzeni kwadratowej (V, Q) , to ma ją w dowolnym innym modelu $\widetilde{\text{Cliff}}(V, Q)$ (o kanonicznym odwzorowaniu Clifforda $\tilde{j}_V^{\mathbb{C}}$), a to wobec przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{\text{Cliff}}(V, Q) & \\ & \nearrow \tilde{j}_V^{\mathbb{C}} & \uparrow \iota \\ V & \xrightarrow{j_V^{\mathbb{C}}} & \text{Cliff}(V, Q) \end{array},$$

na którym ι jest jedynym izomorfizmem modeli opisanym w Def. 107. Istotnie, diagram ten pozwala stwierdzić, że $\tilde{j}_V^{\mathbb{C}}$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest nim $j_V^{\mathbb{C}}$. Ta konstatacja pozwoli nam sprowadzić nasze rozważania do prostego modelu wyprowadzonego w konstruktywnym dowodzie Tw. 3.1.1.

Zacznijmy od rozważenia sytuacji zwyrodniałej, w której $\text{rk } Q = 0$, czyli jest $Q = 0$. W tym przypadku mamy model omówiony w Def. 108, tj.

$$\text{Cliff}(V, 0) = \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V}$$

wraz z odwzorowaniem kanonicznym

$$j_V^{\mathbb{C}} : V \xrightarrow{j_V^{\otimes_{\mathbb{K}} 1}} \bigotimes_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{\pi_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V/\mathcal{I}_0}} \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V}.$$

Niech teraz – dla pewnych $v_1, v_2 \in V$ –

$$j_V^{\mathbb{C}}(v_2) = j_V^{\mathbb{C}}(v_1),$$

a wówczas

$$v_2 - v_1 \in \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V},$$

to jednak oznacza, że tensor stopnia $\deg(v_2 - v_1) = 1$ jest kombinacją \mathbb{K} -liniową tensorów stopnia co najmniej 2, co wobec jednoznaczności rozkładu na składowe jednorodne w $\bigotimes_{\mathbb{K}} V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}} n}$ oznacza¹, że

$$v_2 - v_1 = 0_V,$$

skąd wniosek:

$$(3.1.6) \quad \ker j_V^{\mathbb{C}} = \{0_V\}.$$

Niechaj teraz $\text{rk } Q = \dim_{\mathbb{K}} V$, a wtedy $v \in \ker j_V^{\mathbb{C}}$ implikuje

$$Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} = j_V^{\mathbb{C}}(v)^2 = 0,$$

czyli $v = 0_V$, zatem i tym razem zachodzi równość (3.1.6).

Pozostaje rozpatrzyć przypadek pośredni: $0 < \text{rk } Q < \dim_{\mathbb{K}} V$, w którym Tw. 1.2.3 pozwala dokonać rozkładu Q -ortogonalnego

$$V = V_0 \oplus_Q V_{\neq 0}$$

na podprzestrzenie: zerową V_0 o własności $Q \upharpoonright_{V_0} = 0$ oraz niezwyrodniałą $V_{\neq 0}$, przy czym na mocy Stw. 32 z rozkładem tym jest stowarzyszona zupełna para komplementarnych rzutów (Q -ortogonalnych) $\pi_0, \pi_{\neq 0}$ o własności $V_{(\neq)0} = \text{Im } \pi_{(\neq)0}$. W świetle wcześniejszych naszych rozważań odwzorowanie kanoniczne

$$j_{V_{\neq 0}}^{\mathbb{C}} : V_{\neq 0} \longrightarrow \text{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0}), \quad Q_{\neq 0} \equiv Q \upharpoonright_{V_{\neq 0}}$$

jest monomorfizmem przestrzeni \mathbb{K} -liniowych. Możemy go użyć do skonstruowania odwzorowania \mathbb{K} -liniowego

$$\varphi_{\neq 0} := j_{V_{\neq 0}}^{\mathbb{C}} \circ \pi_{\neq 0} : V \longrightarrow \text{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0}) \equiv C_{\neq 0},$$

które spełnia warunek Clifforda (zapisany poniżej dla dowolnego $v = v_0 \oplus v_{\neq 0} \in V_0 \oplus_Q V_{\neq 0} \equiv V$ oraz $e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} \equiv 1_{\text{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0})}$)

$$\begin{aligned} \varphi_{\neq 0}(v)^2 &= j_{V_{\neq 0}}^{\mathbb{C}}(v_{\neq 0})^2 = Q(v_{\neq 0}) \triangleright e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} \equiv \Phi_Q(v_{\neq 0}, v_{\neq 0}) \triangleright e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} = \Phi_Q(v - v_0, v - v_0) \triangleright e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} \\ &= \Phi_Q(v, v) \triangleright e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} \equiv Q(v) \triangleright e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

i z tej racji określa (jedyne) unitalny homomorfizm \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{\varphi}_{\neq 0} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow C_{\neq 0}$$

¹W przypadku $Q \neq 0$ powyższe proste rozumowanie przestaje być w równie oczywisty sposób słuszne, gdyż obecność członu $Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}$ prowadzi do mieszania stopni.

o własności

$$\tilde{\varphi}_{\neq 0} \circ J_{V_{\neq 0}}^C = \varphi_{\neq 0}.$$

Ten ostatni wykorzystujemy w definicji odwzorowania \mathbb{K} -liniowego

$$\varphi : V \longrightarrow \bigwedge^\bullet V_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\neq 0} : v \longmapsto \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v).$$

Bez trudu sprawdzamy, że także ono spełnia warunek Clifforda (uzwględniając w rachunku stopnie jednorodnych czynników tensorowych),

$$\begin{aligned} \varphi(v)^2 &\equiv \left(\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \right)^2 \\ &= \left(\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C \right) \cdot \left(\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + \left(\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C \right) \cdot \left(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \right) \right) \\ &\quad + \left(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \right) \cdot \left(\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C \right) + \left(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \right) \cdot \left(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \right) \\ &= (-1)^{0 \cdot 1} \pi_0(v) \wedge \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C \cdot_{C_{\neq 0}} e_{\neq 0}^C + (-1)^{0 \cdot 0} \pi_0(v) \wedge 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C \cdot_{C_{\neq 0}} \varphi_{\neq 0}(v) \\ &\quad + (-1)^{1 \cdot 1} 1_{\mathbb{K}} \wedge \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \cdot_{C_{\neq 0}} e_{\neq 0}^C + (-1)^{1 \cdot 0} 1_{\mathbb{K}} \wedge 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \cdot_{C_{\neq 0}} \varphi_{\neq 0}(v) \\ &= 0 \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) - \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_{\neq 0}^C \\ &= Q(v) \triangleright \left(1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C \right) \equiv Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\bigwedge^\bullet V_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\neq 0}}. \end{aligned}$$

Istnieje zatem unitalny homomorfizm \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \bigwedge^\bullet V_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\neq 0}$$

o własności

$$(3.1.7) \quad \tilde{\varphi} \circ J_V^C = \varphi,$$

a ponieważ φ jest injektywny, co dokumentuje poniższe wnioskowanie:

$$\begin{aligned} v \in \ker \varphi &\iff \left\{ \begin{array}{l} \pi_0(v) = 0_V \\ \varphi_{\neq 0}(v) = 0_{C_{\neq 0}} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} v = v_{\neq 0} \\ 0_{C_{\neq 0}} = \varphi_{\neq 0}(v) \equiv \varphi_{\neq 0}(v_{\neq 0}) = J_{V_{\neq 0}}^C(v_{\neq 0}) \end{array} \right\} \\ &\iff v = v_{\neq 0} = 0_V, \end{aligned}$$

przeto także J_V^C jest injekcją, oto bowiem zachodzi – na mocy Równ. (3.1.7) –

$$\ker J_V^C \subset \ker \varphi = \{0_V\}.$$

□

UWAGA 35. Injektywność kanonicznego odwzorowania Clifforda pozwala dokonać utożsamienia

$$J_V^C(V) \cong V,$$

co też będziemy czynić w dalszej części wykładu, pisząc – konsekwentnie – relacje definiujące algebrę Clifforda w powszechnie spotykanej postaci

$$\forall_{v, w \in V} : \{v, w\} = 2\Phi_Q(v, w) \triangleright e^C.$$

W dalszej części dyskusji algebr Clifforda, w szczególności zaś w ich klasyfikacji oraz w konstrukcji ich reprezentacji centralną rolę odegrają pewne ich (anty-)automorfizmy, których omówienie wymaga od nas powrotu do analizy algebry tensorowej stanowiącej podstawę przedstawionego wcześniej modelu algebry Clifforda. Wprowadzamy zatem

DEFINICJA 109. Przyjmijmy zapis Def. 99 oraz 100 i niechaj

$$\otimes_{\mathbb{K}} V = V_{\otimes}^0 \oplus V_{\otimes}^1, \quad V_{\otimes}^l := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}} 2k+l}, \quad l \in \{0, 1\}$$

będzie naturalną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradacją \mathbb{K} -algebry $\otimes_{\mathbb{K}} V$, indukującą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradację algebry Clifforda

$$(3.1.8) \quad \text{Cliff}(V, Q) = \text{Cliff}(V, Q)^0 \oplus \text{Cliff}(V, Q)^1.$$

Ponadto niech – dla ustalonego (dowolnie) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ –

$$\tilde{\tau}_n : V^{\otimes_{\mathbb{K}} n} \hookrightarrow$$

będzie (jedynym) odwzorowaniem \mathbb{K} -liniowym indukowanym przez odwzorowanie (wielo-)śródo- \mathbb{K} -liniowe (w rozumieniu Def. 42)

$$\tau_n : V^{\times n} \longrightarrow V^{\otimes_{\mathbb{K}} n} : (v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto v_n \otimes_{\mathbb{K}} v_{n-1} \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_1.$$

Inwolucja główna (albo inaczej **kanoniczna**) algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$ to automorfizm $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowany

$$J_V := \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)^0} \oplus (-\text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)^1}),$$

o (oczywistej) własności

$$J_V^2 = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)}.$$

Antyinwolucja główna (albo inaczej **kanoniczna**) algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$ to antymultiplikatywny automorfizm przestrzeni \mathbb{K} -liniowej $\text{Cliff}(V, Q)$

$$T_V : \text{Cliff}(V, Q) \hookrightarrow$$

indukowany przez także odwzorowanie

$$\tilde{\tau}_V := \text{id}_{\mathbb{K}} \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \tilde{\tau}_k : \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}} n} \cong \bigotimes_{\mathbb{K}} V \hookrightarrow,$$

o (oczywistej) własności

$$\tilde{\tau}_V^2 = \text{id}_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V},$$

który możemy traktować jako (multiplikatywny) izomorfizm \mathbb{K} -algebr $\bigotimes_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{\cong} (\bigotimes_{\mathbb{K}} V)^{\text{opp}}$.

▲

UWAGA 36. Podkreślmy, że składowe powyższej definicji mają sens, oto bowiem

- ideał \mathcal{J}_Q , będąc generowanym przez elementy $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -jednorodnie podalgebry V_{\otimes}^0 (tj. stopnia $[0]_2$), jest ideałem $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowanym,

$$\mathcal{J}_Q = (\mathcal{J}_Q \cap V_{\otimes}^0) \oplus (\mathcal{J}_Q \cap V_{\otimes}^1) \cong \mathcal{J}_Q^0 \oplus \mathcal{J}_Q^1,$$

skąd też rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathcal{J}_Q = (V_{\otimes}^0 \oplus V_{\otimes}^1) / (\mathcal{J}_Q^0 \oplus \mathcal{J}_Q^1) = V_{\otimes}^0 / \mathcal{J}_Q^0 \oplus V_{\otimes}^1 / \mathcal{J}_Q^1$$

który jest właśnie indukowaną $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradacją $\text{Cliff}(V, Q)$ wykorzystaną w pierwszej części definicji;

- istnienie homomorfizmów $\tilde{\tau}_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, przyjmujących na tensorach prostych postać

$$\tilde{\tau}_n(v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2 \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_n) = v_n \otimes_{\mathbb{K}} v_{n-1} \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_1,$$

jest zagwarantowane przez uniwersalność (wielokrotnego) iloczynu tensorowego, bez trudu sprawdzamy też tożsamość

$$\begin{aligned} \forall_{\tau_1, \tau_2 \in \otimes_{\mathbb{K}} V} : \tilde{\tau}_V(\tau_1 \cdot_{\otimes_{\mathbb{K}} V} \tau_2) &\equiv \tilde{\tau}_V(\tau_1 \otimes_{\mathbb{K}} \tau_2) = \tilde{\tau}_V(\tau_2) \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\tau}_V(\tau_1) \\ &\equiv \tilde{\tau}_V(\tau_2) \cdot_{\otimes_{\mathbb{K}} V} \tilde{\tau}_V(\tau_1), \end{aligned}$$

która dowodzi antymultiplikatywnego charakteru jawnie \mathbb{K} -liniowego i bi-jektywnego odwzorowania $\tilde{\tau}_V$, a ponieważ ponadto

$$\tilde{\tau}_V(\mathfrak{I}_Q) = \mathfrak{I}_Q,$$

co jest następstwem zachowywania generatorów ideału przez $\tilde{\tau}_V$, przeto ten ostatni kanonicznie indukuje antyautomorfizm algebry ilorazowej $\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q$ wedle schematu

$$[\tilde{\tau}_V] : \otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q \circlearrowleft : \tau + \mathfrak{I}_Q \mapsto \tilde{\tau}_V(\tau) + \mathfrak{I}_Q.$$

Tytułem oswojenia nowowprowadzonych obiektów wysłowimy najpierw oczywiste

STWIERDZENIE 169. *Przyjmijmy zapis Def. 109. Podprzestrzenie \mathbb{K} -liniowe $\text{Cliff}(V, Q)^k \subset \text{Cliff}(V, Q)$, $k \in \{0, 1\}$ możemy przedstawić w postaci*

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 = \mathbb{K} \oplus \langle v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k} \mid v_i \in J_V^{\mathbb{C}}(V), i \in \overline{1, 2k} \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \rangle_{\mathbb{K}},$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^1 = \langle v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k+1} \mid v_j \in J_V^{\mathbb{C}}(V), j \in \overline{1, 2k+1} \ k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Spełnione są przy tym relacje

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^0 \subset \text{Cliff}(V, Q)^0,$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^1 \subset \text{Cliff}(V, Q)^1,$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^1 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^0 \subset \text{Cliff}(V, Q)^1,$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^1 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^1 \subset \text{Cliff}(V, Q)^0,$$

w szczególności więc $\text{Cliff}(V, Q)^0$ jest podalgebrą. Inwolucja główna jest funktorialnym obrazem izometrii $P_V : V \circlearrowleft : v \mapsto -v$,

$$J_V = \text{Cliff}(P_V),$$

i spełnia relacje

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 = \ker P^+, \quad \text{Cliff}(V, Q)^1 = \ker P^-,$$

$$P^{\pm} := 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (\text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)} \mp J_V).$$

■

Dowód: Trywialny.

□

Przyjdzie nam z czasem odwołać się także do

STWIERDZENIE 170. *Przyjmijmy zapis Def. 109. Dowolna podprzestrzeń \mathbb{K} -liniowa $U \subset \text{Cliff}(V, Q)$ zachowywana przez J_V jest podprzestrzenią $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowaną w rozumieniu Def. 100.* ■

Dowód: Oznaczmy

$$U^k := U \cap \text{Cliff}(V, Q)^k, \quad k \in \{0, 1\}.$$

Dowolny element $u \in U$ możemy rozłożyć, jak następuje:

$$u \equiv P^+(u) + P^-(u),$$

przy czym na mocy założenia $J_V(U) \subset U$ jest $P^\pm(u) \in U$, ale też $P^+(u) \in \text{Cliff}(V, Q)^0$ i $P^-(u) \in \text{Cliff}(V, Q)^1$, zatem wypisany rozkład jest w istocie rozkładem prostym na składowe u z U^k . ■

Pierwszym istotnym wynikiem strukturalnym, określającym względną relację między funktorem Cliff i strukturą inicjalną, jaką jest suma prosta przestrzeni kwadratowych, jest kluczowe dla przyszłych naszych rozważań klasyfikacyjnych

TWIERDZENIE 3.1.4. *Przyjmijmy zapis Def. 36, 102 oraz 107 i niechaj $((V_\alpha, +_\alpha, P_\alpha, \bullet \mapsto 0_\alpha), \ell_\alpha), Q_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem \mathbb{K} . Istnieje kanoniczny izomorfizm \mathbb{K} -algebr unitalnych z $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradacją*

$$\text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2) \cong \text{Cliff}(V_1, Q_2) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(V_2, Q_2).$$

Dowód: Wprowadźmy oznaczenia

$$C_\alpha := \text{Cliff}(V_\alpha, Q_\alpha), \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad C_\oplus := \text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2).$$

Zauważmy, że wobec funktorialności Cliff izometryczne monomorfizmy

$$J_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow V_1 \oplus V_2, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

indukują unitalne homomorfizmy \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{J}_\alpha \equiv \text{Cliff}(J_{V_\alpha}) : C_\alpha \longrightarrow C_\oplus,$$

co pozwala nam zdefiniować odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$(3.1.9) \quad \chi := m_{C_\oplus} \circ (\tilde{J}_1 \otimes \tilde{J}_2) : C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2 \longrightarrow C_\oplus.$$

Sprawdzamy, że χ jest unitalnym homomorfizmem \mathbb{K} -algebr. W tym celu ustalmy (dowolnie) liczby $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \overline{\mathbb{N}}$ i rozważmy elementy jednorodnie $\tau_\alpha^{(1)} := v_1^\alpha \cdot v_2^\alpha \cdots \cdot v_{p_\alpha}^\alpha \in C_1$, $v_k^\alpha \in J_{V_1}^C(V_1)$, $k \in \overline{1, p_\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ oraz $\tau_\beta^{(2)} := w_1^\beta \cdot w_2^\beta \cdots \cdot w_{q_\beta}^\beta \in C_2$, $w_l^\beta \in J_{V_2}^C(V_2)$, $l \in \overline{1, q_\beta}$, $\beta \in \{1, 2\}$, z których tworzymy tensory proste

$$\tau_1^{12} := \tau_1^{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} \tau_1^{(2)}, \quad \tau_2^{12} := \tau_2^{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} \tau_2^{(2)}.$$

Możemy następnie zapisać równość (stosując ten sam symbol \cdot dla oznaczenia mnożenia w każdej z trzech występujących tu algebr Clifforda oraz utożsamiając $J_{V_1 \oplus V_2}^C(V_1 \oplus V_2)$ z $V_1 \oplus V_2$)

$$\begin{aligned} \chi(\tau_1^{12} \cdot \tau_2^{12}) &= (-1)^{q_1 \cdot p_2} \chi(\tau_1^{(1)} \cdot \tau_2^{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} \tau_1^{(2)} \cdot \tau_2^{(2)}) \\ &= (-1)^{q_1 \cdot p_2} \tilde{J}_1(\tau_1^{(1)} \cdot \tau_2^{(1)}) \cdot \tilde{J}_2(\tau_1^{(2)} \cdot \tau_2^{(2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{q_1 \cdot p_2} \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_1^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_2^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_1^{(2)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_2^{(2)}) \\
&= (-1)^{q_1 \cdot p_2} \mathcal{J}_{V_1}(v_1^1) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_2^1) \cdots \mathcal{J}_{V_1}(v_{p_1}^1) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_1^2) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_2^2) \cdots \mathcal{J}_{V_1}(v_{p_2}^2) \\
&\quad \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_1^1) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_2^1) \cdots \mathcal{J}_{V_2}(w_{q_1}^1) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_1^2) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_2^2) \cdots \mathcal{J}_{V_2}(w_{q_2}^2),
\end{aligned}$$

która wobec tożsamości

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{V_1}(v_k^2) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_l^1) + \mathcal{J}_{V_2}(w_l^1) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_k^2) = (v_k^2 \oplus 0_2) \cdot (0_1 \oplus w_l^1) + (0_1 \oplus w_l^1) \cdot (v_k^2 \oplus 0_2) \\
&= 2\Phi_{Q_1 \oplus Q_2}(v_k^2 \oplus 0_2, 0_1 \oplus w_l^1) \triangleright \mathbf{1}_{C_\oplus} \equiv 2(\Phi_{Q_1}(v_k^2, 0_1) + \Phi_{Q_2}(0_2, w_l^1)) \triangleright \mathbf{1}_{C_\oplus} = 0_{C_\oplus}
\end{aligned}$$

przepisuje się w oczekiwanej postaci

$$\begin{aligned}
\chi(\tau_1^{12}, \tau_2^{12}) &= (-1)^{2q_1 \cdot p_2} \mathcal{J}_{V_1}(v_1^1) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_2^1) \cdots \mathcal{J}_{V_1}(v_{p_1}^1) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_1^1) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_2^1) \cdots \mathcal{J}_{V_2}(w_{q_1}^1) \\
&\quad \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_1^2) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_2^2) \cdots \mathcal{J}_{V_1}(v_{p_2}^2) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_1^2) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_2^2) \cdots \mathcal{J}_{V_2}(w_{q_2}^2) \\
&= \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_1^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_1^{(2)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_2^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_2^{(2)}) \equiv \chi(\tau_1^{12}) \cdot \chi(\tau_2^{12}).
\end{aligned}$$

W świetle (wielo-)K-liniowości wszystkich napotkanych powyżej odwzorowań i operacji nasze rozumowanie uogólnia się na przypadek (super)iloczynu dowolnych elementów skończonego iloczynu tensorowego algebr C_1 i C_2 . Mamy też równość

$$\chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) = m_{C_\oplus}(\mathbf{1}_{C_\oplus} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_\oplus}) = \mathbf{1}_{C_\oplus},$$

pozostaje zatem pokazać, że χ jest izomorfizmem, co uczynimy konstruując homomorfizm doń odwrotny. Rozważmy odwzorowanie K-liniowe

$$\eta : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2 : (v, w) \longmapsto v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} w.$$

Spełnia ono warunek Clifforda,

$$\begin{aligned}
\eta(v, w)^2 &= (v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} w) \cdot (v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} w) = (-1)^{0 \cdot 1} v^2 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}^2 \\
&\quad + (-1)^{0 \cdot 0} v \cdot \mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} \cdot w + (-1)^{1 \cdot 1} \mathbf{1}_{C_2} \cdot v \otimes_{\mathbb{K}} w \cdot \mathbf{1}_{C_2} + (-1)^{1 \cdot 0} \mathbf{1}_{C_2}^2 \otimes_{\mathbb{K}} w^2 \\
&= Q_1(v) \triangleright \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + v \otimes_{\mathbb{K}} w - v \otimes_{\mathbb{K}} w + \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} Q_2(w) \triangleright \mathbf{1}_{C_2} \\
&= (Q_1(v) + Q_2(w)) \triangleright (\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) \equiv (Q_1 \oplus Q_2)(v, w) \triangleright \mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2},
\end{aligned}$$

a zatem rozszerza się do unitalnego homomorfizmu K-algebr

$$\tilde{\eta} : C_\oplus \longrightarrow C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2,$$

przy czym – dla dowolnego $v \in V_1$ –

$$\tilde{\eta} \circ \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) = \tilde{\eta}(\tilde{\mathcal{J}}_1(v) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\mathbf{1}_{C_2})) = \tilde{\eta}(\mathcal{J}_1(v) \cdot \mathbf{1}_{C_\oplus}) = \tilde{\eta}(v, 0_2) = v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}$$

i – dla dowolnego $w \in V_2$ –

$$\tilde{\eta} \circ \chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w) = \tilde{\eta}(\tilde{\mathcal{J}}_1(\mathbf{1}_{C_1}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(w)) = \tilde{\eta}(\mathbf{1}_{C_\oplus} \cdot \mathcal{J}_2(w)) = \tilde{\eta}(0_1, w) = \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w,$$

a nadto

$$\tilde{\eta} \circ \chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) = \tilde{\eta}(\tilde{\mathcal{J}}_1(\mathbf{1}_{C_1}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\mathbf{1}_{C_2})) = \tilde{\eta}(\mathbf{1}_{C_\oplus}^2) = \mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2} \equiv \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2},$$

co w połączeniu z obserwacją (rozumianą jako stwierdzenie dotyczące K-algebr)

$$C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2 = \langle v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}, \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w, \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} \mid (v, w) \in V_1 \times V_2 \rangle_{\mathbb{K}},$$

a wobec homomorficznego charakteru χ i $\tilde{\eta}$, daje nam pożądaną wniosek:

$$\tilde{\eta} \circ \chi = \text{id}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2}.$$

Z drugiej strony otrzymujemy

$$\begin{aligned} \chi \circ \tilde{\eta}(v, w) &= \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} w) = \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) + \chi(\mathbf{1}_{C_2} \otimes_{\mathbb{K}} w) \\ &= j_1(v) \cdot \mathbf{1}_{C_{\oplus}} + \mathbf{1}_{C_{\oplus}} \cdot j_2(w) = j_1(v) + j_2(w) = (v, 0_2) + (0_1, w) = (v, w) \end{aligned}$$

oraz

$$\chi \circ \tilde{\eta}(\mathbf{1}_{C_{\oplus}}) = \chi(\mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2}) = \mathbf{1}_{C_{\oplus}},$$

co wobec tożsamości (rozumianej jako równość \mathbb{K} -algebr)

$$C_{\oplus} = \langle (v, w), \mathbf{1}_{C_{\oplus}} \mid (v, w) \in V_1 \times V_2 \rangle_{\mathbb{K}}$$

daje nam relację komplementarną wobec poprzedniej,

$$\chi \circ \tilde{\eta} = \text{id}_{C_{\oplus}}.$$

□

Jako proste, a przydatne corollarium powyższego znajdujemy

STWIERDZENIE 171. *Przyjmijmy zapis Tw. 3.1.3. Obrazem względem funktora Cliff iniektywnej izometrii przestrzeni kwadratowych o niezwyrodniałej dziedzinie jest (unitalny) monomorfizm ich algebr Clifforda. Takimż obrazem surjektywnej izometrii przestrzeni kwadratowych jest (unitalny) epimorfizm ich algebr Clifforda. Wreszcie też obrazem bijektywnej izometrii jest (unitalny) izomorfizm ich algebr Clifforda.*

■

Dowód: Ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia, dotycząca obrazu izomorfizmu przestrzeni kwadratowych, jest bezpośrednią konsekwencją funktorialnej natury Cliff, która implikuje, że funktorialny obraz odwrotności tegoż izomorfizmu jest odwrotnością obrazu samego izomorfizmu. Zajmiemy się więc dwiema pierwszymi składowymi tej tezy. Niechaj $((V_{\alpha}, +_{\alpha}, P_{\alpha}, \bullet \mapsto 0_{\alpha}), \ell_{\alpha}), Q_{\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem \mathbb{K} i niech $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ będzie izometrycznym monomorfizmem. Ten określa (kanonicznie, na gruncie Tw. 1.1.5) izometryczny izomorfizm

$$\lambda_{\varphi} : V_1 \rightsquigarrow \text{Im } \varphi,$$

jeśli zatem napiszemy – przy założeniu niezwyrodnienia Q_2 i w odwołaniu do Stw. 34 –

$$V_2 = \text{Im } \varphi \oplus_{Q_2} \text{Im } \varphi^{\perp Q_2},$$

to na podstawie Tw. 3.1.4 dostaniemy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\varphi)} & \text{Cliff}(V_2, Q_2) \equiv \text{Cliff}(\text{Im } \varphi \oplus_{Q_2} \text{Im } \varphi^{\perp Q_2}, Q_2) \\ \text{Cliff}(\lambda_{\varphi}) \downarrow & & \uparrow \chi \\ \text{Cliff}(\text{Im } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi}) & \xrightarrow{\iota_1} & \text{Cliff}(\text{Im } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}}) \end{array},$$

w którym $\text{Cliff}(\lambda_\varphi)$ jest izomorfizmem na podstawie obronionej wcześniej ostatniej składowej tezy stwierdzenia, ι_1 zaś jest monomorfizmem

$$\begin{aligned} \iota_1 &: \text{Cliff}(\text{Im } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi}) \longrightarrow \text{Cliff}(\text{Im } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}}) \\ &: \gamma \longmapsto \gamma \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{\text{Cliff}(\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi^{\perp Q_2})}}. \end{aligned}$$

Przemienność diagramu sprawdzamy na generatorach $\text{Cliff}(V_1, Q_1)$:

$$\begin{aligned} \chi \circ \iota_1 \circ \text{Cliff}(\lambda_\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}) &= \mathbf{1}_{C_2} = \text{Cliff}(\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}), \\ \chi \circ \iota_1 \circ \text{Cliff}(\lambda_\varphi)(v) &= \chi \circ \iota_1 \circ \varphi(v) = \chi(\varphi(v) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{\text{Cliff}(\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi^{\perp Q_2})}}) \\ &= \tilde{\mathcal{J}}_1 \circ \varphi(v) \cdot \mathbf{1}_{C_2} \equiv \text{Cliff}(\varphi)(v), \end{aligned}$$

przy czym pierwsza tożsamość wynika stąd, że wszystkie występujące w niej odwzorowania są unitalnymi homomorfizmami \mathbb{K} -algebr. Ostatecznie otrzymujemy zatem przedstawienie

$$\text{Cliff}(\varphi) = \chi \circ \iota_1 \circ \text{Cliff}(\lambda_\varphi)$$

rozpatrywanego homomorfizmu $\text{Cliff}(\varphi)$ w postaci złożenia monomorfizmów.

Na koniec zajmijmy się przypadkiem izometrii surjektywnej, którą będziemy oznaczać dotychczasowym symbolem φ . Zauważmy, że obraz względem $\text{Cliff}(\varphi)$ układu generującego $\text{Cliff}(V_1, Q_1)$ (jako \mathbb{K} -algebrę) to

$$\{\mathbf{1}_{C_2}\} \cup J_{V_2}^{\mathbb{C}}(\text{Im } \varphi) \equiv \{\mathbf{1}_{C_2}\} \cup J_{V_2}^{\mathbb{C}}(V_2)$$

(wszak φ jest surjekcją), czyli układ generujący $\text{Cliff}(V_2, Q_2)$, skoro jednak $\text{Cliff}(\varphi)$ jest unitalnym homomorfizmem \mathbb{K} -algebr, to zachodzi

$$\begin{aligned} \text{Cliff}(\varphi)(C_1) &\equiv \text{Cliff}(\varphi)(\langle \mathbf{1}_{C_1}, v \mid v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}}) = \langle \text{Cliff}(\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}), \text{Cliff}(\varphi)(v) \mid v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}} \\ &\equiv \langle \mathbf{1}_{C_2}, \varphi(v) \mid v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}} = \langle \mathbf{1}_{C_2}, w \mid w \in V_2 \rangle_{\mathbb{K}} \equiv C_2. \end{aligned}$$

□

Dotychczasowe nasze rozważania przygotowały nas do przeprowadzenia szczegółowej analizy struktury algebr Clifforda skończone wymiarowych przestrzeni kwadratowych, której zwieńczeniem będzie klasyfikacja tychże algebr w fizycznie istotnych przypadkach: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Rzeczoną analizę zaczniemy od zbadania wymiaru i wskazania naturalnej bazy algebry Clifforda.

STWIERDZENIE 172. *Przyjmijmy zapis Def. 107 oraz Uwagi 34 i niechaj $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$, $N = \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ będzie bazą przestrzeni kwadratowej V . Zbiór wektorów*

$$\{e^{\mathbb{C}}, v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdots v_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N, k \in \overline{1, N}}$$

stanowi bazę algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$. W szczególności więc

$$(3.1.10) \quad \dim_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(V, Q) = 2^N.$$

■

Dowód: Przeprowadzimy indukcję względem wymiaru N , poczynając od przypadku $N = 1$. Niechaj zatem $v \in V \setminus \{0_V\}$, a wtedy homomorfizm przestrzeni \mathbb{K} -liniowych

$$\iota_V : V \longrightarrow \langle e, v \rangle_{\mathbb{K}} \subset \text{Cliff}(V, Q) : \lambda \triangleright v \longmapsto J_V^{\mathbb{C}}(\lambda \triangleright v) \equiv \lambda \triangleright v$$

jest odwzorowaniem Clifforda,

$$\iota_V(\lambda \triangleright v)^2 = \lambda^2 \triangleright \iota_V(v)^2 = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e^C = Q(\lambda \triangleright v) \triangleright e^C,$$

którego obraz generuje $\langle e, v \rangle_{\mathbb{K}}$ jako \mathbb{K} -algebrę. Ponadto dla dowolnego odwzorowania Clifforda $\varphi : V \rightarrow \mathfrak{A}$ jest $\varphi(\lambda \triangleright v) = \lambda \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(v)$, więc oznaczmy $a := \varphi(v) \in \mathfrak{A}$, spełniający warunek $a^2 = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, możemy zdefiniować odwzorowanie (jawnie unitalne i \mathbb{K} -liniowe)

$$\tilde{\varphi} : \langle e, v \rangle_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathfrak{A} : \lambda \triangleright e^C + \mu \triangleright v \mapsto \lambda \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu \triangleright a,$$

przy czym

$$\tilde{\varphi} \circ \iota_V(\lambda \triangleright v) = \lambda \triangleright_{\mathfrak{A}} a = \varphi(\lambda \triangleright v),$$

a nadto

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((\lambda_1 \triangleright e^C + \mu_1 \triangleright v) \cdot (\lambda_2 \triangleright e^C + \mu_2 \triangleright v)) &= \tilde{\varphi}((\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_2 +_{\mathbb{K}} \mu_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)) \triangleright e^C \\ &\quad + (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 +_{\mathbb{K}} \lambda_2 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright v) = (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_2 +_{\mathbb{K}} \mu_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \\ &\quad +_{\mathfrak{A}} (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 +_{\mathbb{K}} \lambda_2 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} a = (\lambda_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} (\lambda_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \\ &\equiv \tilde{\varphi}(\lambda_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(\lambda_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a). \end{aligned}$$

Wniosujemy więc, na podstawie Stw. 164, że $((\langle e^C, v \rangle_{\mathbb{K}}, \iota_V), \iota_V)$ jest algebrą Clifforda dla $(\langle v \rangle_{\mathbb{K}} \equiv V, Q)$ i – zgodnie z postulatem –

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}, Q) \equiv \dim_{\mathbb{K}} \langle e^C, v \rangle_{\mathbb{K}} = 2 \equiv 2^1.$$

Założmy następnie, że dowodzona przez nas teza jest prawdziwa dla dowolnego $N < N_0$ (N_0 ustalone), i niech (V, Q) będzie przestrzenią kwadratową nad \mathbb{K} wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N_0$, w której wybieramy bazę Q -ortogonalną $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N_0}}$, co uczyniwszy, rozkładamy V na sumę Q -ortogonalną podprzestrzeni

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_{N_0-1} \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}} \equiv V_{N_0-1} \oplus_Q \langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}},$$

wprowadzając przy tym oznaczenia $Q_{N_0-1} \equiv Q \upharpoonright_{V_{N_0-1}}$ i $Q_{N_0} \equiv Q \upharpoonright_{\langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}}$. W świetle Tw. 3.1.4, a dalej – dotychczasowych ustaleń i założenia indukcyjnego możemy teraz zapisać

$$\begin{aligned} \text{Cliff}(V, Q) &\cong \text{Cliff}(V_{N_0-1}, Q_{N_0-1}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}, Q_{N_0}) \\ &\cong (\langle e_{N_0-1}^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N_0-1} \langle v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdot \dots \cdot v_{i_k} \rangle_{\mathbb{K}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} (\langle e_{N_0}^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}) \\ &= \langle e_{N_0-1}^C \otimes_{\mathbb{K}} e_{N_0}^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_{N_0-1}^C \otimes_{\mathbb{K}} v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}} \\ &\quad \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N_0-1} \langle v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdot \dots \cdot v_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} e_{N_0}^C \rangle_{\mathbb{K}} \\ &\quad \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N_0-1} \langle v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdot \dots \cdot v_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

gdzie $e_{N_0-1}^C$ i $e_{N_0}^C$ są jednościami w odpowiednich algebrach Clifforda. Z powyższego wyniku wprost pożądana równość (3.1.10), a nadto – wzięwszy pod uwagę jawną postać (3.1.9) użytego tu izomorfizmu \mathbb{K} -algebr – stwierdzamy, że baza $\text{Cliff}(V, Q)$ otrzymana jako izomorficzny obraz otrzymanej powyżej bazy algebry

$\text{Cliff}(V_{N_0-1}, Q_{N_0-1}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle e_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}, Q_{N_0})$ wzdłuż χ jest postaci wskazanej w tezie dowodzonego stwierdzenia. \square

W następnej kolejności wyróżnimy element algebry Clifforda, który odegra istotną rolę nie tylko w klasyfikacji niskowymiarowych rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, ale też – w dyskusji ich reprezentacji, więc i w zastosowaniach fizykalnych (w których nosi miano **operatora chiralności**).

DEFINICJA 110. Przyjmijmy zapis Def. 20, 107, 108, Przykł. 1 (2) i 2 (2) oraz Stw. 172 (przy czym zakładamy $\text{char } \mathbb{K} = 0$) i niechaj

$$\xi_V : \bigwedge^{\bullet} V \xrightarrow{\cong} \text{Cliff}(V, Q)$$

będzie (jedynym) \mathbb{K} -liniowym rozszerzeniem przyporządkowania określonego na tensorach prostych ($v_i \in V$, $i \in \overline{1, N}$ są dowolne)

$$\xi_V(1_{\mathbb{K}}) := e^C,$$

$$\xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \triangleright v_{\sigma(1)} \cdot v_{\sigma(2)} \cdots v_{\sigma(k)}, \quad k \in \overline{1, N}.$$

Ponadto niech $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$ będzie dowolnym niezerowym wyznacznikiem na V . **Element kanoniczny** algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$ (**stowarzyszony z Δ**) to wektor $e_{\Delta} \in \text{Cliff}(V, Q)$ określony przez warunek

$$\forall_{v_1, v_2, \dots, v_N \in V} : \xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N) =: \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \triangleright e_{\Delta}.$$

▲

UWAGA 37. Powyższa definicja ma sens, gdyż dla dowolnej bazy ortogonalnej $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ przestrzeni V homomorfizm ξ_V przyporządkowuje elementom odnośnej bazy $\{1_{\mathbb{K}}, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N, k \in \overline{1, N}}$ wektory

$$\xi_V(1_{\mathbb{K}}) = e^C,$$

$$\begin{aligned} \xi_V(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \triangleright e_{\sigma(1)} \cdot e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(k)} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma)^2 \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_k = e_1 \cdot e_2 \cdots e_k, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia tożsamość wynika wprost z (jednej z wielu) definicji znaku permutacji jako odwzorowania

$$\text{sgn} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\} : \sigma \longmapsto (-1)^{\tau(\sigma)},$$

w którego zapisie $\tau(\sigma)$ jest liczbą czynników w (dowolnym) rozkładzie permutacji σ na transpozycje, oraz z relacji skośnej przemienności

$$(3.1.11) \quad \forall_{\substack{i, j \in \overline{1, N} \\ i \neq j}} : e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$$

spełnianych przez obrazy elementów bazy \mathcal{E} w $\text{Cliff}(V, Q)$. Tym samym odwzorowanie (\mathbb{K} -liniowe) ξ_V przeprowadza bazę dziedziny na bazę przeciwdziedziny, o której mowa w tezie Stw. 172, jest zatem izomorfizmem przestrzeni \mathbb{K} -liniowych. Ponadto dla dowolnych wektorów $v_{\alpha} = v_{\alpha}^j \triangleright e_i$, $\alpha \in \overline{1, N}$ otrzymujemy

$$\xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N) = v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \triangleright \xi_V(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_N})$$

$$= \frac{1}{N!} v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \triangleright \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \triangleright e_{i_{\sigma(1)}} \cdot e_{i_{\sigma(2)}} \cdots \cdot e_{i_{\sigma(N)}},$$

przy czym w ostatniej sumie wyrazy o indeksach $i_j = i_k$ dla $j \neq k$ występują w parach odpowiadających $(\sigma, \sigma \circ \tau_{j,k})$, których wkłady do sumy różnią się znakiem wobec relacji $\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau_{j,k})$, a zatem ostatecznie niezerowy przyczynik do tej sumy może pochodzić jedynie od tych N -tek indeksów (i_1, i_2, \dots, i_N) , które stanowią permutacje (dowolne) zbioru $\overline{1, N}$,

$$\begin{aligned} & \xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \triangleright e_{\sigma \circ \rho(1)} \cdot e_{\sigma \circ \rho(2)} \cdots \cdot e_{\sigma \circ \rho(N)} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma \circ \rho \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \rho) \triangleright e_{\sigma \circ \rho(1)} \cdot e_{\sigma \circ \rho(2)} \cdots \cdot e_{\sigma \circ \rho(N)} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \triangleright e_{\sigma(1)} \cdot e_{\sigma(2)} \cdots \cdot e_{\sigma(N)} \\ &\equiv \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots \cdot e_N \\ &\equiv \Delta_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, \dots, v_N) \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots \cdot e_N. \end{aligned}$$

Istotnie, wobec N -liniowości i skończonej symetrii wyznacznika oraz jego unormowania dostajemy, na mocy argumentów analogicznych do tych użytych powyżej,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, \dots, v_N) &= v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_N}) \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(e_{\rho(1)}, e_{\rho(2)}, \dots, e_{\rho(N)}) \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \cdot_{\mathbb{K}} \operatorname{sgn}(\rho) \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \operatorname{sgn}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)}. \end{aligned}$$

Na koniec przywołujemy oczywistą równość

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^N V^* = \binom{N}{N} = 1,$$

z której wyciągamy wniosek o istnieniu skalar² $\lambda_{\Delta} \in \mathbb{K}$ spełniającego relację

$$\Delta_{\mathcal{E}} = \lambda_{\Delta} \triangleright \Delta,$$

więc ostatecznie

$$\xi_V(\cdot) = \Delta(\cdot) \triangleright e_{\Delta},$$

gdzie wektor $e_{\Delta} \in \operatorname{Cliff}(V, Q)$ stopnia N jest dany jednoznacznie (w szczególności nie zależy od argumentu odwzorowania z lewej strony równości).

Mamy istotne

STWIERDZENIE 173. *Przyjmijmy zapis Def. 109 oraz 110 i niechaj $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ będzie dowolną bazą ortogonalną w przestrzeni kwadratowej V , a $\Delta_{\mathcal{E}}$*

²Łatwo widać, że skalar ten to $\Delta(\mathcal{E})^{-1}$.

– wyznacznikiem na V określonym przez tę bazę według schematu opisanego w Def. 20. Element kanoniczny stowarzyszony z $\Delta_{\mathcal{E}}$ przyjmuje postać

$$(3.1.12) \quad e_{\Delta_{\mathcal{E}}} = e_1 \cdot e_2 \cdots e_N.$$

Niechaj dalej $\Delta \in \wedge^N V^* \setminus \{0\}$ będzie dowolnym (niezerowym) wyznacznikiem na V i niech $\lambda_{\Delta} \in \mathbb{K}$ będzie skalar, o którym mowa w tezie Stw. 25. Wówczas zachodzi tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta} \triangleright e^C,$$

jeśli zatem forma kwadratowa Q jest niezwyrodniała, to element kanoniczny jest odwracalny w $\text{Cliff}(V, Q)$, w przeciwnym zaś razie spełnia on tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}.$$

Ponadto

$$(3.1.13) \quad \forall \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) : e_{\Delta} \cdot \gamma = J_V^{N-1}(\gamma) \cdot e_{\Delta}.$$

■

Dowód: Równość (3.1.12) wynika bezpośrednio z rachunku przeprowadzonego w obrębie Uwagi 37. Jeśli teraz w formule definiującej λ_{Δ} wypisanej w treści Stw. 25 dokonamy podstawienia $v_i \equiv w_i := e_i$, $i \in \overline{1, N}$, to otrzymamy równość

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \det_{(N)}(\Phi(e_i, e_j))_{i, j \in \overline{1, N}} = \prod_{i=1}^N \Phi_Q(e_i, e_i) \\ &\equiv \prod_{i=1}^N Q(e_i), \end{aligned}$$

wobec czego – w świetle udowodnionej wcześniej równości (3.1.12) – dostajemy

$$\begin{aligned} e_{\Delta_{\mathcal{E}}}^2 &\equiv e_1 \cdot e_2 \cdots e_N \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots e_N = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} e_1^2 \cdot e_2^2 \cdots e_N^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^N Q(e_i) \triangleright e^C \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \triangleright e^C. \end{aligned}$$

Wobec oczywistych tożsamości

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E})^2 = \det_{(N)}(\Phi(e_i, e_j))_{i, j \in \overline{1, N}} = \lambda_{\Delta} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^2, \\ e_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \triangleright e_{\Delta_{\mathcal{E}}} = \xi_V(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_N) = \Delta(\mathcal{E}) \triangleright e_{\Delta}, \end{aligned}$$

słusznych dla dowolnego niezerowego wyznacznika Δ na V (a taki spełnia warunek $\Delta(\mathcal{E}) \neq 0_{\mathbb{K}}$), możemy w takim razie zapisać

$$\begin{aligned} e_{\Delta}^2 &= \Delta(\mathcal{E})^{-2} \triangleright e_{\Delta_{\mathcal{E}}}^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathcal{E})^{-2} \triangleright (\lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \triangleright e^C) \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathcal{E})^{-2} \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \triangleright e^C = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta} \triangleright e^C. \end{aligned}$$

Jeśli teraz Q jest niezwyrodniała, to jak jasno wynika z rachunku otwierającego niniejszy dowód, $\lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \neq 0_{\mathbb{K}}$, zatem także $\lambda_{\Delta} \neq 0_{\mathbb{K}}$, a wówczas

$$e_{\Delta}^{-1} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta}^{-1} \triangleright e^C.$$

Jeśli natomiast Q jest zwyrodniała, to $\lambda_\Delta = 0_{\mathbb{K}}$ i w konsekwencji $e_\Delta^2 = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V,Q)}$. W dowodzie ostatniej składowej tezy stwierdzenia wykorzystujemy ustaloną wcześniej relację między e_Δ i e_{Δ_ε} w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnego $v = v^i \triangleright e_i \in V$ z wykorzystaniem relacji (3.1.11),

$$\begin{aligned} e_\Delta \cdot v &\equiv v^i \triangleright e_\Delta \cdot e_i = v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_N \cdot e_i \\ &= (-1)^{N-i} v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_{i-1} \cdot e_i^2 \cdot e_{i+1} \cdot e_{i+2} \cdots e_N \\ &= (-1)^{N-i} (-1)^{i-1} v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_i \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots e_N \equiv (-1)^{N-1} v \cdot e_\Delta \\ &\equiv J_V^{N-1}(v) \cdot e_\Delta. \end{aligned}$$

Postulowana tożsamość jawi nam się teraz jako prosta konsekwencja powyższego (wszak $\text{Cliff}(V, Q)$ jest generowana jako \mathbb{K} -algebra przez $\text{Im } J_V^{\mathbb{C}}$) oraz homomorficznego charakteru inwolucji kanonicznej. \square

Dalsze nasze dociekania podporządkowane celowi nadrzędnemu, jakim jest klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda oraz ich reprezentacji, wiodą nas wprost do dyskusji centrum algebry Clifforda oraz jego super-partnera, którego opisuje

DEFINICJA 111. Przyjmijmy zapis Def. 109 oraz Przykł. 29 (9). **Centrum algebry Clifforda** $\text{Cliff}(V, Q)$ to jej podalgebra

$$\begin{aligned} Z(\text{Cliff}(V, Q)) &= \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall \tilde{\gamma} \in \text{Cliff}(V, Q) : [\gamma, \tilde{\gamma}] = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \} \\ &\equiv \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall v \in V : [\gamma, v] = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \}. \end{aligned}$$

Antycentrum algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$ to jej podprzestrzeń \mathbb{K} -liniowa

$$\begin{aligned} AZ(\text{Cliff}(V, Q)) &= \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall \tilde{\gamma} \in \text{Cliff}(V, Q) : \gamma \cdot \tilde{\gamma} = J_V(\tilde{\gamma}) \cdot \gamma \} \\ &\equiv \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall v \in V : \{\gamma, v\} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \}. \end{aligned}$$

▲

Najprostszego uszczegółowienia charakterystyki wprowadzonych powyżej obiektów dostarcza

STWIERDZENIE 174. *Przyjmijmy zapis Def. 111. $Z(\text{Cliff}(V, Q))$ jest podalgebrą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowaną \mathbb{K} -algebry $\text{Cliff}(V, Q)$, natomiast $AZ(\text{Cliff}(V, Q))$ jest podprzestrzenią $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowaną przestrzeni \mathbb{K} -liniowej $\text{Cliff}(V, Q)$, w rozumieniu Def. 100.*

■

Dowód: Zarówno centrum, jak i antycentrum $\text{Cliff}(V, Q)$ są podprzestrzeniami zachowywanymi przez inwolucję kanoniczną, gdyż

$$\begin{aligned} \forall_{(v, \gamma) \in V \times Z(\text{Cliff}(V, Q))} : J_V(\gamma) \cdot v &= -J_V(\gamma) \cdot J_V(v) = -J_V(\gamma \cdot v) = -J_V(v \cdot \gamma) \\ &= -J_V(v) \cdot J_V(\gamma) = v \cdot J_V(\gamma) \end{aligned}$$

i, podobnie,

$$\forall_{(v, \gamma) \in V \times AZ(\text{Cliff}(V, Q))} : J_V(\gamma) \cdot v = -J_V(\gamma) \cdot J_V(v) = -J_V(\gamma \cdot v) = J_V(v \cdot \gamma)$$

$$= J_V(v) \cdot J_V(\gamma) = -v \cdot J_V(\gamma).$$

Stąd też obie dziedziczą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradację z $\text{Cliff}(V, Q)$ na mocy Stw. 170. Przy tym centrum jest w oczywisty sposób podalgebrą $\text{Cliff}(V, Q)$. \square

Strukturę centrum i antycentrum algebry Clifforda opisuje

TWIERDZENIE 3.1.5. *Przyjmijmy zapis Def. 111 (przy założeniu $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$) i niech $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, a wtedy*

- (i) $N \in 2\mathbb{N} + 1 \implies e_{\Delta} \in Z(\text{Cliff}(V, Q));$
- (ii) $N \in 2\mathbb{N} + 2 \implies e_{\Delta} \in AZ(\text{Cliff}(V, Q)).$

Ponadto jeśli Q jest niezwyrodniała, to

- (i') $N \in 2\mathbb{N} + 1 \implies \begin{cases} Z(\text{Cliff}(V, Q)) = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}}; \\ AZ(\text{Cliff}(V, Q)) = \{ \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \}; \end{cases}$
- (ii') $N \in 2\mathbb{N} + 2 \implies \begin{cases} Z(\text{Cliff}(V, Q)) = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}}; \\ AZ(\text{Cliff}(V, Q)) = \langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}}. \end{cases}$

■

Dowód: Punkty (i) i (ii) wynikają bezpośrednio z tożsamości (3.1.13). Załóżmy zatem, że Q jest formą niezwyrodniałą, i rozważmy składowe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -jednorodnie centrum i antycentrum algebry Clifforda, co możemy uczynić w odwołaniu do Stw. 174. Niechaj $\gamma \in AZ(\text{Cliff}(V, Q))^1 \equiv AZ(\text{Cliff}(V, Q)) \cap \text{Cliff}(V, Q)^1$, a wtedy wobec

$$\forall v \in V : \gamma \cdot v = -v \cdot \gamma$$

zachodzi

$$(3.1.14) \quad \gamma \cdot e_{\Delta} = (-1)^N e_{\Delta} \cdot \gamma,$$

ale też – na mocy Równ. (3.1.13) i w świetle założenia dotyczącego parzystości γ –

$$e_{\Delta} \cdot \gamma = J_V^{N-1}(\gamma) \cdot e_{\Delta} = (-1)^{N-1} \gamma \cdot e_{\Delta},$$

więc ostatecznie

$$\gamma \cdot e_{\Delta} = (-1)^N \cdot (-1)^{N-1} \gamma \cdot e_{\Delta} = -\gamma \cdot e_{\Delta},$$

co przy $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ (a takie poczyniliśmy założenie) oznacza równość

$$\gamma \cdot e_{\Delta} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}.$$

W świetle Stw. 173 wnioskujemy zatem, że

$$\gamma \equiv \gamma \cdot e_{\Delta} \cdot e_{\Delta}^{-1} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \cdot e_{\Delta}^{-1} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)},$$

czyli dla niezwyrodniałej formy kwadratowej dostajemy

$$(3.1.15) \quad AZ(\text{Cliff}(V, Q))^1 = \{ \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \}.$$

Jeśli ponadto $N \in 2\mathbb{N} + 1$, to z porównania tożsamości (3.1.16),

$$(3.1.16) \quad \gamma \cdot e_{\Delta} = -e_{\Delta} \cdot \gamma,$$

słusznej dla dowolnego elementu antycentralnego $\gamma \in AZ(\text{Cliff}(V, Q))^0 \equiv AZ(\text{Cliff}(V, Q))^0$, z tożsamością

$$e_{\Delta} \cdot \gamma = J_V^{N-1}(\gamma) \cdot e_{\Delta} = \gamma \cdot e_{\Delta}$$

wyciągamy oczekiwany wniosek

$$AZ(\text{Cliff}(V, Q)) = \{\mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}\}.$$

Rozważmy odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\varphi_\Delta : \text{Cliff}(V, Q) \circlearrowleft : \gamma \mapsto e_\Delta \cdot \gamma.$$

Wobec odwracalności elementu kanonicznego jest ono automorfizmem przestrzeni \mathbb{K} -liniowej $\text{Cliff}(V, Q)$, a przy tym jeśli $\gamma \in Z(\text{Cliff}(V, Q))$, to

$$\forall_{v \in V} : \varphi_\Delta(\gamma) \cdot v \equiv e_\Delta \cdot \gamma \cdot v = e_\Delta \cdot v \cdot \gamma = J_V^{N-1}(v) \cdot e_\Delta \cdot \gamma = (-1)^{N-1} v \cdot \varphi_\Delta(\gamma),$$

i – podobnie – jeśli $\gamma \in AZ(\text{Cliff}(V, Q))$, to

$$\forall_{v \in V} : \varphi_\Delta(\gamma) \cdot v \equiv e_\Delta \cdot \gamma \cdot v = -e_\Delta \cdot v \cdot \gamma = -J_V^{N-1}(v) \cdot e_\Delta \cdot \gamma = (-1)^N v \cdot \varphi_\Delta(\gamma),$$

zatem prawdziwe są następujące implikacje:

$$N \in 2\mathbb{N} + 1 \implies \begin{cases} \varphi_\Delta(Z(\text{Cliff}(V, Q))) = Z(\text{Cliff}(V, Q)) \\ \varphi_\Delta(AZ(\text{Cliff}(V, Q))) = AZ(\text{Cliff}(V, Q)) \end{cases},$$

(3.1.17)

$$N \in 2\mathbb{N} + 2 \implies \varphi_\Delta(Z(\text{Cliff}(V, Q))) = AZ(\text{Cliff}(V, Q)).$$

Jak jasno widać, uzupełnienie dyskusji struktury antycentrum w przypadku $N \in 2\mathbb{N} + 2$ wymaga więc zrozumienia struktury centrum, czym zajmiemy się obecnie.

Zacznijemy od wyznaczenia składowej parzystej centrum, $Z(\text{Cliff}(V, Q))^0 \equiv Z(\text{Cliff}(V, Q)) \cap \text{Cliff}(V, Q)^0$. Twierdzimy, że – niezależnie od parzystości wymiaru V – składowa ta jest rozpięta na jedności algebry,

$$(3.1.18) \quad Z(\text{Cliff}(V, Q))^0 = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

a dowód opieramy na indukcji względem tegoż wymiaru N . Słuszność postulowanej równości w przypadku $N = 1$ staje się oczywista, gdy wziąć pod uwagę model algebry Clifforda skonstruowany w pierwszym kroku indukcyjnego dowodu Stw. 172, założymy zatem, że równość ta jest prawdziwa dla $N < N_0$ (N_0 ustalone) i niech $\dim_{\mathbb{K}} V = N_0$. Wybierzmy $v \in V$ o własności $Q(v) \neq 0$ (na co pozwala założenie o niezwyrodnieniu Q), a wtedy – w świetle Stw. 34 – możemy dokonać rozkładu Q -ortogonalnego

$$V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q},$$

przy czym – rzecz jasna – $\dim_{\mathbb{K}} \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q} = \dim_{\mathbb{K}} V - 1 < N_0$. W tym momencie możemy odwołać się do Tw. 3.1.4, aby przerzucić rachunki do algebry kanonicznie izomorficznej z $\text{Cliff}(V, Q)$, jaką jest $\text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}, Q \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}, Q \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}})$, co okaże się nader wygodne. Przyjawszy dla skrótu oznaczenia $C_v \equiv \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}, Q \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}})$ i $C_\perp \equiv \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}, Q \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}})$ i wybrawszy dla C_v model $\langle e_v^C, v \rangle_{\mathbb{K}}$ jak w dowodzie Stw. 172, rozważmy obraz dowolnego elementu $\gamma \in Z(\text{Cliff}(V, Q))^0$ w $C_v \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_\perp$ – ten jest postaci

$$\eta(\gamma) = e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1$$

dla pewnych $w^k \in \text{Cliff}(V, Q)_\perp^1$, $k \in \{0, 1\}$ (wszak suma stopni czynników tensorowych w każdym ze składników sumy ma być parzysta, bo taki jest stopień γ).

Podobnie dla dowolnego $x = \lambda \triangleright_V v + y \in V$, zapisanego w terminach $\lambda \in \mathbb{K}$ i $y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}$, otrzymujemy

$$\eta(x) = e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_{\perp}^C,$$

gdzie $e_{\perp}^C \in C_{\perp}$ jest odnośną jednością. Na podstawie powyższych wzorów obliczamy

$$\begin{aligned} \eta(\gamma.x) &= (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1) \cdot (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_{\perp}^C) \\ &= e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 \cdot y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1 \cdot y - \lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \eta(x.\gamma) &= (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_{\perp}^C) \cdot (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1) \\ &= e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y \cdot w^0 + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} w^0 - v \otimes_{\mathbb{K}} y \cdot w^1 + \lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^1, \end{aligned}$$

a stąd – wobec centralności γ –

$$\begin{aligned} 0 &= \eta([\gamma, x]) = e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} [w^0, y] + v \otimes_{\mathbb{K}} \{w^1, y\} - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^1 \\ &= e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} ([w^0, y] - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright w^1) + v \otimes_{\mathbb{K}} \{w^1, y\}, \end{aligned}$$

co z racji liniowej niezależności składników pozwala wnioskować, że

$$\forall_{y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}} : \{w^1, y\} = \mathbf{0}_{C_{\perp}},$$

czyli – w świetle Równ. (3.1.15) –

$$w^1 \in AZ(C_{\perp}) \cap \text{Cliff}(V, Q)_{\perp}^1 \equiv AZ(C_{\perp})^1 = \{\mathbf{0}_{C_{\perp}}\},$$

a dalej – wobec tego –

$$\forall_{y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}} : [w^0, y] = [w^0, y] - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright w^1 = \mathbf{0}_{C_{\perp}},$$

co na gruncie założenia indukcyjnego przyprowadza nas do przekonania, że

$$w^0 \in Z(C_{\perp}) \cap \text{Cliff}(V, Q)_{\perp}^0 \equiv Z(C_{\perp})^0 = \langle e_{\perp}^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

tj. $w^0 = \mu \triangleright e_{\perp}^C$ dla pewnego skalaru $\mu \in \mathbb{K}$. Koniec końców otrzymujemy

$$\gamma = \chi(e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1) = \chi(e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} \mu \triangleright e_{\perp}^C) \equiv \mu \triangleright \chi(\mathbf{1}_{C_v} \otimes_{\mathbb{K}} e_{\perp}^C) = \mu \triangleright e^C.$$

Udowodniona tym samym równość (3.1.18) pozwala dokończyć dowód twierdzenia przy użyciu obserwacji (3.1.17), oto bowiem w przypadku $N \in 2\mathbb{N} + 2$

$$\begin{aligned} AZ(\text{Cliff}(V, Q)) &\equiv AZ(\text{Cliff}(V, Q))^0 = \varphi_{\Delta}(Z(\text{Cliff}(V, Q))^0) = \varphi_{\Delta}(\langle e^C \rangle_{\mathbb{K}}) \\ &= \langle \varphi_{\Delta}(e^C) \rangle_{\mathbb{K}} = \langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

(co wynika z Równ. (3.1.15) oraz z tego, że φ_{Δ} jest parzysty), więc też – wtórnie –

$$Z(\text{Cliff}(V, Q)) = \varphi_{\Delta}(AZ(\text{Cliff}(V, Q))) = \varphi_{\Delta}(\langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}}) = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

a w przypadku $N \in 2\mathbb{N} + 1$

$$Z(\text{Cliff}(V, Q))^1 = \varphi_{\Delta}(Z(\text{Cliff}(V, Q))^0) = \langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}}$$

(co wynika z faktu, że φ_{Δ} jest nieparzysty), zatem

$$Z(\text{Cliff}(V, Q)) = Z(\text{Cliff}(V, Q))^0 \oplus Z(\text{Cliff}(V, Q))^1 = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}}.$$

□

Pierwszy z istotnych wyników pozwalających oswoić nieco bestiarium algebr Clifforda przy użyciu wprowadzonych powyżej obiektów przynosi

TWIERDZENIE 3.1.6. *Przyjmijmy zapis Def. 110 oraz Stw. 25, zakładając przy tym, że forma kwadratowa Q na przestrzeni V wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = N < \infty$ jest niezwyrodniała. Ilekroć można wybrać wyznacznik $\Delta \in \wedge^N V^*$ w taki sposób, że*

$$(3.1.19) \quad \lambda_{\Delta} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}},$$

czyli w szczególności $e_{\Delta}^2 = e^C$, to istnieje kanoniczny unitalny homomorfizm \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{\mu} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \text{Cliff}(V, -Q)$$

o własności

$$\tilde{\mu}(e_{\Delta}) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \triangleright (e_{\Delta}^{-})^{N+1},$$

gdzie e_{Δ}^{-} jest elementem kanonicznym algebry $\text{Cliff}(V, -Q)$ stowarzyszonym z tym samym wyznacznikiem Δ na przestrzeni \mathbb{K} -liniowej V będącej nośnikiem przeciwnej struktury kwadratowej $-Q$. W przypadku $N \in 2\mathbb{N} + 2$ homomorfizm ten jest izomorfizmem.

■

Dowód: Niechaj λ_{Δ} będzie skalarom określonym, w sposób opisany w Stw. 25, przez dowolny niezerowy wyznacznik Δ na przestrzeni V z formą kwadratową Q i oznaczmy jako λ_{Δ}^{-} skalar określony przez ten sam wyznacznik, gdy V wyposażymy w formę kwadratową $-Q$. Wówczas dla dowolnych układów wektorów $v_i, w_i \in V$, $i \in \overline{1, N}$ otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta}^{-} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \dots, w_N) &= \det_{(N)}(\Phi_{-Q}(v_i, w_j))_{i, j \in \overline{1, N}} \\ &\equiv \det_{(N)}(-\Phi_Q(v_i, w_j))_{i, j \in \overline{1, N}} = (-1)^N \det_{(N)}(\Phi_Q(v_i, w_j))_{i, j \in \overline{1, N}} \\ &= (-1)^N \lambda_{\Delta} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \dots, w_N), \end{aligned}$$

z której wynika tożsamość

$$(3.1.20) \quad \lambda_{\Delta}^{-} = (-1)^N \lambda_{\Delta}.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\mu : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, -Q) \equiv C_- : v \longmapsto e_{\Delta}^{-} \bullet v,$$

wprowadzając przy tym – gwoli przejrzystości zapisu dalszego rozumowania – osobny symbol \bullet na oznaczenie mnożenia w algebrze C_- (z jednością, którą oznaczmy jako e_-^C). Przywoławszy Stw. 173 w odniesieniu do trójki $(C_-, e_{\Delta}^{-}, \lambda_{\Delta}^{-})$ oraz Równ. (3.1.20), stwierdzamy bez trudu, że odwzorowanie powyższe spełnia – na mocy założenia (3.1.19) – warunek Clifforda względem struktury kwadratowej Q , oto bowiem

$$\begin{aligned} \mu(v)^2 &= e_{\Delta}^{-} \bullet v \bullet e_{\Delta}^{-} \bullet v = (e_{\Delta}^{-})^2 \bullet J_V^{N-1}(v) \bullet v = (-1)^{N-1} \cdot (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta}^{-} \triangleright v \bullet v \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}-1} \lambda_{\Delta} \triangleright ((-Q)(v) \triangleright e_-^C) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta} \triangleright (Q(v) \triangleright e_-^C) \\ &= Q(v) \triangleright e_-^C. \end{aligned}$$

Rozszerza się ono zatem kanonicznie i jednoznacznie do unitalnego homomorfizmu \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{\mu} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \text{Cliff}(V, -Q)$$

o własności

$$\forall_{v \in V} : \tilde{\mu}(v) = e_{\Delta}^{-} \bullet v.$$

Wybermy bazę $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ w V ortogonalną względem Q , a zatem także względem $-Q$. Na mocy Stw. 173 i rozumowania przeprowadzonego w jego dowodzie możemy zapisać

$$e_{\Delta} = \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_N, \quad e_{\Delta}^{-} = \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \bullet e_2 \bullet \cdots \bullet e_N,$$

a w takim razie

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(e_{\Delta}) &\equiv \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright \tilde{\mu}(e_1 \cdot e_2 \cdots e_N) = \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright \mu(e_1) \bullet \mu(e_2) \bullet \cdots \bullet \mu(e_N) \\ &= \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_{\Delta}^{-} \bullet e_1 \bullet e_{\Delta}^{-} \bullet e_2 \bullet \cdots \bullet e_{\Delta}^{-} \bullet e_N \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright (e_{\Delta}^{-})^N \bullet e_1 \bullet e_2 \bullet \cdots \bullet e_N \equiv (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} (e_{\Delta}^{-})^{N+1}. \end{aligned}$$

Niech teraz $N = 2m \in 2\mathbb{N} + 2$, a wtedy skalary λ_{Δ} i λ_{Δ}^{-} przyjmują postać

$$\lambda_{\Delta} = (-1)^m = \lambda_{\Delta}^{-}$$

i otrzymujemy

$$\tilde{\mu}(e_{\Delta}) = (-1)^m (e_{\Delta}^{-})^{2m+1},$$

co implikuje natychmiast, że odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\psi : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) : v \longmapsto e_{\Delta} \cdot v$$

spełnia warunek Clifforda względem struktury kwadratowej $-Q$,

$$\begin{aligned} \psi(v)^2 &= e_{\Delta} \cdot v \cdot e_{\Delta} \cdot v = e_{\Delta}^2 \cdot J_V^{2m-1}(v) \cdot v = -e_{\Delta}^2 \cdot v \cdot v = (-1)^{m(2m-1)} \lambda_{\Delta} \triangleright ((-Q)(v) \triangleright e^C) \\ &= (-Q)(v) \triangleright e^C, \end{aligned}$$

więc rozszerza się kanonicznie i jednoznacznie do unitalnego homomorfizmu \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{\psi} : \text{Cliff}(V, -Q) \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q)$$

o własności

$$\forall_{v \in V} : \tilde{\psi}(v) = e_{\Delta} \cdot v.$$

Relację pomiędzy oboma homomorfizmami ustalamy na zbiorze generatorów obu algebr na podstawie rezultatów dotychczasowych dociekań. Oto więc

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ \tilde{\mu}(v) &= \tilde{\psi}(e_{\Delta}^{-} \bullet v) = \tilde{\psi}(e_{\Delta}^{-}) \cdot \tilde{\psi}(v) = (-1)^m (e_{\Delta})^{2m+1} \cdot e_{\Delta} \cdot v \equiv (-1)^m (e_{\Delta}^2)^{m+1} \cdot v \\ &= (-1)^m v \equiv J_V^m(v), \end{aligned}$$

czyli w ogólności (wszak $\tilde{\mu}$ i $\tilde{\psi}$ to homomorfizmy \mathbb{K} -algebr)

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\mu} = J_V^m.$$

Analogicznie wyprowadzamy relację

$$\tilde{\mu} \circ \tilde{\psi} = (J_V^{-})^m,$$

gdzie $J_{\tilde{V}}$ jest kanoniczną inwolucją na C_- . Zważywszy oczywistą tożsamość

$$\tilde{\mu} \circ J_V = J_{\tilde{V}} \circ \tilde{\mu} \quad \longleftarrow \quad J_{\tilde{V}}(e_{\Delta}^-) = (-1)^{2m} e_{\Delta}^- = e_{\Delta}^-$$

(oraz inwolutywny charakter J_V i $J_{\tilde{V}}$), możemy zatem przepisać powyższe relacje w postaci

$$(J_V^m \circ \tilde{\psi}) \circ \tilde{\mu} = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)}, \quad \tilde{\mu} \circ (J_{\tilde{V}}^m \circ \tilde{\psi}) = \text{id}_{\text{Cliff}(V, -Q)},$$

z których jasno wynika, że $\tilde{\mu}$ jest izomorfizmem (o odwrotności $J_V^m \circ \tilde{\psi}$). \square

Kolejny arcyważny wynik artykułuje

TIWIERDZENIE 3.1.7 (O kanonicznym iloczynie tensorowym algebr Clifforda). *Przyjmijmy zapis Def. 36 oraz 110 i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q_V$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem \mathbb{K} wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V = 2m \in 2\mathbb{N} + 2$, z wyróżnionym wyznacznikiem $\Delta \in \wedge^{2m} V^*$ o stowarzyszonym elemencie kanonicznym $e_{\Delta} \in \text{Cliff}(V, Q_V)$, który spełnia warunek*

$$e_{\Delta}^2 = \varepsilon \triangleright e^C, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Wówczas dla dowolnej $((\tilde{V}, +_{\tilde{V}}, P_{\tilde{V}}, \bullet \mapsto 0_{\tilde{V}}), \ell_{\tilde{V}}), Q_{\tilde{V}} \in \text{Obj } \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ istnieje kanoniczny unitalny homomorfizm \mathbb{K} -algebr

$$\text{Cliff}(V \oplus \tilde{V}, Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}) \cong \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}).$$

■

Dowód: Rozważmy kanoniczne izometryczne włożenia

$$J_V : V \rightarrow V \oplus \tilde{V}, \quad J_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow V \oplus \tilde{V},$$

przy czym w drugim przypadku *implicite* traktujemy \tilde{V} jako nośnik struktury kwadratowej $\varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}$. Wobec parzystości wymiaru V tożsamość (3.1.13) implikuje

$$\forall_{v \in V} : \{e_{\Delta}, v\} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q_V)}.$$

Ponadto w świetle (dowodu) Tw. 3.1.4 indukowane unitalne homomorfizmy \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{J}_V \equiv \text{Cliff}(J_V) : \text{Cliff}(V, Q_V) \longrightarrow \text{Cliff}(V \oplus \tilde{V}, Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}) \equiv C_{\oplus},$$

$$\tilde{J}_{\tilde{V}} \equiv \text{Cliff}(J_{\tilde{V}}) : \text{Cliff}(\tilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}) \longrightarrow C_{\oplus}$$

spełniają – dla dowolnego elementu $\tilde{\gamma} \in \text{Cliff}(\tilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}})$ – warunek (\tilde{e}^C jest jednością w $\text{Cliff}(\tilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}})$)

$$\begin{aligned} \tilde{J}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(\tilde{\gamma}) &\equiv m_{C_{\oplus}} \circ (\tilde{J}_V \otimes \tilde{J}_{\tilde{V}})(e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) \equiv \chi(e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) = \chi(e^C \cdot e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma} \cdot \tilde{e}^C) \\ &= \chi((-1)^{\deg \tilde{\gamma} \cdot \deg e_{\Delta}} (e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma})(e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C)) \\ &= \chi((e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma})(e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C)) = \chi(e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) \cdot \chi(e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \\ &= \tilde{J}_{\tilde{V}}(\tilde{\gamma}) \cdot \tilde{J}_V(e_{\Delta}), \end{aligned}$$

przeto odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\varphi : \tilde{V} \longrightarrow C_{\oplus} : v \longmapsto \tilde{J}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(v)$$

spełnia warunek Clifforda,

$$\varphi(v)^2 \equiv \tilde{J}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(v) \cdot \tilde{J}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(v) = \tilde{J}_V(e_{\Delta})^2 \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(v)^2 = \tilde{J}_V(e_{\Delta}^2) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(v^2)$$

$$= \varepsilon(\varepsilon \tilde{Q}(v)) \triangleright \mathbf{1}_{\oplus} = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\oplus},$$

i z tej racji rozszerza się jednoznacznie i kanonicznie do unitalnego homomorfizmu \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}) \longrightarrow C_{\oplus}.$$

Przy tym – dla dowolnych $(v, \tilde{v}) \in V \times \tilde{V}$ – zachodzi równość

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{v}) &\equiv \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) = \tilde{\mathcal{J}}_V(v \cdot e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) = \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta} \cdot \mathcal{J}_V(v)) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \\ &= -\tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta} \cdot v) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) = -\tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \equiv -\tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\ &= -\tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \chi(e^C \cdot v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} \cdot \tilde{e}^C) = -\tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \chi((-1)^{\deg v \cdot \deg \tilde{v}} (e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v})) \cdot (v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \\ &= \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \chi(e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \cdot \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) = \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \\ &\equiv \tilde{\varphi}(\tilde{v}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(v), \end{aligned}$$

zatem

$$\forall_{(\gamma, \tilde{\gamma}) \in \text{Cliff}(V, Q_V) \times \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}})} : \tilde{\mathcal{J}}_V(\gamma) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(\gamma).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\Phi : \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}) \longrightarrow C_{\oplus}$$

stanowiące (jedyne) rozszerzenie przyporządkowania określonego na tensorach prostych jako

$$\Phi(\gamma \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) := \tilde{\mathcal{J}}_V(\gamma) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}).$$

Pokażemy, że Φ jest unitalnym izomorfizmem \mathbb{K} -algebr, konstruując jego odwrotność. W tym celu rozważmy odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\Psi : V \oplus \tilde{V} \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}) : (v, \tilde{v}) \longmapsto v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v},$$

które spełnia warunek Clifforda

$$\begin{aligned} \Psi(v, \tilde{v})^2 &= (v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \cdot (v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\ &= v^2 \otimes_{\mathbb{K}} e^C + \varepsilon \triangleright v \cdot e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} + \varepsilon \triangleright e_{\Delta} \cdot v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} + e_{\Delta}^2 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}^2 \\ &= Q_V(v) \triangleright e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright v \cdot e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} - \varepsilon \triangleright v \cdot e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} + \varepsilon Q_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \triangleright e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C \\ &\equiv (Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}})(v, \tilde{v}) \triangleright e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C, \end{aligned}$$

a zatem indukuje (jedyny) unitalny homomorfizm \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{\Psi} : C_{\oplus} \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}})$$

o własności

$$\tilde{\Psi}(v, \tilde{v}) = v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}.$$

Zauważmy, że reprezentacja (3.1.12) elementu kanonicznego pozwala nam obliczyć wprost

$$\tilde{\Psi} \circ \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \equiv \tilde{\Psi} \circ \tilde{\mathcal{J}}_V(e_1 \cdot e_2 \cdots e_{2m}) = \tilde{\Psi}(\mathcal{J}_V(e_1) \cdot \mathcal{J}_V(e_2) \cdots \mathcal{J}_V(e_{2m}))$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi(e_1, 0) \cdot \Psi(e_2, 0) \cdots \Psi(e_{2m}, 0) = (e_1 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \cdot (e_2 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \cdots (e_{2m} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \\
&= e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C.
\end{aligned}$$

Tożsamości

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi} \circ \Phi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) &= \tilde{\Psi}((v, 0) \cdot \tilde{\varphi}(e^C) + \tilde{\mathcal{J}}_V(e^C) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{v})) \\
&= \tilde{\Psi}((v, 0) \cdot \mathbf{1}_{C_{\oplus}} + \mathbf{1}_{C_{\oplus}} \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v})) \\
&= \tilde{\Psi}(v, 0) + \tilde{\Psi} \circ \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\Psi}(0, \tilde{v}) \\
&= v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + (e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \cdot (\varepsilon \triangleright e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\
&= v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_{\Delta}^2 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} \\
&= v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \tilde{\Psi}(v, \tilde{v}) &= \Phi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) = \Phi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) + \varepsilon \triangleright \Phi(e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\
&= \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{e}^C) + \varepsilon \triangleright \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{v}) \\
&= (v, 0) \cdot \mathbf{1}_{C_{\oplus}} + \varepsilon \triangleright \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \\
&= (v, 0) + \varepsilon \triangleright \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}^2) \cdot (0, \tilde{v}) = (v, 0) + (0, \tilde{v}) \equiv (v, \tilde{v}).
\end{aligned}$$

pokazują dowodnie – na (nietrywialnych) generatorach, więc i ogólnie (wobec homomorficznego charakteru rozpatrywanych odwzorowań) – antycypowaną odwracalność Φ . \square

Na zakończenie rozważań ogólnych, wytyczających szlak ku twierdzeniom klasyfikacyjnym dla rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, wypowiemy jeszcze istotne

TWIERDZENIE 3.1.8. *Przyjmijmy zapis Def. 16, 32, 107 oraz 108 i niechaj $((V_{\alpha}, +_{\alpha}, P_{\alpha}, \bullet \mapsto 0_{\alpha}), \ell_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami \mathbb{K} -liniowymi wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} V_2 =: N < \infty$, a nadto niech $\Delta : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{K}$ będzie dwoistością. Określmy na $V_1 \oplus V_2$ formę kwadratową*

$$Q_{\Delta} : V_1 \oplus V_2 \rightarrow \mathbb{K} : (v_1, v_2) \mapsto \Delta(v_1, v_2).$$

Istnieje kanoniczny unitalny izomorfizm \mathbb{K} -algebr

$$\text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_{\Delta}) \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1).$$

■

Dowód: Zaczniemy od odnotowania, że sensowność definicji formy kwadratowej Q_{Δ} jest prostą kownsekwencją dwuliniowości doistości Δ . To rzekłszy, możemy przywołać Stw. 6, które daje nam do ręki izomorfizm przestrzeni \mathbb{K} -liniowych

$$r_{\Delta} : V_2 \xrightarrow{\cong} V_1^* : v \mapsto \Delta(\cdot, v).$$

Ten w połączeniu z tezą Stw. 167 pozwala nam wypisać wygodny układ generujący \mathbb{K} -algebry $\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1)$ złożony z endomorfizmów μ_{v_1} , $v_1 \in V_1$ oraz $\iota_{r_{\Delta}(v_2)}$, $v_2 \in V_2$, które spełniają proste relacje

$$\mu_{v_1}^2 = 0 = \iota_{r_{\Delta}(v_2)}^2, \quad \{\iota_{r_{\Delta}(v_2)}, \mu_{v_1}\} = \Delta(v_1, v_2) \triangleright \text{id}_{\bigwedge^{\bullet} V_1}.$$

O ile dwie pierwsze nie wymagają dodatkowego komentarza, ostatnią sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (na tensorach prostych, dla dowolnych $w_i \in V_1$, $i \in \overline{1, n}$):

$$\begin{aligned} \{\iota_{r_{\Delta}(v_2)}, \mu_{v_1}\}(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) &= \iota_{r_{\Delta}(v_2)}(v_1 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) \\ &+ v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &= \Delta(v_1, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &- v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &+ v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &= \Delta(v_1, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &\equiv \Delta(v_1, v_2) \triangleright \text{id}_{\bigwedge^{\bullet} V_1}(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n). \end{aligned}$$

Zdefiniujmy odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe

$$\varphi : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1) : (v_1, v_2) \longmapsto \mu_{v_1} + \iota_{r_{\Delta}(v_2)}.$$

Na podstawie wypisanych wyżej tożsamości bez trudu sprawdzamy, że spełnia ono warunek Clifforda,

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, v_2)^2 &\equiv (\mu_{v_1} + \iota_{r_{\Delta}(v_2)}) \circ (\mu_{v_1} + \iota_{r_{\Delta}(v_2)}) = \mu_{v_1}^2 + \iota_{r_{\Delta}(v_2)}^2 + \{\iota_{r_{\Delta}(v_2)}, \mu_{v_1}\} \\ &= \Delta(v_1, v_2) \triangleright \text{id}_{\bigwedge^{\bullet} V_1} \equiv Q_{\Delta}(v_1, v_2) \triangleright \mathbf{1}_{\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1)}, \end{aligned}$$

rozszerza się ono zatem kanonicznie do unitalnego homomorfizmu \mathbb{K} -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_{\Delta}) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1)$$

o własności

$$\tilde{\varphi}(v_1, v_2) = \mu_{v_1} + \iota_{r_{\Delta}(v_2)}.$$

Na mocy Stw. 167 podprzestrzeń $\text{Im } \tilde{\varphi} \upharpoonright_{J_{V_1 \oplus V_2}^c(V_1 \oplus V_2)} \equiv \text{Im } \varphi$ generuje $\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1)$ jako \mathbb{K} -algebrę, zatem $\tilde{\varphi}$ jest epimorfizmem. Ale zarazem – w świetle Równ. (3.1.10)

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_{\Delta}) = 2^{\dim_{\mathbb{K}}(V_1 \oplus V_2)} = 2^{\dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2} = 2^{2 \dim_{\mathbb{K}} V_1}$$

oraz – tym razem na gruncie Tw. 1.2.11 oraz Stw. 166 –

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1) = (\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^{\bullet} V_1)^2 = (2^{\dim_{\mathbb{K}} V_1})^2 \equiv 2^{2 \dim_{\mathbb{K}} V_1},$$

co pokazuje dowodnie, że $\tilde{\varphi}$ jest w istocie izomorfizmem. \square

Jako proste corollarium do poprzedniego twierdzenia otrzymujemy

STWIERDZENIE 175. *Przyjmijmy zapis Def. 107, zakładając przy tym, że $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, przestrzeń kwadratowa V jest niezwyrodniała i ma $\dim_{\mathbb{K}} V \in 2\mathbb{N}$. Niechaj $\omega \in \text{End}_{\mathbb{K}} V$ będzie inwolucją, $\omega^2 = \text{id}_V$, skośnie symetryczną względem formy kwadratowej Q , tj. taką, która spełnia warunek*

$$\omega^* = -\omega$$

wypisany dla

$$\forall_{v_1, v_2 \in V} : \Phi_Q(\omega^*(v_1), v_2) := \Phi_Q(v_1, \omega(v_2)).$$

Wówczas istnieje kanoniczny unitalny izomorfizm \mathbb{K} -algebr

$$\text{Cliff}(V, Q) \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} \text{Ker}(\omega - \text{id}_V)).$$

■

Dowód: Inwolucja ω zadaje – w świetle Stw. 32 – rozkład

$$V = \text{Ker}(\omega - \text{id}_V) \oplus \text{Ker}(\omega + \text{id}_V) \equiv V_- \oplus V_+,$$

gdyż para $P_{\pm} := 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (\omega \pm \text{id}_V)$ stanowi zupełny układ rzutów komplementarnych. Ponadto dla dowolnych $v_{\pm}, w_{\pm} \in V_{\pm}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\pm}) &= \Phi_Q(\mp\omega(v_{\pm}), \mp\omega(w_{\pm})) = \Phi_Q(\omega^* \circ \omega(v_{\pm}), \omega^* \circ \omega(w_{\pm})) = -\Phi_Q(\omega^2(v_{\pm}), \omega^2(w_{\pm})) \\ &= -\Phi_Q(v_{\pm}, w_{\pm}), \end{aligned}$$

przeto

$$V_{\pm} \perp_Q V_{\pm},$$

natomiast w ograniczeniu do $V_{\pm} \times V_{\mp}$ forma dwuliniowa Φ_Q jest niezwyrodniała – istotnie, ilekroć dla ustalonego $v_{\pm} \in V_{\pm}$ jest

$$\forall_{w_{\mp} \in V_{\mp}} : \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\mp}) = 0_{\mathbb{K}},$$

to dowolny wektor $V \ni w = \tilde{w}_- \oplus w_+$ wzgl. $w = w_- \oplus \tilde{w}_+$ spełnia warunek

$$\Phi_Q(v_{\pm}, w) = \Phi_Q(v_{\pm}, \tilde{w}_{\pm}) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\mp}) = \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\mp}) = 0_{\mathbb{K}},$$

zatem – wobec niezwyrodnienia Q – koniecznie

$$v_{\pm} = 0_V.$$

W rezultacie otrzymujemy parę dwoistą (V_-, V_+) związaną dwoistością

$$\Delta_Q := 2\Phi_Q \upharpoonright_{V_- \times V_+},$$

dla której wyprowadzamy tożsamość

$$\begin{aligned} \Phi_Q(v_- \oplus v_+, w_- \oplus w_+) &= \Phi_Q(v_-, w_-) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_+, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_+, w_-) \\ &= \Phi_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(w_-, v_+) \\ &\equiv 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (\Delta_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Delta_Q(w_-, v_+)), \end{aligned}$$

a z niej – równość

$$Q(v_- \oplus v_+) = \Delta_Q(v_-, v_+),$$

usprawiedliwiająca – w połączeniu z wcześniejszymi obserwacjami – bezpośrednio odwołanie się do Tw. 3.1.8. Na tej podstawie stwierdzamy, zgodnie z tezą będącą przedmiotem dowodu,

$$\text{Cliff}(V, Q) \equiv \text{Cliff}(V_- \oplus V_+, Q \equiv Q_{\Delta_Q}) \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_-).$$

□

Klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda

W dalszej części wykładu przedstawimy kompletną klasyfikację algebr Clifforda stowarzyszonych ze skończone wymiarowymi przestrzeniami kwadratowymi nad ciałami liczbowymi o szczególnym znaczeniu w modelowaniu zjawisk fizycznych, tj. nad \mathbb{R} i \mathbb{C} .

1. Rzeczywiste algebry Clifforda w skończonym wymiarze

Tytułem wstępu sformułujemy porządkujące, a oczywiste

STWIERDZENIE 176. *Przyjmijmy zapis Def. 38 i 107 oraz Przykł. 14 (1). Algebra Clifforda dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej wyposażonej w niezwyrodniałą formę kwadratową o sygnaturze (p, q) jest izomorficzna z algebrą Clifforda przestrzeni (pseudo)euklidesowej $\mathbb{R}^{p,q}$. Tę ostatnią algebrę Clifforda oznaczamy symbolem*

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}) \equiv \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}.$$

■

Dowód: Natychmiastowa konsekwencja koniunkcji Tw. 1.2.3 i Stw. 171. □

Powyzsze przygotowuje nas do klasyfikacji rzeczywistych algebr Clifforda, do której przejdziemy obecnie. Zaczynamy od

TWIERDZENIE 3.2.1 (Klasyfikacyjne IR). *Przyjmijmy zapis Stw. 148 oraz 176 i ustalmy (dowolnie) parę $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$. Istnieją unitalne izomorfizmy \mathbb{R} -algebr*

$$\text{Cl}_{p+2,q}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}},$$

$$\text{Cl}_{p,q+2}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}.$$

W szczególności

$$\text{Cl}_{p+2,0}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{0,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}},$$

$$\text{Cl}_{0,q+2}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{0,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}.$$

■

Dowód: W świetle Stw. 36 i 173 w przypadku obu algebr: $\text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}$ i $\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}$ istnieją wyznaczniki unormowane $\Delta \in \wedge^{\bullet} \mathbb{R}^{\times 2}$, dla których $\lambda_{\Delta} = 1$, zachodzi więc tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{2(2-1)}{2}} \lambda_{\Delta} \triangleright e^{\mathbb{C}} = -e^{\mathbb{C}} =: \varepsilon_2 \triangleright e^{\mathbb{C}}.$$

Oznaczmy

$$\varepsilon_2 \mathbb{R}^{q,p} \equiv (\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^p, \varepsilon_2 (\delta_E^{(q)} \oplus (-\delta_E^{(p)}))) = (\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^p, (-\delta_E^{(q)}) \oplus \delta_E^{(p)}) = \mathbb{R}^{p,q}$$

i dokonajmy – jak w Tw. 3.1.7 – rozkładu ortogonalnego (względem $\delta_E^{(p+2,q)}$)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{p+2,q} &= \mathbb{R}^{2,0} \oplus_{\delta_E^{(p+2,q)}} \mathbb{R}^{p,q} \equiv \mathbb{R}^{2,0} \oplus_{\delta_E^{(p+2,q)} \varepsilon_2} \mathbb{R}^{q,p} \\ &\equiv (\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{p+q}, \delta_E^{(2,0)} \oplus \varepsilon_2 \delta_E^{(q,p)}), \end{aligned}$$

a następnie przywołajmy tezę Tw. 3.1.7 (oraz Tw. 1.2.7), aby zapisać

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p+2,q}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0} \oplus_{\delta_E^{(p+2,q)} \varepsilon_2} \mathbb{R}^{q,p}) \cong \text{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cliff}(\mathbb{R}^{q,p}) \equiv \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Na podstawie analogicznego rozkładu

$$\mathbb{R}^{p,q+2} = \mathbb{R}^{0,2} \oplus_{\delta_E^{(p,q+2)} \varepsilon_2} \mathbb{R}^{q,p}$$

otrzymujemy drugą z pożądaných tożsamości

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,q+2}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2} \oplus_{\delta_E^{(p,q+2)} \varepsilon_2} \mathbb{R}^{q,p}) \cong \text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cliff}(\mathbb{R}^{q,p}) \equiv \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

□

Mamy także

TWIERDZENIE 3.2.2 (Klasyfikacyjne II \mathbb{R}). *Przyjmijmy zapis Stw. 176. Ilkroć składowe sygnatury $(p, q) \in \mathbb{N} \times 2$ spełniają relację $q \equiv p \pmod{4}$, istnieje unikatny izomorfizm \mathbb{R} -algebr*

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}}.$$

W szczególności

$$\forall_{n \in 4\mathbb{N}} : \text{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{0,n}^{\mathbb{R}}.$$

■

Dowód: Zacznijmy od spostrzeżenia:

$$N = p + q = p - q + 2q = 4k + 2q = 2(2k + q) \in 2\mathbb{N}.$$

Jeśli zatem Δ jest wyznacznikiem unormowanym na $\mathbb{R}^{p,q}$, to

$$\lambda_{\Delta} = (-1)^q \equiv (-1)^{q+2k} = (-1)^{(q+2k)(2(2k+q)-1)} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}},$$

możemy przeto zastosować Tw. 3.1.6, na mocy którego (w konwencji poprzedniego dowodu)

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}) \cong \text{Cliff}(-\mathbb{R}^{p,q}) \equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{q,p}) \equiv \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}}.$$

□

W następnej kolejności napotykamy oczywiste, acz przydatne

TWIERDZENIE 3.2.3 (Klasyfikacyjne III \mathbb{R}). *Przyjmijmy zapis Stw. 176. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieją unitalne izomorfizmy \mathbb{R} -algebr*

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{n+8,0}^{\mathbb{R}} &\cong \text{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}}, \\ \text{Cl}_{0,n+8}^{\mathbb{R}} &\cong \text{Cl}_{0,n}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

przy czym

$$\text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}}.$$

■

Dowód: Wybrawszy na $\mathbb{R}^{8,0}$ (wzgl. $\mathbb{R}^{0,8}$) wyznacznik unormowany, otrzymujemy $\lambda_{\Delta} = 1$, a zatem

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{8(8-1)}{2}} \triangleright e^{\text{C}} = e^{\text{C}} =: \varepsilon_8 \triangleright e^{\text{C}},$$

skąd – w świetle Tw. 3.1.7 (oraz Tw. 1.2.7) i w konwencji przyjętej wcześniej –

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{n+8,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{8,0} \oplus \varepsilon_8 \mathbb{R}^{n,0}) \cong \text{Cliff}(\mathbb{R}^{8,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cliff}(\mathbb{R}^{n,0}) \equiv \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \text{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Drugiej tożsamości dowodzimy analogicznie. Ostatnia część tezy dowodzonego twierdzenia jest implikowana przez Tw. 3.2.2. \square

Do pełnej klasyfikacji rzeczywistych algebr Clifforda brakuje nam już tylko dyskusji ich struktury w przypadku sygnatury mieszanej – ten opisuje

TWIERDZENIE 3.2.4 (Klasyfikacyjne IV \mathbb{R}). *Przyjmijmy zapis Def. 108, Stw. 176 i Przykł. 29 (2). Dla dowolnych $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ istnieją unitalne izomorfizmy \mathbb{R} -algebr*

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} &\cong \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{\times p}) \equiv \mathbb{R}(2^p), \\ \text{Cl}_{p,p+r}^{\mathbb{R}} &\cong \text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,r}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^p) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,r}^{\mathbb{R}}, \\ \text{Cl}_{q+s,q}^{\mathbb{R}} &\cong \text{Cl}_{q,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{s,0}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^p) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{s,0}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

■

Dowód: Istnienie dwóch ostatnich klas izomorfizmów jest bezpośrednią konsekwencją istnienia pierwszej rodziny izomorfizmów oraz tego, że element kanoniczny $\text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}}$ stowarzyszony z wyznacznikiem unormowanym spełnia tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{2p(2p-1)}{2}} \cdot (-1)^p \triangleright e^{\text{C}} = e^{\text{C}} =: \varepsilon_{p,p} \triangleright e^{\text{C}},$$

co – w świetle Tw. 3.1.7 i w konwencji przyjętej wcześniej – daje nam

$$\text{Cl}_{p,p+r}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,p} \oplus \varepsilon_{p,p} \mathbb{R}^{0,r}) \cong \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,p}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,r}) \equiv \text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,r}^{\mathbb{R}}$$

i analogiczny wynik dla $\text{Cl}_{q+s,q}^{\mathbb{R}}$. Pozostaje zatem wykazać słuszność pierwszej części tezy. W tym celu dokonujemy rozkładu ortogonalnego

$$\mathbb{R}^{p,p} = \mathbb{R}^{p,0} \oplus_{\delta_{p,p}} \mathbb{R}^{0,p}$$

i wybieramy bazy (pseudo)ortonormalne: $\{e_i^+\}_{i \in \overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^{p,0}$ oraz $\{e_j^-\}_{j \in \overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^{0,p}$,

$$\Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\pm}, e_j^{\pm}) = \pm \delta_{i,j}, \quad \Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^+, e_j^-) = 0, \quad i, j \in \overline{1,p}.$$

Tych możemy użyć do zdefiniowania inwolucji $\omega \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2p})$ stanowiącej (jedyne) \mathbb{R} -liniowe rozszerzenie przyporządkowania elementów baz:

$$\omega(e_i^{\pm}) := e_i^{\mp}, \quad i \in \overline{1, p}.$$

Bez trudu upewniamy się, że inwolucja ta jest skośnie symetryczna,

$$\Phi_{\delta_{p,p}}(\omega^*(e_i^{\pm}), e_j^{\pm}) \equiv \Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\pm}, \omega(e_j^{\pm})) = \Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\pm}, e_j^{\mp}) = 0 = \Phi_{\delta_{p,p}}(-\omega(e_i^{\pm}), e_j^{\pm}),$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta_{p,p}}(\omega^*(e_i^{\pm}), e_j^{\mp}) &\equiv \Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\pm}, \omega(e_j^{\mp})) = \Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\pm}, e_j^{\pm}) = \pm \delta_{i,j} = -\Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\mp}, e_j^{\mp}) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{p,p}}(-\omega(e_i^{\pm}), e_j^{\mp}), \end{aligned}$$

i jako taka pozwala na odniesienie do pary $(\mathbb{R}^{p,p}, \omega)$ tezy Stw. 175, która przesądza o istnieniu izomorfizmu

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,p}) \cong \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge \bullet \text{Ker}(\omega - \text{id}_{\mathbb{R}^{p,p}})) \equiv \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge \bullet \bigoplus_{i=1}^p \langle e_i^+ + e_i^- \rangle_{\mathbb{R}}) \\ &\equiv \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge \bullet \mathbb{R}^{\times p}). \end{aligned}$$

□

W podsumowaniu dotychczasowych rozważań klasyfikacyjnych otrzymujemy

TWIERDZENIE 3.2.5 (Klasyfikacyjne $V \mathbb{R}$ – „Szachownica Clifforda”). *Przyjmijmy zapis Stw. 145 i 176. Tablica 1 zawiera klasyfikację algebr Clifforda $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ dla $p, q \in \overline{0, 8}$ i tym samym określa $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ dla dowolnej sygnatury (p, q) . W szczególności odczytujemy z niej tożsamości*

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,p+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{R}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-1+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{R}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4k}), & \text{Cl}_{p,p+1+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{C}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-2+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{R}(2^{p-1+4k}), & \text{Cl}_{p,p+2+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{H}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-3+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{C}(2^{p-1+4k}), & \text{Cl}_{p,p+3+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-4+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{H}(2^{p-3+4k}), \end{aligned}$$

śluszne dla dowolnych $p, k, l \in \mathbb{Z}$, dla których powyższe formuły mają sens.

■

Dowód: Zawartość tabeli jest prostą konsekwencją Twierdzeń Klasyfikacyjnych I–IV \mathbb{R} , Stw. 151 oraz 165. Poniżej przedstawimy kilka spośród 81 rachunków szczegółowych, pozostawiając Czytelnika z elementarnym zadaniem sprawdzenia wszystkich pozostałych. Oto więc postać trywialnej algebry $\text{Cl}_{0,0}^{\mathbb{R}}$ wynika wprost z definicji algebry Clifforda, natomiast postać $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ dla $0 < p + q \leq 2$ odczytujemy ze Stw. 165. Zaczynamy więc od wyprowadzenia

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{3,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{1+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{3.2.1}{\cong} \text{Cl}_{0,1}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{165}{\cong} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \stackrel{1.2.7}{\cong} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \stackrel{151(i)}{\cong} \mathbb{C}(2), \\ \text{Cl}_{0,3}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{0,1+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{3.2.1}{\cong} \text{Cl}_{1,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{165}{\cong} (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \stackrel{1.2.10}{\cong} (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \\ &\stackrel{151(i)}{\cong} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{4,0}^{\mathbb{R}} &\stackrel{\cong}{\underset{3.2.2}{\cong}} \text{Cl}_{0,4}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cl}_{0,2+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{165 \text{ (iii,iv)}}{\cong}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{H}(2). \end{aligned}$$

(3.2.1)

Na podstawie powyższego wyznaczamy dalej

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{5,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{3+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{0,3}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.1),165 \text{ (iii)}}{\cong}} (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.10}{\cong}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)) \oplus (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)) \stackrel{\cong}{\underset{1.2.7}{\cong}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \\ &\stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2), \\ \text{Cl}_{0,5}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{0,3+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{3,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.1),165 \text{ (iv)}}{\cong}} \mathbb{C}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (iii)}}{\cong}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.8}{\cong}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (iv)}}{\cong}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) \stackrel{\cong}{\underset{1.2.7}{\cong}} \mathbb{R}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{C}(4), \\ \text{Cl}_{6,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{4+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{0,4}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.1),165 \text{ (iii)}}{\cong}} \mathbb{H}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.7}{\cong}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{H}(4), \\ \text{Cl}_{0,6}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{0,4+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{4,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.1),165 \text{ (iv)}}{\cong}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.8}{\cong}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (iv)}}{\cong}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) \stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{R}(8). \end{aligned}$$

(3.2.2)

Biorąc pod uwagę rezultaty ostatniego rachunku, otrzymujemy następnie

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{7,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{5+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{0,5}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.2),165 \text{ (iii)}}{\cong}} \mathbb{C}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \stackrel{\cong}{\underset{1.2.7}{\cong}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(4) \\ &\stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{C}(8), \\ \text{Cl}_{0,7}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{0,5+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{5,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.2),165 \text{ (iv)}}{\cong}} [(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.10}{\cong}} [(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}] \oplus [(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}] \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.8}{\cong}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})) \\ &\stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (iv)}}{\cong}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4)) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4)) \stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8), \\ \text{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}} &\stackrel{\cong}{\underset{3.2.2}{\cong}} \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cl}_{6+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{0,6}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.2),165 \text{ (iii)}}{\cong}} \mathbb{R}(8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \stackrel{\cong}{\underset{151 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{R}(16). \end{aligned}$$

(3.2.3)

Ostatnia składowa tezy dowodzonego twierdzenia broni się na podstawie następującej obserwacji, opartej na Tw. 3.2.1 (jak również 1.2.7 i 1.2.8), Stw. 165 (iii) i (iv) oraz 151 (i) i Równ. (3.2.3),

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p+8,q}^{\mathbb{R}} &\cong \text{Cl}_{q,p+6}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \cong (\text{Cl}_{p+4,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{p+4,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}) \\ &\cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} ((\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} (\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}})) \cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_{p,q+8}^{\mathbb{R}} &\cong \mathrm{Cl}_{q+6,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \cong (\mathrm{Cl}_{p,q+4}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \cong \mathrm{Cl}_{p,q+4}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathrm{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}) \\
&\cong \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} ((\mathrm{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathrm{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}})) \cong \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}} \\
&\cong \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16).
\end{aligned}$$

□

Rzut oka na Tablicę 1 przekonuje nas, że wszystkie rzeczywiste algebry Clifforda są – w świetle Stw. 143 – proste lub półproste, przy czym w tym drugim przypadku mamy do czynienia z sumami prostymi dwóch algebr prostych. Łatwo dostrzeżalne prawidłowości w lokalizacji algebr półprostych pośród rzeczywistych algebr Clifforda (i w szczególności w obrębie „szachownicy Clifforda”) oraz ich strukturę można bez trudu wyjaśnić w odwołaniu do konstrukcji elementu kanonicznego. Wprowadźmy pojęcie

DEFINICJA 112. Przyjmijmy zapis Stw. 176 i niechaj $\{e_i\}_{i \in \overline{1,p+q}}$ będzie bazą standardową $\mathbb{R}^{\times p} \oplus \mathbb{R}^{\times q}$, (pseudo)ortonormalną względem formy kwadratowej $\delta_E^{(p,q)}$. **Element objętości** w $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ to wektor

$$\omega_{\mathbb{R}} := e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q}.$$

▲

Możemy już teraz wysłowić wyjaśniające zaobserwowane regularności

STWIERDZENIE 177. *Przyjmijmy zapis Def. 109 i 112 i Stw. 143, 145 oraz 146. Dla dowolnej pary $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ prawdziwą jest równoważność*

$$\omega_{\mathbb{R}}^2 = e^{\mathbb{C}} \iff (p+q+1)(p+q) - 2p \in 4\mathbb{N}.$$

W jej konsekwencji dla dowolnej sygnatury spełniającej warunek

$$(3.2.4) \quad q - p = 3 \pmod{4}$$

istnieje rozkład

$$(3.2.5) \quad \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} = \mathrm{Cl}_{p,q}^+ \oplus \mathrm{Cl}_{p,q}^-$$

algebry Clifforda $\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ na sumę prostą jej podalgebr (zredukowanych)

$$\mathrm{Cl}_{p,q}^{\pm} := P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm} \cdot \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}},$$

o elementach spełniających warunki – odpowiednio – **samodwoistości** (lub inaczej **samodualności**)

$$\forall \gamma \in \mathrm{Cl}_{p,q}^+ : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma = \gamma,$$

wzgl. **skośnej samodwoistości** (lub inaczej **antysamodualności**)

$$\forall \gamma \in \mathrm{Cl}_{p,q}^- : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma = -\gamma.$$

Zachodzą relacje:

$$(3.2.6) \quad J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\mathrm{Cl}_{p,q}^{\pm}) = \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mp}$$

oraz

$$(3.2.7) \quad \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0} = (\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}})(\mathrm{Cl}_{p,q}^{\pm}).$$

Rozkład ten pokrywa się z rozkładem półprostej \mathbb{R} -algebry $Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}$ na składowe proste wynikającym z Tw. 3.2.5 (ukazanym w Tablicy 1), tj. dla dowolnych $k, l \in \mathbb{Z}$ o własnościach $p + 3 + 8k, p + 7 + 8l \geq 0$ istnieją izomorfizmy \mathbb{R} -algebr prostych

$$(3.2.8) \quad Cl_{p,p+3+8k}^{\pm} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}), \quad Cl_{p,p+7+8l}^{\pm} \cong \mathbb{R}(2^{p+3+4l}).$$

■

Dowód: Pierwszą część tezy sprawdzamy w bezpośrednim rachunku, wykorzystującym ortonormalność bazy standardowej,

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{R}}^2 &= e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q} \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q} = (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}} e_1^2 \cdot e_2^2 \cdots e_{p+q}^2 \\ &= (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2} + q} e^C = (-1)^{\frac{(p+q)^2 - p + q}{2}} e^C, \end{aligned}$$

z którego wynika wprost dowodzony postulat. Przy tym zgodnie z tezą Tw. 3.1.5 $\omega_{\mathbb{R}}$ jest elementem centralnym tylko dla $p + q \in 2\mathbb{N} + 1$, co w świetle Stw. 146 prowadzi do rozkładu jak w Równ. (3.2.5), kiedy dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ spełniony jest układ warunków

$$p + q = 2k + 1 \quad \wedge \quad 2k + 2q \in 4\mathbb{N}.$$

Po podstawieniu pierwszego z nich do drugiego otrzymujemy warunek (3.2.4) jako rozwiązanie układu. Relacja (3.2.6) jest następstwem oczywistej tożsamości

$$J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}) = P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\mp} \quad \Longleftarrow \quad J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\omega_{\mathbb{R}}) = -\omega_{\mathbb{R}}.$$

Istotnie, na jej podstawie wyprowadzamy relacje

$$J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(Cl_{p,q}^{\pm}) \subset Cl_{p,q}^{\mp},$$

a ewaluując na tych ostatnich obustronnie $J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}$ – także relacje odwrotne

$$Cl_{p,q}^{\pm} \subset J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(Cl_{p,q}^{\mp}).$$

Z kolei relację (3.2.7) wyprowadzamy z następujących obserwacji. Z jednej strony zachodzi

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{R}^{\times p+q}} \circ (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}) &= (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}) \\ \implies (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}})(Cl_{p,q}^{\pm}) &\subset Cl_{p,q}^{\mathbb{R}0}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony niechaj $\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-)$ będzie rozkładem elementu $\gamma_0 \in Cl_{p,q}^{\mathbb{R}0}$ na składowe z $Cl_{p,q}^{\pm} \ni \gamma_0^{\pm}$, a wówczas – wobec (3.2.6) – otrzymujemy równość

$$(\gamma_0^+, \gamma_0^-) = \gamma_0 = J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0) = (J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^-), J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^+)),$$

z której już wprost wynika wniosek, że

$$\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-) = (\gamma_0^+, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^+)) \in (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}})(Cl_{p,q}^+)$$

oraz

$$\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-) = (J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^-), \gamma_0^-) \in (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}})(Cl_{p,q}^-).$$

Ażeby przekonać się, że wskazany rozkład pokrywa się z rozkładem algebry Clifforda na podalgebry proste, wystarczy zauważyć, że przewidziane przez Tw. 3.2.5 (w połączeniu z powyższymi ustaleniami) izomorfizmy \mathbb{R} -algebr

$$\iota_3 \quad : \quad \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k}) \xrightarrow{\cong} Cl_{p,p+8k+3}^+ \oplus Cl_{p,p+8k+3}^-,$$

$$\iota_7 : \mathbb{R}(2^{p+4l+3}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4l+3}) \xrightarrow{\cong} \text{Cl}_{p,p+8l+7}^+ \oplus \text{Cl}_{p,p+8l+7}^-$$

odwzorowują *proste* składniki $\mathbb{H}(2^{p+4k})$ wzgl. $\mathbb{R}(2^{p+4l+3})$ dziedziny w *takież* podalgebry przeciwdziedziny, gdyby zatem istniały nietrywialne rozkłady

$$\mathfrak{M}_3 := \iota_3(\mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \{\mathbf{0}_{2^{p+4k}}\}) = \mathfrak{M}_3 \cap \text{Cl}_{p,p+8k+3}^+ \oplus \mathfrak{M}_3 \cap \text{Cl}_{p,p+8k+3}^-,$$

$$\mathfrak{M}_7 := \iota_7(\mathbb{R}(2^{p+4l+3}) \oplus \{\mathbf{0}_{2^{p+4l+3}}\}) = \mathfrak{M}_7 \cap \text{Cl}_{p,p+8l+7}^+ \oplus \mathfrak{M}_7 \cap \text{Cl}_{p,p+8l+7}^-,$$

to każdy ze składników prostych po prawej stronie powyższych równości byłby nietrywialnym obustronnym ideałem w odnośnej algebrze \mathfrak{M}_m , $m \in \{3, 7\}$, a to z tej racji, że składniki proste w rozkładzie (3.2.5) są podalgebrami, zatem

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\pm) \cdot (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\pm) &\subseteq \mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\pm, \\ (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\pm) \cdot (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\mp) &= \{0_{\text{Cl}_{p,p+8k+m}^\mathbb{R}}\} \\ &\subseteq (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\pm) \cap (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\mp). \end{aligned}$$

To jednak leży w sprzeczności z prostotą \mathfrak{M}_m , wnioskujemy zatem, że albo $\mathfrak{M}_m \subseteq \text{Cl}_{p,p+8k+m}^+$, albo też $\mathfrak{M}_m \subseteq \text{Cl}_{p,p+8k+m}^-$. Teza jest teraz natychmiastową konsekwencją rachunku wymiarów. \square

Zanim przejdziemy do dyskusji zespolonych algebr Clifforda, zatrzymamy się nad jednym jeszcze wynikiem strukturalnym dotyczącym algebr rzeczywistych, który odegra niebagatelną rolę w rachunku spinorowym. Oto więc mamy

STWIERDZENIE 178. *Przyjmijmy zapis Def. 109 oraz Stw. 176. Dla dowolnej sygnatury $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ istnieje unitalny izomorfizm \mathbb{R} -algebr*

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0}.$$

■

Dowód: Wybierzmy w $\mathbb{R}^{p,q+1}$ (o formie kwadratowej $Q = \delta_{\mathbb{E}}^{(p,q+1)}$) bazę standardową (pseudo)ortonormalną $\{e_i\}_{i \in \overline{1,p+q+1}}$ uporządkowaną tak, że wektory e_j , $j \in \overline{1,p}$ rozpinają podprzestrzeń o sygnaturze $(p, 0)$, a pozostałe wektory e_k , $k \in \overline{p+1, p+q+1}$ – podprzestrzeń o sygnaturze $(0, q+1)$. Następnie zdefiniujmy podprzestrzeń

$$\mathbb{R}^{p+q} := \bigoplus_{i=1}^{p+q} \langle e_i \rangle_{\mathbb{R}},$$

a na niej – odwzorowanie

$$\varphi : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0} : v \longmapsto v \cdot e_{p+q+1},$$

które ma własność Clifforda, co pokazujemy – dla dowolnego wektora $v := \sum_{i=1}^N \lambda^i \triangleright e_i \in \mathbb{R}^{p+q}$ – w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} \varphi(v)^2 &= \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright e_i \cdot e_{p+q+1} \cdot e_j \cdot e_{p+q+1} = - \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright e_i \cdot e_j \cdot e_{p+q+1}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright e_i \cdot e_j \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright \{e_i, e_j\} = Q(v) \triangleright e^{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

To gwarantuje istnienie unitalnego homomorfizmu \mathbb{R} -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0},$$

przy czym dowolny generator $\text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0}$ otrzymujemy z elementu dziedziny w następujący sposób: dla $1 \leq i < j \leq p+q$ mamy

$$e_i \cdot e_j = \tilde{\varphi}(e_i) \cdot \tilde{\varphi}(e_j) = \tilde{\varphi}(e_i \cdot e_j),$$

a dla $1 \leq k \leq p+q$ jest

$$e_k \cdot e_{p+q+1} = \tilde{\varphi}(e_k).$$

Jest zatem $\tilde{\varphi}$ epimorfizmem, a ponieważ – jak łatwo sprawdzić – $\dim_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0} = \dim_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$, przeto odwzorowanie to jest poszukiwanym izomorfizmem. \square

Poklasyfikowawszy rzeczywiste algebry Clifforda, przejdziemy obecnie do analizy ich zespolonych odpowiedników.

2. Zespolone algebry Clifforda w skończonym wymiarze

Bestiarium niezwyrodniałych algebr Clifforda nad zespolonymi przestrzeniami kwadratowymi osłaja i systematyzuje poniższe

STWIERDZENIE 179. *Przyjmijmy zapis Def. 107. Algebra Clifforda dowolnej zespolonej przestrzeni kwadratowej wyposażonej w niezwyrodniałą formę kwadratową rzędu $n \in \mathbb{N}$ jest izomorficzna z algebrą Clifforda przestrzeni $\mathbb{C}^{\times n}$ z euklidesową formą kwadratową $\delta_{\mathbb{E}}^{(n)}$. Tę ostatnią algebrę Clifforda oznaczamy symbolem*

$$\text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}) \equiv \text{Cl}_n^{\mathbb{C}}.$$

■

Dowód: Wynika wprost ze Stw. 23 i Tw. 3.1.3. \square

Stwierdzenie to pozwala udzielić natychmiastowej odpowiedzi na pytanie o postać zespolonych algebr Clifforda na gruncie dotychczasowych naszych rezultatów dotyczących rzeczywistych algebr Clifforda, co dowodnie pokazuje

TWIERDZENIE 3.2.6 (O naturalności kompleksyfikacji algebr Clifforda). *Przyjmijmy zapis Def. 27 i 98, Tw. 3.1.3, Stw. 176 i 179 oraz Przykł. 15 (2) i niechaj $\mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{K}}$ będzie kategorią algebr Clifforda nad ciałem \mathbb{K} , stanowiącą podkategorię kategorii $\mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}}$. Istnieje izomorfizm naturalny*

$$\begin{array}{ccc} \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{(\cdot)^{\mathbb{C}}} & \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \\ \downarrow \text{Cliff} & \nearrow \eta & \downarrow \text{Cliff} \\ \mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{(\cdot)^{\mathbb{C}} \upharpoonright_{\mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{R}}}} & \mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{C}} \end{array} .$$

W szczególności więc dla dowolnego $p \in \overline{0, n}$ istnieje unitalny izomorfizm \mathbb{C} -algebr

$$\text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \cong \text{Cl}_{p, n-p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

■

Dowód: Kanoniczny monomorfizm przestrzeni \mathbb{R} -liniowych

$$j_V : V \rightarrow V^{\mathbb{C}} : v \mapsto (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} v$$

jest izometrią (w odniesieniu do skompleksyfikowanej formy kwadratowej $Q^{\mathbb{C}}$ z Def. 45), oto bowiem

$$Q^{\mathbb{C}} \circ J_V(v) \equiv J_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \cdot (1, 0)^2 = J_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \equiv Q(v).$$

W świetle Stw. 171 istnieje zatem funktorialne podniesienie J_V do unitalnego monomorfizmu \mathbb{R} -algebr

$$\text{Cliff}(J_V) : \text{Cliff}(V, Q) \rightarrow \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}),$$

który możemy wykorzystać do skonstruowania odwzorowania \mathbb{C} -liniowego

$$\varphi_{(V, Q)} : \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}),$$

określonego na tensorach prostych $\gamma \otimes_{\mathbb{R}} z \in \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ wzorem

$$\varphi_{(V, Q)}(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} z) := z \triangleright \text{Cliff}(J_V)(\gamma).$$

Odwzorowanie to spełnia warunek

$$\begin{aligned} \varphi_{(V, Q)} \circ m_{\otimes}((\gamma_1 \otimes_{\mathbb{R}} z_1), (\gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_2)) &= \varphi_{(V, Q)}(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_1 \cdot z_2) \\ &= (z_1 \cdot z_2) \triangleright \text{Cliff}(J_V)(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \\ &= (z_1 \cdot z_2) \triangleright (\text{Cliff}(J_V)(\gamma_1) \cdot_{\mathbb{C}} \text{Cliff}(J_V)(\gamma_2)) \\ &= (z_1 \triangleright \text{Cliff}(J_V)(\gamma_1)) \cdot (z_2 \cdot_{\mathbb{C}} \text{Cliff}(J_V)(\gamma_2)) \\ &\equiv \varphi_{(V, Q)}(\gamma_1 \otimes_{\mathbb{R}} z_1) \cdot \varphi_{(V, Q)}(\gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_2), \end{aligned}$$

jest zatem (jawnie unitalnym) homomorfizmem \mathbb{C} -algebr. Punktem wyjścia do konstrukcji jego odwrotności jest odwzorowanie \mathbb{C} -liniowe

$$\begin{aligned} \psi_{(V, Q)} : V^{\mathbb{C}} &\longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ &: v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \longmapsto J_V(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + J_V(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), \end{aligned}$$

spełniające warunek Clifforda,

$$\begin{aligned} &\psi_{(V, Q)}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1))^2 \\ &= (J_V(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + J_V(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \cdot (J_V(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + J_V(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ &= v^2 \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)^2 + \{v, w\} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (0, 1) + w^2 \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)^2 \\ &= (Q(v) - Q(w)) \triangleright e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + 2\Phi_Q(v, w) \triangleright e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} e^{\mathbb{C}} (Q(v) - Q(w), 2\Phi_Q(v, w)) \\ &= Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \triangleright (e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)) \\ &\equiv Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \triangleright e_{\otimes}^{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

w którego wyprowadzeniu korzystamy z tożsamości

$$\begin{aligned} &Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ &\equiv \Phi_{Q^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi_{Q^c}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0), v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)) + \Phi_{Q^c}(w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\
&\quad + 2\Phi_{Q^c}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0), w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\
&\equiv Q^c(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)) + Q^c(w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) + 2\Phi_{Q^c}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0), w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\
&= (1, 0)^2 \cdot_{\mathbb{C}} Q(v) + (0, 1)^2 \cdot_{\mathbb{C}} Q(w) + (1, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} 2\Phi_Q(v, w) \\
&= (Q(v) - Q(w), 2\Phi_Q(v, w)).
\end{aligned}$$

Powyższe przesądza o istnieniu (jedyne) unitalnego homomorfizmu \mathbb{C} -algebr

$$\tilde{\psi}_{(V, Q)} : \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}) \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

o własności

$$\tilde{\psi}_{(V, Q)} \circ J_{V^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) = J_V(v) \otimes_{\mathbb{R}} z.$$

Ten ostatni w oczywisty sposób spełnia tożsamości

$$\tilde{\psi}_{(V, Q)} \circ \varphi_{(V, Q)} = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}}, \quad \varphi_{(V, Q)} \circ \tilde{\psi}_{(V, Q)} = \text{id}_{\text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}})},$$

które bez trudu sprawdzamy na generatorach, i tym samym zyskuje interpretację odwrotności $\varphi_{(V, Q)}$. Dla dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej otrzymujemy zatem unitalny izomorfizm \mathbb{C} -algebr

$$\eta_{(V, Q)} := \tilde{\psi}_{(V, Q)} : \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\cong} \text{Cliff}(V, Q)^{\mathbb{C}}.$$

Łatwo sprawdzamy (na generatorach $v \otimes_{\mathbb{R}} z \in V_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) jego naturalność licząc – dla dowolnej izometrii $\chi : V_1 \rightarrow V_2$ między parą rzeczywistych przestrzeni kwadratowych (o odnośnych formach kwadratowych Q_1 i Q_2) –

$$\begin{aligned}
\eta_{(V_2, Q_2)} \circ \text{Cliff}(\chi)^{\mathbb{C}} \circ J_{V_1^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) &= \eta_{(V_2, Q_2)} \circ J_{V_2^{\mathbb{C}}} \circ \chi^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) \\
&= \eta_{(V_2, Q_2)} \circ J_{V_2^{\mathbb{C}}}(\chi(v) \otimes_{\mathbb{R}} z) = J_{V_2} \circ \chi(v) \otimes_{\mathbb{R}} z \\
&\equiv \text{Cliff}(\chi) \circ J_{V_1}(v) \otimes_{\mathbb{R}} z \\
&= \text{Cliff}(\chi)^{\mathbb{C}}(J_{V_1}(v) \otimes_{\mathbb{R}} z) \\
&\equiv \text{Cliff}(\chi)^{\mathbb{C}} \circ \eta_{(V_1, Q_1)} \circ J_{V_1^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z).
\end{aligned}$$

□

Powyższe twierdzenie pozwala ustalić postać niskowymiarowych zespolonych algebr Clifforda i sformułować reguły (pseudo)okresowości ich struktury na podstawie wcześniejszych twierdzeń klasyfikacyjnych z dziedziny rzeczywistej. Nie daje nam natomiast wglądu w dodatkowe strukturalne relacje między zespolonymi algebrami Clifforda nie będące prostą pochodną relacji między ich rzeczywistymi odpowiednikami. Ta konstatacja każe nam poświęcić więcej jeszcze czasu i uwagi na bezpośrednie zbadanie interesującej nas struktury i zarezerwować dla powyższego twierdzenia rolę wyniku porządkującego i wyjaśniającego ledwie część prawidłowości, jakie wyłonią się ostatecznie z naszych rozważań. Oto więc mamy

TWIERDZENIE 3.2.7 (Klasyfikacyjne I \mathbb{C}). *Przyjmijmy zapis Stw. 148 i 179. Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ istnieje unitalny izomorfizm \mathbb{C} -algebr*

$$\text{Cl}_{2m+n}^{\mathbb{C}} \cong \text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \text{Cl}_n^{\mathbb{C}}.$$

■

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że wobec algebraicznej domkniętości \mathbb{C} na dowolnej przestrzeni $\mathbb{C}^{\times N}$, $N \in \mathbb{N}$ istnieje wyznacznik (unormowany) o własności $\lambda_{\Delta} = 1$, przy czym jest on określony z dokładnością do znaku. Na mocy Stw. 173 odnośny element kanoniczny $\text{Cl}_N^{\mathbb{C}}$ spełnia tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} e^{\mathbb{C}},$$

wobec czego dla $N = 2m + n$ otrzymujemy – w świetle Stw. 179 i Tw. 3.1.7 – pożądaną ciąg izomorfizmów

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{2m+n}^{\mathbb{C}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m+n}, \delta_{\mathbb{E}}^{(2m+n)}) = \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m} \oplus \mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathbb{E}}^{(2m)} \oplus \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}) \\ &\cong \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m} \oplus \mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathbb{E}}^{(2m)} \oplus (-1)^{\frac{2m(2m-1)}{2}} \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}) \\ &\cong \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m}, \delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}) \equiv \text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \text{Cl}_n^{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

□

Ostatnie stwierdzenie w połączeniu ze Stw. 165 (vi) pozwala nam sprowadzić zadanie klasyfikacji zespolonych algebr Clifforda do konstrukcji modelu algebry Clifforda (dowolnej) euklidesowej przestrzeni \mathbb{C} -liniowej parzystego wymiaru. Tę oczywistą tezę precyzuje

TWIERDZENIE 3.2.8 (Klasyfikacyjne II \mathbb{C}). *Przyjmijmy zapis Def. 108, Stw. 179 i 145 oraz Przykł. 29 (2). Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje unitalny izomorfizm \mathbb{C} -algebr*

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} &\cong \text{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^{\bullet} \mathbb{C}^{\times m}) \equiv \mathbb{C}(2^m), \\ \text{Cl}_{2m+1}^{\mathbb{C}} &\cong \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m). \end{aligned}$$

■

Dowód: Drugi z postulowanych izomorfizmów jest bezpośrednim następstwem Tw. 3.2.7 (dla $n = 1$) oraz Stw. 165 (vi), wystarczy zatem udowodnić istnienie pierwszego z nich. W tym celu dokonujemy (dowolnego) rozkładu $\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}$ -ortogonalnego

$$\mathbb{C}^{\times 2m} \cong \mathbb{C}^{\times m} \underset{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}{\oplus} \mathbb{C}^{\times m},$$

wybierając przy tym bazy ortonormalne $\{e_i^A\}_{i \in \overline{1, m}}$, $A \in \{1, 2\}$ w każdej z kopii $\mathbb{C}^{\times m}$ w tym rozkładzie. Następnie definiujemy inwolucję $\omega \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{\times 2m})$ jako (jedyne) \mathbb{C} -liniowe rozszerzenie przyporządkowania elementów baz:

$$\begin{aligned} \omega &: e_i^1 \mapsto (0, 1) \triangleright e_i^2, \\ &: e_i^2 \mapsto (0, -1) \triangleright e_i^1, \quad i \in \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Bez trudu stwierdzamy, że odwzorowanie to jest skośnie symetryczne, oto bowiem – dla dowolnych $i, j \in \overline{1, m}$ –

$$\begin{aligned}\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(\omega^*(e_i^1), e_j^1) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, \omega(e_j^1)) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, (0, 1) \triangleright e_j^2) = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, e_j^2) = 0 \\ &= -(0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, e_j^1) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(-(0, 1) \triangleright e_i^2, e_j^1) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(-\omega(e_i^1), e_j^1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(\omega^*(e_i^2), e_j^2) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, \omega(e_j^2)) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, (0, -1) \triangleright e_j^1) = (0, -1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, e_j^1) \\ &= 0 = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, e_j^2) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}((0, 1) \triangleright e_i^1, e_j^2) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(-\omega(e_i^2), e_j^2)\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(\omega^*(e_i^1), e_j^2) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, \omega(e_j^2)) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, (0, -1) \triangleright e_j^1) = (0, -1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, e_j^1) \\ &= (0, -1) \triangleright \delta_{ij} = (0, -1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, e_j^2) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}((0, -1) \triangleright e_i^2, e_j^2) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(-\omega(e_i^1), e_j^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(\omega^*(e_i^2), e_j^1) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, \omega(e_j^1)) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, (0, 1) \triangleright e_j^2) = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, e_j^2) \\ &= (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \delta_{ij} = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, e_j^1) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}((0, 1) \triangleright e_i^1, e_j^1) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(-\omega(e_i^2), e_j^1).\end{aligned}$$

Wobec tej jego własności możemy przywołać tezę Stw. 175, która w obecnej sytuacji daje nam izomorfizm

$$\mathbb{C}_{2m}^{\mathbb{C}} \equiv \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m}, \delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}) \cong \text{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^{\bullet} \text{Ker}(\omega - \text{id}_{\mathbb{C}^{\times 2m}})).$$

Ten z racji oczywistej równości

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\omega - \text{id}_{\mathbb{C}^{\times 2m}}) = m$$

jest izomorfizmem, o którym mowa w treści dowodzonego twierdzenia. \square

Dyskusję naszą rekapitułuje

TWIERDZENIE 3.2.9 (Klasyfikacyjne III \mathbb{C}). *Przyjmijmy zapis Stw. 145 i 179. Tablica 2 zawiera klasyfikację algebr Clifforda $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ dla $n \in \overline{0, 8}$ i tym samym określa $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ dla dowolnego n . Istnieją zatem – dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ – izomorfizmy \mathbb{C} -algebr*

$$\text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}(2^m), \quad \text{Cl}_{2m+1}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m).$$

■

Dowód: Teza twierdzenia wynika bezpośrednio z Tw. 3.2.8. Można ją też wyprowadzić z Tw. 3.2.5, przywoławszy na pomoc Tw. 3.2.6. \square

Prawidłowości w rozmieszczeniu algebr półprostych pośród zespolonych algebr Clifforda (i w szczególności w Tablicy 2) oraz ich strukturę tłumaczymy – tak jak w przypadku rzeczywistym – przy użyciu stosownego elementu kanonicznego.

DEFINICJA 113. Przyjmijmy zapis Stw. 179 i niechaj $\{e_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ będzie bazą standardową $\mathbb{C}^{\times n}$, ortonormalną względem formy kwadratowej $\delta_E^{(n)}$. **Element objętości** w $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ to wektor

$$\omega_{\mathbb{C}} := i^{n+E(\frac{n+1}{2})} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_n,$$

w której definicji $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest częścią całkowitą (funkcją *entier*). ▲

Możemy już teraz wysłowić wyjaśniające zaobserwowane regularności

STWIERDZENIE 180. *Przyjmijmy zapis Def. 113 i Stw. 143, 145 oraz 146. Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$\omega_{\mathbb{C}}^2 = e^{\mathbb{C}}.$$

W jej konsekwencji ilekroć $n \in 2\mathbb{N} + 1$, istnieje rozkład

$$(3.2.9) \quad \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} = \text{Cl}_n^+ \oplus \text{Cl}_n^-$$

algebry Clifforda $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ na sumę prostą jej podalgebr (zredukowanych)

$$\text{Cl}_n^{\pm} := P_{\omega_{\mathbb{C}}}^{\pm} \cdot \text{Cl}_n^{\mathbb{C}},$$

o elementach spełniających warunki – odpowiednio – samodwoistości (czyli samodualności)

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_n^+ : \omega_{\mathbb{C}} \cdot \gamma = \gamma,$$

wzgl. skośnej samodwoistości (lub inaczej antysamodualności)

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_n^- : \omega_{\mathbb{C}} \cdot \gamma = -\gamma.$$

Zachodzą relacje:

$$J_{\mathbb{C}^{\times n}}(\text{Cl}_n^{\pm}) = \text{Cl}_n^{\mp}$$

oraz

$$\text{Cl}_n^{\mathbb{C}^0} = (\text{id}_{\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}} + J_{\mathbb{C}^{\times n}})(\text{Cl}_n^{\pm}).$$

Rozkład ten pokrywa się z rozkładem półprostej \mathbb{C} -algebry $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ na składowe proste opisanym w Tw. 3.2.9, tj. dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje izomorfizm \mathbb{C} -algebr prostych

$$\text{Cl}_{2m+1}^{\pm} \cong \mathbb{C}(2^m).$$

■

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Stw. 177. □

Teoria reprezentacji algebr Clifforda

W niniejszym rozdziale skrupulatnie wykorzystamy wszystkie dotychczasowe nasze obserwacje dotyczące struktury rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda w celu przeprowadzenia wyczerpującej klasyfikacji ich reprezentacji, co będzie stanowiło fundamentalny przyczynek do zrozumienia fizykalnie istotnych tzw. reprezentacji spinorowych pewnych wyróżnionych podalgebr tychże algebr Clifforda.

1. Ogólne własności modułów Clifforda

Punktem wyjścia do dalszej dyskusji jest

DEFINICJA 114. Przyjmijmy zapis Def. 103 oraz 107 i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q_V)$ będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem \mathbb{K} . **Moduł Clifforda** algebry $\text{Cliff}(V, Q_V)$ to para $((W, +_W, P_W, \bullet \mapsto 0_W), \ell_W), \rho)$ złożona z przestrzeni wektorowej $((W, +_W, P_W, \bullet \mapsto 0_W), \ell_W)$ nad ciałem \mathbb{K} oraz reprezentacji

$$\rho : \text{Cliff}(V, Q_V) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W).$$

▲

Najbardziej elementarnej (re)interpretacji (algebraicznej) powyższej definicji na gruncie leżącej u jej podstaw definicji algebry Clifforda dostarcza

STWIERDZENIE 181. *Przyjmijmy zapis Def. 114. Ilekroć forma kwadratowa Q_V jest niezwyrodniała, ograniczenie (dziedziny) reprezentacji algebry Clifforda do przestrzeni wektorowej $V \subset \text{Cliff}(V, Q_V)$ jest wierne (tj. iniektywne).*

■

Dowód: Dla dowolnego $v \in \text{Ker } \rho$ obliczamy – wobec homomorficzności ρ –

$$Q_V(v) \triangleright \text{id}_W \equiv Q_V(v) \triangleright \rho(e^C) = \rho(v.v) = \rho(v)^2 = 0,$$

co z racji niezwyrodnienia Q_V implikuje równość $v = 0_V$. □

UWAGA 38. W świetle powyższego stwierdzenia możemy postrzegać moduł Clifforda jako wierną realizację przestrzeni wektorowej V w przestrzeni wektorowej W , która transportuje strukturę algebry (Clifforda) na V indukowaną w obecności formy kwadratowej Q_V .

Jako że prowadzimy nasze rozważania w środowisku przestrzeni kwadratowych, zasadnym wydaje się wyróżnienie tych reprezentacji algebr Clifforda, które – w przypadku istnienia struktury przestrzeni kwadratowej na nośniku reprezentacji – wykazują proste własności względem obu struktur przestrzeni kwadratowej: na przestrzeni V określającej reprezentowaną algebrę oraz na nośniku reprezentacji W . Ten sposób myślenia formalizuje

DEFINICJA 115. Przyjmijmy zapis Def. 114, zakładając przy tym, że także nośnik reprezentacji W jest przestrzenią kwadratową z formą kwadratową Q_W . Ustaliwszy skalar $\varepsilon \in \{-1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\}$, reprezentację algebry Clifforda $\rho : \text{Cliff}(V, Q_V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$ określimy mianem ε -**ortogonalnej**, jeśli dla dowolnych $(v, w_1, w_2) \in V \times W^{\times 2}$ jest spełniony warunek

$$(3.3.1) \Phi_{Q_W}(\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)(w_1), \rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)(w_2)) = \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} Q_V(v) \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_{Q_W}(w_1, w_2),$$

w którego zapisie $j_V^{\mathbb{C}} : V \rightarrow \text{Cliff}(V, Q)$ jest kanonicznym odwzorowaniem Clifforda.

▲

Mamy proste

STWIERDZENIE 182. *Przyjmijmy zapis Def. 25 i 115, zakładając dodatkowo, że Q_W jest niezwyrodniała. Wówczas reprezentacja $\rho : \text{Cliff}(V, Q_V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$ jest ε -ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe $\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v) \in \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$ jest dla dowolnego $v \in V$ ε -hermitowskie, tj. spełnia warunek*

$$(\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v))^{\dagger} = \varepsilon (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)),$$

gdzie $(\cdot)^{\dagger}$ jest sprzężeniem hermitowskim określonym względem Φ_{Q_W} .

■

Dowód: Założenie o niezwyrodnieniu Q_W , implikujące niezwyrodnienie indukowanej przez nią formy dwuliniowej Φ_{Q_W} , pozwala przepisać warunek (3.3.1) definiujący reprezentację ε -ortogonalną w równoważnej postaci

$$\forall v \in V : (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v))^{\dagger} \circ (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)) = \varepsilon Q_V(v) \triangleright \text{id}_W.$$

Ponieważ zachodzi także równość

$$(\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)) \circ (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)) = \rho(j_V^{\mathbb{C}}(v) \cdot j_V^{\mathbb{C}}(v)) = \rho(Q_V(v) \triangleright e^{\mathbb{C}}) = Q_V(v) \triangleright \text{id}_W,$$

przeto otrzymujemy tożsamość

$$\begin{aligned} Q_V(v) \triangleright (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v))^{\dagger} &\equiv (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v))^{\dagger} \circ (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)) \circ (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)) \\ &= \varepsilon Q_V(v) \triangleright (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)), \end{aligned}$$

z którego – wobec niezwyrodnienia Q_V – wynika już wprost pożądana teza. □

Naturalności dokonanego przez nas wyróżnienia dowodzi

STWIERDZENIE 183. *Przyjmijmy zapis Def. 115. Dowolna reprezentacja algebry Clifforda przestrzeni kwadratowej (wymiaru $d_V = \dim_{\mathbb{K}} V$) o (pseudo)euklidesowej formie kwadratowej $Q_V = \varepsilon_V \triangleright \delta_{\mathbb{E}}^{(d_V)}$, $\varepsilon_V \in \{-1, +1\}$ na przestrzeni kwadratowej (wymiaru $d_W = \dim_{\mathbb{K}} W$) o (pseudo)euklidesowej formie kwadratowej $Q_W = \varepsilon_W \triangleright \delta_{\mathbb{E}}^{(d_W)}$, $\varepsilon_W \in \{-1, +1\}$ jest równoważna pewnej reprezentacji ε_V -ortogonalnej.*

■

Dowód: Wybierzmy bazę ε_V -ortonormalną $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i \in \overline{1, d_V}}$ w przestrzeni V , a wówczas w $\text{Cliff}(V, Q_V)$ są spełnione relacje

$$\{e_i, e_j\} = 2\varepsilon \delta_{i,j} \triangleright e^{\mathbb{C}}, \quad i, j \in \overline{1, d_V}.$$

Zdefiniujmy grupę

$$\Gamma := \langle e_i \mid i \in \overline{1, d_V} \rangle,$$

generowaną mnożyliwytynie przez obrazy elementów bazy \mathcal{E} w $\text{Cliff}(V, Q_V)$. Grupa ta jest w oczywisty sposób skończona, ma zatem sens poniższa definicja odwzorowania dwuliniowego:

$$(\cdot | \cdot)^\Gamma : W \times W \longrightarrow \mathbb{K} : (w_1, w_2) \longmapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} \Phi_{Q_W}(\rho(\gamma)(w_1), \rho(\gamma)(w_2)).$$

Przy tym (ε_W) -określoność formy Φ_{Q_W} implikuje (takąż) określoność odwzorowania $(\cdot | \cdot)^\Gamma$, a nadto – dla dowolnych $\gamma \in \Gamma$ i $w_1, w_2 \in W^{\times 2}$ – stwierdzamy Γ -niezmienniczość tego ostatniego,

$$\begin{aligned} (\rho(\gamma)(w_1) | \rho(\gamma)(w_2))^\Gamma &\equiv \sum_{\tilde{\gamma} \in \Gamma} \Phi_{Q_W}(\rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_1), \rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_2)) \\ &= \sum_{\tilde{\gamma} \cdot \gamma \in \Gamma} \Phi_{Q_W}(\rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_1), \rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_2)) \equiv (w_1 | w_2)^\Gamma. \end{aligned}$$

Pierwsza z tych cech pozwala stwierdzić istnienie odwzorowania $\chi \in \text{Aut}_{\mathbb{K}}(W)$ o własności

$$\forall_{w_1, w_2 \in W} : (w_1 | w_2)^\Gamma = \Phi_{Q_W}(\chi(w_1), \chi(w_2)).$$

Istotnie, wystarczy wybrać w W – w zgodzie z Stw. 22 – bazę $\{f_i\}_{i \in \overline{1, d_W}}$ ε_W -ortonormalną względem formy kwadratowej Q_W oraz bazę $\{g_i\}_{i \in \overline{1, d_W}}$ ε_W -ortonormalną względem formy kwadratowej

$$Q_W^\Gamma : W \longrightarrow \mathbb{K} : w \longmapsto (w | w)^\Gamma,$$

a następnie dokonać (jedynego) \mathbb{K} -liniowego rozszerzenia przyporządkowania

$$\chi(g_i) := f_i, \quad i \in \overline{1, d_W},$$

gdyż wtedy

$$\begin{aligned} (w_1 | w_2)^\Gamma &= w_1^i \cdot_{\mathbb{K}} w_2^j \cdot_{\mathbb{K}} (g_i | g_j)^\Gamma = \varepsilon_W w_1^i \cdot_{\mathbb{K}} w_2^j \cdot_{\mathbb{K}} \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \equiv w_1^i \cdot_{\mathbb{K}} w_2^j \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_{Q_W}(f_i, f_j) \\ &= w_1^i \cdot_{\mathbb{K}} w_2^j \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_{Q_W}(\chi(g_i), \chi(g_j)) = \Phi_{Q_W}(\chi(w_1), \chi(w_2)). \end{aligned}$$

Na tym etapie możemy już zadać reprezentację

$$\rho_\chi := \chi \circ \rho(\cdot) \circ \chi^{-1} : \text{Cliff}(V, \varepsilon_V \triangleright \delta_E^{(d_V)}) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W) : x \longmapsto \chi \circ \rho(x) \circ \chi^{-1},$$

wprost na mocy definicji równoważną ρ . Obrazy elementów grupy Γ względem tej reprezentacji są izometriami Q_W , oto bowiem dla dowolnych $(\gamma, w_1, w_2) \in \Gamma \times W^{\times 2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi_{Q_W}(\rho_\chi(\gamma)(w_1), \rho_\chi(\gamma)(w_2)) &\equiv \Phi_{Q_W}(\chi(\rho(\gamma) \circ \chi^{-1}(w_1)), \chi(\rho(\gamma) \circ \chi^{-1}(w_2))) \\ &= (\rho(\gamma)(\chi^{-1}(w_1)) | \rho(\gamma)(\chi^{-1}(w_2)))^\Gamma \\ &= (\chi^{-1}(w_1) | \chi^{-1}(w_2))^\Gamma = \Phi_{Q_W}(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Zdefiniujmy rodzinę endomorfizmów

$$\sigma_i := \rho_\chi(e_i), \quad i \in \overline{1, d_V}.$$

Te spełniają – dla dowolnych $w_1, w_2 \in W$ oraz $i \in \overline{1, d_V}$ – tożsamość

$$\Phi_{Q_W}(\sigma_i^\dagger \circ \sigma_i(w_1), w_2) = \Phi_{Q_W}(\sigma_i(w_1), \sigma_i(w_2)) = \Phi_{Q_W}(w_1, w_2),$$

przeto – wobec dowolności w_1 i w_2 – jest

$$\sigma_i^\dagger \circ \sigma_i = \text{id}_W,$$

ale też

$$\sigma_i \circ \sigma_i = \rho_\chi(e_i^2) = \varepsilon_V \triangleright \rho_\chi(e^C) = \varepsilon_V \triangleright \text{id}_W,$$

więc ostatecznie

$$\sigma_i^\dagger = \varepsilon_V \triangleright \sigma_i,$$

co pozwala zapisać – dla dowolnego wektora $v = v^i \triangleright e_i \in V$ – tożsamość

$$\rho_\chi(v)^\dagger = v^i \triangleright \sigma_i^\dagger = \varepsilon_V v^i \triangleright \sigma_i \equiv \varepsilon_V \triangleright \rho_\chi(v),$$

która w świetle Stw. 182 przesądza o ε_V -ortogonalności reprezentacji ρ_χ , jawnie równoważnej ρ . \square

Powyższe wprowadzenie przygotowało nas należycie do zmierzania się z wyzwaniem, jakim jest kompletna klasyfikacja (nieprzywiedlnych i nietrywialnych) reprezentacji rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda – wyzwanie to podejmujemy w następnym rozdziale.

2. Reprezentacje rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda

Wyczerpująca klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, przeprowadzona w Rozdz. 3.2, w połączeniu z wiedzą dotyczącą reprezentacji algebr prostych, zgromadzoną w Rozdz. 2, stanowią solidną podstawę do sformułowania kompletnego opisu reprezentacji (nieprzywiedlnych) wszystkich algebr Clifforda nad \mathbb{R} i \mathbb{C} . Tytułem jej uzupełnienia w sposób pozwalający na wysłowienie twierdzeń klasyfikacyjnych sformułujemy istotne

STWIERDZENIE 184. *Przyjmijmy zapis Def. 103, 112 i 113 oraz Stw. 176 i 179. Dla dowolnych liczb $p, q \in \mathbb{N}$ spełniających warunek $q - p = 3 \pmod{4}$ i dowolnej liczby $n \in 2\mathbb{N} + 1$ zachodzi, co następuje:*

- (i) *w dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ na przestrzeni \mathbb{R} -liniowej V zachodzi*

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}}) = \varepsilon \triangleright \text{id}_V, \quad \varepsilon \in \{-1, +1\},$$

przy czym reprezentacje odpowiadające obu wartościom ε istnieją i są wzajemnie nierównoważne – w dalszej części dyskusji będziemy je oznaczać symbolem $\rho_\varepsilon^{p,q}$;

- (ii) *w dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$ na przestrzeni \mathbb{C} -liniowej \tilde{V} zachodzi*

$$\rho(\omega_{\mathbb{C}}) = \tilde{\varepsilon} \triangleright \text{id}_{\tilde{V}}, \quad \tilde{\varepsilon} \in \{-1, +1\},$$

przy czym reprezentacje odpowiadające obu ewentualnościom istnieją i są wzajemnie nierównoważne – w dalszej części dyskusji będziemy je oznaczać symbolem $\rho_{\tilde{\varepsilon}}^n$.

■

Dowód: Niechaj $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ będzie dowolną (nietrywialną) reprezentacją nieprzywiedlną. Wobec tożsamości

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}})^2 = \rho(\omega_{\mathbb{R}}^2) = \rho(e^C) = \text{id}_V,$$

wynikającej ze Stw. 177, endomorfizm $\rho(\omega_{\mathbb{R}})$ definiuje zupełną parę rzutów komplementarnych:

$$P_{\pm} := \frac{1}{2} (\text{id}_V \pm \rho(\omega_{\mathbb{R}})),$$

która w świetle Stw. 32 wyznacza rozkład nośnika reprezentacji na sumę prostą

$$V = V_+ \oplus V_-, \quad V_{\pm} := P_{\pm}(V),$$

przy czym zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}}) \upharpoonright_{V_{\pm}} = \pm \text{id}_{V_{\pm}}.$$

Jako że element objętości należy do centrum $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$, przeto podprzestrzenie własne V_{\pm} są ρ -niezmiennicze, co wobec założonej nieprzywiedlności ρ ogranicza możliwą rozkłady jak niżej:

$$(V_+, V_-) = (V, \{0_V\}) \quad \vee \quad (V_+, V_-) = (\{0_V\}, V).$$

Założmy, że otrzymane tą drogą reprezentacje $\rho_{\pm} : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_{\pm})$ o własności $\rho_{\pm}(\omega_{\mathbb{R}}) = \pm \text{id}_{V_{\pm}}$ są równoważne, czyli istnieje izomorfizm $\chi : V_+ \rightarrow V_-$ spełniający warunek

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} : \chi \circ \rho_+(\gamma) = \rho_-(\gamma) \circ \chi.$$

Zachodzi wówczas – w szczególności – tożsamość

$$\chi \equiv \chi \circ \rho_+(\omega_{\mathbb{R}}) = \rho_-(\omega_{\mathbb{R}}) \circ \chi = -\chi,$$

która prowadzi do sprzeczności, skąd ostateczny wniosek o nierównoważności wzajemnej obu reprezentacji.

Na koniec pokażemy, że obie reprezentacje istnieją. W tym celu odwołamy się do Stw. 162 oraz 177, aby stwierdzić istnienie dwóch (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $R(2^m) \oplus R(2^m) \cong \text{Cl}_{p,q}^+ \oplus \text{Cl}_{p,q}^- \equiv \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$, $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}\}$, $m \in \mathbb{N}$, o strukturze

$$\tilde{\rho}_+ := \rho_{\text{def}} \circ \text{pr}_1 : R(2^m) \oplus R(2^m) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

i

$$\tilde{\rho}_- := \rho_{\text{def}} \circ \text{pr}_2 : R(2^m) \oplus R(2^m) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

odpowiednio. Zważywszy (unitalny charakter $\text{Cl}_{p,q}^{\pm} \cong R(2^m)$ oraz) słuszność tożsamości

$$\forall \gamma_{\pm} \in \text{Cl}_{p,q}^{\pm} : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma_{\pm} = \pm \gamma_{\pm},$$

wynikających wprost z definicji podalgebr $\text{Cl}_{p,q}^{\pm}$, wyprowadzamy stąd wniosek, że w obrazie odwrotnym izomorfizmów ι_k , $k \in \{3, 7\}$ z dowodu Stw. 177 otrzymujemy

$$\iota_k^{-1}(\omega_{\mathbb{R}}) = \mathbf{1}_{2^m} \oplus (-\mathbf{1}_{2^m}),$$

a zatem także dla nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho_{\pm} := \tilde{\rho}_{\pm} \circ \iota_k^{-1} : \text{Cl}_{p,q}^+ \oplus \text{Cl}_{p,q}^- \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

oczekiwane tożsamości

$$\rho_{\pm}(\omega_{\mathbb{R}}) = \pm \text{id}_{R^{2^m}}.$$

Dowód dla przypadku zespolonego przebiega analogicznie, przy czym odwołuje się do Stw. 180 zamiast Stw. 177. \square

Tak przygotowani możemy już przejść do sklasyfikowania reprezentacji algebr Clifforda, co w przypadku algebr rzeczywistych podsumowuje

TWIERDZENIE 3.3.1 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych $/\mathbb{R}$). *Przyjmijmy zapis Stw. 157 i 176 oraz Tw. 2 i 3.2.5, a następnie wprowadźmy oznaczenia*

$$(q_{\mathbb{R}}, q_{\mathbb{C}}, q_{\mathbb{H}}) := (0, 1, 2)$$

oraz – dla dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ –

$$d_{p,q}^{\mathbb{R}} := \dim_{\mathbb{R}} V, \quad \mathfrak{C}_{p,q}^{\mathbb{R}} := C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(V)}(\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}})).$$

Wreszcie też niechaj $\nu_{p,q}^{\mathbb{R}}$ będzie liczbą nierównoważnych (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$. Wówczas prawdziwe są równości

$$\nu_{p,q}^{\mathbb{R}} = \begin{cases} 2, & \text{gdy } q-p = 3 \pmod{4} \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

a ponadto ilekroć izotyp \mathbb{R} -algebry $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ przedstawiony w Tablicy 1 jest postaci

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong R(2^n) \quad \text{lub} \quad \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong R(2^n) \oplus R(2^n),$$

to spełnione są relacje (te same dla obu reprezentacji nierównoważnych w przypadku $q-p = 3 \pmod{4}$)

$$d_{p,q}^{\mathbb{R}} = 2^{n+q_{\mathbb{R}}}, \quad \mathfrak{C}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong R.$$

■

Dowód: Na podstawie Tw. 3.2.5 i Stw. 143 wnioskujemy, że algebra $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ jest albo prosta (w przypadku $q-p = 3 \pmod{4}$), albo półprosta (w przeciwnym przypadku), co w świetle Stw. 162 i Tw. 2.2.2 prowadzi do postulowanego wzoru na $d_{p,q}^{\mathbb{R}}$ oraz – po uwzględnieniu punktu (i) Stw. 184 – wzoru na $\nu_{p,q}^{\mathbb{R}}$. Typ reprezentacji nieprzywiedlnych (każdorazowo jest to R) ustala Stw. 163. □

W przypadku algebr zespolonych mamy analogiczne

TWIERDZENIE 3.3.2 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych $/\mathbb{C}$). *Przyjmijmy zapis Stw. 179 oraz Tw. 3.3.1 i wprowadźmy – dla dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ – oznaczenia*

$$d_n^{\mathbb{C}}(\rho) := \dim_{\mathbb{C}} V, \quad \mathfrak{C}_n^{\mathbb{C}}(\rho) := C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(V)}(\rho(\text{Cl}_n^{\mathbb{C}})).$$

Wreszcie też niechaj $\nu_n^{\mathbb{C}}$ będzie liczbą nierównoważnych (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$. Wówczas prawdziwe są równości

$$\nu_n^{\mathbb{C}} = \begin{cases} 2, & \text{gdy } n \in 2\mathbb{N} + 1 \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

a ponadto spełnione są relacje (te same dla obu reprezentacji nierównoważnych w przypadku $n \in 2\mathbb{N} + 1$)

$$d_n^{\mathbb{C}} = 2^{E(\frac{n}{2})}, \quad \mathfrak{C}_n^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C},$$

tj. – w szczególności – wszystkie rozważane reprezentacje są zespolone. ■

Dowód: Tezy Tw. 3.2.9 i Stw. 143 przesądzają o tym, że algebra $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ jest albo prosta (w przypadku $n \in 2\mathbb{N}$), albo półprosta (w przypadku $n \in 2\mathbb{N}+1$), co pozwala uzyskać postulowany wzór na $d_{p,q}^{\mathbb{R}}$ oraz – po uwzględnieniu punktu (ii) Stw. 184 – wzór na $\nu_{p,q}^{\mathbb{R}}$ na gruncie Stw. 162 i Tw. 2.2.2. Zespolony typ reprezentacji nieprzywiedlnych wyznacza teza Stw. 163. \square

Ostatnie dwa twierdzenia wyczerpują zagadnienie klasyfikacji nieprzywiedlnych reprezentacji algebr Clifforda $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ i $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$. Zanim jednak zamknijemy ten rozdział naszych dociekań, zatrzymamy się nad pewną szczególną własnością strukturalną rozpatrywanych przez nas reprezentacji, która odegra istotną rolę w dyskusji reprezentacji spinorowych w dalszej części kursu. Oto więc mamy

STWIERDZENIE 185. *Przyjmijmy zapis Stw. 146 i 184. Dla dowolnych liczb $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2} \setminus \{(0, 0)\}$ spełniających warunek $q - p = 0 \pmod{4}$ i dowolnej liczby $n \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$ zachodzi, co następuje:*

- (i) *nośnik V dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ma rozkład*

$$V = V_+ \oplus V_-, \quad V_{\pm} := \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}^{\pm}})(V)$$

na podprzestrzenie własne endomorfizmu $\rho(\omega_{\mathbb{R}})$ stowarzyszone z wartościami własnymi ± 1 , przy czym dowolny wektor $v \in \mathbb{R}^{\times p+q}$ o własności $\delta_{\mathbb{E}}^{(p,q)}(v) \neq 0$ zadaje izomorfizm

$$v_{\pm} := \rho \circ j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)|_{V_{\pm}} : V^{\pm} \xrightarrow{\cong} V^{\mp},$$

a nadto podprzestrzenie V_{\pm} są zachowywane przez podalgebrę $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}$, której reprezentacje indukowane tym sposobem na V_{\pm} spełniają relację

$$\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0})|_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}^{p,q-1}(\text{Cl}_{p,q-1}^{\mathbb{R}}),$$

jeśli $q \geq 1$, lub

$$\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0})|_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}^{p-1,q}(\text{Cl}_{p-1,q}^{\mathbb{R}}),$$

jeśli $p \geq 1$;

- (ii) *nośnik V dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ma rozkład*

$$V = V_+ \oplus V_-, \quad V_{\pm} := \rho(P_{\omega_{\mathbb{C}}^{\pm}})(V)$$

na podprzestrzenie własne endomorfizmu $\rho(\omega_{\mathbb{C}})$ stowarzyszone z wartościami własnymi ± 1 , przy czym dowolny wektor $v \in \mathbb{C}^{\times n}$ o własności $\delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(v) \neq 0$ zadaje izomorfizm

$$v_{\pm} := \rho \circ j_{\mathbb{C}^{\times n}}(v)|_{V_{\pm}} : V^{\pm} \xrightarrow{\cong} V^{\mp},$$

a nadto podprzestrzenie V_{\pm} są zachowywane przez podalgebrę $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}0}$, której reprezentacje indukowane tym sposobem na V_{\pm} spełniają relację

$$\rho(\text{Cl}_n^{\mathbb{C}0})|_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}^{n-1}(\text{Cl}_{n-1}^{\mathbb{C}}).$$

■

Dowód: Zajmiemy się punktem (i) tezy stwierdzenia – punkt (ii) jest dowodzony w pełni analogicznie. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $q \geq 1$, w przeciwnym wypadku zachodzi $p \geq 1$ i dowód przebiega podobnie. Przywoławszy (pierwszą część)

Stw. 177, konstatujemy istnienie rozkładu prostego V , o którym mowa w stwierdzeniu, dla dowolnej pary (p, q) spełniającej warunek $(p + q + 1)(p + q) - 2p \in 4\mathbb{N}$, zatem w szczególności dla par związanych warunkiem $q - p = 0 \pmod{4}$. O tym, że odwzorowania \mathbb{R} -liniowe v_{\pm} są poprawnie określone, przekonuje bezpośredni rachunek:

$$v_{\pm} \circ \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}) \equiv \rho(J_{\mathbb{R} \times p+q}(v) \cdot P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}) = \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\mp} \cdot J_{\mathbb{R} \times p+q}(v)) = \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\mp}) \circ v_{\pm},$$

przeprowadzony w odwołaniu do Równ. (3.1.13), które w naszym przypadku daje równość

$$\omega_{\mathbb{R}} \cdot v = J_{\mathbb{R} \times p+q}(v) \cdot \omega_{\mathbb{R}} = (-1)^{p+q-1} v \cdot \omega_{\mathbb{R}} \equiv (-1)^{q-p+2p-1} v \cdot \omega_{\mathbb{R}} = -v \cdot \omega_{\mathbb{R}}.$$

Bijektywność v_{\pm} wynika wprost z tożsamości

$$v_{\pm} \circ v_{\mp} = \rho(J_{\mathbb{R} \times p+q}(v)^2) = \rho(\delta_E^{(p,q)}(v) \triangleright e^C) = \delta_E^{(p,q)}(v) \triangleright \text{id}_{V_{\mp}},$$

w połączeniu z założeniem o nieizotropowości v . Wreszcie też niezmienniczość V_{\pm} względem $\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0})$ jest następstwem relacji przemienności

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0} : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma = \gamma \cdot \omega_{\mathbb{R}},$$

które w świetle Równ. (3.1.13) są implikowane przez tożsamość

$$J_{\mathbb{R} \times p+q} \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}} = \text{id}_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}}.$$

Na tym etapie pozostaje wykazać istnienie równoważności reprezentacji

$$\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}) \upharpoonright_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}(\text{Cl}_{p,q-1}^{\mathbb{R}}).$$

W tym celu wykorzystamy treść i dowód Stw. 178, na podstawie których otrzymujemy – oznaczwszy na potrzeby poniższego rachunku element objętości algebry $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ symbolem $\omega_{\mathbb{R}}^{p,q}$ –

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}) &= e_1 \cdot e_{p+q} \cdot e_2 \cdot e_{p+q} \cdots e_{p+q-1} \cdot e_{p+q} \\ &= (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}} e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q-1} \cdot e_{p+q} \cdot e_{p+q}^{p+q-2} \\ &\equiv (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}} \omega_{\mathbb{R}}^{p,q} \cdot (e_{p+q}^2)^{\frac{p+q}{2}-1} = (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)+p+q}{2}-1} \omega_{\mathbb{R}}^{p,q} \\ &\equiv (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-2)}{2}} \omega_{\mathbb{R}}^{p,q}, \end{aligned}$$

i ostatecznie – wobec założeń poczynionych w odniesieniu do (p, q) –

$$\tilde{\varphi}(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}) = \omega_{\mathbb{R}}^{p,q},$$

stąd zaś

$$\rho \circ \tilde{\varphi}(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}) \upharpoonright_{V_{\pm}} = \rho(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q}) \upharpoonright_{V_{\pm}} \equiv \pm \text{id}_{V_{\pm}}.$$

Równość $(q-1) - p = 3 \pmod{4k}$ pozwala nam następnie sięgnąć do Stw. 177, które w połączeniu z udowodnionym na początku tego rozdziału Stw. 184 doprowadza nas do pożądanego wniosku. \square

Spinory

1. Cliffordowskie realizacje izometrii

W niniejszym rozdziale zajmiemy się szczegółową rekonstrukcją funktorialnego podniesienia izometrycznych automorfizmów przestrzeni kwadratowej (V, Q) do jej algebry Clifforda $\text{Cliff}(V, Q)$, co doprowadzi nas ostatecznie do identyfikacji – w odwołaniu do prezentacji grupy ortogonalnej w terminach generatorów (i relacji), którą precyzuje Twierdzenie Cartana–Dieudonnégo – podgrupy w algebrze Clifforda implementującej na kanonicznie zanurzonej w $\text{Cliff}(V, Q)$ wyjściowej przestrzeni V (poprzez ograniczenie doń odnośnych automorfizmów) transformacje ortogonalne. Nasze dociekania rozpoczniemy od

DEFINICJA 116. Przyjmijmy zapis Def. 12 oraz 107. **Multyplikatywna grupa jedności** algebry Clifforda to zbiór

$$\text{Cliff}(V, Q)^\times := \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \exists \gamma^{-1} \in \text{Cliff}(V, Q) : \gamma \cdot \gamma^{-1} = e^C = \gamma^{-1} \cdot \gamma \}$$

odwracalnych elementów $\text{Cliff}(V, Q)$ ze strukturą grupy indukowaną z tejże algebry unitalnej (tj. w szczególności z operacją binarną daną przez mnożenie w algebrze Clifforda). **Reprezentacja dołączona** tej grupy to homomorfizm grup

$$\begin{aligned} \text{Ad} &: \text{Cliff}(V, Q)^\times \longrightarrow \text{Inn}(\text{Cliff}(V, Q)) \\ &: u \longmapsto (\text{Cliff}(V, Q) \ni \gamma \longmapsto u \cdot \gamma \cdot u^{-1} \equiv \text{Ad}_u(\gamma)). \end{aligned}$$

Bywa on także nazywany **reprezentacją wektorową** $\text{Cliff}(V, Q)^\times$. ▲

W bezpośrednim nawiązaniu do uwagi wprowadzającej wysławiamy

STWIERDZENIE 186. *Przyjmijmy zapis Def. 24 i 116. Dla dowolnego wektora nieizotropowego $v \in V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$ i dowolnego wektora $w \in V$ spełniona jest tożsamość*

$$-\text{Ad}_v(w) = w - 2 \frac{\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \triangleright v,$$

więc też – w szczególności –

$$\text{Ad}_v(V) = V,$$

przy czym utożsamiliśmy – jak zwykle – przestrzeń V z jej monomorficznym obrazem w $\text{Cliff}(V, Q)$. ■

Dowód: Odwrotność wektora nieizotropowego v w $\text{Cliff}(V, Q)$ to

$$v^{-1} = Q(v)^{-1} \triangleright v,$$

stąd

$$-Q(v) \triangleright \text{Ad}_v(w) = -v.w.v \equiv -v.\{w, v\} + v^2.w = -2\Phi_Q(w, v) \triangleright v + Q(v) \triangleright w.$$

□

UWAGA 39. Działanie dołączone w ograniczeniu (obustronnym) do $V \subset \text{Cliff}(V, Q)$ realizuje superpozycje przeciwności (odbicia wzgl. wektora zerowego) z odbiciami w płaszczyznach ortogonalnych (wzgl. Q) do wektorów nieizotropowych.

Powyzsze obserwacje prowadzą nas wprost do

STWIERDZENIE 187. *Przyjmijmy zapis Def. 24 oraz 116 i dla*

$$V^\times := V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$$

zdefiniujemy grupę

$$(3.4.1) \quad P(V, Q) := \{v \in V^\times\} \subset \text{Cliff}(V, Q)^\times,$$

tj. grupę generowaną mnożeniowo (wzgl. mnożenia indukowanego z algebry $\text{Cliff}(V, Q)$) przez wektory nieizotropowe. Reprezentacja dołączona $\text{Cliff}(V, Q)^\times$ na $\text{Cliff}(V, Q)$ ogranicza się do reprezentacji

$$\underline{\text{Ad}} : P(V, Q) \longrightarrow \text{O}(V, Q) : u \longmapsto \text{Ad}_u \upharpoonright_{V \subset \text{Cliff}(V, Q)}.$$

■

Dowód: Homomorficzność $\underline{\text{Ad}}$ jest oczywista,

$$\forall u_1, u_2 \in P(V, Q) : \underline{\text{Ad}}_{u_1 \cdot u_2} = \underline{\text{Ad}}_{u_1} \circ \underline{\text{Ad}}_{u_2},$$

pozostaje zatem tylko sprawdzić, że endomorfizm $\underline{\text{Ad}}_u$ zachowuje formę kwadratową Q , co czynimy – dla dowolnych $v \in V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$ i $w \in V$ – w bezpośrednim rachunku odwołującym się do Stw. 186,

$$\begin{aligned} Q \circ \underline{\text{Ad}}_v(w) &\equiv Q(v.w.v^{-1}) = Q(-v.w.v^{-1}) = Q\left(w - 2\frac{\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \triangleright v\right) \\ &\equiv \Phi_Q\left(w - 2\frac{\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \triangleright v, w - 2\frac{\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \triangleright v\right) \\ &= \Phi_Q(w, w) - 4\frac{\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(w, v) + \frac{\Phi_Q(w, v)^2}{Q(v)^2} \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v, v) \\ &= Q(w). \end{aligned}$$

□

Reprezentacja dołączona, jakkolwiek przydatna przy wyrabianiu sobie pewnych elementarnych intuicji algebraicznych i geometrycznych, z których skorzystamy w dalszej części wywodu, ma jedną istotną niedoskonałość: oto jej ograniczenie $\underline{\text{Ad}}$ nie zawiera w ogólności transformacji zmieniających na przeciwną orientację V – istotnie, w przypadku $\dim_{\mathbb{K}} V = 2n + 1 \in 2\mathbb{N} + 1$ endomorfizm Ad_v , $v \in V^\times$ odwzorowuje wektor v w siebie, $\text{Ad}_v(v) = v$, a dowolny wektor $w \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$ – wektor przeciwny, $\text{Ad}_v(w) = -w$, co oznacza, że wyznacznik tego endomorfizmu ma wartość $\det \text{Ad}_v = 1 \cdot (-1)^{2n} = 1$. Ażeby naprawić tę niedoskonałość, musimy w naszej rekonstrukcji funktorialnego podniesienia automorfizmów przestrzeni kwadratowej wyjść poza zbiór automorfizmów wewnętrznych, co czynimy w następnym

DEFINICJA 117. Przyjmijmy zapis Def. 109 i 116, Stw. 187 oraz Przykł. 12 (7). **Reprezentacja dołączona zwichrowana** moltiplikatywnej grupy jedności algebry Clifforda, zwana także **reprezentacją J_V -wektorową moltiplikatywnej grupy jedności**, to homomorfizm grup

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}} &: \text{Cliff}(V, Q)^\times \longrightarrow \text{Aut}(\text{Cliff}(V, Q)) \\ &: u \longmapsto \left(\text{Cliff}(V, Q) \ni \gamma \longmapsto J_V(u) \cdot \gamma \cdot u^{-1} \equiv \widetilde{\text{Ad}}_u(\gamma) \right). \end{aligned}$$

Reprezentacja ta pozwala wyróżnić grupę

$$\Gamma(V, Q) := \{ u \in \text{Cliff}(V, Q)^\times \mid \widetilde{\text{Ad}}_u(V) = V \} \supset P(V, Q),$$

określaną mianem **grupy Clifforda**. ▲

Punktu wyjścia do analizy grupy Clifforda dostarcza

STWIERDZENIE 188. *Przyjmijmy zapis Def. 52 i 117 oraz Przykł. 6 i niechaj $((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V, Q)$ będzie niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową skończonego wymiaru nad ciałem \mathbb{K} o charakterystyce $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Ograniczenie reprezentacji dołączonej zwichrowanej*

$$\widetilde{\text{Ad}} : \Gamma(V, Q) \longrightarrow \text{GL}(V; \mathbb{K}) \equiv \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V) : u \longmapsto \widetilde{\text{Ad}}_u \upharpoonright_{V \subset \text{Cliff}(V, Q)}.$$

zadaje krótki ciąg dokładny grup

$$(3.4.2) \quad \mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{K}^\times \longrightarrow \Gamma(V, Q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{GL}(V; \mathbb{K}),$$

w którym

$$\mathbb{K}^\times \equiv \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$$

jest moltiplikatywną grupą niezerowych elementów ciała \mathbb{K} . ■

Dowód: Przynależność do jądra $\widetilde{\text{Ad}}$ (obrazów) elementów \mathbb{K}^\times jest rzeczą oczywistą,

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K}^\times \quad \forall v \in V : \widetilde{\text{Ad}}_{\lambda \triangleright e^C}(v) &= (\lambda \triangleright e^C) \cdot v \cdot (\lambda \triangleright e^C)^{-1} \equiv (\lambda \triangleright e^C) \cdot v \cdot (\lambda^{-1} \triangleright e^C) \\ &= \lambda \cdot_{\mathbb{K}} \lambda^{-1} \triangleright v = v. \end{aligned}$$

Wnioskując odwrotnie, wybierzmy bazę ortogonalną $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$, $N \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$ w przestrzeni V ,

$$\forall_{i, j \in \overline{1, N}} : \Phi_Q(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{i, j}^{\mathbb{K}}, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}^\times,$$

i rozważmy dowolny element $u \in \text{Ker } \widetilde{\text{Ad}}$, który wprost na mocy definicji spełnia warunek

$$\forall_{v \in V} : J_V(u) \cdot v = v \cdot u.$$

Rozkładając $u = u_0 + u_1$ na składowe $u_k \in \text{Cliff}(V, Q)^k$, $k \in \{0, 1\}$, przepisujemy powyższe w postaci

$$u_0 \cdot v - u_1 \cdot v = v \cdot u_0 + v \cdot u_1,$$

czyli – wobec Równ. (3.1.8) – równoważnie w formie układu warunków

$$u_0 \cdot v = v \cdot u_0 \quad \wedge \quad u_1 \cdot v = -v \cdot u_1.$$

Redukcja stopnia 2 w $\text{Cliff}(V, Q)$ określona przez relacje

$$\forall_{i, j \in \overline{1, N}} : v_i \cdot v_j = -v_j \cdot v_i + 2\lambda_i \delta_{i, j}^{\mathbb{K}}$$

pozwała przy tym rozisać

$$u_0 = \alpha_0(v_2, v_3, \dots, v_N) + v_1 \cdot \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N),$$

$$u_1 = \beta_1(v_2, v_3, \dots, v_N) + v_1 \cdot \beta_0(v_2, v_3, \dots, v_N)$$

w terminach pewnych wielomianów α_k, β_k parzystości k . Kładąc $v = v_1$, otrzymujemy z pierwszego z powyższych warunków równość

$$\begin{aligned} \alpha_0(v_2, v_3, \dots, v_N) \cdot v_1 + v_1 \cdot \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N) \cdot v_1 &= v_1 \cdot \alpha_0(v_2, v_3, \dots, v_N) \\ &+ v_1^2 \cdot \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N), \end{aligned}$$

która sprowadza się ostatecznie do postaci

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \alpha_0(v_2, v_3, \dots, v_N) - v_1^2 \cdot \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N) &= v_1 \cdot \alpha_0(v_2, v_3, \dots, v_N) \\ &+ v_1^2 \cdot \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N), \end{aligned}$$

czyli

$$2\lambda_1 \triangleright \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Jako że Q jest niezwyrodniała, $\lambda_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$, przeto $\alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N) = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}$, a zatem u_0 nie zależy od v_1 . Powtarzając analogiczne rozumowanie dla v_j , $j \in \overline{2, N}$, stwierdzamy ostatecznie, że

$$u_0 = \lambda \triangleright e^C, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

W podobny sposób stwierdzamy, że także u_1 nie zależy od v_i , $i \in \overline{1, N}$, co wobec nieparzystości u_1 implikuje jego trywialność, $u_1 = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}$. W sumie zatem mamy

$$u = u_0 + u_1 = u_0 = \lambda \triangleright e^C,$$

co z racji odwracalności u daje nam tezę dowodzonego stwierdzenia. \square

UWAGA 40. Założenie o niezwyrodnieniu formy kwadratowej Q poczynione w ostatnim stwierdzeniu jest istotne, o czym przekonuje nas analiza przypadku $\text{Cliff}(V, 0) \cong \wedge^\bullet V$. Oto więc dla dowolnych $v_1, v_2 \in V \setminus \{0_V\}$ sprawdzamy tożsamość

$$(1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2)^{-1} = 1_{\mathbb{K}} - v_1 \wedge v_2,$$

która oznacza, że $1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2 \in \text{Cliff}(V, Q)^\times$. Przy tym dla dowolnego $v \in V$ zachodzi

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}}_{1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2}(v) &= J_V(1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2) \wedge v \wedge (1_{\mathbb{K}} - v_1 \wedge v_2) \\ &= (1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2) \wedge (v - v \wedge v_1 \wedge v_2) \\ &= v - v \wedge v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_2 \wedge v - v_1 \wedge v_2 \wedge v \wedge v_1 \wedge v_2 \\ &= v - v \wedge v_1 \wedge v_2 + v \wedge v_1 \wedge v_2 = v, \end{aligned}$$

co pokazuje dowodnie, że $\text{Ker } \widetilde{\text{Ad}}$ zawiera elementy nie-skalarne.

Zanim podejmiemy dalszą analizę relacji między grupą Clifforda a grupą automorfizmów przestrzeni kwadratowej (V, Q) , wprowadzimy obecnie nader przydatną konstrukcję pomocniczą.

DEFINICJA 118. Przyjmijmy zapis Def. 109. **Norma spinorowa** na $\text{Cliff}(V, Q)$ to odwzorowanie

$$\mathbf{N} : \text{Cliff}(V, Q) \circlearrowleft : \gamma \mapsto \gamma \cdot J_V \circ T_V(\gamma),$$

o oczywistej własności

$$\forall_{v \in V} : \mathbf{N}(v) = -Q(v) \triangleright e^{\mathbb{C}}.$$

▲

Kluczową własność określonego powyżej odwzorowania wysławia

STWIERDZENIE 189. *Przyjmijmy zapis Def. 118 oraz Stw. 188, zakładając przy tym, że przestrzeń kwadratowa (V, Q) jest skończenie wymiarowa i niezwyrodniała. Wówczas norma spinorowa ogranicza się do homomorfizmu grup*

$$\mathbf{N} \upharpoonright_{\Gamma(V, Q)} : \Gamma(V, Q) \longrightarrow \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{K}^\times.$$

■

Dowód: Zauważmy na wstępie, że dla dowolnego $u \in \Gamma(V, Q)$ i wszystkich $v \in V$ zachodzi – wprost na mocy definicji grupy Clifforda – $J_V(u) \cdot v \cdot u^{-1} \in V$, więc także

$$\begin{aligned} J_V(u) \cdot v \cdot u^{-1} &= T_V(J_V(u) \cdot v \cdot u^{-1}) = T_V(u)^{-1} \cdot T_V(v) \cdot T_V \circ J_V(u) \\ &= T_V(u)^{-1} \cdot v \cdot J_V \circ T_V(u), \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} v &= (T_V(u) \cdot J_V(u)) \cdot v \cdot (J_V \circ T_V(u) \cdot u)^{-1} = J_V(J_V \circ T_V(u) \cdot u) \cdot v \cdot (J_V \circ T_V(u) \cdot u)^{-1} \\ &\equiv \widetilde{\text{Ad}}_{J_V \circ T_V(u) \cdot u}(v), \end{aligned}$$

co oznacza, że

$$J_V \circ T_V(u) \cdot u \in \text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} \upharpoonright_V.$$

Przy tym wobec pierwszej z powyższych równości zachodzi

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}}_{J_V \circ T_V(u)}(v) &= T_V(u) \cdot v \cdot J_V \circ T_V(u)^{-1} \equiv T_V(u^{-1})^{-1} \cdot v \cdot J_V \circ T_V(u^{-1}) \\ &= J_V(u^{-1}) \cdot v \cdot u \equiv J_V(u^{-1}) \cdot v \cdot (u^{-1})^{-1} \equiv \widetilde{\text{Ad}}_{u^{-1}}(v) \in V, \end{aligned}$$

co pozwala stwierdzić, że $J_V \circ T_V(u) \in \Gamma(V, Q)$, czyli też

$$J_V \circ T_V(u) \cdot u \in \Gamma(V, Q) \cap \text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} \upharpoonright_V,$$

a w takim razie na mocy Stw. 188 wyprowadzamy wniosek o istnieniu skalaru $\lambda_u \in \mathbb{K}^\times$ spełniającego warunek

$$J_V \circ T_V(u) \cdot u = \lambda_u \triangleright e^{\mathbb{C}}.$$

To pozwala nam stwierdzić, że

$$\mathbf{N}(T_V(u)) \equiv T_V(u) \cdot J_V(u) = J_V(J_V \circ T_V(u) \cdot u) = J_V(\lambda_u \triangleright e^{\mathbb{C}}) = \lambda_u \triangleright e^{\mathbb{C}}.$$

Zarazem

$$V = J_V(u).V.u^{-1} \iff V = J_V(u)^{-1}.V.u,$$

przeto

$$\begin{aligned} V \equiv T_V(V) &= T_V(J_V(u)^{-1}.V.u) = T_V(u).T_V(V).T_V \circ J_V(u)^{-1} \\ &= T_V(u).V.J_V \circ T_V(u)^{-1}, \end{aligned}$$

więc ostatecznie

$$\begin{aligned} V \equiv -J_V(V) &= -J_V(T_V(u).V.J_V \circ T_V(u)^{-1}) \\ &= -J_V \circ T_V(u).J_V(V).J_V \circ J_V \circ T_V(u)^{-1} \\ &= J_V \circ T_V(u).V.T_V(u)^{-1} \equiv \widetilde{\text{Ad}}_{T_V(u)}(V). \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że

$$u \in \Gamma(V, Q) \iff T_V(u) \in \Gamma(V, Q),$$

co pozwala wcześniejszą naszą konstatację przepisać w pożądaney postaci

$$\mathbf{N}(u) = \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathbb{C}} \in \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathbb{C}}.$$

Na koniec bez trudu sprawdzamy, dla dowolnych $u_1, u_2 \in \Gamma(V, Q)$, że

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(u_1.u_2) &\equiv u_1.u_2.J_V \circ T_V(u_1.u_2) = u_1.\mathbf{N}(u_2).J_V \circ T_V(u_1) \\ &= u_1.\lambda_{T_V(u_2)} \triangleright e^{\mathbb{C}}.J_V \circ T_V(u_1) = u_1.J_V \circ T_V(u_1).\lambda_{T_V(u_2)} \triangleright e^{\mathbb{C}} \\ &\equiv \mathbf{N}(u_1).\mathbf{N}(u_2). \end{aligned}$$

□

Wyposażeni w nowe narzędzie analizy strukturalnej, jakim jest norma spinorowa, możemy przyjrzeć się bliżej krótkiemu ciągowi dokładnemu grup (3.4.2). Czynimy to w poniższym

STWIERDZENIE 190. *Przyjmijmy zapis Stw. 188. Ograniczenie $\widetilde{\text{Ad}}$ reprezentacji dołączonej zwichrowanej zadaje homomorfizm grup*

$$\widetilde{\text{Ad}} : \Gamma(V, Q) \longrightarrow \text{O}(V, Q).$$

■

Dowód: Zaczniemy od wyznaczenia – w odwołaniu do Stw. 189, a dla dowolnego $u \in \Gamma(V, Q)$ – normy

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(J_V(u)) &\equiv J_V(u).J_V \circ T_V \circ J_V(u) = J_V(u).T_V(u) = J_V(u.J_V \circ T_V(u)) \\ &\equiv J_V(\mathbf{N}(u)) = J_V(\lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathbb{C}}) = \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathbb{C}} \equiv \mathbf{N}(u). \end{aligned}$$

Uwzględnivszy powyższe oraz $J_V(u), u^{-1} \in \Gamma(V, Q)$, jak również treść Stw. 189, możemy następnie obliczyć, dla dowolnego (anizotropowego) $v \in V^\times \subset \Gamma(V, Q)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\widetilde{\text{Ad}}_u(v)) &\equiv \mathbf{N}(J_V(u).v.u^{-1}) = \mathbf{N}(J_V(u)).\mathbf{N}(v).\mathbf{N}(u^{-1}) = \mathbf{N}(u).\mathbf{N}(v).\mathbf{N}(u)^{-1} \\ &\equiv \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathbb{C}}.\mathbf{N}(v).\lambda_{T_V(u)}^{-1} \triangleright e^{\mathbb{C}} = \mathbf{N}(v) \end{aligned}$$

i na tej podstawie – stwierdzić, że działanie dołączone zwichrowane zachowuje $Q(v)$ dla wszystkich anizotropowych wektorów $v \in V^\times$. Z drugiej strony ilekroć $Q(v) = 0_{\mathbb{K}}$, zachodzi $\widetilde{\text{Ad}}_u(v) \notin V^\times$, gdyż w przeciwnym razie byłoby – w świetle wcześniejszych ustaleń – $v = \widetilde{\text{Ad}}_{u^{-1}}(\widetilde{\text{Ad}}_u(v)) \in \widetilde{\text{Ad}}_u(V^\times) \subset V^\times$, co prowadziłoby do sprzeczności. Mamy zatem implikację

$$N(v) = -Q(v) \triangleright e^{\mathbb{C}} = 0_{\text{Cliff}(V,Q)} \implies N(\widetilde{\text{Ad}}_u(v)) = 0_{\text{Cliff}(V,Q)},$$

która czyni nasz dowód kompletnym. \square

Ostatnie stwierdzenie w połączeniu z definicją (3.4.1) podgrupy $P(V, Q) \subset \Gamma(V, Q)$ oraz tożsamością

$$(3.4.3) \quad \widetilde{\text{Ad}}_v \equiv P_v$$

(patrz: definicja (26)) każe postawić pytanie o surjektywny charakter indukowanego przez reprezentację dołączoną zwichrowaną homomorfizmu

$$\widetilde{\text{Ad}} \upharpoonright_{P(V,Q)} : P(V, Q) \longrightarrow \text{O}(V, Q).$$

Odpowiedzi na to pytanie dostarcza

STWIERDZENIE 191. *Przyjmijmy zapis Def. 117 oraz Stw. 187. Ograniczenie reprezentacji dołączonej zwichrowanej*

$$\widetilde{\text{Ad}} \upharpoonright_{P(V,Q)} : P(V, Q) \longrightarrow \text{O}(V, Q)$$

jest epimorfizmem grup.

■

Dowód: Prosta konsekwencja definicji grupy $P(V, Q)$, tożsamość (3.4.3) oraz Tw. 1.2.4. \square

Zanim postąpimy dalej w naszej eksploracji anatomii grupy Clifforda, wprowadzimy pewne wyróżnione jej podgrupy o absolutnie kluczowym znaczeniu dla naszych rozważań, zorientowanych ostatecznie na konstrukcję spinorów. Oto więc mamy

DEFINICJA 119. Przyjmijmy zapis Def. 109 oraz 116. **Grupa** Pin przestrzeni kwadratowej (V, Q) to podgrupa

$$\text{Pin}(V, Q) := \langle v \in Q^{-1}(\{-1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\}) \rangle \subset P(V, Q).$$

Jej podgrupa

$$\text{Spin}(V, Q) := \text{Pin}(V, Q) \cap \text{Cliff}(V, Q)^0$$

nosi miano **grupy** Spin przestrzeni kwadratowej (V, Q) . \blacktriangle

W kontekście poprzedniego stwierdzenia najogólniejsze własności wprowadzonych tu grup opisuje

STWIERDZENIE 192. *Przyjmijmy zapis Def. 119 oraz Stw. 188. Podgrupy*

$$\widetilde{\text{Ad}}(\text{Pin}(V, Q)), \widetilde{\text{Ad}}(\text{Spin}(V, Q)) \subset \text{O}(V, Q)$$

są normalne.

■

Dowód: Izometryczne działanie definiujące grupy $O(V, Q)$ na (V, Q)

$$\rho_{\text{def.}} \equiv \text{id}_{O(V, Q)} : O(V, Q) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V, Q)$$

podnosi się funktorialnie do $\text{Cliff}(V, Q)$ na mocy Tw. 3.1.3, przy czym

$$\forall \chi \in O(V, Q) : [\text{Cliff}(\chi), J_V] = 0,$$

więc też dla dowolnych $v \in V^\times, w \in V$ oraz $\chi \in O(V, Q)$ obliczamy

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}}_{\chi(v)}(w) &\equiv J_V \circ \chi(v).w.\chi(v)^{-1} = \chi \circ J_V(v).w.\chi(v^{-1}) \\ &= \text{Cliff}(\chi)(J_V(v).\chi^{-1}(w).v^{-1}) = \text{Cliff}(\chi) \circ \widetilde{\text{Ad}}_v(\chi^{-1}(w)), \end{aligned}$$

czyli – wobec Równ (3.4.3) –

$$\widetilde{\text{Ad}}_{\chi(v)}(w) = \chi \circ \widetilde{\text{Ad}}_v \circ \chi^{-1}(w),$$

co pozwala nam zapisać

$$\widetilde{\text{Ad}}_{\chi(v)} \upharpoonright_V = \text{Ad}_\chi(\widetilde{\text{Ad}}_v \upharpoonright_V)$$

i na tej podstawie – w bezpośrednim odwołaniu do Def. 119 (obie grupy są generowane mnożeniowo przez pewne wektory nieizotropowe w stosownej liczbie (parzystej dla $\text{Spin}(V, Q)$), a nadto $Q \circ \chi(v) = Q(v)$) – ustalić pożądane relacje

$$\forall H \in \{\widetilde{\text{Ad}}(\text{Pin}(V, Q)), \widetilde{\text{Ad}}(\text{Spin}(V, Q))\} \quad \forall \chi \in O(V, Q) : \text{Ad}_\chi(H) \subset H.$$

□

Tytułem ukierunkowania dalszej dyskusji, która pozwoli należycie wyeksponować grupy Pin i Spin , zauważmy, że dla dowolnego skalaru $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ (i dla każdego wektora $v \in V^\times$) spełniona jest tożsamość

$$P_{\lambda \triangleright v} = P_v,$$

jeśli zatem bylibyśmy w stanie przernormować wszystkie nieizotropowe wektory w V tak, by ich norma (spinorowa, tj. zadawana przez Q) była równa $\pm \mathbf{1}_{\mathbb{K}}$, to wówczas w świetle Tw. 1.2.4 reprezentacja dołączona zwichrowana ograniczałaby się w oczywisty sposób do epimorfizmów $\text{Pin}(V, Q) \twoheadrightarrow O(V, Q)$ oraz $\text{Spin}(V, Q) \twoheadrightarrow \text{SO}(V, Q)$. Kłopot w tym, że tego typu operacja wymaga rozwiązania (w \mathbb{K}^\times) równania

$$\{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\} \ni Q(\lambda \triangleright v) = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)$$

dla dowolnej wartości $Q(v)$, co tłumaczy się na warunek

$$\forall v \in V^\times \quad \exists \varepsilon_v \in \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\} : \frac{\varepsilon_v}{Q(v)} \in \{ \lambda^2 \in \mathbb{K}^\times \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times \}.$$

Warunek ten jest (szczęśliwie) spełniony dla $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, w ogólności zaś dostarcza motywacji dla

DEFINICJA 120. Przyjmijmy zapis Def. 9 oraz Przykł. 6 (1) i wprowadźmy oznaczenie

$$(\mathbb{K}^\times)^2 \equiv \{ \lambda^2 \in \mathbb{K}^\times \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times \}.$$

Ciało \mathbb{K} o charakterystyce $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ nazywamy **spinowym**, jeśli spełnia warunek

$$\mathbb{K}^\times = (\mathbb{K}^\times)^2 \cup -(\mathbb{K}^\times)^2,$$

czyli

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^\times \quad \exists \mu \in \mathbb{K}^\times : \mu^2 \in \{-\lambda, \lambda\}.$$



Zwieńczeniem naszych dociekań jest

TWIERDZENIE 3.4.1. *Przyjmijmy zapis Def. 52, 119 i 120, Stw. 188 oraz Przykł. 14 (1). Dla dowolnej skończonej wymiarowej niezwyrodniałej przestrzeni kwadratowej (V, Q) nad ciałem spinowym \mathbb{K} istnieją krótkie ciągi dokładne grup*

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \text{Pin}(V, Q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{O}(V, Q) \longrightarrow \mathbf{1},$$

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \text{Spin}(V, Q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{SO}(V, Q) \longrightarrow \mathbf{1},$$

przy czym

$$\mathbb{F} = \begin{cases} \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\} \cong \mathbb{Z}_2, & \text{gdy } \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \notin \mathbb{K} \\ \{-\sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}}, \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}}, -\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\} \cong \mathbb{Z}_4 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

co pokazuje, że grupy Pin i Spin są centralnymi rozszerzeniami grup – odpowiednio – ortogonalnej i specjalnej ortogonalnej przestrzeni kwadratowej. W szczególności dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i dowolnej sygnatury $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2} \setminus \{(0, 0)\}$, a przy oznaczeniach $G_{\mathbb{R}}(p, q) \cong G(\mathbb{R}^{p, q})$, $G \in \{\text{O}, \text{SO}, \text{Pin}, \text{Spin}\}$, otrzymujemy krótkie ciągi dokładne

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Pin}_{\mathbb{R}}(p, q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{O}_{\mathbb{R}}(p, q) \longrightarrow \mathbf{1},$$

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) \longrightarrow \mathbf{1},$$

w których – o ile tylko $(p, q) \neq (1, 1)$ – podwójne nakrycia grupy ortogonalnej (wzgl. specjalnej ortogonalnej) przez grupę Pin (wzgl. Spin) są topologicznie nietrywialne nad $\text{O}_{\mathbb{R}}(p, q)$ – i tak np. podwójne nakrycie

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}_{\mathbb{R}}(0, n) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{SO}_{\mathbb{R}}(0, n) \longrightarrow \mathbf{1}$$

jest uniwersalne dla $n \geq 3$.



Dowód: Rozważmy dowolny element $u = v_1.v_2.\dots.v_m \in \text{Pin}(V, Q)$ z jądra homomorfizmu $\widetilde{\text{Ad}}$ (określony przez wektory $v_i \in Q^{-1}(\{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\})$, $i \in \overline{1, m}$). Na mocy Stw. 188

$$u \in \mathbb{K}^{\times} \triangleright e^{\text{C}},$$

zatem – w świetle Stw. 189 i samej Def. 118 –

$$\begin{aligned} u.u &= u.J_V \circ T_V(u) \cong \text{N}(u) = \text{N}(v_1).\text{N}(v_2).\dots.\text{N}(v_m) \\ &= (-Q(v_1)) \cdot_{\mathbb{K}} (-Q(v_2)) \cdot_{\mathbb{K}} \dots \cdot_{\mathbb{K}} (-Q(v_m)) \triangleright e^{\text{C}} \in \mathbb{Z}_2 \triangleright e^{\text{C}}. \end{aligned}$$

Mamy tutaj dwie wykluczające się wzajemnie ewentualności:

- albo $\mathbb{K} \not\cong \sqrt{-\mathbb{1}_{\mathbb{K}}}$, a wtedy nieodzownie $u^2 = e^{\text{C}}$, czyli $u \in \{-e^{\text{C}}, e^{\text{C}}\}$, tj.

$$\text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} \subseteq \{-e^{\text{C}}, e^{\text{C}}\},$$

ponieważ jednak

$$\widetilde{\text{Ad}}_{\pm e^{\text{C}}} = \text{id}_V,$$

przeto ostatecznie

$$\text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} = \{-e^C, e^C\} \cong \mathbb{Z}_2,$$

- albo $\mathbb{K} \ni \sqrt{-1_{\mathbb{K}}}$, a wtedy oba znaki w powyższej tożsamości są dopuszczalne, więc

$$\text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} \subseteq \{-\sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, \sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, -e^C, e^C\},$$

a że

$$\forall_{x \in \{-\sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, \sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, -e^C, e^C\}} : \widetilde{\text{Ad}}_x = \text{id}_V,$$

toteż

$$\text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} = \{-\sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, \sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, -e^C, e^C\} \cong \mathbb{Z}_4.$$

Topologia podwójnych nakryć ma swój aspekt elementarny, który odróżnia pokrycia $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \widehat{B} \rightarrow B$ postaci $\widehat{B} = B \times \mathbb{Z}_2$ (zwane trywialnymi) od pokryć przyjmujących postać trywialną jedynie lokalnie (nad bazą B), ale też – zwłaszcza w obecnym kontekście – aspekt wyższy, który odróżnia pokrycia n -spójne (dla $n \geq 1$) od nie- n -spójnych. Zanalizowanie tego ostatniego aspektu wymaga znajomości szczegółów topologii wszystkich grup uwikłanych w treść twierdzenia na poziomie wykraczającym dalece poza zakres niniejszego kursu – zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do literatury źródłowej, jak choćby do doskonałej monografii S. Helgasona [Hel01]. W niniejszym dowodzie skupimy się natomiast na aspekcie elementarnym, wykazując, że podwójne pokrycia wymienione w drugiej części twierdzenia nie mają struktury podwójnej kopii bazy. W tym celu wystarczy połączyć krzywą ciągłą¹ punkty w przestrzeni totalnej pokrycia, które rzutują się na ten sam punkt bazy, a więc np. $-e^C$ i e^C w $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$. Jako że $(p, q) \neq (1, 1)$ (na podstawie poczynionego tu założenia), zawsze znajdziemy wektory $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{p+q}$ spełniające układ warunków

$$\delta_E^{(p,q)}(e_1) = \delta_E^{(p,q)}(e_2) =: \varepsilon \in \{-1, 1\} \quad \wedge \quad e_1 \perp_{\delta_E^{(p,q)}} e_2.$$

Dla dowolnej takiej pary wektorów definiujemy krzywą (gładką)

$$\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0} : t \mapsto (\cos t \triangleright e_1 + \sin t \triangleright e_2) \cdot (\cos t \triangleright e_1 - \sin t \triangleright e_2).$$

Bez trudu wyznaczamy

$$\begin{aligned} \delta_E^{(p,q)}(\cos t \triangleright e_1 + \sin t \triangleright e_2) &= \cos^2 t \cdot \delta_E^{(p,q)}(e_1) + \sin^2 t \cdot \delta_E^{(p,q)}(e_2) \\ &\quad + \sin t \cdot \cos t \cdot \Phi_{\delta_E^{(p,q)}}(e_1, e_2) = \varepsilon, \\ \delta_E^{(p,q)}(\cos t \triangleright e_1 - \sin t \triangleright e_2) &= \cos^2 t \cdot \delta_E^{(p,q)}(e_1) + \sin^2 t \cdot \delta_E^{(p,q)}(e_2) \\ &\quad - \sin t \cdot \cos t \cdot \Phi_{\delta_E^{(p,q)}}(e_1, e_2) = \varepsilon \end{aligned}$$

i na tej podstawie stwierdzamy, że krzywa leży w grupie Spin,

$$\gamma([0, \frac{\pi}{2}]) \subset \text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q),$$

¹Przy naturalnych założeniach dotyczących topologii rozpatrywanych grup, znajdujących potwierdzenie w szczegółowych dociekaniach, np. na podstawie lektury rzeczzonej monografii S. Helgasona.

będącej przestrzenią totalną rozpatrywanego nakrycia. Przy tym krzywa ta łączy ze sobą oba punkty w $\widetilde{\text{Ad}}^{-1}(\text{id}_V)$,

$$\gamma(0) = e_1 \cdot e_1 = \varepsilon \triangleright e^C, \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e_2 \cdot e_2 = -\varepsilon \triangleright e^C,$$

co nie byłoby możliwe w topologii $O_{\mathbb{R}}(p, q) \times \mathbb{Z}_2$. \square

2. Reprezentacje spinorowe

Próba zrozumienia struktury funktorialnego podniesienia izometrycznych automorfizmów przestrzeni kwadratowej do jej algebry Clifforda, zrealizowana w poprzednim rozdziale, doprowadziła nas do konstrukcji centralnego rozszerzenia grupy obrotów zachowujących orientację przestrzeni kwadratowej i tym samym przygotowała grunt pod wieńczącą nasze dociekania algebraiczne (w obecnym kontekście)

DEFINICJA 121. Przyjmijmy zapis Def. 119, Tw. 3.4.1 i Przykł. 14 (1), przy czym niechaj $((V, Q), \mathbb{K}) \in \{(\mathbb{R}^{p,q}, \mathbb{R}), (\mathbb{C}^{n,0}, \mathbb{C})\}$, i niech $S \in \text{Obj Vect}_{\mathbb{K}}$. **Reprezentacja spinorowa** grupy $\text{Spin}(V, Q)$ to ograniczenie (nietrywialnej) nieprzywiedlnej reprezentacji

$$\rho : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(S)$$

do tejże grupy

$$(3.4.4) \quad \text{Spin}(V, Q) \subset \text{Cliff}(V, Q)^0 \subset \text{Cliff}(V, Q),$$

przy czym w przypadku $((V, Q), \mathbb{K}) = (\mathbb{R}^{p,q}, \mathbb{R})$ i ρ rzeczywistej mówimy o **rzeczywistej reprezentacji spinorowej** grupy $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$, a w przypadku $((V, Q), \mathbb{K}) = (\mathbb{C}^{n,0}, \mathbb{C})$ i ρ zespolonej – o **zespolonej reprezentacji spinorowej** grupy $\text{Spin}_{\mathbb{C}}(n) \equiv \text{Spin}(\mathbb{C}^{n,0})$. \blacktriangle

UWAGA 41. Należy zwrócić, że reprezentacja spinorowa nie zstępuje do (czyli nie indukuje reprezentacji) $\text{SO}(V, Q)$, oto bowiem $\rho_{-e^C} = -\text{id}_V$.

W odwołaniu do wyników dotychczasowych naszych dociekań możemy bez trudu dokonać kompletnej klasyfikacji wprowadzonych tu obiektów.

TWIERDZENIE 3.4.2 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych / \mathbb{R}).
Przyjmijmy zapis Def. 121 oraz Przykł. 12 (7) i niechaj

$$\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(S)$$

będzie (nietrywialną rzeczywistą) reprezentacją nieprzywiedlną. Reprezentacja spinorowa

$$\rho \upharpoonright_{\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)} : \text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q) \longrightarrow \text{GL}(S; \mathbb{R})$$

przyjmuje – w zależności od $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ – następującą postać

- dla $|q - p| = 1 \pmod 8$: nieprzywiedlna rzeczywista na $S = \mathbb{R}^{2^k}$, gdzie $k = \begin{cases} p, & \text{gdy } q - p = 1 \pmod 8 \\ p - 1, & \text{gdy } q - p = 7 \pmod 8 \end{cases}$ (*spinory Pauliego*);
- dla $|q - p| = 3 \pmod 8$: nieprzywiedlna kwaternionowa na $S = \mathbb{H}^{2^k}$, gdzie $k = \begin{cases} p, & \text{gdy } q - p = 3 \pmod 8 \\ p - 3, & \text{gdy } q - p = 5 \pmod 8 \end{cases}$ (*spinory Pauliego*);

- dla $|q - p| = 2 \pmod{8}$: nieprzywiedlna zespolona na $S = \mathbb{C}^{2^k}$, gdzie $k = \begin{cases} p, & \text{gdy } q - p = 2 \pmod{8} \\ p - 1, & \text{gdy } q - p = 6 \pmod{8} \end{cases}$ (spinory Pauliego);
- dla $q - p = 0 \pmod{8}$: przywiedlna rzeczywista na $S = S_+ \oplus S_-$ (spinory Diraca) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne rzeczywiste reprezentacje na $S_{\pm} = \mathbb{R}^{2^p}$ (chiralne spinory Weyla);
- dla $q - p = 4 \pmod{8}$: przywiedlna rzeczywista na $S = S_+ \oplus S_-$ (spinory Diraca) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne kwaternionowe reprezentacje na $S_{\pm} = \mathbb{H}^{2^p}$ (chiralne spinory Weyla).

Przy tym w przypadku $q - p = 3 \pmod{4}$ wynik powyższej indukcji reprezentacji grupy Spin nie zależy od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$. ■

Dowód: Zważywszy Równ. (3.4.4), kluczową rolę w dowodzie odgrywają izomorfizmy (zapisane dla dowolnych $p, k \in \mathbb{Z}$, dla których zapis ma sens)

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,p+1+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-1+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p-2+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^{p-1+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p+3+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p+2+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-3+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p-4+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}(2^{p-3+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p+2+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p+1+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-2+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p-3+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}(2^{p-1+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p-1+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p+4+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p+3+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k}), \end{aligned}$$

odczytane wprost ze Stw. 151 (i) oraz z (dowodu) Tw. 3.2.5 po przywołaniu tezy Stw. 178. Wobec powyższego pozostaje upewnić się, że ograniczenie nieprzywiedlnych reprezentacji odnośnych (prostych) algebr macierzowych do zawartych w nich w sposób właściwy grup Spin nie prowadzi do pojawienia się podprzestrzeni niezmienniczych względem obrazu ograniczenia w grupie liniowej przestrzeni reprezentacji w obrębie tychże przestrzeni, a ponadto – że w przypadku, gdy odnośne parzyste podalgebry Clifforda są półproste, ich nierównoważne reprezentacje pozostają nierównoważnymi po ograniczeniu ich do grup Spin. Oba te fakty wynikają jednak wprost z tego, że $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$ zawiera addytywną bazę $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}$, a określenie reprezentacji na takowej bazie w pełni charakteryzuje tę reprezentację, oto bowiem równoważność dwóch reprezentacji (ograniczonych) ewaluowanych na bazie addytywnej implikowałaby ich równoważność w ogólności, a do tego niezmienniczość S względem reprezentacji ograniczonej do podstruktury zawierającej ową bazę implikowałaby bezpośrednio jej niezmienniczość względem reprezentacji sprzed ograniczenia.

Na koniec zajmiemy się niezależnością wyniku opisanej indukcji reprezentacji grupy $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$ od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$. Oznaczmy jako

$$\iota_3^{\pm} : \text{Cl}_{p,p+3+8k}^{\pm} \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}(2^{p+4k}), \quad \iota_7^{\pm} : \text{Cl}_{p,p-1+8k}^{\pm} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}(2^{p+4k})$$

izomorfizmy (3.2.8), po czym zauważmy, że w świetle Równ. (3.2.7) zachodzi tożsamość

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0} = \{ \gamma_+ \oplus J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+) \mid \gamma_+ \in \text{Cl}_{p,q}^+ \},$$

a ponieważ na mocy Stw. 177 $J_{\mathbb{R}^{p+q}}$ jest izomorfizmem między algebrą $\text{Cl}_{p,q}^+$ i $\text{Cl}_{p,q}^-$, przeto reprezentacje

$$\rho_{\text{def}} \circ \iota_3^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} : \text{Cl}_{p,p+3+8k}^+ \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^{2^{p+4k}})$$

oraz

$$\rho_{\text{def}} \circ \iota_7^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} : \text{Cl}_{p,p-1+8k}^+ \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2^{p+4k}})$$

są nieprzywiedlne, a zatem – wobec prostoty $\text{Cl}_{p,q}^+$ – nieodzownie

$$\rho_{\text{def}} \circ \iota_k^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} \sim \rho_{\text{def}} \circ \iota_k^+, \quad k \in \{3, 7\},$$

mimo więc relację – orzeczoną w Stw. 184 (i) – $\rho_+ \not\sim \rho_-$, stwierdzamy istnienie splataczy $\chi_3 \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^{2^{p+4k}})$ oraz $\chi_7 \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2^{p+4k}})$ spełniających warunki

$$\begin{aligned} \rho_-(\gamma_+ \oplus J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+)) &= \rho_{\text{def}} \circ \iota_k^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+) = \chi_k \circ \rho_{\text{def}} \circ \iota_k^+(\gamma_+) \circ \chi_k^{-1} \\ &\equiv \chi_k \circ \rho_+(\gamma_+ \oplus J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+)) \circ \chi_k^{-1}, \end{aligned}$$

czyli

$$\rho_- \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}} \sim \rho_+ \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}}.$$

□

TWIERDZENIE 3.4.3 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych / \mathbb{C}).
Przyjmijmy zapis Def. 121 oraz Przykł. 12 (7) i niechaj

$$\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$$

będzie (nietrywialną zespoloną) reprezentacją nieprzywiedlną. Reprezentacja spinorowa

$$\rho \upharpoonright_{\text{Spin}_{\mathbb{C}}(n)} : \text{Spin}_{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow \text{GL}(S; \mathbb{C})$$

przyjmuje – w zależności od $n \in \mathbb{N}$ – następującą postać

- dla $n \in 2\mathbb{N} + 1$: nieprzywiedlna zespolona na $S = \mathbb{C}^{2^{\frac{n-1}{2}}}$ (spinory Pauliego);
- dla $n \in 2\mathbb{N}$: przywiedlna zespolona na $S = S_+ \oplus S_-$ (spinory Diraca) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne zespolone reprezentacje na $S_{\pm} = \mathbb{C}^{2^{\frac{n}{2}-1}}$ (chiralne spinory Weyla).

Przy tym w przypadku $n \in 2\mathbb{N} + 1$ wynik powyższej indukcji reprezentacji grupy Spin nie zależy od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$.

■

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Tw. 3.4.2. \square

Jest całkowicie jasnym, że przedstawiona tu dyskusja reprezentacji spinorowych stanowi ledwie wprowadzenie do teorii reprezentacji grupy Spin, przynoszącej – m.in. – odpowiedź na pytanie o kompletną klasyfikację *wszystkich* nierównoważnych nieprzywiedlnych jej reprezentacji oraz pierścienia tychże reprezentacji. Szczegółowe studium struktury tego ostatniego, które z racji fundamentalnej roli, jaką nieprzywiedlne reprezentacje grupy Spin odgrywają w modelowaniu pól fizycznych, powinno być przedmiotem każdego umotywowanego fizykalnie wykładu z teorii grup i algebr (Liego), pozwala wyróżnić reprezentację spinorową jako jego elementarny generator. Doskonałym źródłem intuicji i podstawowych konstrukcji w tym zakresie jest monografia Cartana [Car38a, Car38b].

3. Spinory czyste i flagi zerowe – studium przypadków

Konstrukcje algebraiczne napotykanne w kategorii przestrzeni kwadratowych mają zazwyczaj naturalną i czytelną interpretację geometryczną, która zasada się na intuicji dotyczącej pojęć „długości wektora”, „kąta między wektorami”, „obrotu wektora” i „odbicia wektora w hiperpłaszczyźnie”. Idąc tym tropem, możemy zadać pytanie o geometryczny aspekt konstrukcji spinora, rozumianego jako wektor z przestrzeni reprezentacji grupy Spin nakrywającej grupę obrotów przestrzeni kwadratowej. Pięknej w swej naturalności i prostocie odpowiedzi na tak postawione pytanie (choć nie wyczerpującej denotatu, a to z racji istnienia spinorów nie-czystych (*sic!*)) udzielił E. Cartan we wspomnianej już wcześniej monografii [Car38a, Car38b] poświęconej spinorom. Odpowiedź tę doskonale uzupełnia konstrukcja R. Penrose’a przedstawiona w trakcie konferencji Battelle Rencontres, a spisana w [Pen68].

3.1. Spinor czysty Cartana. Zaczniemy od przedstawienia pomysłu Cartana, która jest zorganizowana wokół

DEFINICJA 122. Przyjmijmy zapis Def. 6 i 121. **Spinor czysty** to wektor z przestrzeni reprezentacji spinorowej grupy $\text{Spin}(V, Q)$ anihilowany przez obraz $J_V^C(W) \subset \text{Cliff}(V, Q)$ dowolnej maksymalnej podprzestrzeni Q -zerowej $W \subset V$. \blacktriangle

Szczegółowa analiza konstrukcji Cartana wykracza poza ramy niniejszego kursu, jednakowoż jej znaczenie w budowaniu konkretnej geometrycznej konotacji dla abstrakcyjnego pojęcia spinora stanowi dostateczną motywację choćby tylko dla wnikliwego prześledzenia tej konstrukcji na wybranym przykładzie, co czynimy poniżej.

Rozważmy wektor

$$v \equiv (t, x, y) \in \mathbb{R}^{1,2} \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

o normie

$$\delta_E^{(1,2)}(v) = t^2 - x^2 - y^2.$$

Ileokół v jest izotropowy,

$$\delta_E^{(1,2)}(v) = 0,$$

możemy – wobec warunku $t \neq 0$ (którego niespełnienie implikowałoby równość $v = (0, 0, 0)$) – „wyciągnąć pierwiastek kwadratowy” z wektora v wprowadzając

wektor (przypomnijmy: $\text{Cl}_{1,2}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}(2)$)

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

o składowych spełniających układ warunków

$$(3.4.5) \quad \begin{cases} \xi_1^2 - \xi_2^2 = x \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 = iy \\ 2\xi_1\xi_2 = it \end{cases} .$$

Istotnie, otrzymujemy wówczas tożsamość

$$t^2 - x^2 - y^2 = -4\xi_1^2\xi_2^2 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 = 0.$$

Rozwiązanie ogólne powyższego układu ma postać

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+iy}{2}} \\ \varepsilon_2 \sqrt{\frac{-x+iy}{2}} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\},$$

przy czym wybieramy wspólną dla obu składowych gałąź funkcji $\sqrt{\cdot}$, dla której $\sqrt{-1} = i$. Znaki ε_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ związane są warunkiem

$$\text{sgn}(t)|t| \equiv t = -2i\xi_1\xi_2 = -i\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{-x^2 - y^2} = \varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{t^2} = \varepsilon_1\varepsilon_2|t|,$$

z którego wyprowadzamy relację

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot \text{sgn}(t).$$

Ta pozwala ostatecznie zapisać rozwiązanie

$$(3.4.6) \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x+iy}{2}} \\ \text{sgn}(t) \sqrt{\frac{-x+iy}{2}} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\},$$

czyli – jeśli wprowadzić pomocniczą notację zespoloną $z \equiv x + iy \in \mathbb{C}$, w której $\bar{z} = x - iy$ –

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{z}{2}} \\ \text{sgn}(t) i \sqrt{\frac{\bar{z}}{2}} \end{pmatrix} =: \xi(v), \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Zauważmy, że znak ε nie może być ustalony w sposób niesamospzeczny jednocześnie dla *wszystkich* wektorów izotropowych, oto bowiem przy obrocie o kąt φ w płaszczyźnie $\{(0, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, przy którym składowe wektora v transformują się wedle formuł

$$v \equiv (t, z) \longmapsto (t, e^{i\varphi} \cdot_{\mathbb{C}} z) =: R_\varphi(v),$$

składowe spinora podlegają transformacji

$$\xi(v) \longmapsto \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \xi(v) \equiv \xi(R_\varphi(v)).$$

W szczególności pod wpływem pełnego obrotu, $\varphi = 2\pi$, następuje odbicie

$$\xi(v) \longmapsto \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} \xi(R_\varphi(v)) = -\xi(v).$$

Podane przez nas rozwiązanie problemu „wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego z wektora” ma swoją zgrabną (i w pełni równoważną z powyższą) realizację

macierzową, do której omówienia przejdziemy obecnie. Oto więc z wektorem v stowarzyszamy macierz

$$\gamma(v) := \begin{pmatrix} t & iz \\ i\bar{z} & -t \end{pmatrix} \equiv t \triangleright \gamma(e_0) + x \triangleright \gamma(e_1) + y \triangleright \gamma(e_2),$$

otrzymując przy tej okazji trójkę macierzy

$$\gamma(e_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

odpowiadających wektorom bazy standardowej. Zauważmy, że spełnione są tożsamości

$$\begin{aligned} \gamma(e_0)^2 &= \mathbf{1}_2 \equiv \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_0) \triangleright \mathbf{1}_2, \\ \gamma(e_1)^2 &= -\mathbf{1}_2 \equiv \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_1) \triangleright \mathbf{1}_2, \\ \gamma(e_2)^2 &= -\mathbf{1}_2 \equiv \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_2) \triangleright \mathbf{1}_2 \end{aligned}$$

oraz

$$\{\gamma(e_0), \gamma(e_1)\} = \mathbf{0}_2, \quad \{\gamma(e_0), \gamma(e_2)\} = \mathbf{0}_2, \quad \{\gamma(e_1), \gamma(e_2)\} = \mathbf{0}_2,$$

czyli w sumie – dla dowolnych wektorów $v_\alpha = v_\alpha^\mu \triangleright e_\mu \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \{1, 2\}$ –

$$(3.4.7) \quad \{\gamma(v_1), \gamma(v_2)\} = v_1^\mu v_2^\nu \{\gamma(e_\mu), \gamma(e_\nu)\} = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}}(v_1, v_2) \triangleright \mathbf{1}_2.$$

Stwierdzamy zatem, że γ jest kanonicznym odwzorowaniem Clifforda

$$(3.4.8) \quad \gamma : \mathbb{R}^{1,2} \longrightarrow \mathbb{C}(2) \cong \mathbb{C}l_{1,2}^{\mathbb{R}},$$

a do tego spełnia warunek strukturalny

$$\forall v \in \mathbb{R}^{1,2} : \det_{(2)} \gamma(v) = -Q(v).$$

Rozważmy następnie wektor $\xi(v) \in \mathbb{C}^2$ przyporządkowany – według opisanego schematu – wektorowi izotropowemu $v \in \mathbb{R}^{1,2}$ oraz macierz $\gamma(v)$ stowarzyszoną z tym ostatnim. Jak wynika wprost z konstrukcji, zachodzi równość

$$\gamma(v) \odot \xi(v) \equiv \begin{pmatrix} -2i\xi_1\xi_2 & 2i\xi_1^2 \\ -2i\xi_2^2 & 2i\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a ponieważ $\text{Ker } \gamma(v) \neq \mathbb{C}^2$ (wszak $\gamma(v) \neq \mathbf{0}_2$), przeto dla ustalonego (dowolnie) izotropowego wektora $v \in \mathbb{R}^{1,2}$ równość

$$(3.4.9) \quad \gamma(v) \odot \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wyznacza (kierunek) $\xi \in \mathbb{C}^2$. Istotnie, wobec równości

$$\det_{(2)} \gamma(v) = \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(v) = 0$$

mamy nierówność

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(v) > 0,$$

a zarazem – jeśli tylko $v \neq (0, 0, 0)$ – prawdziwą jest też nierówność

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(v) < 2,$$

których koniunkcja daje nam pożądaną wynik:

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(v) = 1.$$

Przywoławszy Def. 122, domniemywamy, że powyższy $\xi \in \text{Ker } \gamma(v) \setminus \{0_{\mathbb{C} \times 2}\}$ jest spinorem czystym stowarzyszonym z maksymalną podprzestrzenią $\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}$ -zerową $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{1,2}$. Ażeby potwierdzić to przypuszczenie, musimy jeszcze przekonać się, że spinory tej postaci rozpinają przestrzeń reprezentacji grupy $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(1,2)$. W tym celu rozpatrzmy transformacje macierzy $\gamma(v)$ indukowane przez standardowe działanie grupy $\text{SO}_{\mathbb{R}}(p,q)$ na (dowolnym) wektorze v za pośrednictwem odwzorowania (3.4.8). W świetle Tw. 1.2.4 wystarczy zbadać zachowanie tejże macierzy pod wpływem złożenia dwóch odbić v w płaszczyznach $\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}$ -ortogonalnych do dwóch wektorów nieizotropowych. Obliczamy zatem – dla dowolnego $\mu \in \{0, 1, 2\}$ –

$$\begin{aligned}
\gamma(P_{e_{\mu}}(v)) &= \gamma(v - 2\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}}(v, e_{\bar{\mu}}) \triangleright e_{\bar{\mu}}) \\
&= \gamma(v) - 2\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}}(v, e_{\bar{\mu}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \\
&= \gamma(v) - \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright \{\gamma(v), \gamma(e_{\bar{\mu}})\} \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \\
&\equiv \gamma(v) - \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright (\gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) + \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}})) \\
&= \gamma(v) - \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright (\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}}) \triangleright \gamma(v) + \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}})) \\
&= -\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \equiv -\text{Ad}_{\gamma(e_{\bar{\mu}})}(\gamma(v))
\end{aligned}$$

i na tej podstawie

$$\gamma(P_{e_{\mu}} \circ P_{e_{\nu}}(v)) = \text{Ad}_{\gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(e_{\bar{\nu}})}(\gamma(v)).$$

Uwzględniając równość (3.4.9) definiującą kierunek $\xi(v)$, postulujemy

$$(3.4.10) \quad \xi(P_{e_{\mu}}(v)) = \lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \xi(v)$$

dla pewnego homomorfizmu grup

$$\lambda : \text{O}_{\mathbb{R}}(1,2) \longrightarrow \mathbb{C}^{\times},$$

co do którego czynimy istotne założenie, że jest ciągły względem standardowej topologii na grupie Liego $\text{O}_{\mathbb{R}}(1,2)$, przy czym należy pamiętać, że grupa ta ma cztery spójne składowe: podgrupę $\text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+$ odwzorowań zachowujących kierunek czasu e_0 oraz orientację w przestrzeni $\langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ (tzw. ortochroniczną specjalną grupę Lorentza) oraz jej translaty $P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+$, $(n_0, n_1) \in \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$, tj.

$$\text{O}_{\mathbb{R}}(1,2) = \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \sqcup P_{e_0} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \sqcup P_{e_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \sqcup P_{e_0} \cdot P_{e_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+.$$

Powyższy postulat sprawdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned}
\gamma(P_{e_{\bar{\mu}}}(v)) \odot (\lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \xi(v)) &= -\lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \text{Ad}_{\gamma(e_{\bar{\mu}})}(\gamma(v)) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \xi(v) \\
&= -\lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \xi(v) \\
&= -\lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right),
\end{aligned}$$

z którego – zgodnie z oczekiwaniem – wynika

$$\forall_{v \in \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)-1}(\{0\})} \forall_{\xi \in \text{Ker } \gamma(v)} : \lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \xi(v) \in \text{Ker } \gamma(P_{e_{\bar{\mu}}}(v)),$$

a ponieważ, jak uzasadniliśmy wcześniej,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(P_{e_{\bar{\mu}}}(v)) = 1,$$

przeto poszukiwany skalar $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ istnieje. Na tym etapie możemy przywołać tożsamość

$$P_{e_{\bar{\mu}}} \circ P_{e_{\bar{\mu}}} = \text{id}_{\mathbb{R}^{1,2}},$$

aby wyznaczyć

$$\begin{aligned} \xi(v) &= \xi(P_{e_{\bar{\mu}}} \circ P_{e_{\bar{\mu}}}(v)) = \lambda(P_{e_{\bar{\mu}}})^2 \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \xi(v) \\ &= \lambda(P_{e_{\bar{\mu}}})^2 \cdot \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}}) \triangleright \xi(v). \end{aligned}$$

Zważywszy nieusuwalną \mathbb{Z}_2 -niejednoznaczność w formule (3.4.6), wywodzimy stąd warunek

$$\lambda^2 \in \{-1, 1\}.$$

Przyjęte wcześniej założenie o ciągłym charakterze odwzorowania λ implikuje stałość tego ostatniego na każdej z czterech spójnych składowych $O_{\mathbb{R}}(1, 2)$. Ażeby wyznaczyć λ dla poszczególnych składowych, wystarczy zbadać warunek (3.4.10) w bezpośrednim odwołaniu do relacji (3.4.5). Na podstawie oczywistych równości

$$\begin{aligned} \gamma(e_0) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} =: \xi^{(0)}, \\ \gamma(e_1) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i\xi_2 \\ i\xi_1 \end{pmatrix} =: \xi^{(1)}, & \gamma(e_2) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} =: \xi^{(2)}, \end{aligned}$$

z których wyprowadzamy reguły transformacyjne

$$\begin{aligned} (t, x, y) &\xrightarrow{\xi \mapsto \xi^{(0)}} (-t, x, y) \equiv P_{e_0}(t, x, y), \\ (t, x, y) &\xrightarrow{\xi \mapsto \xi^{(1)}} (-t, x, -y) \equiv -P_{e_1}(t, x, y), \\ (t, x, y) &\xrightarrow{\xi \mapsto \xi^{(2)}} (-t, -x, y) \equiv -P_{e_2}(t, x, y), \end{aligned}$$

stwierdzamy, że

$$\lambda(P_{e_0}) = 1 = -\lambda(P_{e_1}) = -\lambda(P_{e_2}),$$

a stąd już wprost

$$\lambda \upharpoonright_{SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+} = 1 = \lambda \upharpoonright_{P_{e_0} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+}, \quad \lambda \upharpoonright_{P_{e_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+} = -1 = \lambda \upharpoonright_{P_{e_0} \cdot P_{e_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+},$$

przy czym zamiast e_1 moglibyśmy z jednakim skutkiem użyć e_2 , co niezależnie potwierdza sensowność przyjętego przyporządkowania. Takie przypisanie wartości generatorom grupy $O_{\mathbb{R}}(1, 2)$ jest spójne z poczynionym przez nas na wstępie założeniem o homomorficznym charakterze λ , oto bowiem dla dowolnych par $(m_0, m_1), (n_0, n_1) \in \{0, 1\}^{\times 2}$ z jednej strony zachodzą relacje algebraiczne

$$P_{e_0}^{m_0} \cdot P_{e_1}^{m_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1, 2)^+ \cdot P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1, 2)^+ \subset P_{e_0}^{m_0+n_0} \cdot P_{e_1}^{m_1+n_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1, 2)^+,$$

z drugiej zaś – homomorficzność λ wymaga

$$\begin{aligned} \lambda \upharpoonright_{P_{e_0}^{m_0} \cdot P_{e_1}^{m_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \cdot P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+} &= \lambda \upharpoonright_{P_{e_0}^{m_0} \cdot P_{e_1}^{m_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+} \cdot \lambda \upharpoonright_{P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+} \\ &= (-1)^{m_1} \cdot (-1)^{n_1} = (-1)^{m_1+n_1} \equiv \lambda \upharpoonright_{P_{e_0}^{m_0+n_0} \cdot P_{e_1}^{m_1+n_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+}. \end{aligned}$$

Na zakończenie zauważmy, że transformacje $\xi(v) \mapsto \pm\gamma(e_\mu) \odot \xi(v)$, indukowane przez odbicia $P_{\pm e_\mu}$, są nierozróżnialne na poziomie wektorowym, oto bowiem

$$\begin{aligned} \gamma(P_{-e_\mu}(v)) &= \gamma(v - 2\delta_E^{(1,2)}(-e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_E^{(1,2)}}(v, -e_{\bar{\mu}}) \triangleright (-e_{\bar{\mu}})) \\ &= \gamma(v - 2\delta_E^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_E^{(1,2)}}(v, e_{\bar{\mu}}) \triangleright e_{\bar{\mu}}) \equiv \gamma(P_{e_\mu}(v)). \end{aligned}$$

To samo dotyczy każdej innej pary odwzorowań indukowanych przez transformacje ortogonalne w $\mathbb{R}^{1,2}$, a różniących się o znak. Fakt ten stanowi jawne odzwierciedlenie istnienia obu krótkich ciągów dokładnych grup, o których mówi Tw. 3.4.1.

W podsumowaniu naszego studium możemy skonstatować, że oto naturalną geometryzacją algebraicznej konstrukcji spinora (czystego) w sygnaturze $(1, 2)$ jest wektor izotropowy, który jednoznacznie reprezentuje klasę spinora względem relacji zmiany znaku.

3.2. Flaga zerowa Penrose’a.

Część 4

Wiązki włókniste z powiązaniem

Qui bono?

Wprowadzenie do teorii wiązek włóknistych

1. Struktury ogólne

DEFINICJA 123. Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz 64 i ustalmy $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. **Wiązka włóknista** klasy C^k to czwórka (E, B, F, π_E) złożona z C^k -rozmaitości:

- E , zwanej **przestrzenią totalną (wiązki)**;
- B , zwanej **bazą (wiązki)**;
- F , zwanej **włóknem typowym (wiązki)**;

oraz odwzorowania surjektywnego klasy C^k

$$\pi_E : E \twoheadrightarrow B,$$

zwanego **rzutem na bazę (wiązki)**, dla których istnieje pokrycie otwarte $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B wraz ze stowarzyszoną z nim rodziną dyfeomorfizmów klasy C^k

$$\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F,$$

zwanymi **trywializacjami lokalnymi (wiązki)**, domykającymi diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i} & \mathcal{O}_i \times F \\ & \searrow \pi_E & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & \mathcal{O}_i \end{array} .$$

Pokrycie o powyższej własności określamy mianem **trywializującego**. Odwzorowania

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Aut}(F) \equiv \text{Diff}^k(F, F)$$

określone, dla wszystkich par indeksów $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$, przez superpozycje dyfeomorfizmów

$$\tau_{ij} := \tau_i \circ \tau_j^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij} \times F} : \mathcal{O}_{ij} \times F \circlearrowleft : (x, f) \longmapsto (x, g_{ij}(x)(f)),$$

gdzie odwzorowanie $\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F : (x, f) \longmapsto g_{ij}(x)(f)$ jest z założenia klasy C^k , są nazywane **odwzorowaniami przejścia (wiązki)**, a grupa automorfizmów $\text{Aut}(F)$ włókna typowego (lub dowolna jej podgrupa, do której należą wszystkie odwzorowania przejścia) zyskuje miano **grupy strukturalnej (wiązki)**, Wiązkę

będziemy nieraz oznaczać przy użyciu diagramu

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \pi_E \\ & & B \end{array} .$$

Przeciwwobraz punktu $x \in B$ względem rzutu kanonicznego,

$$\pi_E^{-1}(\{x\}) \equiv E_x$$

nazywamy **włóknem wiązki E nad x** .

Innymi słowy, wiązka włóknista jest przestrzenią Hausdorffa $(E, \mathcal{T}(E))$ typu $\mathbf{Man}^{(k)}$ lokalnie modelowaną na kategorii $\mathcal{T}(B) \times F$ o klasie obiektów złożonej z produktów $\mathcal{O} \times F$, w których pierwszy czynnik to $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(B)$, drugi zaś to $F \in \mathbf{Obj} \mathbf{Man}^{(k)}$, oraz o klasie morfizmów złożonej z odwzorowań produktowych $f \times \varphi : \mathcal{O}_1 \times F \rightarrow \mathcal{O}_2 \times F$, w których pierwszy czynnik to $f \in C^k(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$, a drugi to $\varphi \in \text{Aut}(F)$, przy czym pokrycie trywializujące ma tu postać $\{\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)\}_{i \in I}$, gdzie $\pi_E : E \rightarrow B$ jest surjekcją klasy C^k , a $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ jest pokryciem otwartym B . Na tak określonym pokryciu trywializującym zadana jest rodzina izomorfizmów $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times F$ w kategorii $\mathbf{Man}^{(k)}$, których złożenia $\tau_j \circ \tau_i^{-1}$ – określone dla $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ – są izomorfizmami w kategorii $\mathcal{T}(B) \times F$.

Podwiązka wiązki $\mathcal{E} \equiv (E, B, F, \pi_E)$ to wiązka włóknista $(\tilde{E}, B, \tilde{F}, \pi_E|_{\tilde{E}})$, której przestrzeń totalna jest podzaimością $\tilde{E} \subset E$ gładko włożoną w przestrzeń totalną \mathcal{E} , a włókno typowe jest podzaimością $\tilde{F} \subset F$ włożoną we włókno typowe F .

Morfizm wiązek włóknistych między dwiema wiązkami włóknistymi $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ klasy C^k to para (Φ, f) odwzorowań klasy C^k , które czynią przemiennym poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \pi_{E_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array} .$$

Izomorfizm wiązek włóknistych o własności pokrywający identyczność na bazie, czyli spełniający warunek $f = \text{id}_B$, nosi miano **równoważności wiązek włóknistych**.

Wiązki włókniste nad ustaloną bazą B wraz z morfizmami (wiązek) między nimi tworzą **kategorię wiązek włóknistych nad B** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{Bun}(B).$$

▲

(1) **Wiązka trywialna** to czwórka

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & B \times F \\ & & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & B \end{array},$$

a więc np. 2-torus $\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, walec $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$.

(2) **Wstęga Möbiusa** jako wiązka nietrywialna nad \mathbb{S}^1 .

(3) Niechaj (E, B_2, F, π_E) będzie wiązką włóknistą klasy C^k o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_i \times F$ stowarzyszonych z pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B_2 , a $f : B_1 \rightarrow B_2$ – odwzorowaniem klasy C^k . Wówczas czwórka $(f^*E \equiv B_1 \times_{B_2} E, B_1, F, \text{pr}_1)$, zapisana w konwencji Przykł. 21 (1), jest wiązką, zwaną **wiązką cofniętą (wzdłuż f)**,

- przestrzeni totalnej w postaci produktu włóknistego

$$\begin{array}{ccc} B_1 \times_{B_2} E & \xrightarrow{\text{pr}_2 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}} & E \\ \text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array},$$

który wyposażamy w topologię podprzestrzeni indukowaną z topologii produktowej na $B_1 \times E \supset B_1 \times_{B_2} E$;

- rzucie na bazę $\pi_{f^*E} \equiv \text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E} : B_1 \times_{B_2} E \rightarrow B_1$ danym jako (odpowiednio ograniczony, a jawnie surjektywny) rzut kanonicznym na pierwszą składową;
- włóknie typowym tożsamym z włóknem typowym E i włóknem nad punktem bazy $x \in B_1$ danym w postaci $\{x\} \times \pi_E^{-1}(\{f(x)\}) \equiv E_{f(x)}$;
- trywializacjach lokalnych

$$\tau_i^{f^*} := (\text{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_i)} \times (\text{pr}_2 \circ \tau_i)) \upharpoonright_{\text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))} : \text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i)) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(\mathcal{O}_i) \times F$$

stowarzyszonych z pokryciem trywializującym $f^*\mathcal{O} \equiv \{f^{-1}(\mathcal{O}_i)\}_{i \in I}$ (jego otwartość jest oczywistą konsekwencją ciągłości f).

Trywializacje są w oczywisty sposób dobrze określone, oto bowiem mamy tożsamość

$$\text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i)) = \text{pr}_2 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)) \equiv \text{pr}_2 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(\tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i \times F)),$$

wynikającą z przemienności powyższego diagramu. Ponadto gładkość odwzorowań strukturalnych: π_{f^*E} i $\tau_i^{f^*}$ jest zapewniona przez Tw. 1.4.24, które orzeka o istnieniu struktury rozmaitości włożonej klasy C^k na podprzestrzeni $B_1 \times_{B_2} E \subset B_1 \times E$, a to z racji submersywności π_E . Oznaczywszy rzeczone włożenie (klasy C^k) jako $\iota_{f^*} : B_1 \times_{B_2} E \hookrightarrow B_1 \times E$, możemy zapisać oba odwzorowania jako superpozycje odwzorowań gładkich:

$$\pi_{f^*E} \equiv \text{pr}_1 \circ \iota_{f^*}, \quad \tau_i^{f^*} \equiv (\text{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_i)} \times (\text{pr}_2 \circ \tau_i)) \circ \iota_{f^*} \upharpoonright_{\text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))}.$$

Bez trudu wyznaczamy odwzorowania przejścia wiązki cofniętej,

$$g_{ij}^{f*} \equiv g_{ij} \circ f \upharpoonright_{f^{-1}(\mathcal{O}_{ij})} : f^{-1}(\mathcal{O}_{ij}) \longrightarrow \text{Aut}(F), \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

w bezpośrednim rachunku

$$\begin{aligned} \tau_i^{f*} \circ \tau_j^{f* -1}(x, \phi) &= \tau_i^{f*}(x, \tau_j^{-1}(f(x), \phi)) = (x, \text{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(f(x), \phi)) \\ &= (x, \text{pr}_2(f(x), (g_{ij} \circ f)(x)(\phi))) = (x, (g_{ij} \circ f)(x)(\phi)), \end{aligned}$$

przeprowadzonym dla dowolnych $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_i) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_j) = f^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$ oraz $\phi \in F$ i wykorzystującym tożsamość

$$\tau_i(e) = (f(x), \text{pr}_2 \circ \tau_i(e))$$

słuszną w dowolnym punkcie $(x, e) \in \text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))$.

✓

STWIERDZENIE 193. *Przyjmijmy zapis Def. 123, przy czym zakładamy dodatkowo, że $k \geq 1$. Rzut na bazę wiązki $\pi_E : E \longrightarrow B$ jest surjektywną submersją i jako taki ma na pewnym otoczeniu $\mathcal{O} \ni x$ dowolnego punktu bazy $x \in B$ cięć lokalne (w rozumieniu Stw. 114), spełniające tożsamość*

$$(4.1.1) \quad \pi \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}},$$

które nazywamy **cięciem lokalnym (wiązki)**. Ilekroć $\mathcal{O} = B$, mówimy o **cięciu globalnym (wiązki)**. ■

Dowód: Submersywność π_E wynika wprost z postaci obrazu tożsamości (4.1.1) względem funktora stycznego w dowolnym punkcie bazy $x \in B$,

$$\mathbb{T}_{\sigma(x)}\pi_E \circ \mathbb{T}_x\sigma = \mathbb{T}_x\text{id}_{\mathcal{O}} = \text{id}_{\mathbb{T}_x\mathcal{O}}.$$

Istnienie cięć lokalnych jest konsekwencją Stw. 114. □

UWAGA 42. Zbiór cięć lokalnych wiązki (E, B, F, π_E) będziemy oznaczać symbolem

$$\Gamma_{\text{loc}}(E),$$

a zbiór jej cięć globalnych – symbolem

$$\Gamma(E).$$

TWIERDZENIE 4.1.1 (O rekonstrukcji wiązki włóknistej). *Przyjmijmy zapis Def. 65 i 123. Odwzorowania przejścia wiązki włóknistej (E, B, F, π_E) o pokryciu trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ spełniają **warunek 1-kocyklu***

$$(4.1.2) \quad \forall_{(i,j,k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}, x \in \mathcal{O}_{ijk}} : g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x) = \text{id}_F.$$

I odwrotnie, niechaj $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ będzie pokryciem otwartym C^k -rozmaitości B i niech F będzie dowolną C^k -rozmaitością o grupie automorfizmów $\text{Aut}(F)$. Dowolna stowarzyszona z \mathcal{O} rodzina odwzorowań

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Aut}(F), \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

indukujących odwzorowania klasy C^k

$$\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F : (x, f) \longmapsto g_{ij}(x)(f)$$

i spełniających powyższy warunek określa wiązkę włóknistą o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z \mathcal{O}_{ij} tożsamy z g_{ij} , $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$. Ilekroć odwzorowania te są odwzorowaniami przejścia pewnej wiązki włóknistej nad B o włóknie typowym F , ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez odwzorowania przejścia g_{ij} . ■

Dowód: Pierwsza część tezy jest bezpośrednią konsekwencją następującej równości, słusznej dla dowolnej trójki $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle$ oraz $(x, f) \in \mathcal{O}_{ijk} \times F$:

$$\begin{aligned} (x, f) &\equiv (\text{id}_{\mathcal{O}_{ijk}} \times \text{id}_F)(x, f) = ((\tau_i \circ \tau_j^{-1}) \circ (\tau_k \circ \tau_j^{-1})^{-1} \circ (\tau_k \circ \tau_i^{-1}))(x, f) \\ &= (x, g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x)(f)). \end{aligned}$$

Punktem wyjścia do dowodu drugiej jego części jest konstrukcja sumy rozłącznej $\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$, na której określamy relację

$$(x, i, f) \sim_{g..} (y, j, g) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ g = g_{ji}(x)(f) \end{cases},$$

Warunek 1-kocyklu spełniony przez odwzorowania przejścia sprawia, że jest to relacja równoważności, oto bowiem dla $i = j = k$ dostajemy

$$g_{ii}(x) \equiv g_{ii}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ii}(x) = \text{id}_F,$$

zatem $\sim_{g..}$ jest zwrotna, a dalej tenże warunek w połączeniu z poprzednią konkluzją implikuje skośną symetrię g_{ij} ,

$$g_{ji}(x) \circ g_{ij}(x) = g_{ji}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ij}(x) = \text{id}_F,$$

która pociąga za sobą jej symetrię, i wreszcie stosownie przepisany warunek 1-kocyklu,

$$g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} = g_{ki}(x)^{-1} = g_{ik}(x),$$

oznacza, że jest ona przechodnia. Możemy zatem przejść od $\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$ do zbioru klas abstrakcji

$$\mathcal{R}_{g..} := \left(\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \right) /_{g..},$$

na którym określamy surjekcję

$$\pi_{\mathcal{R}_{g..}} : \mathcal{R}_{g..} \twoheadrightarrow B : [(x, i, f)]_{\sim_{g..}} \mapsto x.$$

Zauważmy, że dowolna klasa $[(x, i, f)]_{\sim_{g..}}$ zawiera dokładnie jednego reprezentanta o ustalonym indeksie, $(x, i, f) \in \mathcal{O}_i \times \{i\} \times F$, gdyż – wprost z definicji –

$$(y, i, g) \in [(x, i, f)]_{\sim_{g..}} \implies (y, g) = (x, g_{ii}(x)(f)) = (x, \text{id}_F(f)) = (x, f),$$

a ponieważ także

$$\forall_{(x, f) \in \mathcal{O}_i \times F} : (x, i, f) \in [(x, i, f)]_{\sim_{g..}},$$

przeto otrzymujemy bijekcję

$$[\tau_i] : \pi_{\mathcal{R}_{g..}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times F : [(x, i, f)]_{\sim_{g..}} \mapsto (x, f).$$

Następnie wprowadzamy na $\mathcal{R}_{g..}$ topologię ilorazową nazywając otwartym dowolny podzbiór $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}_{g..}$, którego przeciwobraz względem rzutu

$$\pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{g..}$$

jest otwarty w $\tilde{\mathcal{R}}_{g..}$ w topologii sumy rozłącznej przestrzeni $\mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$, z których każda jest nośnikiem topologii produktowej (por. Def. 66). W rzeczonyj topologii ilorazowej bijekcje $[\tau_i]$ są homeomorfizmami, a rzut $\pi_{\mathcal{R}_{g..}}$ jest ciągly. Otrzymana tu topologia jest hausdorffowska. Istotnie, ilekroć $[(x_1, i_1, f_1)]_{\sim_{g..}} \neq [(x_2, i_2, f_2)]_{\sim_{g..}}$, mamy dwie możliwości: albo $x_2 \neq x_1$, a wtedy rozdzielamy punkty x_1 i x_2 zbiorami otwartymi – odpowiednio – $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_{i_1}$ i $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_{i_2}$ w hausdorffowskiej (z założenia) bazie, po czym tworzymy jawnie rozłączne otoczenia otwarte $\pi_{\sim}(\mathcal{O}_{\alpha} \times \{i_{\alpha}\} \times F)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ obu klas w $\mathcal{R}_{g..}$, albo też $x_2 = x_1$ przy $i_2 = i_1$, a wtedy rozdzielamy punkty f_1 i f_2 zbiorami otwartymi – odpowiednio – \mathcal{U}_1 i \mathcal{U}_2 w hausdorffowskim (także z założenia) włóknie F i na zakończenie tworzymy rozłączne otoczenia otwarte $\pi_{\sim}(\mathcal{O}_{i_1} \times \{i_1\} \times \mathcal{U}_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ obu klas w $\mathcal{R}_{g..}$.

Możemy już teraz skonstruować atlas na tak określonej przestrzeni topologicznej. W tym celu ustalamy atlas na zbiorze \mathcal{O}_i poprzez ograniczenie dowolnego atlasu na bazie B , otrzymując tym sposobem mapy lokalne $\xi_{i,A} : \mathcal{O}_{i,A} \rightsquigarrow \mathcal{U}_{i,A}$, $A \in J_i$ na podzbiorach $\mathcal{O}_{i,A} \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_i)$ (w topologii podprzestrzeni) modelowanych na $\mathcal{U}_{i,A} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{xn})$, $n = \dim B$, a do tego – atlas na włóknie złożony z map lokalnych $\zeta_{\alpha} : \mathcal{V}_{\alpha} \rightsquigarrow \mathcal{W}_{\alpha}$, $\alpha \in K$ na podzbiorach $\mathcal{V}_{\alpha} \in \mathcal{T}(F)$ modelowanych na $\mathcal{W}_{\alpha} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{xm})$, $m = \dim F$. To uczyniwszy, definiujemy atlas na $\mathcal{R}_{g..}$ jako zbiór map lokalnych

$$\begin{aligned} \kappa_{i,A,\alpha} & : \quad \mathcal{Q}_{i,A,\alpha} \equiv \pi_{\sim}(\mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_{\alpha}) \rightsquigarrow \mathcal{U}_{i,A} \times \mathcal{W}_{\alpha} \subset \mathbb{R}^{xn+nm} \\ & : \quad [(x, i, f)]_{\sim_{g..}} \longmapsto (\xi_{i,A}(x), \zeta_{\alpha}(f)), \end{aligned}$$

które są dobrze określone, jako że – w świetle wcześniejszych naszych ustaleń – istnieje jedyny reprezentant $(x, f) \in \mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_{\alpha} \subset \mathcal{O}_i \times F$ klasy $[(x, i, f)]_{\sim_{g..}}$ o ustalonym indeksie pokrycia $i \in I$. Na przecięciu ich dziedzin znajdujemy transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \kappa_{i,A,\alpha j,B,\beta} \equiv \kappa_{i,A,\alpha} \circ \kappa_{j,B,\beta}^{-1} & : \quad \kappa_{j,B,\beta}(\mathcal{O}_{i,A j,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}) \rightsquigarrow \kappa_{i,A,\alpha}(\mathcal{O}_{i,A j,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}) \\ & : \quad (\xi_{j,B}(x), \zeta_{\beta}(f)) \longmapsto (\xi_{i,A}(x), \zeta_{\alpha} \circ g_{ij}(x)(f)) \\ & \equiv (\xi_{i,A} \circ \xi_{j,B}^{-1}(\xi_{j,B}(x)), \zeta_{\alpha} \circ (g_{ij} \circ \xi_{j,B}^{-1})(\xi_{j,B}(x)) \circ \zeta_{\beta}^{-1}(\zeta_{\beta}(f))). \end{aligned}$$

Zważywszy, że odwzorowania $\xi_{i,A} \circ \xi_{j,B}^{-1}$ są transformacjami współrzędniowymi (rozdrobnionego) atlasu na B , C^k -gładkimi z założenia, a ponadto $g_{ij} \circ \xi_{j,B}^{-1}$ są lokalnymi prezentacjami odwzorowań przejścia, także C^k -gładkimi (w działaniu na F , w rozumieniu opisu odwzorowań g_{ij} podanego w treści dowodzonego twierdzenia) z założenia, i wreszcie $\zeta_{\alpha} \circ g_{ij}(x) \circ \zeta_{\beta}^{-1}$ są lokalnymi prezentacjami automorfizmów $g_{ij}(x)$ włókna F , również C^k -gładkimi z założenia, stwierdzamy, że transformacje $\kappa_{i,A,\alpha j,B,\beta}$ są C^k -gładkie, zatem mapy lokalne $\kappa_{i,A,\alpha}$ określają na $\mathcal{R}_{g..}$ strukturę różniczkowalnej klasy C^k . Względem tejże struktury odwzorowania $[\tau_i]$ są (tautologicznie) dyfeomorfizmami klasy C^k (także rzut na bazę, $\pi_{\mathcal{R}_{g..}} \upharpoonright_{\mathcal{Q}_{i,A,\alpha}} \equiv \text{pr}_1 \circ [\tau_i]$) i określają na $\mathcal{R}_{g..}$ strukturę wiązki włóknistej klasy C^k .

Na zakończenie wykażemy równoważność struktur wiązki włóknistej: wyjściowej na danej wiązce włóknistej (E, B, F, π_E) , o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_I) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$, i tej zrekonstruowanej w sposób opisany wyżej z jej odwzorowań przejścia g_{ij} . W tym celu rozważymy odwzorowania dane lokalnie w

postaci

$$(4.1.3) \quad \iota_i := [\tau_i]^{-1} \circ \tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times F \twoheadrightarrow \pi_{\mathcal{R}_{g,\cdot}}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I$$

i zauważamy, że te lokalne dyfeomorfizmy w dowolnym punkcie $y \in \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$, zadanym przez pewne $x \in \mathcal{O}_{ij}$ oraz $f \in F$ w postaci $y = \tau_i^{-1}(x, f)$, spełniają relację

$$\begin{aligned} \iota_j(y) &\equiv \iota_j(\tau_i^{-1}(x, f)) \equiv [\tau_j]^{-1} \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, f) = [\tau_j]^{-1}(x, g_{ji}(x)(f)) \\ &= [\tau_i]^{-1} \circ [\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}(x, g_{ji}(x)(f)) = [\tau_i]^{-1}(x, g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x)(f)) \\ &= [\tau_i]^{-1}(x, f) \equiv [\tau_i]^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x, f) \equiv \iota_i(y), \end{aligned}$$

czyli że stanowią ograniczenia określonego globalnie dyfeomorfizmu

$$\iota : E \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{g,\cdot},$$

dane wzorem

$$\iota|_{\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \iota_i,$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{R}_{g,\cdot} \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{R}_{g,\cdot}} \\ B & \xlongequal{\text{id}_B} & B \end{array},$$

która pozwala nam zidentyfikować ι jako postulowany izomorfizm wiązek. \square

STWIERDZENIE 194. *Przyjmijmy zapis Def. 123 i zdefiniujmy, dla dowolnej pary $(i, j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}}$, odwzorowania*

$$\begin{aligned} \widehat{v}_{(i,j);i} &: \mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow \mathcal{O}_i \times F : (x, i, j, f) \longmapsto (x, f), \\ \widehat{v}_{(i,j);j} &: \mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow \mathcal{O}_j \times F : (x, i, j, f) \longmapsto (x, g_{ji}(x)(f)), \\ \check{\varepsilon}_i \equiv \tau_i^{-1} &: \mathcal{O}_i \times F \longrightarrow E. \end{aligned}$$

Wiązka włóknista (E, B, F, π_E) jest strukturą inicjalną

$$(E, \{\check{\varepsilon}_i\}_{i \in I}), \quad \check{\varepsilon}_i \in C^k(\mathcal{O}_i \times F, E) \equiv \text{Hom}_{\mathbf{Man}^{(k)}}(\mathcal{O}_i \times F, E)$$

dla warunku

$$\begin{aligned} &P_{\{\mathcal{O}_i \times F\}_{i \in I}; \text{id}_{\mathbf{Man}^{(k)}}, \Delta_{\mathbf{Man}^{(k)}, I}}(Z, \{\check{\zeta}_i\}_{i \in I}) \\ &= \text{„dla dowolnej pary } (i, j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}} \text{ kopułką } \text{cosp}((\check{\zeta}_i, \check{\zeta}_j), Z) \\ &\text{domyką powłokę } \text{sp}(\mathcal{O}_{ij} \times F, (\widehat{v}_{(i,j);i}, \widehat{v}_{(i,j);j})) \text{ do diagramu przemiennego} \\ &\text{cosp}((\check{\zeta}_i, \check{\zeta}_j), Z) \circ_{(\mathcal{O}_i \times F, \mathcal{O}_j \times F)} \text{sp}(\mathcal{O}_{ij} \times F, (\widehat{v}_{(i,j);i}, \widehat{v}_{(i,j);j})) \text{”} \end{aligned}$$

na $\text{Obj } \mathbf{Man}^{(k)} \times \text{Mor } \mathbf{Man}^{(k)} \times 2$.

■

Dowód: Po pierwsze zauważmy, że zdanie (wyartykułowane w zapisie zapożyczonym z dowodu Tw. 4.1.1)

$$P_{\{\mathcal{O}_i \times F\}_{i \in I}; \text{id}_{\text{Man}^{(k)}}, \Delta_{\text{Man}^{(k)}, I}}(\mathcal{R}_{g..}, \{[\tau_i]^{-1}\}_{i \in I})$$

jest trywialnie prawdziwe,

$$\begin{aligned} [\tau_i]^{-1} \circ \widehat{v}_{(i,j);i}(x, i, j, f) &= [\tau_i]^{-1}(x, f) = [(x, i, f)]_{\sim_{g..}} = [(x, j, g_{ji}(x)(f))]_{\sim_{g..}} \\ &\equiv [\tau_j]^{-1}(x, g_{ji}(x)(f)) \equiv [\tau_j]^{-1} \circ \widehat{v}_{(i,j);j}(x, i, j, f). \end{aligned}$$

Pokażemy, że para $(\mathcal{R}_{g..}, \{[\tau_i]^{-1}\}_{i \in I})$ jest strukturą inicjalną dla warunku z treści dowodzonego stwierdzenia. W tym celu rozpatrzmy dowolną parę $(Z, \{\check{\zeta}_i\}_{i \in I})$ spełniającą tenże warunek. Istnienie rodziny odwzorowań $\check{\zeta}_i \in C^k(\mathcal{O}_i \times F, Z)$, $i \in I$ implikuje – w świetle dyskusji z Przykł. 19 – istnienie jedynego odwzorowania

$$\zeta : \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \longrightarrow Z$$

klasy C^k domykającego rodzinę diagramów przemiennych

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow \check{\zeta}_i & \uparrow \\ \mathcal{O}_i \times F & \xrightarrow{j_i} & \bigsqcup_{j \in I} (\mathcal{O}_j \times F) \\ & & \downarrow \zeta \end{array}, \quad i \in I,$$

w którym $j_i : \mathcal{O}_i \times F \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} (\mathcal{O}_j \times F) : (x, f) \longmapsto (x, i, f)$, $i \in I$ są kanonicznymi włożeniami rozmaitości $\mathcal{O}_i \times F$ w koprodukt (czyli obiekt inicjalny) $\bigsqcup_{j \in I} (\mathcal{O}_j \times F)$, współdefiniującymi ten ostatni. Odwzorowanie ζ spełnia warunki

$$\begin{aligned} \zeta(x, j, g_{ji}(x)(f)) &\equiv \zeta \circ j_j(x, g_{ji}(x)(f)) = \check{\zeta}_j(x, g_{ji}(x)(f)) \equiv \check{\zeta}_j \circ \widehat{v}_{(i,j);j}(x, i, j, f) \\ &= \check{\zeta}_i \circ \widehat{v}_{(i,j);i}(x, i, j, f) = \check{\zeta}_i(x, f) = \zeta \circ j_i(x, f) = \zeta(x, i, f), \end{aligned}$$

przeto określa jedyne odwzorowanie

$$\check{\zeta} : \mathcal{R}_{g..} \longrightarrow Z$$

domykające diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow \check{\zeta} & \uparrow \\ \bigsqcup_{j \in I} (\mathcal{O}_j \times F) & \xrightarrow{\pi_{\sim}} & \mathcal{R}_{g..} \\ & & \downarrow \check{\zeta} \end{array}.$$

Istnienie i jedyność $\check{\zeta}$ przesądza o tym, że $\mathcal{R}_{g..}$ jest strukturą inicjalną, o której mowa w treści stwierdzenia. Dowód kończy następująca obserwacja: Oto odwzorowania $\check{\zeta}_i$, $i \in I$ trywialnie spełniają warunek z treści stwierdzenia, a zatem istnieje

jedyne odwzorowanie ϕ klasy C^k domykające diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \varepsilon_i & \uparrow \\ \mathcal{O}_i \times F & \xrightarrow{[\tau_i]^{-1}} & \mathcal{R}_{g_i} \end{array}$$

Jak wynika wprost z lokalnej definicji (4.1.3), odwzorowaniem tym jest

$$\phi \equiv \iota,$$

co oznacza właśnie, że wiązka E jest modelem obiektu inicjalnego z treści stwierdzenia. \square

Geometrycznie absolutnie naturalnym i – także, choć nie wyłącznie z tego powodu – modelowym przykładem wiązki włóknistej jest wiązka styczna nad rozmaitością różniczkowalną $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ klasy C^k , $k \geq 1$. Wiązki tę można definiować na kilka wzajem równoważnych sposobów, z których każdy eksponuje inną jej cechę strukturalną – jeden z nich, przedstawiony w Def. 66, wykorzystuje dane lokalne $Dt_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(\dim M; \mathbb{R})$ do rekonstrukcji wiązki stycznej z jej lokalnych trywializacji współrzędniowych według schematu sformalizowanego w Tw. 4.1.1. Struktura liniowa, której oczekujemy od modelu „przestrzeni ruchów infinitesimalnych” albo „przestrzeni prędkości”, jest w tym ujęciu zakamuflowana pod postacią przemyślnego wyboru lokalnego modelu włókna $\mathbb{R}^{\dim M}$, o naturalnej interpretacji w terminach lokalnych współrzędnych i takiejż strukturze liniowej. Poniżej przedyskutujemy odmienne spojrzenie na tę samą strukturę, stanowiące udaną próbę uwolnienia opisu wewnętrznej geometrii stycznościowej od lokalnej euklidesowej kartografii rozmaitości. Pierwszy krok w tym kierunku został poczyniony w treści, dowodzie i okolicach Stw. 93, w którym wprowadziliśmy relację współstyczności na zbiorze (lokalnych) ścieżek klasy C^1 przechodzących przez ustalony (dowolnie) punkt M i wykazaliśmy równoważność otrzymanego tym sposobem geometrycznego modelu przestrzeni stycznej do rozmaitości z jej modelem algebraicznym zdefiniowanym wcześniej w Stw. 92. Poniżej przedstawimy alternatywną w stosunku do tej z Tw. 4.1.1 metodę rekonstrukcji struktury globalnej wiązki włóknistej z danych lokalnych, która doprowadzi nas do (równoważnego poprzedniemu) opisu przestrzeni totalnej wiązki (włóknistej) stycznej TM .

DEFINICJA 124. Przyjmijmy zapis Def. 64 i 123, Stw. 93 oraz Przykł. 24 (5).

Wiązka (włóknista) styczna C^{k+1} -rozmaitości $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$ o atlasie $\widehat{\mathcal{A}}$ złożonym z map lokalnych $\kappa_i : \mathcal{O}_i \rightsquigarrow \mathcal{U}_i$, $i \in I$ to wiązka włóknista o składowych:

- baza M , o strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^{k+1} zadawanej przez atlas $\widehat{\mathcal{A}}$;
- przestrzeń totalna $TM := \bigsqcup_{x \in M} P_x$ o strukturze rozmaitości opisanej poniżej;
- włókno typowe \mathbb{R}^n o naturalnej strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞ (więc też w szczególności klasy C^k);
- rzut na bazę $\pi_{TM} : TM \rightarrow M : [\gamma]_{\sim_x} \mapsto x$.

Przy tym odwzorowania

$$\mathbb{T}\kappa_i : \mathbb{T}\mathcal{O}_i := \pi_{\mathbb{T}M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{2n} : [\gamma]_{\sim_x} \mapsto (\kappa_i(x), D(\kappa_i \circ \gamma)(0))$$

indukują na $\mathbb{T}M$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprze-
strzeni) na zbiorach $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$, tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{V} \subset \mathbb{T}M$ jest
otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i \in I} : \mathbb{T}\kappa_i(\mathcal{V} \cap \mathbb{T}\mathcal{O}_i) \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{2n}).$$

W tej topologii odwzorowania $\mathbb{T}\kappa_i$ są jawnie homeomorficzne i (dzięki temu) sta-
nowią mapy lokalne, zwane **mapami naturalnymi**, dla których transformacje
współrzędniowe to

$$\begin{aligned} \mathbb{T}t_{ij} := \mathbb{T}\kappa_i \circ (\mathbb{T}\kappa_j)^{-1} & : \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{2n} \twoheadrightarrow \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{2n} \\ & : (\kappa_j(x), D(\kappa_j \circ \gamma)(0)) \mapsto (\kappa_i(x), D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \\ & \equiv (t_{ij}(\kappa_j(x)), D(t_{ij} \circ \kappa_j \circ \gamma)(0)) \\ & = (t_{ij}(\kappa_j(x)), Dt_{ij}(\kappa_j(x))(D(\kappa_j \circ \gamma)(0))). \end{aligned}$$

Zależność punktu w obrazie od argumentu z dziedziny jest klasy C^{k+1} w składowej
bazowej (z założenia),

$$t_{ij} \in \text{Diff}^{k+1}(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \kappa_i(\mathcal{O}_{ij})),$$

i klasy C^k w składowej z włókna w argumentie bazowym,

$$Dt_{ij} \in C^k(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \mathbb{R}^{2n \times 2n}),$$

a nadto liniowa, więc klasy C^∞ w argumentie z włókna $D(\kappa_j \circ \gamma)(0)$, czyli osta-
tecznie klasy C^k , i jako taka zadaje na $\mathbb{T}M$ strukturę różniczkowal-
nej klasy C^k . Zarazem odwzorowania $\mathbb{T}\kappa_i$ pełnią też rolę lokalnych trywializacji,
tautologicznie C^k -gładkich względem zdefiniowanej tu (przy ich użyciu) struktury
różniczkowej. Wreszcie też rzut na bazę jest surjekcją klasy C^k jako superpozycja
odwzorowań tego samego typu,

$$\pi_{\mathbb{T}M} \upharpoonright_{\mathbb{T}\mathcal{O}_i} = \kappa_i^{-1} \circ \text{pr}_1 \circ \mathbb{T}\kappa_i.$$

▲

UWAGA 43. Odwzorowania (1.4.31) określają równoważność (izomorfizm)
między oboma opisami wiązki stycznej zgodną z naturalną strukturą liniową na
włóknach $\mathbb{T}M$, opisaną w Stw. 93. Odwzorowanie

$$t_{x;i} : (\mathbb{T}M)_x \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{2n} : ([\gamma]_{\sim_x}, x) \mapsto D(\kappa_i \circ \gamma)(0).$$

jest izomorfizmem (niekanonicznym) włókna $(\mathbb{T}M)_x \equiv P_x$ nad punktem $x \in \mathcal{O}_i \subset B$
z włóknem typowym \mathbb{R}^{2n} . Bez trudu wskazujemy nad każdym punktem B bazę w
wiązce przestrzeni \mathbb{R} -liniowych $\mathbb{T}M$, a mianowicie – dla $x \in \mathcal{O}_i$ i pewnego $\varepsilon_k > 0$ –

$$\mathbb{T}_x M = \bigoplus_{k=1}^n ([\gamma_k]_{\sim_x})_{\mathbb{R}}, \quad \gamma_k :]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[\rightarrow M : t \mapsto \tau_i^{-1}(\tau_i(x) + t \triangleright e_k),$$

gdzie $\{e_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ jest bazą standardową \mathbb{R}^{2n} z Przykł. 13 (5). Zaobserwowaną tu
strukturę wiązki przestrzeni liniowych formalizujemy w dalszej części wykładu.

2. Wiązki wektorowe

DEFINICJA 125. Przyjmijmy zapis Def. 15 i 123, Stw. 18 oraz Przykł. 11 (10), 15 (2) i 21 (1), ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ze standardową topologią (euklidesową) i strukturą różniczkową klasy C^∞ . **Wiązka wektorowa rzędu n nad ciałem \mathbb{K} klasy C^k** to wiązka włóknista¹ $(V, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_V)$ o własnościach

- $\forall_{x \in B} : V_x \equiv \pi_V^{-1}(\{x\}) \in \text{Obj Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$;
- ograniczenia dyfeomorfizmów klasy C^k (lokalnych trywializacji)

$$\text{pr}_2 \circ \tau_i \upharpoonright_{V_x} : V_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^{\times n}, \quad x \in B$$

są izomorfizmami przestrzeni \mathbb{K} -liniowych,

przy czym odwzorowania definiujące strukturę \mathbb{K} -liniową na włóknach V są klasy C^k , w szczególności więc mamy dyfeomorfizm

$$(4.1.4) \quad \mathbb{A} : V \times_B V \longrightarrow V$$

modelowany na definiującej operacji binarnej $A^n : \mathbb{K}^{\times n} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$ w rozumieniu diagramu przemiennego

$$(4.1.5) \quad \begin{array}{ccc} \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\mathbb{A}} & \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \times \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) \times_{\mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) & \xrightarrow{(\text{pr}_1, A^n \circ \text{pr}_{2,4})} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{array}$$

oraz rodzinę dyfeomorfizmów

$$(4.1.6) \quad \mathbb{K}^\times \longrightarrow \text{Diff}^k(V) : \lambda \longmapsto \mathbb{L}_\lambda$$

o \mathbb{K} -liniowych ograniczeniach do włókien, uzupełnianą przez odwzorowanie \mathbb{K} -liniowe $\mathbb{L}_{0\mathbb{K}}$, modelowanych na definiującym działaniu $\ell^n : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$ w rozumieniu diagramu przemiennego

$$(4.1.7) \quad \begin{array}{ccc} \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\mathbb{L}_\lambda} & \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} & \xrightarrow{\ell_\lambda^n} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{array} .$$

W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mówimy o **rzeczywistej wiązce wektorowej**, gdy zaś $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – o **zespolonej wiązce wektorowej**.

¹W konkretnych zastosowaniach bywa zasadnym zachowanie większej swobody w definicji modelowej przestrzeni wektorowej, jaką jest włókno typowe – w szczególności spotykamy wiązki wektorowe z włóknem typowym o strukturze algebry Liego bez naturalnego wyboru bazy. Oczywiście dowolny wybór bazy ustala izomorfizm ze stosowną potęgą kartezjańską ciała bazowego i ustalenie takiego właśnie (globalnego) wyboru przewiduje nasza definicja. Konsekwencją przyjętej przez nas konwencji jest duża wygoda i przejrzystość w późniejszych strukturalnych.

Rząd wiązki będziemy oznaczać symbolem $\text{rk } \mathbb{V}$. Ilekcć $\text{rk } \mathbb{V} = 1$, wiązkę określamy mianem **wiązki liniowej** i zwyczajowo oznaczamy symbolem L ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & L \\ & & \downarrow \pi_L \\ & & B \end{array}$$

Odzworowanie (różniczkowalne klasy C^k)

$$\mathbf{0}_{\mathbb{V}} : B \longrightarrow \mathbb{V} : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, \mathbf{0}^n), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki wektorowej \mathbb{V} . Jest ono cięciem globalnym \mathbb{V} w rozumieniu Uwagi 42, przy czym zarówno zbiór cięć lokalnych $\Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$, jak i zbiór cięć globalnych $\Gamma(\mathbb{V})$ noszą naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem $C^k(B, \mathbb{K})$.

Podwiązka wektorowa wymiaru m wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ to podwiązka $(\mathbb{W}, B, \mathbb{K}^{\times m}, \pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{W}})$, $m < n$ tejże wiązki (włóknistej) o tej własności, że nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ jej włókno $\mathbb{W}_x \subset \mathbb{V}_x$ jest podprzestrzenią \mathbb{K} -liniową.

Morfizm wiązek wektorowych (nad ciałem \mathbb{K}) $(\mathbb{V}_{\alpha}, B_{\alpha}, \mathbb{K}^{\times n_{\alpha}}, \pi_{\mathbb{V}_{\alpha}})$, $n_{\alpha} \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to dwójka (Φ, f) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) : (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2}),$$

którego ograniczenie do włókna nad dowolnym punktem bazy $x \in B_1$,

$$(4.1.8) \quad \Phi \upharpoonright_{\mathbb{V}_{1x}} : \mathbb{V}_{1x} \longrightarrow \mathbb{V}_{2f(x)},$$

jest odzworowaniem \mathbb{K} -liniowym. **Rząd morfizmu wiązek wektorowych (Φ, f)** to odzworowanie

$$\text{rk}(\Phi, f) : B_1 \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto \text{rk}(\Phi \upharpoonright_{\mathbb{V}_{1x}}).$$

Wiązki wektorowe skończonego wymiaru nad ciałem \mathbb{K} o bazie B wraz z morfizmami wiązek wektorowych między nimi tworzą **kategorię wiązek wektorowych skończonego wymiaru nad ciałem \mathbb{K} nad B** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{VectBun}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}(B).$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 35.

(1) Trywialna wiązka wektorowa nad B modelowana na $V \cong \mathbb{K}^{\times n}$, czyli

$$(B \times V, B, \mathbb{K}^{\times n}, \text{pr}_1).$$

(2) Wiązka styczna nad rozmaitością różniczkowalną $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ klasy C^{k+1} wymiaru $n = \dim M$,

$$(\text{T}M, M, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{\text{T}M}).$$

Pośród morfizmów odnajdujemy tu odzworowania stycznościowe

$$(\text{T}f, f) : (\text{T}M_1, M_1, \mathbb{R}^{\times n_1}, \pi_{\text{T}M_1}) \longrightarrow (\text{T}M_2, M_2, \mathbb{R}^{\times n_2}, \pi_{\text{T}M_2})$$

do odzworowań klasy C^k między bazami, a to z racji liniowości ograniczeń tych odzworowań do dowolnego włókna.

✓

STWIERDZENIE 195. *Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między nigdzie nieznikającymi cięciami lokalnymi klasy C^k wiązki liniowej klasy C^k i jej trywializacjami lokalnymi (teżże klasy). W szczególności wiązka liniowa jest (globalnie) trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma nigdzie nieznikające globalne cięcie.* ■

Dowód: Każde nigdzie nieznikające cięcie $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow L \setminus \{0_L(B)\}$ wiązki liniowej L nad zbiorem $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(B)$ jest gładko indeksowaną przez bazę \mathcal{O} wiązką rodziną baz $\sigma(x)$, $x \in \mathcal{O}$ poszczególnych jednowymiarowych włókien L_x , zatem dowolnemu wektorowi $v \in \pi_L^{-1}(\mathcal{O})$ z włókna $L_{\pi_L(v)}$ możemy przypisać w jednoznaczny sposób skalar $\lambda(v) \in \mathbb{K}$ o własności

$$v = \mathbb{L}_{\lambda(v)}(\sigma \circ \pi_L(v)),$$

przy czym zależność tegoż skalara od wektora v jest gładka (wszak własność tę ma superpozycja odwzorowań gładkich $\sigma \circ \pi_L$). To pozwala nam zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma : \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K} : v \mapsto (\pi_L(v), \lambda(v)),$$

jawnie \mathbb{K} -liniowe i gładkie (klasy C^k). Bez trudu wskazujemy jego odwrotność:

$$\tau_\sigma^{-1} : \mathcal{O} \times \mathbb{K} \rightarrow \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) : (x, \lambda) \mapsto \mathbb{L}_\lambda(\sigma(x)),$$

o tych samych cechach strukturalnych.

Cięcie lokalne przyporządkowane dowolnej trywializacji lokalnej $\tau : \pi_{\mathbb{P}^1}^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}$ to

$$\sigma_\tau : \mathcal{O} \rightarrow \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) : x \mapsto \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}).$$

O jego niezerowości przekonuje prosty argument: jeśli dopuścimy równość

$$0_{L_x} = \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}})$$

nad pewnym punktem $x \in \mathcal{O}$, to wówczas wobec założonej przez nas \mathbb{K} -liniowości τ dochodzimy do sprzeczności

$$(x, 0_{\mathbb{K}}) \equiv \tau(0_{L_x}) = \tau \circ \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}) = (x, 1_{\mathbb{K}}).$$

Wypisane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, nad dowolnym punktem $x \in \mathcal{O}$ wyznaczamy

$$\sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}) = \mathbb{L}_{1_{\mathbb{K}}}(\sigma(x)) = \sigma(x),$$

zatem

$$\sigma_{\tau_\sigma} = \sigma.$$

Ponadto jeśli dla dowolnego wektora $v \in L_{\pi_L(v)} \subset \pi_L^{-1}(\mathcal{O})$ zdefiniować (w sposób jednoznaczny) skalar $\lambda(v)$ równaniem

$$v =: \mathbb{L}_{\lambda(v)}(\sigma_\tau \circ \pi_L(v)) \equiv \mathbb{L}_{\lambda(v)} \circ \tau^{-1}(\pi_L(v), 1_{\mathbb{K}}) = \tau^{-1}(\pi_L(v), \lambda(v)),$$

to wyznaczamy

$$\lambda(v) = \text{pr}_2 \circ \tau(v),$$

a stąd także

$$\tau_{\sigma_\tau}(v) = (\pi_L(v), \text{pr}_2 \circ \tau(v)) \equiv \tau(v),$$

czyli

$$\tau_{\sigma_\tau} = \tau.$$

□

Podobnie jak same wiązki wektorowe, morfizmy tych wiązek pokrywające dyfeomorfizm identycznościowy na bazie mają prosty opis lokalny, z którego nieraz przyjdzie nam korzystać.

STWIERDZENIE 196. *Przyjmijmy zapis Def. 125. Dowolny morfizm (Φ, id_B) wiązek wektorowych $(V_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{V_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{V_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n_\alpha}$ (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(n_\alpha; \mathbb{K})$, opisany przez diagram przemienny*

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\Phi} & V_2 \\ \pi_{V_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{V_2} \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i \in I}$ odwzorowań macierzowych (lokalnie) klasy C^k

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2, \mathbb{K}), \quad i \in I$$

o własności

$$(4.1.9) \quad \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) = h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x).$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu. ■

Dowód: Wybierzmy (dowolnie) bazę $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n_1}}$ w przestrzeni $\mathbb{K}^{\times n_1}$ i na tej podstawie zdefiniujmy cięcia lokalne

$$(4.1.10) \quad \varepsilon_a^{(i)} : \mathcal{O}_i \rightarrow V_1 : x \mapsto \tau_i^{1-1}(x, e_a).$$

Zauważmy, że odwzorowanie Φ jest w pełni określone przez wartości przyjmowane przezeń na powyższych cięciach, oto bowiem wobec założonej \mathbb{K} -liniowości τ_i oraz Φ w dowolnym punkcie

$$v \equiv \tau_i^{-1}(x, v^a \triangleright_n e_a) \equiv \mathbb{L}_{v^a}^{(1)}(\varepsilon_a^{(i)}(x)), \quad x \in \mathcal{O}_i$$

otrzymujemy

$$\Phi(v) = \Phi(\mathbb{L}_{v^a}^{(1)}(\varepsilon_a^{(i)}(x))) = \mathbb{L}_{v^a}^{(2)} \circ \Phi(\varepsilon_a^{(i)}(x)).$$

Wybierzmy zatem (dowolnie) bazę $\{f_r\}_{r \in \overline{1, n_2}}$ w $\mathbb{K}^{\times n_2}$, o bazie dualnej (w rozumieniu Stw. 7) $\{f_r^*\}_{r \in \overline{1, n_2}}$, i oznaczmy odnośne cięcia lokalne V_2 jako

$$\phi_r^{(i)} : \mathcal{O}_i \rightarrow V_2 : x \mapsto \tau_i^{2-1}(x, f_r),$$

po czym zdefiniujemy

$$h_{i ar} := f_r^* \circ \text{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1}(\cdot, e_a) : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K}),$$

czyli poprzez formułę

$$(4.1.11) \quad \mathbb{L}_{h_{i ar}(x)}^2(\phi_r^{(i)}(x)) := \Phi(\varepsilon_a^{(i)}(x)).$$

Na podstawie Tw. 1.2.11 zapisujemy powyższe dane lokalne morfizmu Φ w postaci macierzy

$$h_i(x) := h_{i ar}(x) \triangleright \varepsilon(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} f_r), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

podobnie reprezentujemy też odwzorowania przejścia:

$$g_{ij}^1(x) = g_{ij ab}^1(x) \triangleright \varepsilon(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b), \quad g_{ij}^2(x) = g_{ij rs}^2(x) \triangleright \varepsilon(f_r^* \otimes_{\mathbb{K}} f_s).$$

Przywołując definicję tych ostatnich, ustalamy relację

$$\tau_j^{2-1}(x, h_j(x)(e_a)) = \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x)(e_a)),$$

a jednocześnie, wobec \mathbb{K} -liniowości τ_i^α oraz Φ , znajdujemy

$$\begin{aligned} \tau_j^{2-1}(x, h_j(x)(e_a)) &= \Phi(\tau_j^{1-1}(x, e_a)) = \Phi(\tau_i^{1-1}(x, g_{ij}^1(x)(e_a))) \\ &= \mathbb{L}_{g_{ij ab}^1(x)}^2 \circ \Phi(\tau_i^{1-1}(x, e_b)) = \mathbb{L}_{g_{ij ab}^1(x)}^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(e_b)) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x)(e_a)). \end{aligned}$$

Niechaj teraz $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami wektorowymi o trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{V}_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{G}$ i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(n_\alpha; \mathbb{K})$. Niech też $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})$, $i \in I$ będzie rodziną odwzorowań jak w tezie dowodzonego stwierdzenia, przy użyciu której określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i : \pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \pi_{\mathbb{V}_2}^{-1}(\mathcal{O}_i) : \tau_i^{1-1}(x, v) \mapsto \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(v)),$$

które w świetle tożsamości, spełnionej dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i $v \in \mathbb{K}^{\times n_1}$,

$$\begin{aligned} \Phi_j(\tau_i^{1-1}(x, v)) &= \Phi_j(\tau_j^{1-1}(x, g_{ji}^1(x)(v))) = \tau_j^{2-1}(x, h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x)(v)) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x)(v)) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(v)) \\ &= \Phi_i(\tau_i^{1-1}(x, v)), \end{aligned}$$

jawią się ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2, \quad \Phi \upharpoonright_{\pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i.$$

Odwzorowanie to jest w oczywisty sposób \mathbb{K} -liniowe i zachowuje włókna. \square

STWIERDZENIE 197. *Przyjmijmy zapis Def. 125 oraz Przykł. 1 (6) i niechaj $(\Phi, f) : (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \rightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2})$ będzie morfizmem wiązek wektorowych \mathbb{V}_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ stałego rzędu $\text{rk}(\Phi, f) \equiv r \in \mathbb{N}$. Wówczas **jądro morfizmu** (Φ, f)*

$$\text{Ker}(\Phi, f) := \bigsqcup_{x \in B_1} \text{ker}(\Phi \upharpoonright_{\mathbb{V}_{1x}})$$

niesie kanoniczną strukturę podwiązki wektorowej jego dziedziny \mathbb{V}_1 , przy czym

$$\text{rk Ker}(\Phi, f) = n_1 - r.$$

■

Dowód: Jest oczywistym, że ograniczenie atlasu V_1 do podprzestrzeni topologicznej $\text{Ker}(\Phi, f)$ indukuje na niej strukturę (pod)rozmaitości klasy C^k (wszak nad każdym punktem bazy mamy do czynienia z podprzestrzenią liniową włókna), przy czym nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ zachodzi – na mocy Stw. 17 –

$$(\pi_{V_1} \upharpoonright_{\text{Ker}(\Phi, f)})^{-1}(\{x\}) \cong \mathbb{K}^{\times n_1 - r}.$$

Pozostaje jedynie skonstruować C^k -gładkie trywializacje lokalne tak otrzymanej wiązki (wzajem izomorficznych) przestrzeni wektorowych. Zważywszy lokalny charakter zagadnienia, ograniczymy się do (dostatecznie małych) otoczeń otwartych: \mathcal{O}_1 (ustalonego dowolnie) punktu $x_1 \in B_1$ oraz $\mathcal{O}_2 \supset f(\mathcal{O}_1)$ punktu $f(x_1)$, na których określone są dyfeomorfizmy (klasy C^k)

$$\tau_{\mathcal{O}_\alpha} : \pi_{V_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_\alpha) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_\alpha \times \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

W obrazie tychże morfizm (Φ, f) przybiera postać

$$\Phi_{21} \equiv \tau_{\mathcal{O}_2} \circ \Phi \circ \tau_{\mathcal{O}_1}^{-1} : \mathcal{O}_1 \times \mathbb{K}^{\times n_1} \longrightarrow \mathcal{O}_2 \times \mathbb{K}^{\times n_2} : (x, v) \longmapsto (f(x), L_\Phi(x)(v))$$

dla pewnego gładkiego odwzorowania

$$L_\Phi : \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathbb{K}(n_2) : x \longmapsto L_\Phi(x)$$

o rzędzie

$$\text{rk } L_\Phi(x) = r.$$

Dokonajmy rozkładu

$$\mathbb{K}^{\times n_1} = \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1, \quad \mathbb{K}^{\times n_2} = \text{Im } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2,$$

określonego dla pewnych przestrzeni dopełniających $\Delta_\alpha \subset \mathbb{K}^{\times n_\alpha}$ o wymiarach

$$\dim_{\mathbb{K}} \Delta_1 = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } L_\Phi(x_1) = n_2 - \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2.$$

Wobec oczywistej relacji

$$\Delta_1 \cong \text{Im } L_\Phi(x_1)$$

możemy następnie skonstruować indeksowaną przez $\mathcal{O}_1 \ni x$ rodzinę odwzorowań \mathbb{K} -liniowych

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\Phi(x) : \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2 &\equiv \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \longrightarrow \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \text{Im } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2 \\ &\equiv \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2} \end{aligned}$$

$$: (k, \delta_1, \delta_2) \longmapsto (k, 0_{\text{Im } L_\Phi(x_1)}, \delta_2) +_{\oplus} (0, L_\Phi(x))(k, \delta_1),$$

o jawnie odwracalnym elemencie

$$\tilde{\Lambda}_\Phi(x_1) = \text{id}_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)} \oplus L_\Phi(x_1) \upharpoonright_{\Delta_1} \oplus \text{id}_{\Delta_2}.$$

Jako że odwzorowania odwracalne tworzą podzbiór otwarty w $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2})$ (a mianowicie: dopełnienie przeciwobrazu zbioru domkniętego $\{0_{\mathbb{K}}\}$ względem odwzorowania $\det_{(n_1 + \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2)}$ będącego superpozycją odwzorowań ciągłych, więc też ciągłego), przeto $\tilde{\Lambda}_\Phi(x_1)$ należy do tego podzbioru wraz z pewnym swoim otoczeniem otwartym \mathcal{U} , którego przeciwobraz względem (ciągłego) odwzorowania $\tilde{\Lambda}_\Phi$ jest otoczeniem otwartym $\mathcal{V}_1 \equiv \tilde{\Lambda}_\Phi^{-1}(\mathcal{U}) \ni x_1$ o własności $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{O}_1$. Oto więc obok C^k -gładkiego odwzorowania

$$\Lambda_\Phi \equiv \tilde{\Lambda}_\Phi \upharpoonright_{\mathcal{V}_1} : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}),$$

mamy też C^k -gładkie odwzorowanie

$$V_{\Phi} \equiv \text{Inv} \circ \Lambda_{\Phi} : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\text{Ker } L_{\Phi}(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2),$$

(punktowo) odwrotne do Λ_{Φ} w każdym $x \in \mathcal{V}_1$. Rozważmy dowolny wektor

$$(k, \delta_1) \in \text{Ker } L_{\Phi}(x_1) \oplus \Delta_1 \equiv \mathbb{K}^{\times n_1}.$$

Ustaliwszy $x \in \mathcal{V}_1$, stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} (k, \delta_1) \in \text{Ker } L_{\Phi}(x) &\iff \Lambda_{\Phi}(x)(k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = (k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}) \\ &\iff (k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = V_{\Phi}(x)(k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}). \end{aligned}$$

Wziąwszy pod uwagę włożenia kanoniczne:

$$J_{\text{Ker } L_{\Phi}(x_1)} : \text{Ker } L_{\Phi}(x_1) \rightarrow \text{Ker } L_{\Phi}(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}$$

oraz

$$J_{\mathbb{K}^{\times n_1}} : \mathbb{K}^{\times n_1} \rightarrow \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2,$$

możemy zatem zapisać

$$J_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\text{Ker } L_{\Phi}(x)) \subseteq V_{\Phi}(x)(\text{Im } J_{\text{Ker } L_{\Phi}(x_1)}),$$

ale też

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} J_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\text{Ker } L_{\Phi}(x)) &= \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } L_{\Phi}(x) = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } L_{\Phi}(x) \\ &= n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } L_{\Phi}(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } L_{\Phi}(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } J_{\text{Ker } L_{\Phi}(x_1)} \\ &\equiv \dim_{\mathbb{K}} V_{\Phi}(x)(\text{Im } J_{\text{Ker } L_{\Phi}(x_1)}), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z odwracalności $V_{\Phi}(x)$. Widzimy więc, że

$$J_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\text{Ker } L_{\Phi}(x)) = V_{\Phi}(x)(\text{Im } J_{\text{Ker } L_{\Phi}(x_1)}),$$

i na tej podstawie konstatujemy, że odwzorowanie

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{V}_1} : \mathcal{V}_1 \times \text{Ker } L_{\Phi}(x_1) &\longrightarrow \text{Ker}(\Phi_{21}, f \upharpoonright_{\mathcal{O}_1}) \upharpoonright_{\mathcal{V}_1} \\ &: (x, k) \longmapsto (x, \text{pr}_{1,2} \circ V_{\Phi}(x)(k, 0_{\text{Im } L_{\Phi}(x_1)}, 0_{\Delta_2})) \end{aligned}$$

jest (C^k -)gładką trywializacją lokalną, o odwrotności

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{V}_1}^{-1} : \text{Ker}(\Phi_{21}, f \upharpoonright_{\mathcal{O}_1}) \upharpoonright_{\mathcal{V}_1} &\longrightarrow \mathcal{V}_1 \times \text{Ker } L_{\Phi}(x_1) \\ &: (x, v) \longmapsto (x, \text{pr}_1 \circ \Lambda_{\Phi}(x)(v, 0_{\Delta_2})). \end{aligned}$$

□

COROLLARIUM 9. *Przyjmijmy zapis Def. 123 oraz Stw. 197 i niechaj (E, B, F, π_E) będzie wiązką włóknistą klasy C^k , $k \geq 1$. Jądro epimorfizmu wiązek wektorowych*

$$(\mathbb{T}\pi_E, \pi_E) : \mathbb{T}E \longrightarrow \mathbb{T}B$$

jest podwiązką wektorową klasy C^{k-1}

$$(\mathbb{V}E \equiv \text{Ker}(\mathbb{T}\pi_E, \pi_E), E, \mathbb{K}^{\times \dim F}, \pi)$$

wiązki stycznej $\mathbb{T}E$. Określamy ją mianem **(pod)wiązki pionowej** (lub **wertykalnej**) nad E . Jej włókno $\mathbb{V}_p E \equiv (\mathbb{V}E)_p$ nad $p \in E$, zwane **(pod)przestrzenią pionową** (lub **wertykalną**), rozpinają **wektory pionowe** (lub **wertykalne**). ■

Dowód: Teza wynika wprost ze Stw. 197, a to z racji orzeczonej w Stw. 193 submersywności rzutu kanonicznego na bazę, $\text{rk } \mathbb{T}\pi_E = \dim F \equiv \dim E - \dim B$. □

Jedną z naturalnych konstrukcji na przestrzeni wektorowej jest wybór bazy $\{e_i\}_{i \in \overline{1, D}}$, $D = \dim_{\mathbb{K}} V$, tj. wybór izomorfizmu

$$V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times D} : v = v^i e_i \mapsto (v^1, v^2, \dots, v^D).$$

Konstrukcja ta ma swój nader istotny odpowiednik w teorii wiązek wektorowych, który teraz omówimy.

DEFINICJA 126. Przyjmijmy zapis Def. 125 i niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową rzędu $n \in \mathbb{N}$, o trywializacjach lokalnych $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}$ stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B . **Wiązka reperów** (zwana też **wiązką baz**) **wiązki wektorowej** \mathbb{V} to wiązka włóknista

$$(\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}, B, \text{GL}(n; \mathbb{K}), \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}})$$

o składowych

- przestrzeń totalna

$$\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V} := \bigsqcup_{x \in B} \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$$

o strukturze różniczkowalnej klasy C^k indukowanej przez trywializacje $\{\tau_i\}_{i \in I}$ i o włóknie $(\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V})_x \equiv \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ nad dowolnym punktem $x \in B$ będącym zbiorem baz $\beta_x : \mathbb{K}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$ włókna \mathbb{V}_x ;

- włókno typowe $\text{GL}(n; \mathbb{K}) \equiv \text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n})$;
- rzut na bazę $\pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}} : \mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V} \rightarrow B : (\beta_x, x) \mapsto x$.

Przy tym bijekcje $\mathbb{F}\tau_i$ odwrotne do

$$\mathbb{F}\tau_i^{-1} : \mathcal{O}_i \times \text{GL}(n; \mathbb{K}) \twoheadrightarrow \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) : (x, \chi) \mapsto (\tau_i^{-1}(x, \chi(\cdot)), x)$$

indukują na $\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{O}_i \times \text{GL}(n; \mathbb{K})$ (gdzie topologia na $\text{GL}(n; \mathbb{K})$ to topologia podprzestrzeni topologicznej przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}^{\times n^2}$), tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{U} \subset \mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall i \in I : \mathbb{F}\tau_i(\mathcal{U} \cap \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)) \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_i \times \text{GL}(n; \mathbb{K})).$$

W tej topologii odwzorowania $\mathbb{F}\tau_i$ są homeomorficznymi trywializacjami lokalnymi o odwzorowaniach przejścia klasy C^k :

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}} \equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(\cdot)) & : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\text{GL}(n; \mathbb{K})) \\ & : x \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(x)), \end{aligned}$$

gdzie

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(x)) : \text{GL}(n; \mathbb{K}) \circlearrowleft : \chi \mapsto \tau_{ij}(x) \circ \chi.$$

Struktura różniczkowej klasy C^k jest indukowana wzdłuż homeomorfizmów $\mathbb{F}\tau_i$ ze struktury produktowej na lokalnym modelu $\mathcal{O}_i \times \text{GL}(n; \mathbb{K})$, trywialnej

(klasy C^∞) w drugim czynniku i wyznaczonej przez przecięcie z atlasem $\widehat{\mathcal{A}}_B$ na rozmaitości B w czynniku pierwszym. Względem tak określonej struktury różniczkowalnej trywializacje lokalne $F\tau_i$ są tautologicznie gładkie klasy C^k , podobnie jak rzut kanoniczny na bazę, $\pi_{F_{GLV}} \equiv \text{pr}_1 \circ F\tau_i^{-1}$.

▲

UWAGA 44. Powyższa definicja wymaga kilku słów komentarza. W pierwszej kolejności odnotujemy istnienie naturalnego prawego działania – włókno po włóknie – grupy $GL(n; \mathbb{K})$ na przestrzeni totalnej F_{GLV} danego w postaci

$$r : F_{GLV} \times GL(n; \mathbb{K}) \longrightarrow F_{GLV} : ((\beta_x, x), \chi) \longmapsto (\beta_x \circ \chi, x) \equiv (\beta_x, x) \triangleleft \chi.$$

Działanie to jest w jawny sposób wolne (wobec odwracalności elementów włókna $\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x_n}, \mathbb{V}_x)$), a nadto przechodnie nad dowolnym punktem $x \in B$ – wszak dla dowolnej pary $\beta_{x_1}, \beta_{x_2} \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x_n}, \mathbb{V}_x)$ spełniona jest tożsamość

$$\beta_{x_2} \equiv \beta_{x_1} \circ (\beta_{x_1}^{-1} \circ \beta_{x_2}),$$

a ponieważ $\beta_{x_1}^{-1} \circ \beta_{x_2} \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x_n})$ jest odwzorowaniem o odwrotności $\beta_{x_2}^{-1} \circ \beta_{x_1}$, przeto możemy zapisać

$$(\beta_{x_2}, x) = (\beta_{x_1}, x) \triangleleft (\beta_{x_1}^{-1} \circ \beta_{x_2}),$$

konstatując przy tym, że $\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x_n}, \mathbb{V}_x)$ jest torsorem grupy $GL(n; \mathbb{K})$ w rozumieniu Def. 14. Wybór dowolnego elementu $\beta_{x_*} \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x_n}, \mathbb{V}_x)$ zadaje *niekanoniczny* ($GL(n; \mathbb{K})$ -ekwiwariantny) izomorfizm

$$\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x_n}, \mathbb{V}_x) \xrightarrow{\cong} GL(n; \mathbb{K}) : \beta_x \longmapsto \beta_{x_*}^{-1} \circ \beta_x.$$

Wobec powyższego bez trudu stwierdzamy, że odwzorowania $F\tau_i^{-1}$ są bijektywne, oto bowiem przyporządkowują w sposób jawnie injktywny elementom zbioru $\{x\} \times GL(n; \mathbb{K})$, $x \in \mathcal{O}_i$ elementy zbioru $\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x_n}, \mathbb{V}_x) \times \{x\}$. Są więc odwracalne, co pozwala użyć ich do zaindukowania topologii na F_{GLV} według opisanego schematu. Ich identyfikacja jako trywializacji lokalnych zasadza się na bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} F\tau_i \circ F\tau_j^{-1} & : \mathcal{O}_{ij} \times GL(n; \mathbb{K}) \curvearrowright \\ & : (x, \chi) \longmapsto F\tau_i(\tau_j^{-1}(x\chi(\cdot)), x) \equiv F\tau_i(\tau_i^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, \chi(\cdot)), x) \\ & = F\tau_i(\tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)), x) \equiv F\tau_i \circ F\tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)) \\ & = (x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)), \end{aligned}$$

w którym $g_{ij} \in C^k(\mathcal{O}_{ij}, GL(n; \mathbb{K}))$ są odwzorowaniami przejścia wiązki \mathbb{V} , a który ukazuje gładki (klasy C^k) charakter odwzorowań $F\tau_i \circ F\tau_j^{-1}$.

Na koniec zauważmy, że odwzorowania $F\tau_i^{-1}$ (więc także trywializacje lokalne $F\tau_i$) są ekwiwariantne względem prawostronnego działania grupy $GL(n; \mathbb{K})$: regularnego \wp na drugim czynniku kartezjańskim ich dziedziny oraz opisanego powyżej r na przeciwdziedzinie. Istotnie, obliczamy wprost – dla dowolnego elementu $\gamma \in GL(n; \mathbb{K})$ –

$$\begin{aligned} F\tau_i^{-1} \circ (\text{id}_{\mathcal{O}_i} \times \wp_\gamma)(x, \chi) & = F\tau_i^{-1}(x, \chi \circ \gamma) = (\tau_i^{-1}(x, \chi \circ \gamma(\cdot)), x) \\ & \equiv (\tau_i^{-1}(x, \chi(\cdot)), x) \triangleleft \gamma \equiv r_\gamma \circ F\tau_i^{-1}(x, \chi). \end{aligned}$$

Trywializacje lokalne są zatem zgodne z zaobserwowaną wcześniej strukturą torsora grupy $GL(n; \mathbb{K})$ na włóknie wiązki reperów. Następną definicją przynosi stosowną formalizację poczynionej tu obserwacji.

3. Wiązki główne

DEFINICJA 127. Przyjmijmy zapis Def. 92 oraz 123 i niechaj G będzie grupą topologiczną (wzgl. Liego w przypadku $k > 0$). **Wiązka główna** klasy C^k o grupie strukturalnej G to wiązka włóknista klasy C^k

$$(P_G, B, G, \pi_{P_G})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna P_G z wolnym działaniem prawostronnym r grupy strukturalnej G , które jest przechodnie we włóknie nad (dowolnym) punktem bazy, co opisuje diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} P_G \times G & \xrightarrow{r} & P_G \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_{P_G} \\ P_G & \xrightarrow{\pi_{P_G}} & B \end{array} ;$$

- lokalne trywializacje

$$\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times G, \quad i \in I$$

stowarzyszone z pokryciem otwartym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B i G -ekwiwariantne względem działań prawostronnych: r na dziedzinie oraz regularnego \wp na drugim czynniku kartezjańskim przeciwdziedziny,

$$\tilde{\wp}^i \equiv \text{id}_{\mathcal{O}_i} \times \wp : (\mathcal{O}_i \times G) \times G \longrightarrow \mathcal{O}_i \times G : ((x, g), h) \longmapsto (x, g \cdot h).$$

Podwiązka główna o grupie strukturalnej H wiązki głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) to podwiązka $(P_H, B, H, \pi_{P_G} \upharpoonright_{P_H})$ tejże wiązki (włóknistej) o grupie strukturalnej będącej podgrupą topologiczną (wzgl. Liego) $H \subset G$.

Morfizm wiązek głównych $(P_{G_\alpha}, B_\alpha, G_\alpha, \pi_{P_{G_\alpha}})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o działaniach odnośnych grup strukturalnych r^α to trójka (Φ, f, φ) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) : (P_{G_1}, B_1, G_1, \pi_{P_{G_1}}) \longrightarrow (P_{G_2}, B_2, G_2, \pi_{P_{G_2}})$$

oraz homomorfizmu grup topologicznych (wzgl. Liego) pozostających w relacji wyrażanej przez diagram przemienny

$$(4.1.12) \quad \begin{array}{ccccc} P_{G_1} \times G_1 & \xrightarrow{r^1} & P_{G_1} & \xrightarrow{\pi_{P_{G_1}}} & B_1 \\ \Phi \times \varphi \downarrow & & \downarrow \Phi & & \downarrow f \\ P_{G_2} \times G_2 & \xrightarrow{r^2} & P_{G_2} & \xrightarrow{\pi_{P_{G_2}}} & B_2 \end{array} .$$

Wiązki główne o grupie strukturalnej G i bazie B wraz z odnośnymi morfizmami wiązek głównych między nimi tworzą **kategorię wiązek głównych o grupie strukturalnej G nad B** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{Bun}_G(B).$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 36.

- (1) Trywialna wiązka główna nad B o grupie strukturalnej G , czyli

$$(B \times G, B, G, \text{pr}_1).$$

- (2) Wiązka reperów wiązki wektorowej V modelowanej na \mathbb{K}^n , czyli

$$(F_{GL}V, B, GL(n; \mathbb{K}), \pi_{F_{GL}V}),$$

w szczególności zaś – **wiązka reperów nad rozmaitością** (albo **wiązka baz nad rozmaitością**) M wymiaru n , czyli

$$(F_{GL}TM, M, GL(TM) \cong GL(n; \mathbb{R}), \pi_{F_{GL}TM}).$$

- (3) **Rozwłóknienie Hopfa**

$$(SU(2) \cong \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, U(1), \pi_{SU(2)/U(1)}).$$

- (4) Dla dowolnej podgrupy domkniętej $H \subset G$ grupy topologicznej G ta ostatnia niesie naturalną strukturę wiązki głównej o grupie strukturalnej H nad gładką przestrzenią jednorodną G/H (w rozumieniu Tw. 1.5.8)

$$(G, G/H, H, \pi_{G/H}).$$

✓

DEFINICJA 128. Przyjmijmy zapis Def. 127 i niechaj

$$P_G \times_B P_G := \{ (p_1, p_2) \in P_G \times P_G \mid \pi_{P_G}(p_1) = \pi_{P_G}(p_2) \}$$

będzie produktem włóknistym w rozumieniu Przykł. 21 (1). **Odwzorowanie ilorazowe** na wiązce głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) to odwzorowanie (klasy C^k)

$$\phi_{P_G} : P_G \times_B P_G \longrightarrow G$$

określone przez warunek

$$\forall (p_1, p_2) \in P_G \times_B P_G : p_2 = p_1 \triangleleft \phi_{P_G}(p_1, p_2).$$

▲

STWIERDZENIE 198. *Przyjmijmy zapis Def. 128. Odwzorowanie ilorazowe spełnia warunki wyrażone przez następujące diagramy przemienne:*

(DM1) *skośna symetria*

$$\begin{array}{ccc} P_G \times_B P_G & \xrightarrow{\tau_{P_G, P_G}} & P_G \times_B P_G \\ \phi_{P_G} \downarrow & & \downarrow \phi_{P_G} \\ G & \xrightarrow{\text{Inv}} & G \end{array},$$

gdzie $\tau_{P_G, P_G} : P_G \times_B P_G \rightarrow P_G \times_B P_G : (p_1, p_2) \mapsto (p_2, p_1)$ jest (obciętą do produktu włóknistego) transpozycją kanoniczną, czyli

$$\forall_{(p_1, p_2) \in P_G \times_B P_G} : \phi_{P_G}(p_2, p_1) = \phi_{P_G}(p_1, p_2)^{-1};$$

(DM2) warunek 1-kocyklu

$$\begin{array}{ccc} P_G \times_B P_G \times_B P_G & \xrightarrow{(\phi_{P_G} \circ \text{pr}_{1,2}, \phi_{P_G} \circ \text{pr}_{2,3})} & G \times G \\ & \searrow \phi_{P_G} \circ \text{pr}_{1,3} & \downarrow M \\ & & G \end{array}$$

gdzie $\text{pr}_{i,j} : P_G \times_B P_G \times_B P_G \rightarrow P_G \times_B P_G : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (p_i, p_j)$, $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ jest (obciętym do produktu włóknistego) rzutem kanonicznym, czyli

$$\forall_{(p_1, p_2, p_3) \in P_G \times_B P_G \times_B P_G} : \phi_{P_G}(p_2, p_3) \circ \phi_{P_G}(p_1, p_3)^{-1} \circ \phi_{P_G}(p_1, p_2) = e;$$

(DM3) G -ekwiwariantność

$$\begin{array}{ccccc} P_G \times_B P_G & \xleftarrow{(r \circ \text{pr}_{1,3}, \text{pr}_2)} & (P_G \times_B P_G) \times G & \xrightarrow{\text{id}_{P_G} \times r} & P_G \times_B P_G \\ \downarrow \phi_{P_G} & & \downarrow \phi_{P_G} \times \text{id}_G & & \downarrow \phi_{P_G} \\ G & \xleftarrow{\ell \circ (\text{Inv} \times \text{id}_G) \circ \tau_{G,G}} & G \times G & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

czyli

$$\forall_{(p_1, p_2) \in P_G \times_B P_G, g_1, g_2 \in G} : \phi_{P_G}(p_1 \triangleleft g_1, p_2 \triangleleft g_2) = g_1^{-1} \cdot \phi_{P_G}(p_1, p_2) \cdot g_2.$$

■

Dowód: Oczywiście. □

STWIERDZENIE 199. Działanie definiujące grupy strukturalnej na przestrzeni totalnej wiązki głównej jest właściwe w rozumieniu Def. 94.

■

Dowód: Rozważmy ciągi $p : \mathbb{N} \rightarrow P_G$ i $g : \mathbb{N} \rightarrow G$ o własnościach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft g_n) = \tilde{p}.$$

Wobec ciągłości rzutu kanonicznego na bazę oraz charakteru działania grupy strukturalnej (we włóknie) otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \pi_{P_G}(\tilde{p}) &\equiv \pi_{P_G}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft g_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_n \triangleleft g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_n) \\ &= \pi_{P_G}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\right) = \pi_{P_G}(p), \end{aligned}$$

która w świetle Def. 128 pozwala zapisać

$$\tilde{p} = p \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}).$$

Niechaj $\pi_{\mathbb{P}_G}(p) \in \mathcal{O}_i$, gdzie \mathcal{O}_i jest elementem pokrycia trywializującego \mathbb{P}_G . Istnieje indeks $N \in \mathbb{N}$ o własności

$$\forall_{n \geq N} : p_n, p_n \triangleleft g_n \in \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i),$$

możemy zatem rozpatrywać podciągi p_{N+} i $p_{N+} \triangleleft g_{N+}$ w obrazie trywializacji $\tau_i : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$, w którym

$$\tau_i(p_n) =: (x_n, \gamma_n), \quad \tau_i(p) =: (x, \gamma),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \gamma_n) = (x, \gamma),$$

więc też

$$\tau_i(p_n \triangleleft g_n) = \tau_i(p_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n \cdot g_n)$$

oraz

$$\tau_i(\tilde{p}) = \tau_i(p \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})) = \tau_i(p) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}) = (x, \gamma) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}) = (x, \gamma \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n \triangleleft g_n) = \gamma \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}).$$

Wobec ciągłości operacji grupowych wyprowadzamy stąd wniosek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n^{-1} \cdot (\gamma_n \triangleleft g_n)) = \gamma^{-1} \cdot (\gamma \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})) = \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}),$$

który na mocy Stw. 138 przesądza o słuszności dowodzonej tezy. \square

COROLLARIUM 10. *Przyjmijmy zapis Def. 127 i niechaj $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$ będzie wiązką główną, M zaś – przestrzenią topologiczną z działaniem (lewostronnym) $\lambda : G \times M \rightarrow M$ grupy G . Rozważmy rozmaitość produktową $\mathbb{P}_G \times M$. Działanie grupy G dane wzorem*

$$(4.1.13) \quad \tilde{\lambda} : G \times (\mathbb{P}_G \times M) \rightarrow \mathbb{P}_G \times M : (g, (p, x)) \mapsto (r(p, g^{-1}), \lambda(g, m))$$

jest wolne i właściwe (w rozumieniu Def. 94). \blacksquare

Dowód: Oczywisty. \square

STWIERDZENIE 200. *Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi klasy C^k wiązki głównej klasy C^k i jej trywializacjami lokalnymi (też same klasy). W szczególności wiązka główna jest (globalnie) trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma globalne cięcie.* \blacksquare

Dowód: Cięciu lokalnemu $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{P}_G$, $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(B)$ przyporządkowujemy trywializację (lokalną)

$$\tau_\sigma : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O} \times G : p \mapsto (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p))$$

o pożądanых własnościach, a więc odwracalną,

$$\tau_\sigma^{-1} : \mathcal{O} \times G \rightarrow \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) : (x, g) \mapsto \sigma(x) \triangleleft g,$$

i G -ekwiwariantną,

$$\tau_\sigma(p \triangleleft g) \equiv (\pi_{\mathbb{P}_G}(p \triangleleft g), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p \triangleleft g), p \triangleleft g))$$

$$\begin{aligned}
&= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p \triangleleft g)) \\
&= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p) \cdot g) \\
&= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p)) \triangleleft g \equiv \tau_\sigma(p) \triangleleft g.
\end{aligned}$$

I odwrotnie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O} \times G$ przypisujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau : \mathcal{O} \rightarrow \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) : x \mapsto \tau^{-1}(x, e).$$

Powyższe przyporządkowania są przy tym wzajem odwrotne, oto bowiem – z jednej strony –

$$\forall x \in \mathcal{O} : \sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x, e) = \sigma(x) \triangleleft e = \sigma(x),$$

oraz – z drugiej strony –

$$\begin{aligned}
\forall p \in \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) : \tau_{\sigma_\tau}(p) &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma_\tau \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p)) \\
&= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p)),
\end{aligned}$$

a ponieważ

$$p \equiv \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p),$$

czyli

$$\begin{aligned}
\tau(p) &= \tau(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p)) \\
&= \tau \circ \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p) \\
&= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p) \\
&= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p)),
\end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau}(p) = \tau(p).$$

□

UWAGA 45. Należy podkreślić, że ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia nie stosuje się do wiązek włóknistych w ogólności. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że każda wiązka wektorowa ma globalne cięcie zerowe $\mathbf{0}_V$, patrz: Def. 125.

W następnej kolejności zajmiemy się wyznaczeniem wygodnego opisu lokalnego morfizmów wiązek głównych pokrywających dyfeomorfizm identycznościowy na bazie (pośród których z czasem rozpoznamy tzw. „transformacje symetrii cechowania”).

STWIERDZENIE 201. *Przyjmijmy zapis Def. 127. Dowolny morfizm $(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G)$ wiązek głównych $(\mathbb{P}_G^\alpha, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G^\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o odnośnych trywilizacjach*

lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{P}_G^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$ (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$, opisany przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_G^1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}_G^2 \\ \pi_{\mathbb{P}_G^1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{P}_G^2} \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i \in I}$ odwzorowań (lokalnie) klasy C^k

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G, \quad i \in I$$

o własności

$$(4.1.14) \quad \forall x \in \mathcal{O}_{ij} : g_{ij}^2(x) = h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x) \cdot h_j(x)^{-1}.$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu. ■

Dowód: Postać odwzorowania Φ jest w pełni określona przez wartości, jakie przyjmuje ono w punktach $\tau_i^{-1}(x, e)$, $x \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$, gdyż z racji G -ekwiwariantności τ_i oraz Φ zachodzi

$$\forall (x, g) \in \mathcal{O}_i \times G : \Phi(\tau_i^{-1}(x, g)) = \Phi(\tau_i^{-1}(x, e) \triangleleft_{(1)} g) = \Phi(\tau_i^{-1}(x, e)) \triangleleft_{(2)} g.$$

Zdefiniujmy zatem

$$h_i := \text{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1}(\cdot, e) : \mathcal{O}_i \rightarrow G,$$

czyli poprzez formułę

$$(4.1.15) \quad \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)) := \Phi(\tau_i^{1-1}(x, e)).$$

Wprost na mocy definicji odwzorowań przejścia w \mathbb{P}_G^2 możemy zapisać

$$\tau_j^{2-1}(x, h_j(x)) = \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x)),$$

a zarazem, przywoławszy G -ekwiwariantność τ_i^α oraz Φ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau_j^{2-1}(x, h_j(x)) &= \Phi(\tau_j^{1-1}(x, e)) = \Phi(\tau_i^{1-1}(x, g_{ij}^1(x))) = \Phi(\tau_i^{1-1}(x, e)) \triangleleft_{(2)} g_{ij}^1(x) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)) \triangleleft_{(2)} g_{ij}^1(x) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x)). \end{aligned}$$

Niechaj teraz $(\mathbb{P}_G^\alpha, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G^\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami głównymi o trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{P}_G^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$ i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$. Niech też $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G$, $i \in I$ będzie rodziną odwzorowań jak w tezie dowodzonego stwierdzenia. Możemy wówczas zdefiniować odwzorowania lokalne

$$\Phi_i : \pi_{\mathbb{P}_G^1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \pi_{\mathbb{P}_G^2}^{-1}(\mathcal{O}_i) : \tau_i^{1-1}(x, g) \mapsto \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g),$$

które wobec tożsamości, słusznej dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i $g \in G$,

$$\begin{aligned} \Phi_j(\tau_i^{1-1}(x, g)) &= \Phi_j(\tau_j^{1-1}(x, g_{ji}^1(x) \cdot g)) = \tau_j^{2-1}(x, h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x) \cdot g) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x) \cdot g) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g) \end{aligned}$$

$$= \Phi_i(\tau_i^{1-1}(x, g)),$$

zadają odwzorowanie globalnie gładkie

$$\Phi : P_G^1 \longrightarrow P_G^2$$

o własności

$$\Phi \upharpoonright_{\pi_{P_G^1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i.$$

Odwzorowanie to jest jawnie G-ekwiwariantne (wszak \wp jest przemienne z ℓ) i zachowuje włókna. \square

STWIERDZENIE 202. *Przyjmijmy zapis Def. 127. Podkategoria kategorii $\mathbf{Bun}_G(B)$ o tej samej klasie obiektów i o morfizmach o identycznościowej składowej na bazie, $f = \text{id}_B$, jest grupoidem.*

■

Dowód: W świetle Stw. 201 wystarczy poprowadzić rozważania w opisie lokalnym, w którym dowolny morfizm $\Phi : P_G^1 \longrightarrow P_G^2$ pokrywający identyczność na bazie B jest reprezentowany przez rodzinę odwzorowań $h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow G$, $i \in I$. Na mocy tego samego stwierdzenia rodzina odwzorowań $\{\tilde{h}_i := \text{Inv} \circ h_i\}_{i \in I}$ określa morfizm $P_G^2 \longrightarrow P_G^1$, który w oczywisty sposób jest odwrotnością Φ . \square

Wiązki główne odgrywają fundamentalną rolę w opisie (lokalnych) symetrii teorii fizycznych, o czym więcej powiemy już wkrótce. Stanowią też punkt wyjścia do nowych istotnych fizycznie konstrukcji, którymi zajmiemy się obecnie.

UWAGA 46. Okazuje się, że wiązkę wektorową V można odtworzyć (z dokładnością do izomorfizmu) z odnośnej wiązki reperów $F_{GL}V$ przez pewną sprytną konstrukcję, którą przedstawiamy poniżej. Jak wynika wprost z definicji $F_{GL}V$, jest dobrze określone odwzorowanie (punktowej) ewaluacji

$$\widehat{ev} : F_{GL}V \times \mathbb{K}^{xn} \longrightarrow V : ((\beta_x, x), v) \longmapsto (\beta_x(v), x).$$

Odwzorowanie to jest stałe na orbitach działania

$$\begin{aligned} \tilde{ev} & : GL(n; \mathbb{K}) \times (F_{GL}V \times \mathbb{K}^{xn}) \longrightarrow F_{GL}V \times \mathbb{K}^{xn} \\ & : (\chi, ((\beta_x, x), v)) \longmapsto ((\beta_x \circ \chi^{-1}, x), \chi(v)), \end{aligned}$$

zapisanego w terminach naturalnego (definiującego) działania grupy $GL(n; \mathbb{K})$ na \mathbb{K}^{xn} ,

$$ev : GL(n; \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^{xn} \longrightarrow \mathbb{K}^{xn} : (\chi, v) \longmapsto \chi(v).$$

To oznacza, że \widehat{ev} zstępuje na rozmaitość ilorazową $(F_{GL}V \times \mathbb{K}^{xn})/GL(n; \mathbb{K})$ zdefiniowaną w odniesieniu do działania \tilde{ev} , której istnienie zapewnia Cor. 10. Innymi słowy, \widehat{ev} zadaje odwzorowanie

$$\begin{aligned} [\widehat{ev}] & : (F_{GL}V \times \mathbb{K}^{xn})/GL(n; \mathbb{K}) \longrightarrow V \\ (4.1.17) & : [((\beta_x, x), v)] \longmapsto \widehat{ev}((\beta_x, x), v) \equiv (\beta_x(v), x) \end{aligned}$$

które domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{V} \\
 & \nearrow \widehat{e\mathbb{V}} & \uparrow [\widehat{e\mathbb{V}}] \\
 \mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n} & \xrightarrow{\pi_{(\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/\text{GL}(n;\mathbb{K})}} & (\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/\text{GL}(n;\mathbb{K})
 \end{array}$$

Zapisany na nim rzut kanoniczny $\pi_{(\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/\text{GL}(n;\mathbb{K})}$ na przestrzeń orbit jest – w świetle Tw. 1.5.7 – gładką submersją, przeto wprost na mocy Stw. 115 gładkość (klasy C^k) odwzorowania indukowanego $[\widehat{e\mathbb{V}}]$ jest implikowana przez gładkość (tej samej klasy) odwzorowania $\widehat{e\mathbb{V}}$. Przy tym bez trudu przekonujemy się, że w ograniczeniu do dowolnego włókna $(\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \times \mathbb{K}^{\times n})/\text{GL}(n;\mathbb{K})$, $x \in B$ odwzorowanie to jest bijekcją. Istotnie, wybierzmy dowolną bazę $\beta_x^* \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ i rozważmy zbiór $S := \{ ((\beta_x^*, x), v) \mid v \in \mathbb{K}^{\times n} \}$. Orbits dwóch dowolnych jego elementów, $\text{GL}(n;\mathbb{K}) \triangleright ((\beta_x^*, x), v_1)$ i $\text{GL}(n;\mathbb{K}) \triangleright ((\beta_x^*, x), v_2)$, albo pokrywają się ze sobą, albo też są rozłączne, a to w konsekwencji Stw. 2. Pierwsza z tych ewentualności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned}
 & ((\beta_x^*, x), v_2) \in \text{GL}(n;\mathbb{K}) \\
 \iff & \exists_{\chi \in \text{GL}(n;\mathbb{K})} : ((\beta_x^*, x), v_2) = ((\beta_x^* \circ \chi^{-1}, x), \chi(v_2)) \\
 \iff & (\chi = \text{id}_{\mathbb{K}^{\times n}} \quad \wedge \quad v_2 = v_1),
 \end{aligned}$$

zatem nietożsame elementy zbioru S należą do rozłącznych orbit. Moc włókna $(\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \times \mathbb{K}^{\times n})/\text{GL}(n;\mathbb{K})$ jest więc nie mniejsza niż moc włókna \mathbb{V}_x . Pozostaje sprawdzić injektywność $[\widehat{e\mathbb{V}}]$. W tym celu rozważmy konsekwencje równości

$$\beta_x^1(v_1) \equiv [\widehat{e\mathbb{V}}]([(\beta_x^1, x), v_1]) = [\widehat{e\mathbb{V}}]([(\beta_x^2, x), v_2]) \equiv \beta_x^2(v_2).$$

Ta jest równoważna równości

$$v_2 = \beta_x^{2-1} \circ \beta_x^1(v_1),$$

która implikuje relację

$$v_2 \in \text{GL}(n;\mathbb{K}) \triangleright v_1,$$

a dalej także

$$((\beta_x^2, x), v_2) = ((\beta_x^1 \circ (\beta_x^{2-1} \circ \beta_x^1)^{-1}, x), \beta_x^{2-1} \circ \beta_x^1(v_1)) \in \text{GL}(n;\mathbb{K}) \triangleright ((\beta_x^1, x), v_1).$$

Na tej podstawie wyciągamy wniosek o równości argumentów,

$$[(\beta_x^1, x), v_1] = [(\beta_x^2, x), v_2],$$

która przesądza o injektywności $[\widehat{e\mathbb{V}}]$. Mamy zatem do czynienia z (C^k -)gładką bijekcją. Skonstruujemy jej gładką odwrotność. W tym celu użyjemy lokalnych trywializacji $\tau_i : \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \text{GL}(n;\mathbb{K})$, $i \in I$ wiązki reperów stowarzyszonych z pokryciem $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, które w odwołaniu do tezy Stw. 200 pozwalają nam skonstruować lokalnie gładkie cięcia

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V} : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, e) \equiv (\beta_i(x), x) \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \times \{x\},$$

przy czym pole baz β_i zależy (lokalnie) C^k -gładko od punktu w $\mathcal{O}_i \subset B$. Łatwo przekonujemy się, że odwzorowanie zadane lokalnie (nad $\mathcal{O}_i \ni x$) w postaci

$$\Sigma_i \upharpoonright_{\mathbb{V}_x} : \mathbb{V}_x \longrightarrow (\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \times \mathbb{K}^{\times n})/\text{GL}(n; \mathbb{K}) : \nu \longmapsto [((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu))]$$

jest (lokalną) odwrotnością $[\widehat{e\nu}]$, oto bowiem

$$\begin{aligned} \Sigma_i \circ [\widehat{e\nu}]([((\beta_x, x), v)]) &= \Sigma_i \circ \beta_x(v) = [((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v))] \\ &\equiv [((\beta_x \circ (\beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x)^{-1}, x), \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v))] = [((\beta_x, x), v)] \end{aligned}$$

a nadto – dla $\nu \in \mathbb{V}_x$ –

$$[\widehat{e\nu}] \circ \Sigma_i(\nu) = [\widehat{e\nu}]([((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu))]) = \beta_i(x)(\beta_i(x)^{-1}(\nu)) = \nu.$$

I wreszcie na koniec upewniamy się, że odwzorowania lokalne Σ_i stanowią ograniczenia (do odnośnych elementów $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ pokrycia przestrzeni totalnej \mathbb{V}) odwzorowania globalnie gładkiego. W tym celu musimy najpierw ustalić regułę transformacyjną dla lokalnych wyborów bazy β_i . Niechaj $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{GL}(n; \mathbb{K})$ będą odwzorowaniami przejścia dla wybranych wcześniej trywializacji lokalnych \mathbb{V} , tj. – dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ oraz $\chi \in \text{GL}(n; \mathbb{K})$ –

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, \chi) = (x, g_{ij}(x) \circ \chi).$$

Obliczamy wówczas

$$\begin{aligned} (\beta_j(x), x) &\equiv \tau_j^{-1}(x, \text{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}) = \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)) = \tau_i^{-1}(x, \text{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}) \triangleleft g_{ij}(x) \\ &= (\beta_i(x), x) \triangleleft g_{ij}(x) \equiv (\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x), \end{aligned}$$

czyli

$$\beta_j(x) = \beta_i(x) \circ g_{ij}(x),$$

a stąd już łatwo wyprowadzamy – dla dowolnego punktu $\nu \in \mathbb{V}_x$, $x \in \mathcal{O}_{ij}$ – pożądaną tożsamość

$$\begin{aligned} \Sigma_j(\nu) &= [((\beta_j(x), x), \beta_j(x)^{-1}(\nu))] = [((\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x), g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(\nu))] \\ &= [((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu))] \equiv \Sigma_i(\nu). \end{aligned}$$

Dotychczasowe nasze rozważania pozwalają nam wypisać wprost trywializacje lokalne

$$\begin{aligned} [\tau_i] &: (\pi_{\text{FGL}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{\times n})/\text{GL}(n; \mathbb{K}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \\ &: [((\beta_x, x), v)] \longmapsto (x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v)) \end{aligned}$$

o odwrotnościach

$$\begin{aligned} [\tau_i]^{-1} &: \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \twoheadrightarrow (\pi_{\text{FGL}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{\times n})/\text{GL}(n; \mathbb{K}) \\ &: (x, v) \longmapsto [((\beta_i(x), x), v)] \end{aligned}$$

i tym samym zidentyfikować strukturę wiązki włóknistej na rozmaitości ilorazowej $(\text{F}_{\text{GL}\mathbb{V}} \times \mathbb{K}^{\times n})/\text{GL}(n; \mathbb{K})$, przy czym jest jasne, że jest to wiązka wektorowa nad B o ciele bazowym \mathbb{K} . Odnotujmy na marginesie, że odwzorowania przejścia dla wypisanych tu trywializacji przyjmują – w dowolnym punkcie $(x, v) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{K}^{\times n}$ – postać

$$[\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}(x, v) = [\tau_i]([((\beta_j(x), x), v)]) = (x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_j(x)(v))$$

$$= (x, g_{ij}(x)(v)),$$

identyczną jak w przypadku V. Wobec swojej oczywistej \mathbb{K} -liniowości odwzorowanie $[\widehat{ev}]$ jawi się nam jako izomorfizm wiązek wektorowych

$$[\widehat{ev}] : (F_{GL}V \times \mathbb{K}^{n})/GL(n; \mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} V.$$

4. Wiązki stowarzyszone

DEFINICJA 129. Przyjmijmy zapis Def. 127 i niechaj (P_G, B, G, π_{P_G}) będzie wiązką główną (klasy C^k), M zaś – rozmaitością z (C^k) -gładkim działaniem (lewostrobnym) $\lambda : G \times M \rightarrow M$ grupy topologicznej G . **Wiązka stowarzyszona z P_G poprzez λ** klasy C^k to wiązka włóknista (teżże klasy)

$$(P_G \times_\lambda M, B, M, \pi_{P_G \times_\lambda M})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna $P_G \times_\lambda M \equiv (P_G \times M)/G$ będąca rozmaitością ilorazową określoną – według schematu opisanego w Cor. 10 (na gruncie Tw. 1.5.7) i w użytym tam zapisie – przez działanie (4.1.13);
- rzut na bazę

$$\pi_{P_G \times_\lambda M} : P_G \times_\lambda M \rightarrow B : [(p, m)] \mapsto \pi_{P_G}(p).$$

Przy tym trywializacje lokalne $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times G$, $i \in I$ wiązki głównej P_G stowarzyszone z pokryciem $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B indukują trywializacje lokalne

$$\tilde{\tau}_i : \pi_{P_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times M : [(p, m)] \mapsto (\pi_{P_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p), m)),$$

o odwzorowaniach przejścia

$$\tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times M \rightarrow \mathcal{O}_{ij} \times M : (x, m) \mapsto (x, \lambda(g_{ij}(x), m)).$$

▲

UWAGA 47. Istnienie struktury rozmaitości (klasy C^k) na przestrzeni orbit $P_G \times_\lambda M$ działania $\tilde{\lambda}$ jest bezpośrednią konsekwencją Tw. 1.5.7, na którego przywołanie w powyższym kontekście pozwala Cor. 10. Przy tym gładkość rzutu na bazę $\pi_{P_G \times_\lambda M}$ wynika tu wprost ze Stw. 115, kedy zauważyć, że rzut ten domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow \pi_{P_G} \circ \text{pr}_1 & \uparrow \pi_{P_G \times_\lambda M} \\ P_G \times M & \xrightarrow{\pi_{(P_G \times M)/G}} & P_G \times_\lambda M \end{array},$$

w którym $\pi_{(P_G \times M)/G}$ jest surjektywną submersją (na mocy tegoż Tw. 1.5.7), a $\pi_{P_G} \circ \text{pr}_1$ jest jawnie (C^k) -gładkie. Jako że to ostatnie odwzorowanie także jest submersją, przeto własność tę ma $\pi_{P_G \times_\lambda M}$, o czym przekonuje tożsamość zapisana przez obraz powyższego diagramu względem funktora stycznego.

Przejdziemy do zbadania trywializacji lokalnych, zaczynając od sprawdzenia sensowności ich definicji. Musimy w tym celu pokazać, że wartość przyjmowana

przez odwozowanie $\tilde{\tau}_i$ na klasie $[(p, m)]$ nie zależy od wyboru reprezentanta tej ostatniej. Obliczamy przeto

$$\begin{aligned} (\pi_{\mathbb{P}_G}(p \triangleleft g), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p \triangleleft g), \lambda(g^{-1}, m))) &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g, \lambda(g^{-1}, m))) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g \cdot g^{-1}, m)) = (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p), m)). \end{aligned}$$

Ponadto ponieważ odwzorowania

$$\mathcal{T}_i : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M \longrightarrow \mathcal{O}_i \times M : (p, m) \longmapsto (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda_{\text{pr}_2 \circ \tau_i(p)}(m)), \quad i \in \{1, 2\}$$

są jawnie gładkie, a przy tym pozostają z $\tilde{\tau}_i$ w relacji opisywanej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O}_i \times M \\ & \nearrow \mathcal{T}_i & \uparrow \tilde{\tau}_i \\ \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M & \xrightarrow{\pi_{(\mathbb{P}_G \times M)/G}} & \pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \end{array},$$

w którym rzut kanoniczny $\pi_{(\mathbb{P}_G \times M)/G}$ jest – wprost na mocy Tw. 1.5.7 i Cor. 10 – gładki (klasy C^k), przeto w świetle Stw. 115 także odwzorowania $\tilde{\tau}_i$ są gładkie (tej samej klasy C^k). Gładkość (także lokalna) ich odwrotności

$$\tilde{\tau}_i^{-1} : \mathcal{O}_i \times M \longrightarrow \pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) : (x, m) \longmapsto [(\tau_i^{-1}(x, e), m)]$$

nie budzi wątpliwości. We wszystkich dotychczasowych rozważaniach zakładamy *implicite* sensowność definicji odwzorowań $\tilde{\tau}_i$ i $\tilde{\tau}_i^{-1}$, która wymaga odrębnej weryfikacji – ta usprawiedliwia *a posteriori* dokonaną przez nas identyfikację włókna typowego

$$\pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}^{-1}(\{\pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}^{-1}([(p, m)])\}) \cong M, \quad [(p, m)] \in \mathbb{P}_G \times_\lambda M$$

rekonstruowanej tu wiązki włóknistej. Bez trudu dowodzimy pożądaných tożsamości: oto więc dla $(x, m) \in \mathcal{O}_i \times M$ zachodzi

$$\tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_i^{-1}(x, m) = \tilde{\tau}_i([(\tau_i^{-1}(x, e), m)])$$

$$= (\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \tau_i^{-1}(x, e), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x, e), m)) = (x, \lambda(e, m)) = (x, m),$$

a dla $[(p, m)] \in \mathbb{P}_G \times_\lambda M$, $p = \tau_i^{-1}(x, g)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i^{-1} \circ \tilde{\tau}_i([(p, m)]) &= \tilde{\tau}_i^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p), m)) \\ &= [(\tau_i^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p), m))] = [(\tau_i^{-1}(x, e), \lambda(g, m))] \\ &= [(\tau_i^{-1}(x, e) \triangleleft g, m)] = [(\tau_i^{-1}(x, g), m)] \equiv [(p, m)]. \end{aligned}$$

Wreszcie też na koniec obliczamy

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(x, m) &\equiv \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \tau_j^{-1}(x, e), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_j(\tau_j^{-1}(x, e)), m)) \\ &= \tilde{\tau}_i([(\tau_j^{-1}(x, e), m)]) = (x, \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, e), m)) \\ &= (x, \lambda(\text{pr}_2(x, g_{ij}(x)), m)) \equiv (x, \lambda(g_{ij}(x), m)). \end{aligned}$$

Konstrukcja wiązki stowarzyszonej jest zatem dobrze określona.

PRZYKŁAD(Y) 37.

- (1) Wiązka wektorowa V (rzędu n) jest wiązką stowarzyszoną z wiązką (główną) reperów $F_{GL}V$ poprzez działanie definiujące (ewaluację),

$$V \cong F_{GL}V \times_{ev} \mathbb{K}^{\times n}.$$

- (2) **Wiązka dołączona**

$$(\text{Ad}P_G \equiv P_G \times_{\text{Ad}} G, B, G, \pi_{P_G \times_{\text{Ad}} G}).$$

- (3) Wiązka główna P_G może być zrealizowana jako wiązka stowarzyszona

$$(P_G \times_{\ell} G, B, G, \pi_{P_G \times_{\ell} G}).$$

Stosowny izomorfizm wiązek włóknistych to

$$\tilde{\tau} : P_G \times_{\ell} G \longrightarrow P_G : [(p, g)] \longmapsto p \triangleleft g,$$

przy czym jego gładkość wynika z tego, że domyka on diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow r & \uparrow \pi_{P_G \times_{\ell} G} \\ P_G \times G & \xrightarrow{\pi_{(P_G \times G)/G}} & P_G \times_{\ell} G \end{array}$$

w którym $\pi_{(P_G \times G)/G}$ jest surjektywną submersją, r zaś – odwzorowaniem gładkim. Odwrotność $\tilde{\tau}$ jest dana w (jawnie gładkiej) postaci

$$\tilde{\tau}^{-1} : P_G \longrightarrow P_G \times_{\ell} G : p \longmapsto [(p, e)].$$

Na wiązce stowarzyszonej $P_G \times_{\ell} G$ jest określone prawe działanie grupy G w postaci

$$\tilde{r} : (P_G \times_{\ell} G) \times G \longrightarrow P_G \times_{\ell} G : ([(p, g)], h) \longmapsto [(p, g \cdot h)],$$

względem którego każde z włókien jest torskorem. Izomorfizm $\tilde{\tau}$ jest G -ekwiwariantny,

$$\tilde{\tau} \circ \tilde{r}([(p, g)], h) = \tilde{\tau}([(p, g \cdot h)]) = p \triangleleft (g \cdot h) = (p \triangleleft g) \triangleleft h = r \circ \tilde{\tau}([(p, g)], h),$$

mamy zatem do czynienia z izomorfizmem wiązek głównych. ✓

UWAGA 48. Termin „wiązka dołączona” bywa używany w literaturze w odniesieniu do wiązki stowarzyszonej

$$(\text{ad}P_G \equiv P_G \times_{T_e \text{Ad}} \mathfrak{g}, B, \mathfrak{g}, \pi_{P_G \times_{T_e \text{Ad}} \mathfrak{g}}),$$

o włóknie typowym tożsamym z algebrą Liego \mathfrak{g} grupy Liego G .

STWIERDZENIE 203. *Przyjmijmy zapis Def. 129 oraz Przykł. 21 (1) i 37 (2). Istnieje kanoniczna struktura wiązki grup na $\text{Ad}P_G$, lokalnie modelowana na strukturze grupy na włóknie typowym G , tj. są określone (C^k -gładkie): łączna operacja binarna*

$$\widetilde{M} : \text{Ad}P_G \times_B \text{Ad}P_G \longrightarrow \text{Ad}P_G$$

posiadająca element neutralny oraz operacja unarna

$$\widetilde{\text{Inv}} : \text{Ad}P_G \circlearrowleft,$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty grupy (G1)-(G3) z Def. 5. Struktura ta realizuje się kanonicznie w $\text{Aut}(\mathbb{P}_G \times_\lambda M)$ w sposób lokalnie modelowany na ℓ , tj. jest określone odwzorowanie (C^k -gładkie)

$$\tilde{\ell} : \text{Ad } \mathbb{P}_G \times_B (\mathbb{P}_G \times_\lambda M) \longrightarrow \mathbb{P}_G \times_\lambda M$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty (LDG1) i (LDG2) działania grupy G na rozmaitości M z Def. 12. ■

Dowód: Rozważmy na wstępie operację binarną

$$\begin{aligned} \widetilde{M} & : \text{Ad } \mathbb{P}_G \times_B \text{Ad } \mathbb{P}_G \longrightarrow \text{Ad } \mathbb{P}_G \\ & : \left([(p_1, g_1)], [(p_2, g_2)] \right) \longmapsto \left[(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2)) \right], \end{aligned}$$

wraz z przyporządkowaniem – włókno po włóknie –

$$\tilde{\varepsilon}_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} : \{\bullet\} \longrightarrow \text{Ad } \mathbb{P}_G : \bullet \longmapsto [(p, e)], \quad p \in \mathbb{P}_G$$

oraz operacją unarną

$$\widetilde{\text{Inv}} : \text{Ad } \mathbb{P}_G \circlearrowleft : [(p, g)] \longmapsto [(p, g^{-1})].$$

Zacniemy od sprawdzenia, że wszystkie trzy odwzorowania są dobrze określone. Niech zatem $(p_3, g_3) \in [(p_1, g_1)]$, tj. $(p_3, g_3) = (p_1 \triangleleft g_{13}, \text{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1))$ oraz $(p_4, g_4) \in [(p_2, g_2)]$, tj. $(p_4, g_4) = (p_2 \triangleleft g_{24}, \text{Ad}_{g_{24}^{-1}}(g_2))$, gdzie dla skrótu oznaczyliśmy $g_{ij} \equiv \phi_{\mathbb{P}_G}(p_i, p_j)$, $(i, j) \in \{(1, 3), (2, 4)\}$, a wówczas – na mocy Stw. 198 – otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left[(p_3, g_3 \cdot \text{Ad}_{g_{34}}(g_4)) \right] = \left[(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(g_3 \cdot \text{Ad}_{g_{34}}(g_4))) \right] \\ & = \left[(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(\text{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1) \cdot \text{Ad}_{g_{34} \cdot g_{24}^{-1}}(g_2))) \right] = \left[(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{g_{13} \cdot g_{34} \cdot g_{42}}(g_2)) \right] \\ & = \left[(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{g_{12}}(g_2)) \right] \end{aligned}$$

oraz

$$\left[(p_3, g_3^{-1}) \right] = \left[(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(g_3^{-1})) \right] = \left[(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(g_3)^{-1}) \right] = \left[(p_1, g_1^{-1}) \right],$$

a nadto stwierdzamy, że wartość odwzorowania $\tilde{\varepsilon}_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)}$ nie zależy od wyboru punktu we włóknie nad $\pi_{\mathbb{P}_G}(p)$, oto bowiem dla dowolnego $\tilde{p} = p \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})$ dostajemy

$$\left[(\tilde{p}, e) \right] = \left[(p \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}), e) \right] = \left[(p, \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})}(e)) \right] = \left[(p, e) \right].$$

Celem wykazania, że powyższa struktura jest w istocie lokalnie modelowana na G , wykorzystamy rodzinę odwzorowań, indeksowaną przez punkty w bazie wiązki,

$$\gamma_x^{(p_*)} : (\text{Ad } \mathbb{P}_G)_x \longrightarrow G : [(p, g)] \longmapsto \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)}(g), \quad x \in B,$$

z których każde wymaga wskazania (dowolnego) punktu $p_* \in \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\{x\})$. Po pierwsze, przekonujemy się, że są one dobrze określone, gdyż dla dowolnego $(\tilde{p}, \tilde{g}) \in [(p, g)]$, czyli $(\tilde{p}, \tilde{g}) = (p \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}), \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})}(g))$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, \tilde{p})}(\tilde{g}) & = \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p) \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})}(\tilde{g}) = \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)} \circ \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})}(\tilde{g}) \\ & = \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)}(g). \end{aligned}$$

W następnej kolejności upewniamy się, że $\gamma_x^{(p^*)}$ jest bijekcją – iniektywność wynika z relacji

$$\begin{aligned} \gamma_x^{(p^*)}([(p_2, g_2)]) &= \gamma_x^{(p^*)}([(p_1, g_1)]) \iff \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2) = g_1 \\ \implies [(p_2, g_2)] &= [(p_1 \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2), g_2)] = [(p_1, \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2))] \\ &= [(p_1, g_1)], \end{aligned}$$

natomiast surjektywność konstatujemy na gruncie tożsamości

$$g = \gamma_x^{(p^*)}([(p_*, g)]).$$

Pozostaje udowodnić, że $\gamma_x^{(p^*)}$ są homomorfizmami grup, co czynimy poniżej (dla dowolnej pary $(p_1, g_1), (p_2, g_2) \in \mathbb{P}_G$ o własności $p_1, p_2 \in (\mathbb{P}_G)_x$, w odwołaniu do Stw. 198,

$$\begin{aligned} \gamma_x^{(p^*)} \circ \widetilde{M}([(p_1, g_1)], [(p_2, g_2)]) &= \gamma_x^{(p^*)}([(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2))]) \\ &= \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_1)}(g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2)) \\ &= \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_1)}(g_1) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_1) \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2) \\ &= \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_1)}(g_1) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_2)}(g_2) \\ &\equiv M(\gamma_x^{(p^*)}([(p_1, g_1)]), \gamma_x^{(p^*)}([(p_2, g_2)])). \end{aligned}$$

Punktem wyjścia do dowodu drugiej części tezy jest konstrukcja odwzorowania

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda} &: \text{Ad } \mathbb{P}_G \times_B (\mathbb{P}_G \times_\lambda M) \longrightarrow \mathbb{P}_G \times_\lambda M \\ &: ([(p_1, g_1)], [(p_2, m_2)]) \longmapsto [(p_2, \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(g_1)}(m_2))]. \end{aligned}$$

Tak jak poprzednio, zaczynamy od sprawdzenia jego określoności. Niech więc $(p_3, g_3) \in [(p_1, g_1)]$, tj. $(p_3, g_3) = (p_1 \triangleleft g_{13}, \text{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1))$ oraz $(p_4, m_4) \in [(p_2, m_2)]$, tj. $(p_4, m_4) = (p_2 \triangleleft g_{24}, g_{24}^{-1} \triangleright m_2)$ (w dotychczasowych oznaczeniach), a wtedy – na mocy Stw. 198 – obliczamy

$$\begin{aligned} [(p_4, \lambda_{\text{Ad}_{g_{43}}}(g_3)(m_4))] &= [(p_2, \lambda_{g_{24} \cdot \text{Ad}_{g_{43}}(g_3)}(m_4))] \\ &= [(p_2, \lambda_{g_{24} \cdot \text{Ad}_{g_{43}} \circ \text{Ad}_{g_{31}}(g_1)}(m_4))] = [(p_2, \lambda_{\text{Ad}_{g_{24} \cdot g_{43} \cdot g_{31}}(g_1) \cdot g_{24}}(m_4))] \\ &= [(p_2, \lambda_{\text{Ad}_{g_{21}}(g_1) \cdot g_{24}}(m_4))] = [(p_2, \lambda_{\text{Ad}_{g_{21}}(g_1)} \circ \lambda_{g_{24}}(m_4))] \\ &= [(p_2, \lambda_{\text{Ad}_{g_{21}}(g_1)}(m_2))]. \end{aligned}$$

Następnie sprawdzamy aksjomatykę działania, więc

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}_{\widetilde{M}([(p_1, g_1)], [(p_2, g_2)])}([(p_3, m_3)]) &= \widetilde{\lambda}_{[(p_1, g_1) \cdot \text{Ad}_{g_{21}}(g_2)]}([(p_3, m_3)]) \\ &= [(p_3, \lambda_{\text{Ad}_{g_{31}}(g_1) \cdot \text{Ad}_{g_{12}}(g_2)}(m_3))] = [(p_3, \lambda_{\text{Ad}_{g_{31}}(g_1)} \circ \lambda_{\text{Ad}_{g_{31} \cdot g_{12}}(g_2)}(m_3))] \\ &\equiv \widetilde{\lambda}_{[(p_1, g_1)]}([(p_3, \lambda_{\text{Ad}_{g_{32}}(g_2)}(m_3))]) \equiv \widetilde{\lambda}_{[(p_1, g_1)]} \circ \widetilde{\lambda}_{[(p_2, g_2)]}([(p_3, m_3)]) \end{aligned}$$

i

$$\tilde{\lambda}_{[(p_1, e)]}([(p_2, m_2)]) = [(p_2, \lambda_{\text{Ad}_{g_{21}}}(e)(m_2))] = [(p_2, \lambda_e(m_2))] = [(p_2, m_2)].$$

To, że – zgodnie z tezą stwierdzenia – działanie $\tilde{\lambda}$ jest lokalnie modelowane na λ , stwierdzamy, używając $\gamma_x^{(p^*)}$ oraz odwzorowań tych naturalnego uogólnienia

$$\mu_x^{(p^*)} : (\mathbb{P}_G \times_\lambda M)_x \longrightarrow M : [(p, m)] \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p^*, p)}(m), \quad x \in B.$$

I tym razem definicja odwzorowania ma sens, oto bowiem dla dowolnego reprezentanta $(\tilde{p}, \tilde{m}) \in [(p, m)]$ otrzymujemy

$$\lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p^*, \tilde{p})}(\tilde{m}) = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p^*, p)} \circ \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})}(\tilde{m}) = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p^*, p)}(m).$$

Ponadto każde z odwzorowań $\mu_x^{(p^*)}$ jest bijekcją, oto bowiem prawdziwą jest implikacja

$$\begin{aligned} \mu_x^{(p^*)}([(p_2, m_2)]) = \mu_x^{(p^*)}([(p_1, m_1)]) &\iff m_2 = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(m_1) \\ \implies [(p_2, m_2)] = [(p_2, \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(m_1))] &= [(p_2 \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1), m_1)] \\ &= [(p_1, m_1)], \end{aligned}$$

dowodząca iniektywności $\mu_x^{(p^*)}$, a do tego dowolny punkt $m \in M$ możemy zapisać w postaci

$$m = \mu_x^{(p^*)}([(p^*, m)]),$$

co zaświadcza o surjektywności tego odwzorowania. Na koniec wreszcie wykonujemy prosty rachunek

$$\begin{aligned} \lambda(\gamma_x^{p^*}([(p_1, g_1)]), \mu_x^{(p^*)}([(p_2, m_2)])) &= \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p^*, p_1)}(g_1)} \circ \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p^*, p_2)}(m_2) \\ &= \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p^*, p_2) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(g_1)}(m_2) = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p^*, p_2)}(\lambda_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(g_1)}(m_2)) \\ &\equiv \mu_x^{(p^*)}([(p_2, \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(g_1)}(m_2))]) \equiv \mu_x^{(p^*)} \circ \tilde{\lambda}_{[(p_1, g_1)]}([(p_2, m_2)]), \end{aligned}$$

który zamyka dowód drugiej części tezy. \square

STWIERDZENIE 204. *Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi (a zatem także trywializacjami lokalnymi) klasy C^k wiązki reperów wiązki wektorowej klasy C^k i trywializacjami lokalnymi wiązki wektorowej (teżże klasy).*

■

Dowód: Dowolne cięcie lokalne $\sigma : \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}$, $\mathcal{O} \in \mathcal{F}(B)$ pozwala zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{xn} : v \longmapsto (\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)),$$

jawnie \mathbb{K} -liniowe i gładkie, o oczywistej odwrotności

$$\tau_\sigma^{-1} : \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{xn} \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) : (x, V) \longmapsto \sigma(x)(V),$$

także gładkiej (i \mathbb{K} -liniowej). Własności te pozwalają zidentyfikować τ_σ jako trywializację lokalną wiązki \mathbb{V} stowarzyszoną z cięciem lokalnym σ wiązki reperów.

Odwracając powyższe rozumowanie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \rightsquigarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n}$ przyporządkowujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_{\tau} : \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathbb{F}_{\text{GLV}}}^{-1}(\mathcal{O}) : x \longmapsto \tau^{-1}(x, \cdot).$$

Bez trudu przekonujemy się, że skonstruowane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, stwierdzamy równość

$$\forall_{(x,V) \in \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n}} : \sigma_{\tau_{\sigma}}(x)(V) = \tau_{\sigma}^{-1}(x, V) = \sigma(x)(V),$$

a z niej wyprowadzamy tożsamość

$$\sigma_{\tau_{\sigma}} = \sigma.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \forall_{v \in \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O})} : \tau_{\sigma_{\tau}}(v) &= (\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma_{\tau} \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)) = (\pi_{\mathbb{V}}(v), \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \cdot)^{-1}(v)) \\ &\equiv \tau \circ \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \cdot)^{-1}(v)) = \tau(v), \end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_{\tau}} = \tau.$$

□

STWIERDZENIE 205. *Dowolna rodzina trywilizacji lokalnych wiązek reperów wiązki wektorowej indukuje rodzinę trywilizacji lokalnych wiązki wektorowej (stowarzyszonych z tą samą rodziną podzbiorów otwartych ich wspólnej bazy) o tych samych odwzorowaniach przejścia. W szczególności każda redukcja wiązki reperów pociąga za sobą także redukcję wiązki wektorowej.*

■

Dowód: Niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem \mathbb{K}), $(\mathbb{F}_{\text{GLV}}, B, \text{GL}_{\mathbb{K}}(n), \pi_{\mathbb{F}_{\text{GLV}}})$ zaś – wiązką jej reperów i niech $\tau_i : \pi_{\mathbb{F}_{\text{GLV}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times \text{GL}_{\mathbb{K}}(n)$, $\mathcal{O}_i \in \mathcal{S}(B)$, $i \in \{1, 2\}$ będą dwiema trywilizacjami lokalnymi drugiej z nich, o niepustym przecięciu dziedzin, $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, nad którym są określone odwzorowania przejścia $g_{12} : \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(n)$. Z każdą z trywilizacji stowarzyszamy cięcie lokalne wedle formuły podanej w dowodzie Stw. 200,

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_{\mathbb{F}_{\text{GLV}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \subset \mathbb{F}_{\text{GLV}} : y \longmapsto \tau_i^{-1}(y, \mathbf{1}_n),$$

a następnie używamy ich do skonstruowania odnośnych gładkich trywilizacji lokalnych wiązki \mathbb{V} zgodnie z przepisem sformułowanym w dowodzie Stw. 204,

$$\tau_{\sigma_i} : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} : v \longmapsto (\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma_i \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)), \quad i \in \{1, 2\}.$$

O tym, że są to trywilizacje o postulowanych odwzorowaniach przejścia, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnych $(y, V) \in \mathcal{O}_{12} \times \mathbb{K}^{\times n}$,

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma_1} \circ \tau_{\sigma_2}^{-1}(y, V) &= \tau_{\sigma_1}(\sigma_2(y)(V)) \\ &= (\pi_{\mathbb{V}}(\sigma_2(y)(V)), (\sigma_1 \circ \pi_{\mathbb{V}})(\sigma_2(y)(V))^{-1}(\sigma_2(y)(V))) \\ &= (y, \sigma_1(y)^{-1} \circ \sigma_2(y)(V)), \end{aligned}$$

który po uwzględnieniu ciągu równości

$$\sigma_2(y) \equiv \tau_2^{-1}(y, \mathbf{1}_n) = \tau_1^{-1}(y, g_{12}(y)) = \tau_1^{-1}(y, \mathbf{1}_n) \triangleleft g_{12}(y) \equiv \tau_1^{-1}(y, \mathbf{1}_n) \circ g_{12}(y)$$

$$\equiv \sigma_1(y) \circ g_{12}(y)$$

odtwarza pożądaną wynik

$$\tau_{\sigma_1} \circ \tau_{\sigma_2}^{-1}(y, V) = (y, \sigma_1(y)^{-1} \circ \sigma_1(y) \circ g_{12}(y)(V)) \equiv (y, g_{12}(y)(V)).$$

□

Elementy teorii powiązania w wiązce włóknistej

W studiach nad strukturą stycznościową oraz w zastosowaniach teorii wiązek włóknistych – począwszy od badań ich topologii (topologia różniczkowa, zagadnienia wariacyjne *etc.*), a skończywszy na modelowaniu fizykalnym z ich wykorzystaniem („dynamika” cięć opisywana przez zasadę wariacyjną dla wyróżnionego funkcjonału działania określonego na zbiorze cięć, procedura cechowania symetrii globalnych modelu fizykalnego, opis tła grawitacyjnego wzgl. elektromagnetycznego dynamiki punktu materialnego oraz tła tego fluktuacji *etc.*) – nierzadko pojawia się potrzeba nadania sensu formalnego operacji różniczkowania cięć wiązki¹, tj. wskazania takiej definicji pochodnej, która – na podobieństwo zwykłego różniczkowania (np. pochodnej kierunkowej) algebry funkcji na rozmaitości – przyporządkowywałaby cięciu klasy C^k nowe cięcie klasy C^{k-1} , o tych samych własnościach współzmienniczości względem wyboru trywializacji lokalnej oraz uzgodnione z ewentualną dodatkową strukturą na włóknie (np. strukturą modułu nad pierścieniem funkcji gładkich na bazie lub strukturą torsora grupy strukturalnej). Tymczasem najbardziej oczywista definicja pochodnej cięcia $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(E)$ wiązki E nad bazą B wzdłuż pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(B)$, czyli pochodna kierunkowa

$$(\mathcal{V}, \sigma) \longmapsto \mathbb{T}\sigma(\mathcal{V}),$$

nie daje nam w ogólności cięcia E , ani nie uwzględnia dodatkowej struktury, jaką są lokalne trywializacje $E|_{\mathcal{O}} \cong \mathcal{O} \times F$, których obecność pociąga za sobą rozkład stycznościowy $\mathbb{T}(E|_{\mathcal{O}}) \cong \mathbb{T}\mathcal{O} \times \mathbb{T}F$. W przypadku trywialnej wiązki wektorowej można temu zaradzić rozpatrując, w dowolnym punkcie $x \in B$, wyrażenia postaci

$$D_{\mathcal{V}}\sigma(x) := \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \sigma \circ \gamma(t) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma \circ \gamma(t) - \sigma \circ \gamma(0)}{t}$$

dla dowolnej ścieżki

$$\gamma :]\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow B, \quad \varepsilon > 0$$

klasy C^1 o własnościach

$$\gamma(0) = x \quad \wedge \quad \dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x).$$

Kłopot pojawia się wtedy, gdy włókno traci strukturę liniową, co pozbawia sensu wyrażenie $\sigma \circ \gamma(t) - \sigma \circ \gamma(0)$, a w przypadku liniowym – ilekroć wiązka nie jest globalnie trywialna, oto bowiem w takiej sytuacji $\sigma \circ \gamma(0)$ i $\sigma \circ \gamma(t)$ dla $t \neq 0$ należą w ogólności do różnych włókien, a te nie są *kanonicznie* izomorficzne. Oczywiście różniczkowanie jest – w założeniach – operacją lokalną, przeto można zawsze wybrać określoną trywializację lokalną wiązki (wektorowej), bez odpowiedzi pozostaje

¹Ta potrzeba staje się oczywistą, kiedy pomyślimy o owych cięciach jako o obiektach modelujących pola fizyczne nad czasoprzestrzenią, a taką właśnie interpretację zyskują one w wielu konkretnych sytuacjach, o czym więcej w dalszej części kursu

wtedy jednak pytanie o geometryczno-różniczkowy statusu wyznaczonego tym sposobem obiektu. Pozostając w kategorii wiązek wektorowych, możemy próbować obejść napotkane trudności, zauważając, że wiązka TV_x styczna do włókna V_x nad ustalonym punktem bazy $x \in B$, zanurzona w przeciwdziedzinie TV odwzorowania $T\sigma$, jest wyposażona w strukturę liniową *izomorficzną* z V_x , co pozwala na utożsamienie pól wektorów pionowych na V z cięciami samej wiązki V . W świetle tej uwagi wystarczy rzutować $T\sigma(V)$ na styczną do włókna, co jednak wymaga (patrz: Stw. 32) istnienia whitneyowskiego rozkładu wiązki stycznej nad przestrzenią totalną V na sumę prostą podwiązki pionowej i jej dopełnienia. I znów w obrazie trywializacji lokalnej wiązki wektorowej V operacja taka jest naturalnie zdefiniowana i daje oczekiwany wynik – wyjściowa trudność tłumaczy się tutaj na trudność ustalenia relacji (odwzorowania przejścia) między obiektami lokalnymi tożsamej z analogiczną relacją między różniczkowanymi cięciami lokalnymi. O ile zatem dotychczasowa dyskusja wskazuje jasno, jakie cechy powinno mieć poszukiwane rozwiązanie postawionego przez nas problemu, o tyle bezpośrednia próba jego ogólnego rozwiązania natrafia na rozmaite trudności (patrz także: dalej, kiedy przejdziemy do uzgadniania różniczkowania z dodatkową strukturą na włóknie). Poniżej zmierzmy się z każdą z nich z osobna, co doprowadzi nas do kilku różnych definicji pochodnej cięcia wzdłuż pola wektorowego na bazie. Ich równoważność, której dowiedzimy pod koniec naszych rozważań, stanowić będzie mocny argument potwierdzający *a posteriori* słuszność i naturalność wybranej przez nas drogi formalizacji wykorzystywanych przez nas intuicji geometrycznych.

UWAGA 49. Wszelkie rozważania prowadzone w niniejszym rozdziale są osadzone w kategorii gładkiej $\mathbf{Man}^{(k)}$, $k \geq 1$. W szczególności więc ciała bazowe $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ wiązek wektorowych niosą w domyśle naturalną strukturę różniczkowalną, a grupy strukturalne wiązek głównych są grupami Liego.

1. Powiązanie – poczwórna ścieżka

DEFINICJA 130. Przyjmijmy zapis Def. 123 oraz Cor. 9 i niechaj (E, B, F, π_E) będzie wiązką włóknistą klasy C^k . Rozważmy (lokalną) ścieżkę klasy C^1

$$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow B, \quad \varepsilon > 0.$$

Przeniesienie równoległe klasy C^l , $l \leq k$ w E wzdłuż γ to rodzina dyfeomorfizmów klasy C^l

$$P_{t_1, t_2}^\gamma : E_{\gamma(t_1)} \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t_2)}, \quad t_1, t_2 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

o własnościach

(PT1) odwzorowanie (w którym produkt włóknisty jest określony dla pary odwzorowań $(\gamma \circ \text{pr}_1, \pi_E)$)

$$P_{\cdot, \cdot}^\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\times_B E \rightarrow E : ((t_1, t_2), x) \mapsto P_{t_1, t_2}^\gamma(x)$$

jest klasy C^l ;

(PT2) $P_{t_1, t_1}^\gamma = \text{id}_{E_{\gamma(t_1)}}$;

(PT3) $\forall t_1, t_2, t_3 \in]-\varepsilon, \varepsilon[: P_{t_2, t_3}^\gamma \circ P_{t_1, t_2}^\gamma = P_{t_1, t_3}^\gamma$;

(PT4) dla dowolnego cięcia $\sigma : \mathcal{O}_x \rightarrow E$ określonego na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_x punktu $x \in B$ jego **pochodna kowariantna** w x wzdłuż dowolnego pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$, zdefiniowana wzorem

$$\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x) := \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma} \circ \sigma \circ \gamma(t),$$

nie zależy od wyboru reprezentanta klasy współstyczności ścieżek przez x określonej przez warunki

$$\gamma(0) = x \quad \wedge \quad \dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x);$$

(PT5) odwzorowanie

$$\nabla \cdot \sigma : \mathbb{T}\mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{V}E \subset \mathbb{T}E$$

jest $C^{\infty}(\mathcal{O}_x, \mathbb{R})$ -liniowe.

Ileokroć dany jest wybór przeniesienia równoległego klasy C^l dla dowolnej ścieżki γ na otoczeniu dowolnego punktu $x \in B$, mówimy, że zostało określone **powiązanie włókien w wiązce** E . ▲

STWIERDZENIE 206. *Przyjmijmy zapis Def. 130. Jeśli dla dowolnej ścieżki w B istnieje przeniesienie równoległe, to wówczas dla dowolnego punktu $p \in E$ we włóknie E_x nad dowolnym punktem $x \in B$ istnieje jednoznacznie określona monomorfizm klasy C^l*

$$(4.2.1) \quad \text{Hor}_p : \mathbb{T}_x B \rightarrow \mathbb{T}_p E$$

o własności

$$(4.2.2) \quad \text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma}(p)$$

dla dowolnej ścieżki γ spełniającej warunek $\gamma(0) = x$, która implikuje tożsamość

$$(4.2.3) \quad \mathbb{T}_p \pi \circ \text{Hor}_p = \text{id}_{\mathbb{T}_{\pi_E(p)} B}.$$

Ponadto przestrzeń styczna $\mathbb{T}_p E$ ma rozkład

$$\mathbb{T}_p E = \mathbb{V}_p E \oplus \text{Im Hor}_p.$$

Odwzorowanie Hor_p określamy mianem **podniesienia poziomego** (lub **horyzontalnego**) **wektorów** z bazy do włókna. ■

Dowód: Zaczniemy od podkreślenia, że formuła (4.2.2) określa Hor_p jednoznacznie, a to z uwagi na dowolność wektora stycznego do ścieżki w danym punkcie bazy. Wystarczy zatem sprawdzić pożądane własności wyrażenia z prawej strony tej równości. To rzekłszy, zauważmy dalej, że rodzina dyfeomorfizmów P_{t_1, t_2}^{γ} , $t_1, t_2 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ dla ścieżki o nigdzie nie znikającym wektorze stycznym $\dot{\gamma}$ (dla dostatecznie małej wartości ε) określa (lokalnie) gładkie pole wektorowe \mathcal{Y} nad $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ o potoku (albo, równoważnie, lokalnej grupie lokalnych dyfeomorfizmów – patrz: Tw. 1.4.20)

$$\Phi_{\mathcal{Y}} :]-\varepsilon, \varepsilon[\times \pi_E^{-1}(\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[)) \rightarrow \pi_E^{-1}(\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[))$$

$$: (t, p) \mapsto P_{\gamma^{-1} \circ \pi_E(p), t}^{\gamma}(p) \equiv \Phi_{\mathcal{Y}}(t, p),$$

przy czym zachodzi, rzecz jasna, tożsamość

$$\Phi_{\mathcal{Y}}(\gamma^{-1} \circ \pi_E(p), p) = p,$$

a samo pole \mathcal{Y} spełnia równanie

$$\mathcal{Y}(p) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=\gamma^{-1} \circ \pi_E(p)} \Phi_{\mathcal{Y}}(t, p).$$

Rozważmy następnie dowolne cięcie lokalne

$$\sigma : \mathcal{O}_x \longrightarrow E, \quad \pi_E \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}_x}$$

o własności

$$\sigma \circ \gamma(0) \equiv \sigma(x) = p.$$

Jego pochodną kowariantną w x wzdłuż pola stycznego do γ ,

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t)),$$

obliczamy przy pomocy następującego zabiegu:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma}(P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t))) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \Phi_{\mathcal{Y}}(t, P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t))) \\ &= D_1 \Phi_{\mathcal{Y}}(0, P_{0,0}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(0))) + D_2 \Phi_{\mathcal{Y}}(0, P_{0,0}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(0)))(\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x)) \\ &= \mathcal{Y}(P_{0,0}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(0))) + \mathbb{T}_{P_{0,0}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(0))} P_{0,0}^{\gamma}(\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x)) \\ &\equiv \mathcal{Y}(\sigma(x)) + \mathbb{T}_{\sigma(x)} \text{id}_E(\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x)) = \mathcal{Y}(p) + \nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x), \end{aligned}$$

który pozwala nam ostatecznie zapisać

$$\mathcal{Y}(p) = \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) - \nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x),$$

a zatem także

$$\text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma}(p) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \Phi_{\mathcal{Y}}(t, p) = \mathcal{Y}(p) = \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) - \nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x).$$

Widzimy więc, że wprost na mocy definicji pochodnej kowariantnej (oraz odwzorowania stycznego) odwzorowanie Hor_p jest \mathbb{R} -liniowe, przy czym zależy od wyboru ścieżki wyłącznie poprzez $\dot{\gamma}(0)$ (oraz $\gamma(0) = x$). Jest ono także iniektywne, gdyż z jednej strony

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x) \in \mathbb{V}_p E,$$

a z drugiej

$$\mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) \in \mathbb{V}_p E \quad \iff \quad \dot{\gamma}(0) \equiv \mathbb{T}_{\sigma(x)} \pi \circ \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) = 0_{\mathbb{T}_{\sigma(x)} E},$$

przeeto koniec końców

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) - \nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x) \in \mathbb{V}_p E &\iff \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) \in \mathbb{V}_p E \\ &\iff \dot{\gamma}(0) = 0_{\mathbb{T}_x B}, \end{aligned}$$

czyli

$$\text{Im Hor}_p \cap \mathbb{V}_p E = \{0_{\mathbb{T}_p E}\}.$$

Powyższe implikuje ciąg relacji między przestrzeniami \mathbb{R} -liniowymi (mamy tu do czynienia z wewnętrzną sumą prostą)

$$\text{Im Hor}_p \oplus \mathbb{V}_p E = \text{Im Hor}_p +_{\mathbb{T}_p E} \mathbb{V}_p E \subset \mathbb{T}_p E,$$

a ponieważ – z racji iniektywności Hor_p , która w świetle Tw. 1.1.5 czyni z niego izomorfizm na obraz – prawdziwą jest równość

$$\dim_{\mathbb{R}}(\text{Im Hor}_p \oplus \mathbb{V}_p E) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Im Hor}_p + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_p E = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x B + \dim F$$

$$= \dim B + \dim F = \dim E \equiv \dim_{\mathbb{R}} T_p E,$$

przeto w istocie

$$\text{Im Hor}_p \oplus V_p E = T_p E.$$

Tożsamość (4.2.3) wynika bezpośrednio z wyprowadzonego powyżej wyrażenia na $\text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0))$. \square

DEFINICJA 131. Przyjmijmy zapis Def. 123, Cor. 9 oraz Przykł. 35 (3). **Powiązanie Ehresmanna** na wiązce włóknistej (E, B, F, π_E) to wybór takiej podwiązki wektorowej $HE \subset TE$ wiązki stycznej do przestrzeni totalnej E , która dopełnia wiązkę pionową VE do wiązki stycznej TE wedle formuły

$$TE = VE \oplus_B HE.$$

Podwiązka HE nosi miano (**pod**)**wiązki poziomej** (lub **horyzontalnej**) nad E . Jej włókno $H_p E \equiv (HE)_p$ nad $p \in E$, zwane (**pod**)**przestrzenią poziomą** (lub **horyzontalną**), rozpinają **wektory poziome** (lub **horyzontalne**). \blacktriangle

TWIERDZENIE 4.2.1. *Powiązanie włókien na wiązce włóknistej określa na niej powiązanie Ehresmanna i vice versa.* \blacksquare

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost ze Stw. 206, oto bowiem zależność odwzorowań Hor_p od punktu $p \in E$ jest – wprost z konstrukcji – (C^k) -gładka (jako zależność pola wektorowego \mathcal{V} od punktu w nośniku), mamy zatem jednoznaczny gładki rozkład dowolnego pola wektorowego \mathcal{V} na E na składowe

$$\mathcal{V} = (\text{id}_{TE} - \text{Hor} \circ T\pi)(\mathcal{V}) + \text{Hor} \circ T\pi(\mathcal{V}),$$

z których pierwsza jest w świetle Równ. (4.2.3) pionowa,

$$T\pi((\text{id}_{TE} - \text{Hor} \circ T\pi)(\mathcal{V})) = T\pi(\mathcal{V}) - (T\pi \circ \text{Hor}) \circ T\pi(\mathcal{V}) = T\pi(\mathcal{V}) - T\pi(\mathcal{V}) = 0_{TE}.$$

Jest przy tym oczywiste, że para $(\text{id}_{TE} - \text{Hor} \circ T\pi, \text{Hor} \circ T\pi)$ jest zupełną rodziną rzutów komplementarnych, pierwsza część tezy wynika zatem ze Stw. 32.

I odwrotnie, powiązanie Ehresmanna $TE = VE \oplus_B HE$ określa jednoznacznie gładkie podniesienie poziome

$$(4.2.4) \quad \text{Hor} := (T\pi \upharpoonright_{HE})^{-1} : TB \xrightarrow{\cong} HE \subset TE,$$

to zaś na mocy Stw. 103 pozwala stowarzyszyć z dowolną ścieżką gładką $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow B$ przez $x \equiv \gamma(0) \in B$ **podniesienie poziome** (lub **horyzontalne**) tejże **ścieżki** $\tilde{\gamma}_p :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow E$ przez dowolny punkt $p \in E_x$, tj. krzywą całkową pola $\text{Hor}_\gamma(\dot{\gamma})$ będącą rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$(4.2.5) \quad \tilde{\gamma}_p(t) = \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}_p(0) = p.$$

Podniósłszy γ do każdego z punktów włókna E_x , otrzymujemy rodzinę gładkich dyfeomorfizmów między tymże włóknem a włóknami w pewnym jego otoczeniu

$$(4.2.6) \quad P_{0,t}^\gamma : E_x \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t)} : p \mapsto \tilde{\gamma}_p(t).$$

Ich gładkość jest zagwarantowana przez gładką zależność potoku pola $\text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p}(\dot{\gamma})$ od warunku początkowego p , ustaloną w Tw. 1.4.16 (dla której podstawą jest gładka

zależność $\text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p}$ od p), a lokalna jednoznaczność rozwiązania wypisanego powyżej zagadnienia początkowego, orzeczona w Stw. 103, przesądza o bijektywnym charakterze odwzorowań $P_{0,t}^\gamma$. Wreszcie też zasada superpozycji (PT3) z Def. 130, jak również warunek początkowy (PT2), wynikają bezpośrednio z konstrukcji potoku gładkiego pola wektorowego – patrz: (dowód) Tw. 1.4.20. Pozostaje zatem rozpatrzyć pochodną kowariantną definiowaną przez tak określone powiązanie włókien w E . Rozumując jak w dowodzie Stw. 206, wyznaczamy

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t)) = -\text{Hor}_{\sigma(x)}(\dot{\gamma}(0)) + T_{\sigma(x)}P_{0,0}^{\gamma^{-1}}\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \sigma \circ \gamma(t)\right) \\ (4.2.7) \quad &= -\text{Hor}_{\sigma(x)}(\dot{\gamma}(0)) + T_x\sigma(\dot{\gamma}(0)), \end{aligned}$$

konstatujemy więc, że pochodna zależy od użytej w jej definicji ścieżki γ tylko poprzez $\dot{\gamma}(0)$ (oraz $\gamma(0) = x$), od samego zaś pola $\dot{\gamma}$ – w sposób jawnie $C^\infty(B, \mathbb{R})$ -liniowy, zgodnie z aksjomatem (PT4) w Def. 130. \square

Na gruncie interpretacji sumy Whitneya jako geometryzacji sumy prostej przestrzeni wektorowych, a w odwołaniu do równoważnych opisów tejże konstrukcji, jakich dotarcza Stw. 32, wnioskujemy, że opis powiązania na wiązce włóknistej w terminach rozkładu wiązki stycznej do przestrzeni totalnej tejże wiązki na sumę (Whitneya) podwiązek: pionowej i poziomej niesie w sobie podpowieź dotyczącą kolejnego naturalnego przeformułowania definicji powiązania. Oto więc

DEFINICJA 132. Przyjmijmy zapis Cor. 9. **Forma powiązania** na wiązce włóknistej (E, B, F, π_E) klasy C^{k+1} to $C^\infty(B, \mathbb{R})$ -liniowy morfizm wiązek wektorowych klasy C^k

$$(A, \text{id}_B) : TE \longrightarrow VE$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} VE & \xrightarrow{\mathcal{J}_{VE}} & TE \\ & \searrow \text{id}_{VE} & \downarrow A \\ & & VE \end{array} ,$$

na którym \mathcal{J}_{VE} jest włożeniem kanonicznym.

▲

TWIERDZENIE 4.2.2. Powiązanie Ehresmanna na wiązce włóknistej określa na niej w sposób kanoniczny formę powiązania i vice versa.

■

Dowód: Powiązanie Ehresmanna $TE = VE \oplus_B HE$ wyznacza ($C^\infty(B, \mathbb{R})$ -liniowy) epimorfizm wiązek wektorowych

$$A := \text{id}_{TE} - (T\pi_E \upharpoonright_{HE})^{-1} \circ T\pi_E : TE \twoheadrightarrow VE,$$

będący gładką rodziną rzutów na włókno pierwszej składowej sumy Whitneya (por.: Przykł. 35 (3)). Przy tym dla dowolnego pionowego pola wektorowego \mathcal{V} zachodzi

$$A(\mathcal{V}) \equiv \text{id}_{TE}(\mathcal{V}) - (T\pi_E \upharpoonright_{HE})^{-1} \circ T\pi_E(\mathcal{V}) = \mathcal{V} +_{TE} \mathbf{0}_{TE} = \mathcal{V}.$$

I odwrotnie, z dowolnym morfizmem wiązek wektorowych $A : TE \longrightarrow VE$ o własności $A|_{VE} = \text{id}_{VE}$ możemy – w świetle Stw. 197 – stowarzyszyć podwiązkę

$$HE := \text{Ker}(A, \text{id}_B) \subset TE.$$

Przy tym dla dowolnego $v \in H_p E \cap V_p E$, $p \in E$ otrzymujemy wynik

$$v = \text{id}_{VE}(v) = A(v) = 0_{T_p E},$$

zatem

$$HE \cap VE = \{0_{TE}\},$$

a zarazem dowolne pole wektorowe \mathcal{V} na E ma rozkład

$$\mathcal{V} = (\text{id}_{TE} - A)(\mathcal{V}) + A(\mathcal{V})$$

na gładkie składowe o wartościach w podwiązkach:

$$A(\mathcal{V}) : E \longrightarrow VE$$

oraz

$$\mathcal{V} - A(\mathcal{V}) : E \longrightarrow HE,$$

a to z racji tożsamości

$$A(\mathcal{V} - A(\mathcal{V})) = A(\mathcal{V}) - A|_{VE}(A(\mathcal{V})) = A(\mathcal{V}) - \text{id}_{VE}(A(\mathcal{V})) = A(\mathcal{V}) - A(\mathcal{V}) = 0_{TE}.$$

□

UWAGA 50. Na zakończenie ogólnej dyskusji konstrukcji powiązania w wiązce włóknistej sformułujemy lokalny jego opis stowarzyszony z trywializacjami lokalnymi $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$ nad pokryciem $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, o odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Aut}(F)$. Opis ten prześledzimy szczegółowo we współrzędnych lokalnych: (x^μ, ξ^A) , $\mu \in \overline{1, \dim B}$, $A \in \overline{1, \dim F}$ na pewnym otoczeniu $(x, f) \equiv (\pi_{T\mathcal{O}_{ij}}(X), \pi_{TF}(V)) \in \mathcal{O}_{ij} \times F$ oraz $(y^\mu \equiv x^\mu, \zeta^A)$ na pewnym otoczeniu $(x, g_{ij}(x)(f)) \in \mathcal{O}_{ij} \times F$. Trywializacje wiązki E indukują, w zgodzie z Def. 124, styczne trywializacje lokalne

$$T\tau_i : T\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow T(\mathcal{O}_i \times F) \equiv T\mathcal{O}_i \times TF.$$

Wykorzystując bazy współrzędniowe w przestrzeniach stycznych, oznaczymy

$$Tt_{ij} : T(\mathcal{O}_{ij} \times F) \circlearrowleft : ((x, f), X + V) \longmapsto ((x, g_{ij}(x)(f)), \tilde{X} + \tilde{V}),$$

$$X \equiv X^\mu \triangleright \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x), \quad V \equiv V^A \triangleright \frac{\partial}{\partial \xi^A}(f),$$

$$\tilde{X} \equiv \tilde{X}^\mu \triangleright \frac{\partial}{\partial y^\mu}(x), \quad \tilde{V} \equiv \tilde{V}^A \triangleright \frac{\partial}{\partial \zeta^A}(g_{ij}(x)(f)),$$

przy czym zachodzą tożsamości

$$t_{ij}^* dy^\mu(x, f) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}(x) \triangleright dx^\nu(x) = \delta_\nu^\mu \triangleright dx^\nu(x) = dx^\mu(x)$$

oraz

$$t_{ij}^* d\zeta^A(x, f) = \frac{\partial \zeta^A}{\partial x^\mu}((g_{ij}(x)(f)) \triangleright dx^\mu(x) + \frac{\partial \zeta^A}{\partial \xi^B}((g_{ij}(x)(f)) \triangleright d\xi^B(f),$$

które pozwalają zapisać

$$\begin{aligned} \tilde{X} &\equiv T_{(x,f)} t_{ij}(X + V) \lrcorner dy^\mu(x) \triangleright \frac{\partial}{\partial y^\mu}(x) = (X + V) \lrcorner t_{ij}^* dy^\mu(x, f) \triangleright \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \\ &= (X + V) \lrcorner dx^\mu(x) \triangleright \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) = X \lrcorner dx^\mu(x) \triangleright \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \equiv X \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &\equiv \mathbb{T}_{(x,f)} t_{ij}(X+V) \lrcorner d\zeta^A(g_{ij}(x)(f)) \triangleright \frac{\partial}{\partial \zeta^A}(g_{ij}(x)(f)) \\
&= (X+V) \lrcorner t_{ij}^* d\zeta^A(g_{ij}(x), f) \triangleright \frac{\partial}{\partial \zeta^A}(g_{ij}(x)(f)) \\
&= \left(X^\mu \frac{\partial \zeta^A}{\partial x^\mu}((g_{ij}(x)(f)) + V^B \frac{\partial \zeta^A}{\partial \zeta^B}((g_{ij}(x)(f))) \right) \triangleright \frac{\partial}{\partial \zeta^A}(g_{ij}(x)(f)).
\end{aligned}$$

W dalszej części naszej dyskusji rzut na drugi składnik prosty $\mathbb{T}F$ w rozkładzie Whitneya wiązki stycznnej $\mathbb{T}(\mathcal{O}_i \times F) \equiv \mathbb{T}\mathcal{O}_i \oplus_{\mathcal{O}_i} \mathbb{T}F$ (wzgl. $\mathbb{T}(\mathcal{O}_{ij} \times F) \equiv \mathbb{T}\mathcal{O}_{ij} \oplus_{\mathcal{O}_{ij}} \mathbb{T}F$), z założenia trywialnej, będziemy oznaczać symbolem ϖ_i (wzgl. ϖ_{ij}).

Ażeby postąpić dalej w naszym rachunku, musimy poczynić pewne założenia w odniesieniu do grupy $\text{Aut}(F)$, w której przyjmują wartości odwzorowania przejścia g_{ij} . Odtąd będziemy więc zakładać, że wyróżnione elementy $g_{ij}(x)$ grupy $\text{Aut}(F)$ należą do pewnej (skończenie wymiarowej) (pod)grupy Liego $G \subset \text{Aut}(F)$, co w szczególności nas interesujących przypadkach jest prawdą: w przypadku wiązki wektorowej rzędu n nad ciałem bazowym \mathbb{K} mamy do czynienia z grupą $\text{GL}(n; \mathbb{K})$, a w przypadku (gładkiej) wiązki głównej oraz wiązek z nią stowarzyszonych – z grupą strukturalną, która jest grupą Liego. Poczynione założenie pozwoli nam wykorzystać zgromadzoną w Rozdz. 1.5 wiedzę szczegółową na temat rachunku różniczkowego na różności grupowej oraz na różności z działaniem grupy Liego uzgodnionych z naturalnym działaniem grupy.

Rozważmy lokalne cięcie

$$\sigma : \mathcal{O} \longrightarrow E$$

i wybierzmy punkt $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{ij}$. W obrazie lokalnym definiujemy odwzorowania $\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow F$ klasy C^k , jak następuje:

$$\tau_i \circ \sigma(x) =: (x, \sigma_i(x)),$$

przy czym zachodzi tożsamość

$$(x, \sigma_j(x)) \equiv \tau_j \circ \sigma(x) = \tau_j \circ \tau_i^{-1}(\tau_i \circ \sigma(x)) = \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, \sigma_i(x)) = (x, g_{ji}(x)(\sigma_i(x))),$$

z której wyprowadzamy regułę transformacyjną dla odwzorowań σ_i na $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{ij}$,

$$\sigma_j(x) = g_{ji}(x)(\sigma_i(x)) \equiv \delta_{g_{ij}(x)}(\sigma_i(x)).$$

Powyżej wprowadziliśmy symbol $\delta : G \times F \longrightarrow F$ dla oznaczenia (definiującego) działania grupy Liego $G \subset \text{Aut}(F)$ na F . Wprowadzone przez nas obiekty pozwalają nam skwantyfikować w obrazie lokalnym poprawkę do naturalnego różniczkowania wertykalnego $\mathbb{T}\sigma_i$ cięcia σ , jaką wprowadza pochodna kowariantna. Oto więc dla dowolnego pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^0(\mathcal{O})$ o wartości $V \equiv \mathcal{V}(x)$ w punkcie $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_i$ definiujemy

$$(4.2.8) \quad V \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x)) := \varpi_i \circ \mathbb{T}\tau_i(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma)(x) - \mathbb{T}_x\sigma_i(V),$$

gdzie

$$\alpha_i(\cdot, \sigma(\cdot)) \in \mathbb{T}.B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}.F \subset \mathbb{T}.B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{(\cdot, \sigma(\cdot))}(\mathcal{O}_i \times F)$$

jest miarą odstępstwa pochodnej kowariantnej od $\mathbb{T}\sigma_i$. Ten ostatni obiekt również możemy traktować jako element przestrzeni $\Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}F$, przy czym będziemy go wówczas oznaczać w sugestynny sposób jako $d\sigma_i$. Trzymając się tej wygodnej konwencji, zapiszemy zatem

$$\varpi_i \circ \mathbb{T}\tau_i(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma)(x) = V \lrcorner (d\sigma_i(x) + \alpha_i(x, \sigma(x))).$$

Rzecz jasna, przywołane tu kryterium naturalności w wyborze różniczkowania referencyjnego $\mathbb{T}\sigma_i$ ma moc ograniczoną. Rzetelnego usprawiedliwienia dla poczynionego tu rozkładu pochodnej kowariantnej na części zależne od σ_i w sposób „stycznościowy” i „funkcjonalny” dostarczy nam dopiero szczegółowa dyskusja powiązania uzgodnionego z dodatkową strukturą na włóknie oraz jego zastosowań fizycznych, jaką podejmiemy w Rozdz. 2 i rozwiemy w Części 6. Tymczasem zbadamy własności transformacyjne obiektów lokalnych α_i przy przejściu pomiędzy trywializacjami lokalnymi na przecięciu ich dziedzin. Oto więc w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{ij}$ znajdujemy

$$\begin{aligned} V \lrcorner (\mathrm{d}\sigma_i(x) + \alpha_i(x, \sigma(x))) &\equiv \varpi_{ij} \circ \mathbb{T}\tau_i(\nabla_V \sigma)(x) = \varpi_{ij} \circ \mathbb{T}t_{ij} \circ \mathbb{T}\tau_j(\nabla_V \sigma)(x) \\ &= V \lrcorner (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_j(x)} \delta_{g_{ij}(x)}) (\mathrm{d}\sigma_j(x) + \alpha_j(x, \sigma(x))), \end{aligned}$$

czyli – wobec dowolności V –

$$\begin{aligned} &(\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_j(x)} \delta_{g_{ij}(x)}) \alpha_j(x, \sigma(x)) - \alpha_i(x, \sigma(x)) \\ &= \mathrm{d}\sigma_i(x) - (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_j(x)} \delta_{g_{ij}(x)}) \mathrm{d}\sigma_j(x) \\ &= \mathrm{d}\sigma_i(x) - (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_j(x)} \delta_{g_{ij}(x)}) \mathrm{d}(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_j(x))). \end{aligned}$$

Celem uniknięcia nieporozumień na dalszych etapach analizy podkreślimy wyraźnie: $\mathbb{T}_{\sigma_j(x)} \delta_{g_{ij}(x)}$ jest odwzorowaniem stycznym do dyfeomorfizmu $\delta_{g_{ij}(x)} : F \circlearrowleft$ w punkcie $\sigma_j(x)$ dziedziny tego ostatniego, natomiast $\mathrm{d}(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_j(x)))$ jest (tożsame z) odwzorowaniem stycznym do $\delta_{g_{ji}(\cdot)}(\sigma_j(\cdot)) : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow F$ w punkcie x . Przywoławszy treść Uwagi 28 oraz Równ. (1.5.6), zapiszemy zatem

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_j(x))) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \mathrm{d}\sigma_i(x) + \theta_L^A(g_{ji}(x)) \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \upharpoonright_{t=0} (\delta_{\mathcal{L}_t^A(g_{ji}(x))}(\sigma_i(x))) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) (\mathrm{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \upharpoonright_{t=0} (\delta_{g_{ij}(x) \cdot \mathcal{L}_t^A(g_{ji}(x))}(\sigma_i(x)))) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) (\mathrm{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \upharpoonright_{t=0} (\delta_{g_{ij}(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot \mathcal{L}_t^A(e)}(\sigma_i(x)))) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) (\mathrm{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \upharpoonright_{t=0} (\delta_{\mathcal{L}_t^A(e)}(\sigma_i(x)))) , \end{aligned}$$

co w świetle Uwagi 29 prowadzi do wyniku

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_j(x))) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \mathrm{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)} (\mathcal{K}_{t_A}(\sigma_i(x))). \end{aligned}$$

Na podstawie Stw. 135 możemy – w odwołaniu do Równ. (1.5.9) – przepisać ten ostatni w postaci

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_j(x))) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \mathrm{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{\mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}(t_A)}(\sigma_i(x)) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \mathrm{d}\sigma_i(x) + (\mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)})_A^B \triangleright g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_B}(\sigma_i(x)) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \mathrm{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_R^B(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_B}(\sigma_i(x)), \end{aligned}$$

albo – raz jeszcze wyzyskując tezę Stw. 130 –

$$d(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_j(x))) = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) d\sigma_i(x) - g_{ij}^* \theta_L^B(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_B}(\sigma_i(x)).$$

Ostatecznie otrzymujemy poszukiwaną formułę transformacyjną

$$\begin{aligned} \alpha_j(x, \sigma(x)) &= (\text{id}_{T^*B} \otimes T_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \alpha_i(x, \sigma(x)) - g_{ij}^* \theta_R^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}(\sigma_i(x)) \\ &= (\text{id}_{T^*B} \otimes T_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ij}(x)^{-1}}) \alpha_i(x, \sigma(x)) + g_{ij}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}(\sigma_i(x)), \end{aligned}$$

o charakterze jawnie afinicznym. Formuła ta stanowi punkt wyjścia do dalszej analizy uwzględniającej dodatkową strukturę algebraiczną na włóknie, którą podejmiemy w Rozdz. 2.

DEFINICJA 133. Przyjmijmy zapis Def. 130, 131 oraz 132 i niechaj $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami włóknistymi z powiązaniem (w dowolnym z równoważnych sformułowań). **Morfizm wiązek włóknistych z powiązaniem (nad dyfeomorfizmem baz)** pomiędzy E_1 i E_2 to morfizm wiązek włóknistych opisany przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \pi_{E_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

o składowej bazowej² $f \in \text{Diff}^k(B_1, B_2)$ spełniający poniższe warunki

(FCM1) dla dowolnych: ścieżki $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow B_1$, $\varepsilon > 0$ i $t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$ zachodzi tożsamość

$$\Phi \circ P_{0,t}^{(1)} \gamma = P_{0,t}^{(2)} f \circ \gamma \circ \Phi,$$

przy czym wówczas dla dowolnych: cięcia (lokalnego) $\sigma : \mathcal{O}_x \rightarrow E_1$ określonego na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_x punktu $x \in B_1$ oraz pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$ spełniony jest **warunek kowariancji**

$$T_{\sigma(x)} \Phi(\nabla_{\mathcal{V}}^{(1)} \sigma(x)) = \nabla_{Tf(\mathcal{V})}^{(2)} (\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x));$$

(FCM2) para odwzorowań stycznych: $(T\Phi, Tf)$ ogranicza się do podwiązek poziomych HE_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ i zadaje tym sposobem morfizm wiązek wektorowych opisany przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} HE_1 & \xrightarrow{T\Phi \upharpoonright_{HE_1}} & HE_2 \\ \downarrow T\pi_{E_1} \upharpoonright_{HE_1} & & \downarrow T\pi_{E_2} \upharpoonright_{HE_1} \\ TB_1 & \xrightarrow{Tf} & TB_2 \end{array};$$

²Powód zawężenia wyboru składowej bazowej morfizmu jest oczywisty – zawężenie takie zapewnia istnienie naturalnego transportu pól wektorowych między bazami, a zatem także pomiędzy podwiązkami poziomymi. Możliwe jest uogólnienie podanej definicji, którego jednak nie będziemy tu rozważać.

(FCM3) odwzorowanie styczne $\mathbb{T}\Phi$ zachowuje formę powiązania w rozumieniu równości

$$\mathbb{T}\Phi \circ A_1 = A_2 \circ \mathbb{T}\Phi.$$

▲

UWAGA 51. Warunek kowariancji z punktu (FCM1) sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (przeprowadzonym z wykorzystaniem dowolnej ścieżki γ w B_1 przez $x = \gamma(0)$ o wektorze stycznym $\dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x)$),

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\sigma(x)}\Phi(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x)) &\equiv \mathbb{T}_{\sigma(x)}\Phi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t))\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi \circ P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{0,t}^{f \circ \gamma^{-1}}((\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}) \circ (f \circ \gamma)(t)) \\ &= \nabla_{\mathbb{T}f(\mathcal{V})}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x)), \end{aligned}$$

przy czym identyfikacja pola wektorowego, wzdłuż którego różniczkowane jest cięcie $\Phi \circ \sigma$ na końcu ciągu równości, wynika wprost z tożsamości

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \mathbb{T}_{\gamma(t)}f(\dot{\gamma}(t)).$$

To właśnie zweryfikowany powyżej warunek tłumaczy nazwę nadaną obiektowi $\nabla_{\mathcal{V}}\sigma$.

Należy też zauważyć, w odniesieniu do punktu (FCM2), że para $(\mathbb{T}\Phi, \mathbb{T}f)$ zawsze jest morfizmem wiązek wektorowych z racji funktorialności \mathbb{T} i dopiero postulat zachowywania podwiązek poziomych stanowi nietrywialny warunek dodatkowo ograniczający morfizm wiązek (Φ, f) .

TWIERDZENIE 4.2.3. *Przyjmijmy zapis Def. 133. Warunki (FCM1), (FCM2) i (FCM3) są wzajemnie równoważne.*

■

Dowód:

(FCM1) \Rightarrow (FCM2) Wykorzystując izomorfizmy

$$\text{Hor}_p^{(1)} : \mathbb{T}_{\pi_{E_1}} B_1 \xrightarrow{\cong} H_p E_1, \quad p \in E_1,$$

sprawdzamy – dla dowolnego $V \equiv \dot{\gamma}(0) \in \mathbb{T}_{\pi_{E_1}} B_1$ (i w dowolnym punkcie $p \in E_1$), a w nawiązaniu do argumentacji z drugiej części Uwagi 51 –

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_p\Phi(\text{Hor}_p^{(1)}(V)) &= \mathbb{T}_p\Phi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma}(p)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi \circ P_{0,t}^{\gamma}(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{0,t}^{f \circ \gamma}(\Phi(p)) \\ &\equiv \text{Hor}_{\Phi(p)}^{(2)}(\mathbb{T}_{\pi_{E_1}(p)}f(V)). \end{aligned}$$

Liniowość ograniczonego morfizmu stycznego (włókno po włóknie) jest bezpośrednią konsekwencją jego konstrukcji.

(FCM2) \Rightarrow (FCM1) Przemienność diagramu z warunku (FCM2), który w ograniczeniu do punktu $p \in E_{1x}$, $x \in B_1$ przybiera postać

$$(4.2.9) \quad \begin{array}{ccc} H_p E_1 & \xrightarrow{T_p \Phi \upharpoonright_{H_p E_1}} & H_{\Phi(p)} E_2 \\ \text{Hor}_p^{(1)} \uparrow & & \uparrow \text{Hor}_{\Phi(p)}^{(2)} \\ T_x B_1 & \xrightarrow{T_x f} & T_{f(x)} B_2 \end{array} ,$$

pozwala obliczyć, dla dowolnych ścieżek $\tilde{\gamma}_p$, $p \in E_{1x}$ będących podniesieniami ścieżki γ w B_1 przez $x \equiv \gamma(0)$, tj. będących rozwiązaniem zagadnienia początkowego (4.2.5) i definiujących tym samym powiązanie włókien wedle formuły (4.2.6), co następuje:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Phi \circ \tilde{\gamma}_p)(t) &= T_{\tilde{\gamma}_p(t)} \Phi \left(\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_p(t) \right) = T_{\tilde{\gamma}_p(t)} \Phi \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}^{(1)} (\dot{\gamma}(t)) \\ &= \text{Hor}_{\Phi \circ \tilde{\gamma}_p(t)}^{(2)} \circ T_{\gamma(t)} f (\dot{\gamma}(t)) = \text{Hor}_{\Phi \circ \tilde{\gamma}_p(t)}^{(2)} \left(\frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right). \end{aligned}$$

Z drugiej strony wprost na mocy definicji podniesienia poziomego ścieżki ($f \circ \gamma$ w B_2 przez $f(x) \equiv f \circ \gamma(0)$ do $\Phi(p)$) zachodzi równość

$$\text{Hor}_{\Phi(\tilde{\gamma}_p(t))}^{(2)} \left(\frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right) = \frac{d}{dt} \overline{(f \circ \gamma)}_{\Phi(\tilde{\gamma}_p(0))}(t) \equiv \frac{d}{dt} \overline{(f \circ \gamma)}_{\Phi(p)}(t),$$

evidentnie więc – wobec tożsamości punktów początkowych, $\overline{(f \circ \gamma)}_{\Phi(p)}(0) = \Phi(p) = \Phi \circ \tilde{\gamma}_p(0)$, oraz wektorów stycznych, a na gruncie Stw. 103 – zachodzi równość

$$\overline{(f \circ \gamma)}_{\Phi(p)} = \Phi \circ \tilde{\gamma}_p,$$

która w dowolnym punkcie $p \in E_1$ implikuje pożądaną relację

$$(\Phi \circ P_{0,t}^{(1)\gamma})(p) \equiv \Phi \circ \tilde{\gamma}_p(t) = \overline{(f \circ \gamma)}_{\Phi(p)}(t) \equiv P_{0,t}^{(2)f \circ \gamma}(\Phi(p)) = (P_{0,t}^{(2)f \circ \gamma} \circ \Phi)(p).$$

(FCM2) \Rightarrow (FCM3) Zważywszy, że A_α jest rzutem na $\forall E_\alpha$ wzdłuż HE_α ,

$$A_\alpha = \text{id}_{TE_\alpha} - \text{Hor}^{(\alpha)} \circ T\pi_{E_\alpha}, \quad \alpha \in \{1, 2\},$$

obliczamy – w odwołaniu do Diag. (4.2.9) –

$$\begin{aligned} T\Phi \circ A_1 &= T\Phi \circ \text{id}_{TE_1} - (T\Phi \circ \text{Hor}^{(1)}) \circ T\pi_{E_1} = T\Phi - (\text{Hor}_{\Phi(\cdot)}^{(2)} \circ Tf) \circ T\pi_{E_1} \\ &= T\Phi - \text{Hor}_{\Phi(\cdot)}^{(2)} \circ (Tf \circ T\pi_{E_1}) = \text{id}_{TE_2} \circ T\Phi - \text{Hor}_{\Phi(\cdot)}^{(2)} \circ (T\pi_{E_2} \circ T\Phi) \\ &\equiv A_2 \circ T\Phi. \end{aligned}$$

(FCM3) \Rightarrow (FCM2) Skoro $HE_\alpha \equiv \text{Ker } A_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$, to wystarczy wykazać, że

$$T\Phi(\text{Ker } A_1) \subset \text{Ker } A_2,$$

to jednak wynika wprost z ciągu relacji

$$A_2(T\Phi(\text{Ker } A_1)) = T\Phi(A_1(\text{Ker } A_1)) = T\Phi(\{\mathbf{0}_{TE_1}\}) = \{\mathbf{0}_{TE_2}\}.$$

□

2. Uzgadnianie powiązania ze strukturą na włóknie

W fizycznie interesujących okolicznościach włókno (typowe) wiązki włóknistej niesie dodatkową strukturę, np. przestrzeni \mathbb{K} -liniowej nad ciałem \mathbb{K} lub torsora grupy topologicznej G . W takiej sytuacji naturalnym staje się wyszczególnienie tych powiązań, które respektują ową strukturę w sensie określonym poniżej na konkretnych przykładach spotykanych w zastosowaniach.

2.1. Powiązanie liniowe na wiązce wektorowej.

DEFINICJA 134. Przyjmijmy zapis Def. 125 i 130. Powiązanie włókien w wiązce wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ nazywamy **zgodnym ze strukturą \mathbb{K} -liniową**, ilekroć dyfeomorfizmy (klasy C^k)

$$P_{t_1, t_2}^{\gamma} : \mathbb{V}_{\gamma(t_1)} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_{\gamma(t_2)}, \quad t_1, t_2 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

spełniają warunki

$$(4.2.10) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : P_{t_1, t_2}^{\gamma} \circ \mathbb{L}_{\lambda} \upharpoonright_{\mathbb{V}_{\gamma(t_1)}} = \mathbb{L}_{\lambda} \circ P_{t_1, t_2}^{\gamma},$$

przy czym wtedy

$$(4.2.11) \quad \nabla_{\mathbb{V}}(\mathbb{L}_{\lambda} \circ \sigma)(x) = T_{\sigma(x)}\mathbb{L}_{\lambda}(\nabla_{\mathbb{V}}\sigma(x)).$$

Powiązanie takie określamy też mianem **powiązania \mathbb{K} -liniowego włókien w wiązce \mathbb{V}** .

▲

UWAGA 52. Należy podkreślić, że spełnienie wskazanego przez nas warunku przemienności z odwzorowaniami \mathbb{L}_{λ} , $\lambda \in \mathbb{K}$ *pociąga za sobą* przemienność dyfeomorfizmów P_{t_1, t_2}^{γ} z \mathbb{A} i tym samym czyni powyższą definicję powiązania \mathbb{K} -liniowego w pełni naturalną. Dzieje się tak za sprawą

LEMAT 4.2.4. *Przyjmijmy zapis Def. 60 i niechaj $((V_{\alpha}, +_{\alpha}, P_{\alpha}, \bullet \mapsto 0_{\alpha}), \ell_{\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ wymiaru $n_{\alpha} \equiv \dim_{\mathbb{K}} V_{\alpha} < \infty$ z odnośnymi strukturami przestrzeni Banacha indukowanymi z $\mathbb{K}^{\times n_{\alpha}}$. Dowolne odwzorowanie $L : V_1 \rightarrow V_2$ różniczkowalne w 0_1 , które jest \mathbb{K} -jednorodny, tj. spełnia warunek*

$$\forall (\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V_1 : L(\lambda \triangleright_1 v) = \lambda \triangleright_2 L(v),$$

jest \mathbb{K} -liniowe.

■

Dowód: Wobec równości

$$L(0_1) \equiv L(0_{\mathbb{K}} \triangleright_1 0_1) = 0_{\mathbb{K}} \triangleright_2 L(0_1) = 0_2,$$

możemy zatem zapisać – wprost na mocy Def. 62, a dla dowolnego $v \in V_1$ –

$$F(v) = F(0_1) + DF(0_1)(v) + \|v\|_1 \triangleright \eta(v) = DF(0_1)(v) + \|v\|_1 \triangleright \eta(v)$$

w terminach pewnego odwzorowania $\eta : V_1 \rightarrow V_2$ o własności

$$\lim_{\|v\|_1 \rightarrow 0} \eta(v) = 0.$$

To daje nam pożądaną równość

$$F(v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0_{\mathbb{K}}} \lambda^{-1} \triangleright_2 F(\lambda \triangleright_1 v)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0_{\mathbb{K}}} \lambda^{-1} \triangleright_2 \left(DF(0_1)(\lambda \triangleright_1 v) +_2 \|\lambda \triangleright_1 v\|_1 \triangleright_2 \eta(\lambda \triangleright_1 v) \right) \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0_{\mathbb{K}}} \lambda^{-1} \triangleright_2 \left(\lambda \triangleright_2 DF(0_1)(v) +_2 |\lambda| \cdot \|v\|_1 \triangleright_2 \eta(\lambda \triangleright_1 v) \right) \\
&= DF(0_1)(v) + \|v\|_1 \triangleright_2 \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0_{\mathbb{K}}} \frac{|\lambda|}{\lambda} \triangleright_2 \eta(\lambda \triangleright_1 v) \right) = DF(0_1)(v).
\end{aligned}$$

□

Wreszcie też tożsamość (4.2.11) sprawdzamy w bezpośrednim rachunku odwodząc się do jej definicji,

$$\begin{aligned}
T_{\sigma(x)} \mathbb{L}_\lambda (\nabla_{\mathcal{V}} \sigma(x)) &\equiv T_{\sigma(x)} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma-1} (\sigma \circ \gamma)(t) \right) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbb{L}_\lambda \circ P_{0,t}^{\gamma-1} (\sigma \circ \gamma)(t) \\
&= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma-1} ((\mathbb{L}_\lambda \circ \sigma) \circ \gamma)(t) \equiv \nabla_{\mathcal{V}} (\mathbb{L}_\lambda \circ \sigma)(x).
\end{aligned}$$

DEFINICJA 135. Przyjmijmy zapis Def. 125 i 131. Powiązanie Ehresmanna na wiązce wektorowej $(V, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathcal{V}})$ nazywamy **zgodnym ze strukturą K-liniową**, ilekroć odwzorowania \mathbb{L}_λ , $\lambda \in \mathbb{K}$ spełniają warunek

$$(4.2.12) \quad \forall v \in V : H_{\mathbb{L}_\lambda(v)} V = T_v \mathbb{L}_\lambda (H_v V).$$

Powiązanie takie określamy też mianem **K-liniowego powiązania Ehresmanna** na V .

▲

UWAGA 53. Warto odnotować, że wypisany tu warunek jest jedynym nietrywialnym warunkiem naturalnym do pomyslenia w kategorii $\mathbf{VectBun}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}(B)$, oto bowiem gładkie funktorialne podniesienia $T\mathbb{L}_\lambda : TV \circlearrowleft$, $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ dyfeomorfizmów \mathbb{L}_λ są dyfeomorfizmami wiązki stycznej, a nadto podwiązka pionowa tej ostatniej jest przez nie jawnie zachowywana w rozumieniu relacji

$$T_v \mathbb{L}_\lambda (V_v V) = V_{\mathbb{L}_\lambda(v)} V, \quad v \in V.$$

Istotnie, wykorzystując naturalne dyfeomorfizmy

$$(4.2.13) \quad \text{Vert}_v : V_{\pi_{\mathcal{V}}(v)} \xrightarrow{\cong} V_v V : w \mapsto \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + t \triangleright_{V_{\pi_{\mathcal{V}}(v)}} w),$$

(powyższa definicja ma sens, gdyż $v, w \in V_{\pi_{\mathcal{V}}(v)}$, a do tego $t \in \mathbb{R} \subset \mathbb{K}$), jawnie \mathbb{R} -liniowe

$$\begin{aligned}
\text{Vert}_v (r \triangleright_{V_{\pi_{\mathcal{V}}(v)}} w) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + t \triangleright (r \triangleright_{V_{\pi_{\mathcal{V}}(v)}} w)) \\
&\equiv r \triangleright_{T_v V} \left(\frac{d}{d(rt)} \upharpoonright_{rt=0} (v + rt \triangleright_{V_{\pi_{\mathcal{V}}(v)}} w) \right) \equiv r \triangleright_{T_v V} \text{Vert}_v(w),
\end{aligned}$$

znajdujemy

$$\text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v^{-1} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + t \triangleright w) \right) \equiv \text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda(w)$$

$$= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\mathbb{L}_\lambda(v) + t \triangleright \mathbb{L}_\lambda(w)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbb{L}_\lambda(v + t \triangleright w) = T_v \mathbb{L}_\lambda \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + t \triangleright w) \right),$$

czyli też – wobec dowolności $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ oraz $v, w \in V_{\pi_{\mathcal{V}}(v)}$ – tożsamość

$$(4.2.14) \quad T_v \mathbb{L}_\lambda \upharpoonright_{V_v V} = \text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v^{-1},$$

której prawa strona jest superpozycją \mathbb{R} -liniowych dyfeomorfizmów, przeto własność tę ma także jej strona lewa,

$$T_v \mathbb{L}_\lambda \upharpoonright_{V_v \mathbb{V}} : V_v \mathbb{V} \xrightarrow{\cong} V_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \mathbb{V}.$$

Wreszcie też stycznościowe podniesienie $T\mathbb{A}$ odwzorowania \mathbb{A} z Równ. (4.1.4) ogranicza się w oczywisty sposób do podwiązki poziomej, a to w konsekwencji addytywności izomorfizmów Hor_v , $v \in \mathbb{V}$ z Równ. (4.2.4). W rzeczy samej, dowolne dwa wektory poziome $X_1, X_2 \in H_v \mathbb{V}$ są obrazami jednoznacznie określonych wektorów $V_1, V_2 \in T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} B$,

$$X_\alpha = \text{Hor}_v(V_\alpha), \quad \alpha \in \{1, 2\},$$

a ich suma przepisuje się w postaci

$$T\mathbb{A}(X_1, X_2) = T\mathbb{A}(\text{Hor}_v(V_1), \text{Hor}_v(V_2)) = \text{Hor}_v \circ \mathbb{A}(V_1, V_2) \in H_v \mathbb{V}.$$

STWIERDZENIE 207. *W dowolnym punkcie cięcia zerowego wiązki wektorowej (nad \mathbb{K}) podprzestrzeń pozioma \mathbb{K} -liniowego powiązania Ehresmanna na tejże wiązce jest styczna do cięcia zerowego.*

■

Dowód: Wystarczy zauważyć, że w dowolnym punkcie $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}(x)$, $x \in B$ warunek (4.2.12) przyjmuje postać

$$H_{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}(x)} \mathbb{V} \cong H_{\mathbb{L}_{0_{\mathbb{K}}}(x)} \mathbb{V} = T_{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}(x)} \mathbb{L}_{0_{\mathbb{K}}} (H_{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}(x)} \mathbb{V}),$$

przy czym odwzorowanie $T_{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}(x)} \mathbb{L}_{0_{\mathbb{K}}}$ anihiluje wektory styczne do włókna \mathbb{V}_x . □

DEFINICJA 136. Przyjmijmy zapis Def. 125 i 132. **Forma powiązania \mathbb{K} -liniowego** na wiązce wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ to morfizm wiązek włóknistych

$$(\mathcal{A}, \pi_{\mathbb{V}}) : T\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

o \mathbb{R} -liniowych ograniczeniach do włókien,

$$\mathcal{A} \upharpoonright_{T_v \mathbb{V}} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_v \mathbb{V}, V_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}),$$

oraz o własnościach

$$\forall v \in \mathbb{V} : \mathcal{A} \circ \text{Vert}_v = \text{id}_{V_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}}.$$

oraz

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} : \mathcal{A} \circ T\mathbb{L}_\lambda = \mathbb{L}_\lambda \circ \mathcal{A}.$$

▲

TWIERDZENIE 4.2.5. *W dowolnej wiązce wektorowej (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) \mathbb{K} -liniowe powiązanie Ehresmanna wyznacza formę powiązania \mathbb{K} -liniowego i vice versa. Ponadto powiązanie \mathbb{K} -liniowe włókien w tejże wiązce określa na niej \mathbb{K} -liniowe powiązanie Ehresmanna i vice versa.*

■

Dowód: Niechaj $\mathbb{T}\mathbb{V} = \mathbb{V}\mathbb{V} \oplus_B \mathbb{H}\mathbb{V}$ będzie \mathbb{K} -liniowym powiązaniem Ehresmanna na \mathbb{V} , a wtedy odnośna forma powiązania

$$\mathcal{A} := \text{id}_{\mathbb{T}\mathbb{V}} - (\mathbb{T}\pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{H}\mathbb{V}})^{-1} \circ \mathbb{T}\pi_{\mathbb{V}} : \mathbb{T}\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}\mathbb{V},$$

określa formę $\mathcal{A} : \mathbb{T}\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ o jawnie \mathbb{R} -liniowych ograniczeniach do włókien:

$$\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v\mathbb{V}} := \text{Vert}_v^{-1} \circ \mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v\mathbb{V}},$$

spełniająca – dla dowolnego wektora $(\text{Vert}_v(w), X) \in \text{Im } \text{Vert}_v \oplus \mathbb{H}_v\mathbb{V} \equiv \mathbb{V}_v\mathbb{V} \oplus \mathbb{H}_v\mathbb{V} \equiv \mathbb{T}_v\mathbb{V}$, $w \in \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$ i dowolnego skalaru $\lambda \in \mathbb{K}$ – tożsamość

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ \mathbb{T}_v\mathbb{L}_\lambda(\text{Vert}_v(w), X) &= \mathcal{A}(\mathbb{T}_v\mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v(w), \mathbb{T}_v\mathbb{L}_\lambda(X)) \\ &= \text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}^{-1} \circ \mathbb{T}_v\mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v(w) = \text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}^{-1} \circ (\text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v^{-1}) \circ \text{Vert}_v(w) \\ &= \mathbb{L}_\lambda(w) \equiv \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v^{-1} \circ \mathcal{A}(\text{Vert}_v(w), X) \equiv \mathbb{L}_\lambda \circ \mathcal{A}(\text{Vert}_v(w), X), \end{aligned}$$

przy czym w pierwszej z wypisanych równości wykorzystaliśmy założenie o zachowywaniu przez $\mathbb{T}_v\mathbb{L}_\lambda$ wektorów poziomych i – niezależnie – pionowych, w drugiej – jawną postać \mathcal{A} , a w trzeciej – tożsamość (4.2.14). Z powyższego rachunku wywodzimy wprost drugą z tożsamości definiujących formę powiązania \mathbb{K} -liniowego. Pierwsza z nich wynika wprost z definicji \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \circ \text{Vert}_v \equiv \text{Vert}_v^{-1} \circ \mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v\mathbb{V}} \circ \text{Vert}_v = \text{Vert}_v^{-1} \circ \text{id}_{\mathbb{T}\mathbb{V}} \circ \text{Vert}_v = \text{id}_{\mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}}.$$

I odwrotnie, niechaj będzie dane odwzorowanie $\mathcal{A} : \mathbb{T}\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ o własnościach jak w Def. 136. Jego dziedzina i przeciwdziedzina niosą strukturę wiązki wektorowej nad \mathbb{R} (na \mathbb{V} struktura ta jest indukowana kanonicznie przez strukturę \mathbb{K} -liniową za pośrednictwem zanurzenia $\mathbb{R} \subset \mathbb{K}$) i względem tych struktur \mathcal{A} jest – wprost z definicji – morfizmem wiązek \mathbb{R} -liniowych, zatem też na mocy Stw. 197 podzbiór

$$\mathbb{H}\mathbb{V} := \text{Ker } \mathcal{A} \subset \mathbb{T}\mathbb{V}$$

jest podwiązką wektorową (nad \mathbb{R}). Przy tym wobec istnienia izomorfizmów (4.2.13) możemy dowolny element

$$w \in \text{Ker}(\mathbb{T}\pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{H}_v\mathbb{V}}) = \text{Ker}(\mathbb{T}\pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{H}_v\mathbb{V}}) \cap \text{Ker } \mathcal{A} \equiv \mathbb{V}_v\mathbb{V} \cap \text{Ker } \mathcal{A}$$

zapisać w postaci

$$w = \text{Vert}_v(\varpi)$$

dla pewnego $\varpi \in \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$, przeto

$$\varpi \equiv \mathcal{A} \circ \text{Vert}_v(\varpi) = \mathcal{A}(w) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}} \circ \pi_{\mathbb{V}}(v),$$

czyli też – z racji liniowości Vert_v –

$$w = \text{Vert}_v \circ \mathbf{0}_{\mathbb{V}} \circ \pi_{\mathbb{V}}(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}\mathbb{V}}(v).$$

W takim razie $\mathbb{T}\pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{H}_v\mathbb{V}}$ jest injekcją, a ponieważ $\text{Im}(\mathcal{A} \circ \text{Vert}_v) \equiv \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$ przy $\text{Im}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v\mathbb{V}}) \subset \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$, co skutkuje równością $\text{Im}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v\mathbb{V}}) = \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$, przeto standardowy bilans wymiarów

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v\mathbb{V}}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_v\mathbb{V} - \dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v\mathbb{V}})$$

ze Stw. 17 przyjmuje w tym wypadku postać

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v\mathbb{V}}) &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_v\mathbb{V} - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}B + \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}B, \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku uwzględniliśmy izomorfizm $\mathbb{V}_{\pi_V(v)} \cong V$. Ostatecznie więc konstatujemy, że odwzorowanie

$$\mathbb{T}\pi_V \upharpoonright_{\text{Ker } \mathcal{A}} : \text{Ker } \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{T}B$$

jest izomorfizmem, co daje nam postulowany rozkład Whitneya

$$\mathbb{T}V = \mathbb{V}V \oplus_B \text{Ker } \mathcal{A} \equiv \mathbb{V}V \oplus_B \text{HV}.$$

Pozostaje pokazać, że

$$\forall_{(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times \mathbb{V}} : \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda(\text{Ker } \mathcal{A})_v = (\text{Ker } \mathcal{A})_{\mathbb{L}_\lambda(v)}.$$

W tym celu wybierzmy dowolny punkt $X \in (\text{Ker } \mathcal{A})_v$ i obliczmy

$$\mathcal{A} \circ \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda(X) = \mathbb{L}_\lambda \circ \mathcal{A}(X) = \mathbb{L}_\lambda(\mathbf{0}_V \circ \pi_V(v)) = \mathbf{0}_V \circ \pi_V(v),$$

skąd wniosek:

$$\mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda(\text{Ker } \mathcal{A})_v \subseteq (\text{Ker } \mathcal{A})_{\mathbb{L}_\lambda(v)},$$

a ponieważ obrazem tej ostatniej relacji względem izomorfizmu $\mathbb{T}\pi_V \upharpoonright_{\text{Ker } \mathcal{A}}$ jest

$$\mathbb{T}_{\pi_V(v)} B \equiv \mathbb{T}_v(\pi_V \circ \mathbb{L}_\lambda)(\text{Ker } \mathcal{A})_v = \mathbb{T}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \pi_V(\mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda(\text{Ker } \mathcal{A})_v)$$

$$\subseteq \mathbb{T}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \pi_V(\text{Ker } \mathcal{A})_{\mathbb{L}_\lambda(v)} = \mathbb{T}_{\pi_V \circ \mathbb{L}_\lambda(v)} B = \mathbb{T}_{\pi_V(v)} B,$$

przeto nieodzownie relacja ta jest w istocie równością.

Załóżmy następnie, że dane jest powiązanie na włóknach wiązki wektorowej zgodne – w rozumieniu Def. 134 – z obecną na nich strukturą \mathbb{K} -liniową. Różniczkując zapisaną dla dowolnego $v \in \mathbb{V}_{\gamma(0)}$ tożsamość

$$P_{0,t}^\gamma \circ \mathbb{L}_\lambda(v) = \mathbb{L}_\lambda \circ P_{0,t}^\gamma(v)$$

względem parametru t , a następnie kładąc $t = 0$, otrzymujemy – wprost na mocy definicji (4.2.2) – tożsamość

$$\begin{aligned} \text{Hor}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}(\dot{\gamma}(0)) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^\gamma(\mathbb{L}_\lambda(v)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbb{L}_\lambda \circ P_{0,t}^\gamma(v) = \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^\gamma(v)\right) \\ &= \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Hor}_v(\dot{\gamma}(0)), \end{aligned}$$

z której wobec dowolności $\dot{\gamma}(0)$, a zarazem bijectywności Hor . w (ko)ograniczeniu do $\text{HV} \equiv \text{Im Hor}$. wyprowadzamy relację (4.2.12).

Przyjmijmy na koniec, że istnieje na \mathbb{V} forma powiązania \mathbb{K} -liniowego, i w tych okolicznościach rozważmy – wykorzystując $\text{Hor}_w \equiv (\mathbb{T}_w \pi \upharpoonright_{\text{H}_w \mathbb{V}})^{-1}$, $w \in \mathbb{V}$ – podniesienia poziome $\tilde{\gamma}_v, \tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}$ dowolnej ścieżki $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow B$ spełniającej warunki $\gamma(0) = x \in B$ oraz $\dot{\gamma}(0) = X \in \mathbb{T}_x B$ do punktów – odpowiednio – $v \in \mathbb{V}_x$,

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_v(t) = \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_v(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}_v(0) = v,$$

oraz $\mathbb{L}_\lambda(v) \in \mathbb{V}_x$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}(t) = \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}(0) = \mathbb{L}_\lambda(v).$$

Przekształciwszy pierwszą z nich przy użyciu \mathbb{L}_λ , otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v(t) = \mathbb{T}_{\tilde{\gamma}_v(t)} \mathbb{L}_\lambda\left(\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_v(t)\right) = \mathbb{T}_{\tilde{\gamma}_v(t)} \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_v(t)}(\dot{\gamma}(t)),$$

którą wobec oczywistej równoważności

$$\mathbb{T}_{\mathbb{L}_\lambda(w)} \pi_V \circ \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda \upharpoonright_{\text{H}_v \mathbb{V}} = \mathbb{T}_v(\pi_V \circ \mathbb{L}_\lambda) \upharpoonright_{\text{H}_v \mathbb{V}} = \mathbb{T}_v \pi_V \upharpoonright_{\text{H}_v \mathbb{V}}$$

$$\iff \mathbb{T}_w \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Hor}_w = \text{Hor}_{\mathbb{L}_\lambda(w)}$$

możemy przepisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v(t) = \text{Hor}_{\mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v(t)}(\dot{\gamma}(t)).$$

Pchnięcie stycznosciowe $\mathbb{T}_{\tilde{\gamma}_v(t)} \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_v(t)}(\dot{\gamma}(t))$ podniesionego poziomo (do v w chwili $t = 0$) pola stycznego do γ jest zatem także podniesieniem poziomym tego pola, $\text{Hor}_{\mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v(t)}(\dot{\gamma}(t))$, przy czym w chwili $t = 0$ jest to podniesienie do punktu $\mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v(0) \equiv \mathbb{L}_\lambda(v)$. Lokalnie jedyną krzywą całkową podniesienia poziomego $\dot{\gamma}$ do \mathbb{V} przez $\mathbb{L}_\lambda(v)$ jest jednak – wprost z definicji – $\tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}$, wnioskujemy więc o tożsamości

$$\tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} = \mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v,$$

a ta w świetle konstrukcji operatorów $\mathbb{P}_{0,t}^\gamma$ podanej w Równ. (4.2.5) oznacza pożądaną ich \mathbb{K} -jednorodność wyrażoną w Równ. (4.2.10). \square

DEFINICJA 137. Przyjmijmy zapis Def. 125. **Powiązanie Koszula** na wiązce wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ (klasy C^k nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), zwane także **pochodną Koszula**, to odwzorowanie

$$\nabla^K : \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B) \times \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) \longrightarrow \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) : (\mathcal{V}, \sigma) \longmapsto \nabla_{\mathcal{V}}^K \sigma$$

spełniające następujące aksjomaty:

(KC1) $C^k(B, \mathbb{R})$ -liniowość w pierwszym argumencie,

$$\forall (f_\alpha, \mathcal{V}_\alpha) \in C^k(B, \mathbb{R}) \times \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B), \alpha \in \{1, 2\} : \nabla_{f_1 \triangleright \mathcal{V}_1 + \mathbb{T}B f_2 \triangleright \mathcal{V}_2}^K = f_1 \triangleright \nabla_{\mathcal{V}_1}^K + f_2 \triangleright \nabla_{\mathcal{V}_2}^K;$$

(KC2) addytywność w drugim argumencie,

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) : \nabla^K(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla^K \sigma_1 + \nabla^K \sigma_2;$$

(KC3) **tożsamość Leibniza**, spełniona dla dowolnych $(\sigma, f) \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) \times C^k(B, \mathbb{K})$,

$$(4.2.15) \quad \nabla^K(\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot))) = df \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_{f(\cdot)}) \circ \nabla^K \sigma.$$

▲

UWAGA 54. Przywoławszy Stw. 43 możemy równoważnie traktować pochodną Koszula jako odwzorowanie (które będziemy oznaczać tym samym symbolem, pozostawiając kontekstowi ujednoznacznienie używanego w przyszłości zapisu)

$$\nabla^K \in \text{Hom}_{C^k(B, \mathbb{R})}(\Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B) \otimes_{\mathbb{R}} \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}), \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}))$$

spełniające tożsamość Leibniza (KC3).

TWIERDZENIE 4.2.6. *Na dowolnej wiązce wektorowej istnieje powiązanie Koszula.*

■

Dowód: W bezpośredniej konstrukcji powiązania na wiązce wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ wykorzystujemy jej lokalne trywializacje $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}$, $i \in I$. Niechaj $\{e_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ będzie (dowolną) bazą przestrzeni $\mathbb{K}^{\times n}$. Dla dowolnego cięcia lokalnego

$$\sigma : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, \sigma^k(x) \triangleright e_k)$$

oraz (lokalnego) pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_i)$ definiujemy

$$\nabla_{\mathcal{V}}^{(i)} \sigma(x) := \tau_i^{-1}(x, \mathcal{V}(\sigma^k)(x) \triangleright e_k).$$

Bez trudu stwierdzamy, że jest to (lokalnie) pochodna Koszula, oto bowiem aksjomaty (KC1) i (KC2) są spełnione trywialnie, a nadto obliczamy – w odwołaniu do Diag. (4.1.7), a dla dowolnej funkcji $f \in C^k(B, \mathbb{K})$ –

$$\nabla_{\mathcal{V}}^{(i)}(\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(x) \equiv \tau_i^{-1}(x, \mathcal{V}(f \cdot \sigma^k)(x) \triangleright e_k),$$

czyli jest też spełniony aksjomat (KC3).

W następnej kolejności stwierdzamy, że dowolna wypukła kombinacja $C^k(B, \mathbb{K})$ -liniowa pochodnych Koszula $\nabla^{K,1}$ i $\nabla^{K,2}$ na \mathbb{V} jest pochodną Koszula. Istotnie, niechaj $\rho_\alpha \in C^k(B, \mathbb{K})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą odwzorowaniami spełniającymi warunek (wypukłości)

$$\forall_{x \in B} : \rho_1(x) + \rho_2(x) = 1_{\mathbb{K}},$$

a wtedy odwzorowanie

$$\nabla^{K,12} := \mathbb{L}_{\rho_1(\cdot)} \circ \nabla^{K,1} + \mathbb{L}_{\rho_2(\cdot)} \circ \nabla^{K,2}$$

w oczywisty sposób spełnia aksjomaty (KC1) i (KC2) (wszak mnożenie w ciele \mathbb{K} jest przemienne), a nadto dostajemy (w oczywistym zapisie skróconym)

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{V}}^{K,12}(\mathbb{L}_f \circ \sigma) &= \sum_{\alpha \in \{1,2\}} \mathbb{L}_{\rho_\alpha}(\mathbb{L}_{\mathcal{V}(f)} \circ \sigma + \mathbb{L}_f(\nabla_{\mathcal{V}}^{K,\alpha} \sigma)) \\ &= \mathbb{L}_{\sum_{\alpha \in \{1,2\}} \rho_\alpha}(\mathbb{L}_{\mathcal{V}(f)} \circ \sigma) + \mathbb{L}_f\left(\sum_{\alpha \in \{1,2\}} \mathbb{L}_{\rho_\alpha}(\nabla_{\mathcal{V}}^{K,\alpha} \sigma)\right) \\ &= \mathbb{L}_{\mathcal{V}(f)} \circ \sigma + \mathbb{L}_f(\nabla_{\mathcal{V}}^{K,12} \sigma), \end{aligned}$$

czyli spełniona jest także tożsamość Leibniza.

Łącząc obie powyższe obserwacje, możemy skonstruować poszukiwaną przez nas pochodną Koszula przy użyciu dowolnego rozkładu jedności $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ (klasy C^k) stowarzyszonego z pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, a to wedle formuły

$$\nabla_{\mathcal{V}}^K \sigma(\cdot) := \sum_{i \in I} \mathbb{L}_{\rho_i(\cdot)}(\nabla_{\mathcal{V}|_{\mathcal{O}_i}}^{(i)}(\sigma \upharpoonright_{\mathcal{O}_i})),$$

której sensowność gwarantują podstawowe własności (w tym lokalna skończoność rodziny nośników) rozkładu wymienione w Def. 69. \square

TWIERDZENIE 4.2.7. *Powiązanie \mathbb{K} -liniowe na wiązce wektorowej (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), rozumiane w sensie dowolnej z wprowadzonych uprzednio definicji 134, 135 i 136, określa na niej powiązanie Koszula. I odwrotnie, dowolne powiązanie Koszula pochodzi od jednoznacznie określonego powiązania \mathbb{K} -liniowego.* \blacksquare

Dowód: Niechaj ∇ będzie pochodną kowariantną powiązania na włóknach w wiązce wektorowej \mathbb{V} , o którym mówi Def. 130, przy czym zakładamy, że mamy do czynienia z powiązaniem \mathbb{K} -liniowym. Rozważmy odwzorowanie

$$\nabla^K : \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B) \times \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) \longrightarrow \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$$

$$(4.2.16) \quad : (\mathcal{V}, \sigma) \longmapsto \text{Vert}_{\sigma(\cdot)}^{-1} \circ \nabla_{\mathcal{V}} \sigma(\cdot).$$

Wprost na mocy definicji odwzorowanie to spełnia aksjomaty (KC1) i (KC2), a to w następstwie aksjomatów (PT4) i (PT5) z Def. 130. Ponadto wobec założonej

\mathbb{K} -liniowości operatorów przeniesienia równoległego $P_{0,t}^\gamma$, Równ. (4.2.10), oraz tej samej własności odwzorowań Vert_v , Równ. (4.2.14), otrzymujemy – dla dowolnej funkcji $f \in C^k(B, \mathbb{K})$, dowolnego pola wektorowego $\mathcal{V} \in \Gamma_{\text{loc}}(B)$ oraz stowarzyszonej z nim (jak w punkcie (PT4) Def. 130) ścieżki γ – ciąg równości

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}}(\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(\gamma(0)) &= \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)}(\sigma \circ \gamma(\cdot))}^{-1} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma-1}(\mathbb{L}_{f \circ \gamma(t)}(\sigma \circ \gamma(t))) \right) \\
&= \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)}(\sigma \circ \gamma(0))}^{-1} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbb{L}_{f \circ \gamma(t)}(P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t))) \right) \\
&\equiv \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)}(\sigma \circ \gamma(0))}^{-1} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)} \circ P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t)) \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{L}_{\mathbb{T}_{\gamma(0)}f(\dot{\gamma}(0))} \circ P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t)) + \mathcal{O}(t^2) \right) \\
&= \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)}(\sigma \circ \gamma(0))}^{-1} \circ \mathbb{T}_{\sigma \circ \gamma(0)} \mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t)) \right) \\
&\quad + \mathbb{L}_{\mathbb{T}_{\gamma(0)}f(\dot{\gamma}(0))} \circ P_{0,0}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(0)) \\
&= \mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)} \circ \text{Vert}_{\sigma \circ \gamma(0)}^{-1} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t)) \right) \\
&\quad + \mathbb{L}_{\mathbb{T}_{\gamma(0)}f(\dot{\gamma}(0))} \circ \sigma(\gamma(0)) \\
&\equiv \mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)}(\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}}\sigma)(\gamma(0)) + \mathbb{L}_{\dot{\gamma}(0)\text{-}df(\gamma(0))} \circ \sigma(\gamma(0)),
\end{aligned}$$

w którym wykorzystaliśmy także bezpośrednio definicję odwzorowań Vert . Powyższe stanowi jawny zapis postulowanej tożsamości Leibniza.

Odwracając bieg rozumowania, założmy najpierw, że powiązanie \mathbb{K} -liniowe na \mathbb{V} , którego pochodna kowariantna wyznacza pochodną Koszula jak w Równ. (4.2.16), istnieje, co oznacza, że są określone izomorfizmy

$$\text{Hor}_v : \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}B \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}_v\mathbb{V}, \quad v \in \mathbb{V},$$

przy czym w świetle tożsamości

$$(4.2.17) \quad \nabla_{\mathcal{V}}\sigma(\pi_{\mathbb{V}}(v)) = \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}\sigma(\mathcal{V})(\pi_{\mathbb{V}}(v)) - \text{Hor}_v(\mathcal{V}(\pi_{\mathbb{V}}(v))),$$

por. Równ. (4.2.7), obliczamy

$$\begin{aligned}
\text{Hor}_v(\mathcal{V}(\pi_{\mathbb{V}}(v))) &= \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}\sigma(\mathcal{V})(\pi_{\mathbb{V}}(v)) - \text{Vert}_v(\text{Vert}_v^{-1}(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(\pi_{\mathbb{V}}(v)))) \\
&= \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}\sigma(\mathcal{V})(\pi_{\mathbb{V}}(v)) - \text{Vert}_v(\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}}\sigma).
\end{aligned}$$

Izomorfizmy te są zatem zupełnie jednoznacznie określone przez $\nabla^{\mathbb{K}}$, same zaś determinują powiązanie, co dowodzi jednoznaczności powiązania \mathbb{K} -liniowego na \mathbb{V} odtwarzającego $\nabla^{\mathbb{K}}$. Pozostaje zweryfikować poczynione przez nas założenie o istnieniu rzeczzonego powiązania.

Wychodząc od ustalonego powiązania Koszula, zdefiniujmy odwzorowanie

$$\begin{aligned}
(4.2.19) \quad \text{Hor}_v &: \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}B \longrightarrow \mathbb{T}_v\mathbb{V} \\
&: X \longmapsto \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}\sigma(X) - \text{Vert}_v(\nabla_X^{\mathbb{K}}\sigma)(\pi_{\mathbb{V}}(v)),
\end{aligned}$$

używając do tego *dowolnych*: cięcia lokalnego $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$ gładkiego na pewnym otoczeniu otwartym $x \equiv \pi_{\mathbb{V}}(v)$ i spełniającego warunek $\sigma(x) = v$ oraz pola wektorowego $\tilde{X} \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B)$ o własności $\tilde{X}(x) = X$. Odwzorowanie to jest jawnie \mathbb{R} -liniowe, a do tego spełnia tożsamość

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_v \pi_{\mathbb{V}} \circ \text{Hor}_v(X) &= \mathbb{T}_x(\pi_{\mathbb{V}} \circ \sigma)(X) - \mathbb{T}_v \pi_{\mathbb{V}} \circ \text{Vert}_v(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma)(x) \\ &= \mathbb{T}_x(\pi_{\mathbb{V}} \circ \sigma)(X) = \mathbb{T}_x \text{id}_B(X) = X, \end{aligned}$$

jest zatem injekcją, więc też izomorfizmem na obraz. Ten ostatni przecina się z $\mathbb{V}_v \mathbb{V}$ w wektorze zerowym, oto bowiem dla $\text{Hor}_v(X) \in \mathbb{V}_v \mathbb{V}$ zachodzi

$$0_{\mathbb{T}_x B} = \mathbb{T}_v \pi_{\mathbb{V}} \circ \text{Hor}_v(X) = X,$$

przeto na podstawie porównania wymiarów stwierdzamy istnienie rozkładu

$$\text{Im Hor}_v \oplus \mathbb{V}_v \mathbb{V} = \mathbb{T}_v \mathbb{V},$$

wyznaczanego przez operator rzutu

$$\text{Hor}_v \circ \mathbb{T}_v \pi_{\mathbb{V}} : \mathbb{T}_v \mathbb{V} \longrightarrow \text{Im Hor}_v.$$

Gładka zależność tego rozkładu od punktu w \mathbb{V} jest pochodną gładkości odwzorowań użytych w definicji powyższego rzutu. Musimy jeszcze tylko przekonać się, że Hor_v nie zależy od wyboru cięcia σ o założonej własności. Po pierwsze zauważamy więc, że jeśli na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_x punktu x lokalnie gładkie cięcia $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$ pokrywają się,

$$(\sigma_2 - \sigma_1)|_{\mathcal{O}_x} = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}|_{\mathcal{O}_x},$$

to wówczas ich różnica $\sigma_{21} \equiv (\sigma_2 - \sigma_1)|_{\mathcal{O}_x}$ spełnia tożsamości

$$\mathbb{T}_x \sigma_{21}(X) = 0_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}}$$

oraz

$$\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_{21}(x) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}(x).$$

O ile pierwsza z nich jest oczywista, druga wymaga krótkiego komentarza. Rozważmy dowolną funkcję $f \in C^k(B, \mathbb{K})$, dla której istnieje otoczenie otwarte \mathcal{U}_x punktu x o własności $\text{supp } f \subset \mathcal{U}_x$ i zawarte w nim otoczenie otwarte $\mathcal{W}_x \subset \mathcal{U}_x$ tegoż punktu x o własności $f|_{\mathcal{W}_x} = 1_{\mathbb{K}}$. Przywoławszy aksjomat (KC3) (i uwzględnivszy pierwszą z tożsamości), obliczamy

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\mathbb{K}} (\mathbb{L}_{f(\cdot)} \circ \sigma_{21}(\cdot))(x) &= \mathbb{L}_{\mathbb{T}_x f(X)}(\sigma(x)) + \mathbb{L}_{f(x)}(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_{21}(x)) = \mathbb{L}_{1_{\mathbb{K}}}(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_{21}(x)) \\ &= \nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_{21}(x) \end{aligned}$$

i w konsekwencji możemy ograniczyć nasze rozważania do *dowolnie małego* otoczenia otwartego punktu x , w szczególności więc – do dowolnego elementu $\mathcal{O}_i \ni x$ pokrycia trywializującego. W obrazie odnośnej trywializacji $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^n$, o podstawowej własności

$$\forall (\lambda, y, w) \in \mathbb{K} \times \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^n : \tau_i \circ \mathbb{L}_{\lambda} \circ \tau_i^{-1}(y, w) = (y, \lambda \triangleright_n w),$$

wybieramy bazę $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n}}$ przestrzeni \mathbb{K}^n i stowarzyszamy z nią rodzinę cięć $\epsilon_a^{(i)} := \tau_i^{-1}(\cdot, e_a)$ jak w Równ. (4.1.10) oraz – dla dowolnego $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$ (nad \mathcal{O}_i) –

$$(4.2.20) \quad \tau_i \circ \sigma(y) =: (y, \sigma_i(y)) \equiv (y, \sigma_i^a(y) \triangleright e_a),$$

czyli

$$\sigma(y) \equiv \mathbb{L}_{\sigma_i^a(y)}(\epsilon_a^{(i)}(y)).$$

Teraz już bez trudu obliczamy – kładąc $v = \tau_i^{-1}(x, w)$ i przywołując po drodze rozkład $\mathbb{T}_{\tau_i \circ \sigma(x)} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \equiv \mathbb{T}_x B \oplus \mathbb{K}^{\times n}$, jak również strukturę \mathbb{K} -liniową na włóknach \mathbb{V} opisywaną przez Diag. (4.1.5) i (4.1.7) –

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x \sigma(X) &\equiv \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1} \circ \mathbb{T}_x(\tau_i \circ \sigma)(X) = \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (x, w + t \triangleright \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) \right) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \tau_i^{-1}(x, w + t \triangleright \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + \tau_i^{-1}(x, t \triangleright \mathbb{T}_x \sigma_i(X))) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + \mathbb{L}_t \circ \mathbb{L}_{\mathbb{T}_x \sigma_i^a(X)}(\epsilon_a^{(i)}(x))) \\ &\equiv \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \text{Vert}_v \circ \mathbb{L}_{\mathbb{T}_x \sigma_i^a(X)}(\epsilon_a^{(i)}(x)), \end{aligned}$$

a dalej, na tej podstawie i w odwołaniu do aksjomatyki pochodnej Koszula,

$$\begin{aligned} \text{Hor}_v(X) &= \mathbb{T}_x \sigma(X) - \text{Vert}_v(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma(x)) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \text{Vert}_v \circ \mathbb{L}_{\mathbb{T}_x \sigma_i^a(X)}(\epsilon_a^{(i)}(x)) - \text{Vert}_v(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}}(\mathbb{L}_{\sigma_i^a(\cdot)}(\epsilon_a^{(i)}(\cdot)))(x)) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) - \text{Vert}_v \circ \mathbb{L}_{\sigma_i^a(x)}(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \epsilon_a^{(i)}(x)). \end{aligned}$$

Skoro jednak $\text{Hor}_v(X)$ zależy od współczynników σ_i^k wyłącznie poprzez ich wartości w x (nie zaś pochodne), to ostatecznie w przypadku rozważanej wcześniej pary cięć σ_1, σ_2 o własności $\sigma_2(x) = v = \sigma_1(x)$ stwierdzamy tożsamość

$$\mathbb{T}_x \sigma_2(X) - \text{Vert}_v(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_2(x)) = \mathbb{T}_x \sigma_1(X) - \text{Vert}_v(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_1(x)),$$

która przesądza o tym, że odwzorowania Hor_v są dobrze określone. \square

Jako wniosek z naszych rozważań możemy sformułować

TWIERDZENIE 4.2.8. *Na dowolnej wiązce wektorowej (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) istnieje powiązanie \mathbb{K} -liniowe.* \blacksquare

Dowód: Oczywisty. \square

TWIERDZENIE 4.2.9. *Przyjmijmy zapis Def. 125, 133 oraz 137 i niechaj*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{V}_2 \\ \pi_{\mathbb{V}_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{V}_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

będzie morfizmem wiązek wektorowych z powiązaniem \mathbb{K} -liniowym (nad dyfeomorfizmem baz). Każdy z (wzajem równoważnych) warunków (FCM1), (FCM2) i (FCM3)

z Def. 133, które w przypadku wiązek wektorowych z powiązaniem \mathbb{K} -liniowym uzupełniamy o wymóg (4.1.8) \mathbb{K} -liniowości ograniczeń do włókna, jest równoważny warunkowi:

(VFCM4) dla dowolnych: cięcia (lokalnego) $\sigma : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{V}_1$ określonego na pewnym otoczeniu otwartym \mathcal{O}_x punktu $x \in B_1$ oraz pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$ spełniony jest warunek

$$\Phi(\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}(1)}\sigma(x)) = \nabla_{\mathbb{T}f(\mathcal{V})}^{\mathbb{K}(2)}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x)).$$

■

Dowód: W świetle Tw. 4.2.3 wystarczy zweryfikować poniższe implikacje (w których zapisie należy rozumieć, że warunki (FCM1) i (FCM2) zostały stosownie ograniczone do kategorii wiązek wektorowych).

(FCM1) \Rightarrow (VFCM4) Wykorzystując Równ. (4.2.16) oraz definicję (4.2.13), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi(\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}(1)}\sigma(x)) &= \Phi \circ \text{Vert}_{\sigma(x)}^{(1)-1}(\nabla_{\mathcal{V}}^{(1)}\sigma)(x) = \text{Vert}_{\Phi \circ \sigma(x)}^{(2)-1} \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)}\Phi(\nabla_{\mathcal{V}}^{(1)}\sigma)(x) \\ &= \text{Vert}_{\Phi \circ \sigma(x)}^{(2)-1}(\nabla_{\mathcal{V}}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x))) \\ &\equiv \nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}(2)}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x)). \end{aligned}$$

(VFCM4) \Rightarrow (FCM2) Na podstawie Równ. (4.2.19) ustalającego relację między podniesieniem poziomym a pochodną Koszula, a także – ponownie – definicji (4.2.13), obliczamy

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_v\Phi \circ \text{Hor}_v^{(1)}(X) &= \mathbb{T}_v\Phi \circ \mathbb{T}_x\sigma(X) - \mathbb{T}_v\Phi \circ \text{Vert}_v^{(1)}(\nabla_{\bar{X}}^{\mathbb{K}(1)}\sigma)(x) \\ &= \mathbb{T}_x(\Phi \circ \sigma)(X) - \text{Vert}_{\Phi(v)}^{(2)} \circ \Phi(\nabla_{\bar{X}}^{\mathbb{K}(1)}\sigma)(x) \\ &= \mathbb{T}_{f(x)}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(\mathbb{T}_xf(X)) - \text{Vert}_{\Phi(v)}^{(2)}(\nabla_{\mathbb{T}f(\bar{X})}^{\mathbb{K}(2)}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}))(f(x)), \end{aligned}$$

a ponieważ $\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}$ jest cięciem lokalnym spełniającym warunek $\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}(f(x)) = \Phi(v)$, przeto możemy przepisać powyższą równość w postaci

$$\mathbb{T}_v\Phi \circ \text{Hor}_v^{(1)}(X) = \text{Hor}_{\Phi(v)}^{(2)} \circ \mathbb{T}_xf(X).$$

□

STWIERDZENIE 208. Przyjmijmy zapis Def. 130, 127 oraz Uwagi 50 i niechaj ∇ będzie pochodną kowariantną na wiązce wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{x^n}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) stowarzyszoną z powiązaniem \mathbb{K} -liniowym. Zależność odwzorowań

$$\mathfrak{a}_i(\cdot_1, \cdot_2) := (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Vert}_{\cdot_2}^{-1}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{(\cdot_1, \cdot_2)}\tau_i^{-1}) \circ \alpha_i(\cdot_1, \cdot_2),$$

zdefiniowanych w terminach tych z Równ. (4.2.8), od drugiego argumentu jest $C^k(B, \mathbb{K})$ -liniowa, tj. dla dowolnych: cięcia $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$ oraz funkcji $f \in C^k(B, \mathbb{K})$ zachodzi

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_i} : \mathfrak{a}_i(x, \mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))) = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \ell_{f(x)}^n) \circ \mathfrak{a}_i(x, \sigma(x)).$$

■

Dowód: Wykorzystamy związek (4.2.16) między pochodną kowariantną a pochodną Koszula, aby móc skorzystać z wygodnych własności tej ostatniej. Rozważmy cięcie lokalne $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$, (nad $\mathcal{O}_i \ni x$) w obrazie trywializacji lokalnej jak w Równ. (4.2.20). Otrzymujemy (w zapisie dowodu Tw. 4.2.7)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i (\nabla_{\bar{X}} (\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(x)) \\
& \equiv \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} (\nabla_{\bar{X}}^{\text{K}} (\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(x)) \\
& = \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} (\mathbb{L}_{\mathbb{T}_x f(X)} \circ \sigma(x) + \mathbb{L}_{f(x)} (\nabla_{\bar{X}}^{\text{K}} \sigma(x))) \\
& = \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} (\mathbb{L}_{\mathbb{T}_x f(X)} \circ \tau_i^{-1})(x, \sigma_i(x)) \\
& \quad + \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ (\text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \text{Vert}_{\mathbb{L}_{\sigma(x)}}^{-1}) (\nabla_{\bar{X}} \sigma(x)) \\
& = \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} (\tau_i^{-1}(x, \mathbb{T}_x f(X) \triangleright_n \sigma_i(x))) \\
& \quad + (\mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \mathbb{L}_{f(x)} \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i^{-1}) \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i (\nabla_{\bar{X}} \sigma(x)) \\
& \equiv \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x)) + \mathbb{L}_t \circ \tau_i^{-1}(x, \mathbb{T}_x f(X) \triangleright_n \sigma_i(x))) \right) \\
& \quad + \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})(0_{\mathbb{T}_x B}, \mathbb{T}_x \sigma_i(X) + X \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x))) \\
& = \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_i^{-1}(x, (f(x) + t \cdot \mathbb{T}_x f(X)) \triangleright_n \sigma_i(x)) \right) \\
& \quad + \mathbb{T}_{(x, \sigma_i(x))} (\text{id}_B \times \ell_{f(x)}^n)(0_{\mathbb{T}_x B}, \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) \\
& \quad + X \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)) \\
& = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x, (f(x) + t \cdot \mathbb{T}_x f(X)) \triangleright_n \sigma_i(x) + f(x) \triangleright_n (\sigma_i(x) + t \triangleright_n \mathbb{T}_x \sigma_i(X))) \\
& \quad + X \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)) \\
& \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x, \ell_{f(x)+t \cdot \mathbb{T}_x f(X)}^n (\sigma_i(x) + t \triangleright_n \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) + \mathcal{O}(t^2)) \\
& \quad + X \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)) \\
& \equiv \mathbb{T}_x (\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(X) + X \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)).
\end{aligned}$$

Z porównania powyższego wyniku z formułą (definicyjną – patrz: Równ. (4.2.8))

$$\mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i (\nabla_{\bar{X}} (\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(x)) = \mathbb{T}_x (\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(X) + X \lrcorner \alpha_i(x, \mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x)))$$

i wobec dowolności X wyprowadzamy tożsamość

$$\alpha_i(x, \mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))) = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)),$$

która w połączeniu z definicją obiektów \mathbf{a}_i oraz Równ. (4.2.14) odtwarza postulowaną regułę transformacyjną

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_i(x, \mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))) & = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))}^{-1} \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \mathbb{L}_{f(x)} \circ \text{Vert}_{\sigma(x)}) \circ \mathbf{a}_i(x, \sigma(x)) \\
& = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{L}_{f(x)}) \circ \mathbf{a}_i(x, \sigma(x)).
\end{aligned}$$

□

DEFINICJA 138. Przyjmijmy zapis Def. 137 i niechaj x^μ , $\mu \in \overline{1, \dim B}$ będą współrzędnymi lokalnymi na³ $\mathcal{O}_i \subset B$, wyznaczającymi bazę $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu\}_{\mu \in \overline{1, \dim B}}$ przestrzeni stycznej do B o lokalnej trywializacji $\tau_i : \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\dim B}$, a nadto niech $e_a^{(i)} \in C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K}^{\dim B})$, $a \in \overline{1, n}$ będzie indeksowaną przez $y \in \mathcal{O}_i$ rodziną baz w $\mathbb{K}^{\dim B}$. Zdefiniujmy

$$E_a^{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, e_a^{(i)}(x)), \quad a \in \overline{1, n}.$$

Symbole Christoffela powiązania Koszula ∇^K na wiązce wektorowej V nad \mathcal{O}_i (stowarzyszone z bazami $\{\partial_\mu\}_{\mu \in \overline{1, \dim B}}$ i $\{e_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1, n}}$) to rodzina odwzorowań klasy C^k

$$\Gamma_{(i)\mu a}^b : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \mu \in \overline{1, \dim B}, \quad a, b \in \overline{1, n}$$

wyznaczonych przez relacje

$$(4.2.21) \quad \mathbb{L}_{\Gamma_{(i)\mu a}^b}(y)(E_b^{(i)}(y)) := \nabla_{\partial_\mu}^K E_a^{(i)}(y), \quad y \in \mathcal{O}_i.$$

▲

UWAGA 55. Warto zwrócić uwagę, że przy szczególnym wyborze bazy:

$$E_a^{(i)} := e_a^{(i)}$$

(patrz: Równ. (4.1.10)) wobec (lokalnej) stałości cięć bazowych $e_a^{(i)}$ zachodzi równość

$$\mathbb{L}_{\Gamma_{(i)\mu a}^b}(y)(e_b^{(i)}(y)) = \partial_\mu(y) \lrcorner a_i(y, e_a^{(i)}(y)),$$

która jednakowoż *nie* stanowi równoważnej definicji symboli Christoffela (względem tej bazy), albowiem obiekty a_i mają istotnie odmienne od pochodnej Koszula własności transformacyjne.

STWIERDZENIE 209. *Przyjmijmy zapis Def. 138 i niechaj y^α , $\alpha \in \overline{1, \dim B}$ będą współrzędnymi na \mathcal{O}_i o zależności od współrzędnych x^μ , $\mu \in \overline{1, \dim B}$ opisanej funkcjami*

$$y^\alpha = f^\alpha(x^\mu), \quad \alpha \in \overline{1, \dim B},$$

a nadto niech $f_r^{(i)}(y) \in C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K}^{\dim B})$, $r \in \overline{1, n}$ będzie indeksowaną przez $y \in \mathcal{O}_i$ rodziną baz w $\mathbb{K}^{\dim B}$ powiązaną z $e_a^{(i)}$, $a \in \overline{1, n}$ funkcjonalnymi relacjami liniowymi

$$f_r^{(i)} = \ell_{A_{(i)r}^a}^n(e_a^{(i)}),$$

w których zapisie $(A_{(i)r}^a)_{a,r \in \overline{1, n}} \in C^k(\mathcal{O}_i, \text{GL}(n; \mathbb{K}))$ są zależnymi od punktu macierzami przejścia między obiema bazami. Zdefiniujmy też odwzorowania

$$F_r^{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, f_r^{(i)}(x)), \quad r \in \overline{1, n},$$

pozostające w liniowej relacji funkcjonalnej

$$F_r^{(i)} = \mathbb{L}_{A_{(i)r}^a}(E_a^{(i)})$$

³Ilekcję dziedziny map lokalnych na B nie pokrywają się z dziedzinami trywializacji lokalnych V , możemy dokonać względnego rozdrobnienia tworzonych przez nie pokryć.

z odwzorowaniami stowarzyszonymi z rodziną baz $e_a^{(i)}$, $a \in \overline{1, n}$. Symbole Christoffela $\Gamma_{i\alpha r}^s$ stowarzyszone z bazami $\{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\}_{\alpha \in \overline{1, \dim B}}$ i $\{f_r^{(i)}\}_{r \in \overline{1, n}}$ zgodnie z formułą (4.2.21) pozostają względem symboli Christoffela $\Gamma_{(i)\mu a}^b$, stowarzyszonych z bazami $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}_{\mu \in \overline{1, \dim B}}$ i $\{e_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1, n}}$ w relacji

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \Gamma_{(i)\alpha r}^s = A_{(i)b}^{-1s} \left(\Gamma_{(i)\mu a}^b A_{(i)r}^a + \frac{\partial A_{(i)r}^b}{\partial x^\mu} \right)$$

■

Dowód: Bezpośredni rachunek wykorzystujący aksjomatykę pochodnej Koszula prowadzi do ciągu równości

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\Gamma_{(i)\mu a}^b} (E_b^{(i)}) &\equiv \nabla_{\partial^\mu}^K E_a^{(i)} = \nabla_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^K (\mathbb{L}_{A_{(i)a}^{-1r}} (F_r^{(i)})) = \mathbb{L}_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^K (\mathbb{L}_{A_{(i)a}^{-1r}} (F_r^{(i)}))) \\ &= \mathbb{L}_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}} \left(\mathbb{L}_{\frac{\partial A_{(i)a}^{-1r}}{\partial y^\alpha}} (F_r^{(i)}) + \mathbb{L}_{A_{(i)a}^{-1r}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^K F_r^{(i)} \right) \right) \\ &= \mathbb{L}_{\frac{\partial A_{(i)a}^{-1r}}{\partial x^\mu}} (F_r^{(i)}) + \mathbb{L}_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}} A_{(i)a}^{-1r} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^K F_r^{(i)} \right) \\ &= \mathbb{L}_{\frac{\partial A_{(i)a}^{-1r}}{\partial x^\mu}} A_{(i)r}^b (E_b^{(i)}) + \mathbb{L}_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}} A_{(i)a}^{-1r} \Gamma_{(i)\alpha r}^s (F_s^{(i)}) \\ &= \mathbb{L}_{A_{(i)a}^{-1r}} \circ \left(-\mathbb{L}_{\frac{\partial A_{(i)r}^b}{\partial x^\mu}} + \mathbb{L}_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}} \Gamma_{(i)\alpha r}^s A_{(i)s}^b \right) (E_b^{(i)}), \end{aligned}$$

z których już wprost wynika postulowana relacja, a to z racji liniowej niezależności wektorów $e_b^{(i)}$. □

STWIERDZENIE 210. *Przyjmijmy zapis Def. 138, Stw. 1.2.11 i Przykł. 7 (4). Wybierzmy przy tym w $\mathbb{K}^{\times n}$ rodzinę baz i stowarzyszoną z nią rodzinę cięć \mathbb{V} w postaci*

$$E_a^{(i)} := \epsilon_a^{(i)} \equiv \tau_i^{-1}(\cdot, e_a), \quad a \in \overline{1, n}$$

nad elementem \mathcal{O}_i pokrycia trywializującego $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ wiązki \mathbb{V} , jak w Równ. (4.1.10), gdzie $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n}}$ jest ustaloną (dowolnie) bazą w $\mathbb{K}^{\times n}$, o dualnej do niej – w rozumieniu Stw. 7 – bazie $\{e_a^*\}_{a \in \overline{1, n}}$ w $\mathbb{K}^{\times n*} \cong \mathbb{K}^{\times n}$. W dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ należącym do przecięcia dziedzin trywializacji lokalnych τ_i i τ_j rozważmy macierz odwzorowań przejścia

$$g_{ij}(x) := g_{ijab}(x) \triangleright \theta_{\mathbb{K}^{\times n}}(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b) \in \text{GL}(n; \mathbb{K})$$

oraz 1-formy o wartościach macierzowych

$$\Gamma_k(x) := \Gamma_{(k)\mu a}^b(x) \triangleright dx^\mu(x) \otimes_{\mathbb{R}} \theta_{\mathbb{K}^{\times n}}(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b), \quad k \in \{i, j\}.$$

Prawdziwa jest tożsamość

$$\Gamma_j(x) = (\text{id}_{\Gamma^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}}) \Gamma_i(x) + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x).$$

■

Dowód: Zaczniemy od prostej obserwacji:

$$\begin{aligned} \epsilon_a^{(j)}(x) &\equiv \tau_j^{-1}(x, e_a) = \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)(e_a)) = \tau_i^{-1}(x, g_{ijab}(x) \triangleright e_b) \\ &= \mathbb{L}_{g_{ijab}(x)}(\epsilon_b^{(i)}(x)), \end{aligned}$$

z której wyprowadzamy tożsamość

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\Gamma_{(j)\mu a}^b}(x)(\epsilon_b^{(j)}(x)) &\equiv \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}} \epsilon_a^{(j)}(x) = \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}} (\mathbb{L}_{g_{ij ac}(\cdot)}(\epsilon_c^{(i)}(\cdot)))(x) \\ &= \mathbb{L}_{\partial_\mu g_{ij ac}(x) g_{j i cb}(x)}(\epsilon_b^{(j)}(x)) + \mathbb{L}_{g_{ij ac}(x)}(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}} \epsilon_c^{(i)}(x)) \\ &= \mathbb{L}_{\partial_\mu g_{ij ac}(x) g_{j i cb}(x)}(\epsilon_b^{(j)}(x)) + \mathbb{L}_{g_{ij ac}(x) \Gamma_{(i)\mu c}^d(x) g_{j i db}(x)}(\epsilon_b^{(j)}(x)), \end{aligned}$$

‘ a z niej – pożądaną równość

$$(4.2.22) \quad \Gamma_{(j)\mu a}^b(x) = g_{j i db}(x) \Gamma_{(i)\mu c}^d(x) g_{ij ac}(x) + g_{j i cb}(x) \partial_\mu g_{ij ac}(x).$$

□

TWIERDZENIE 4.2.10 (O rekonstrukcji wiązki wektorowej z powiązaniem). *Przyjmijmy zapis Def. 65, 79 i 137 oraz Przykł. 7 (4) i 12 (7). Każda wiązka wektorowa $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) z powiązaniem \mathbb{K} -liniowym, rozumianym w sensie dowolnej z wprowadzonych uprzednio definicji 134, 135 i 136, wyznacza nad swym pokryciem trywializującym⁴ $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$*

- rodzinę $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}}$ lokalnie gładkich odwzorowań

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$$

spełniających warunek 1-kocyklu (4.1.2);

- rodzinę $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ lokalnie gładkich 1-form o wartościach macierzowych

$$\Gamma_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}(n)$$

spełniających warunki

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}, x \in \mathcal{O}_{ij}} : \Gamma_j(x) = (\mathrm{id}_{T^*B} \otimes \mathrm{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}}) \Gamma_i(x) + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x).$$

I odwrotnie, niechaj $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ będzie pokryciem otwartym C^k -rozmaitości B . Dowolna stowarzyszona z \mathcal{O} para rodzin odwzorowań lokalnie gładkich

$$(\{g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}}, \{\Gamma_k\}_{k \in I})$$

spełniających powyższe warunki określa – zgodnie z (konstruktywnym dowodem) Tw. 4.1.1 – wiązkę wektorową $\mathbb{V} = (\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n})/g_{\cdot}$ rzędu n nad \mathbb{K} o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z \mathcal{O}_{ij} tożsamych z g_{ij} , $(i, j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}$ oraz pochodnej Koszula zadawanej formułą (w duchu Uwagi 54)

$$(4.2.23) \quad \nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}} \sigma(x) = \mathcal{V} \lrcorner d\sigma_i(x) + \Gamma_i(\mathcal{V} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K}^{\times n})} \sigma_i)(x), \quad x \in \mathcal{O}_i$$

w której zapisie

- pochodna zewnętrzna d (na B) działa na drugą składową cięcia $\sigma \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} \equiv (\cdot, \sigma_i(\cdot))$, $\sigma_i \in C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K}^{\times n})$ w obrazie lokalnej trywializacji, dając $d\sigma_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}^{\times n}$;
- Γ_i działa na $\mathcal{V} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K}^{\times n})} \sigma_i$, $\mathcal{V} \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(T\mathcal{O}_i)$ jako standardowy iloczyn tensorowy odwzorowań liniowych, przy czym do wyniku przykładamy izomorfizm kanoniczny $\kappa_{\mathbb{K}^{\times n}}$ ze Stw. 44.

Ilekość odwzorowania te są danymi lokalnymi pewnej wiązki wektorowej nad B o włóknie typowym $\mathbb{K}^{\times n}$, ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez g_{ij} i Γ_i .

⁴Nie zakładamy, że pokrycie to jest dobre w rozumieniu Def. 65.

■

Dowód: Pierwsza część tezy stanowi podsumowanie naszych dotychczasowych dociekań i wynika wprost z Tw. 4.1.1 i Stw. 210. W celu udowodnienia drugiej jej części rozważmy wiązkę zrekonstruowaną według schematu przedstawionego w dowodzie Tw. 4.1.1,

$$\mathbb{V} = (\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) / g.,$$

w obrazie trywializacji lokalnych $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}$ i $\tau_j : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_j) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_j \times \mathbb{K}^{\times n}$ dla pary indeksów $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$. Po ustaleniu bazy (dowolnej) $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n}}$ w $\mathbb{K}^{\times n}$ lokalne cięcie σ przyjmuje tu postać

$$\tau_k \circ \sigma(x) = (x, \sigma_k^a(x) \triangleright e_a), \quad x \in \mathcal{O}_k, \quad k \in \{i, j\},$$

przy czym w punkcie $y \in \mathcal{O}_{ij}$ spełniona jest relacja

$$(4.2.24) \quad \sigma_j^a(y) = \sigma_i^b(y) g_{jiba}(y).$$

Wybermy lokalny układ współrzędnych $\{x^\mu\}_{\mu \in \overline{1, \dim B}}$ na \mathcal{O}_i i stowarzyszoną z nim bazę $\{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}_{\mu \in \overline{1, \dim B}}$ przestrzeni stycznej $T\mathcal{O}_i$. Przykładając do σ wypisany w treści twierdzenia operator $\nabla_{\mathbb{V}}^{\mathbb{K}}$ z Równ. (4.2.23), otrzymujemy formułę lokalną

$$\nabla_{\mathbb{V}}^{\mathbb{K}} \sigma(x) = \mathcal{V}^\mu(x) (\partial_\mu \sigma_i^b(x) + \Gamma_{(i)\mu a}^b(x) \sigma_i^a(x)) \triangleright e_b,$$

z której jasno wynika, że $\nabla^{\mathbb{K}}$ spełnia lokalnie aksjomaty (KC1)-(KC3), a ponieważ na mocy Równ. (4.2.22) i (4.2.24) (oraz skośnej symetrii odwzorowań g_{ij}) w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ zachodzi

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}^\mu(x) (\partial_\mu \sigma_j^b(x) + \Gamma_{(j)\mu a}^b(x) \sigma_j^a(x)) \triangleright e_b = [\partial_\mu (\sigma_i^a g_{jia b})(x) \\ & + (g_{jib d}(x) \Gamma_{(i)\mu c}^d(x) g_{ijac}(x) + g_{jicb}(x) \partial_\mu g_{ijac}(x)) g_{jia e}(x) \sigma_i^e(x)] \triangleright e_b \\ = & (\partial_\mu \sigma_i^a(x) g_{jia b}(x) + g_{jib d}(x) \Gamma_{(i)\mu c}^d(x) g_{ijac}(x) g_{jia e}(x) \sigma_i^e(x) \\ & + \sigma_i^a(x) \partial_\mu g_{jia b}(x) + g_{jicb}(x) \partial_\mu g_{ijac}(x) g_{jia e}(x) \sigma_i^e(x)) \triangleright e_b \\ = & (\partial_\mu \sigma_i^a(x) + \Gamma_{(i)\mu c}^a(x) \delta_{ec} \sigma_i^e(x)) g_{jia b}(x) \triangleright e_b, \end{aligned}$$

por.: Równ. (4.2.24), przeto te lokalne własności zstępują do przestrzeni ilorazowej $(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) / g.$

Na koniec bez trudu weryfikujemy trzecią część tezy ustalając wprost na gruncie definicji (4.2.21) symboli Christoffela, że znaleziony wcześniej izomorfizm ι o lokalnej postaci jak w Równ. (4.1.3) jest izomorfizmem wiązek wektorowych z powiązaniem w rozumieniu Def. 133. \square

TWIERDZENIE 4.2.11. *Przyjmijmy zapis Def. 133, Stw. 210 oraz dowodu Stw. 196 i niechaj $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema wiązkami wektorowymi (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) z powiązaniem \mathbb{K} -liniowym nad wspólną bazą B , o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{V}_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n_\alpha}$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, przy czym wprowadzamy dwie rodziny cięć bazowych (lokalnych):*

$$E_a^{(i)} := \epsilon_a^{(i)} \equiv \tau_i^{-1}(\cdot, e_a) : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{V}_1, \quad a \in \overline{1, n_1}$$

na wiązce \mathbb{V}_1 oraz

$$F_r^{(i)} := \phi_r^{(i)} \equiv \tau_i^{2-1}(\cdot, f_r) : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{V}_2, \quad r \in \overline{1, n_2},$$

na wiązce \mathbb{V}_2 , a wraz z nimi – macierzowe odwzorowania przejścia

$$g_{ij}^1(x) = g_{ij\,ab}^1(x) \triangleright \varepsilon(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b), \quad g_{ij}^2(x) = g_{ij\,rs}^2(x) \triangleright \varepsilon(f_r^* \otimes_{\mathbb{K}} f_s).$$

oraz 1-formy o wartościach macierzowych

$$\Gamma_i^1(x) = \Gamma_{(i)\,\mu a}^{1b}(x) \triangleright dx^\mu(x) \otimes_{\mathbb{R}} \theta_{\mathbb{K}^{n_1}}(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b),$$

$$\Gamma_i^2(x) = \Gamma_{(i)\,\mu r}^{2s}(x) \triangleright dx^\mu(x) \otimes_{\mathbb{R}} \theta_{\mathbb{K}^{n_2}}(f_r^* \otimes_{\mathbb{K}} f_s).$$

Dowolny morfizm wiązek wektorowych z powiązaniem

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{V}_2 \\ \pi_{\mathbb{V}_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{V}_2} \\ B & \xlongequal{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i \in I}$ odwzorowań macierzowych (lokalnie) klasy C^k

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2, \mathbb{K}), \quad i \in I$$

spełniających warunki: (4.1.9) oraz

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_i} : \Gamma_i^2(x) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes h_i(x)) = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes h_i(x)) \circ \Gamma_i^1(x) - dh_i(x).$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu. W szczególności w przypadku izomorfizmu wiązek wektorowych z powiązaniem (nad dyfeomorfizmem baz), nieodzownie tego samego rzędu $n_1 = n_2 \equiv n$, zachodzi

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \text{GL}(n; \mathbb{K}), \quad i \in I.$$

■

Dowód: W świetle Tw. 196 do udowodnienia pierwszej części tezy brakuje jedynie uzasadnienia relacji spełnianej przez macierze symboli Christoffela. Przywoławszy reprezentację

$$h_i(x) := h_{i\,ar}(x) \triangleright \varepsilon(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} f_r), \quad x \in \mathcal{O}_i$$

danych lokalnych morfizmu (Φ, id_B) z dowodu Stw. 196, a w odwołaniu do aksjomatyki pochodnej Koszula oraz Tw. 4.2.9, obliczamy tę ostatnią bezpośrednio na każdej ze stron wyprowadzonej tam równości (4.1.11) z osobna, co daje nam – odpowiednio –

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)}(\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) &= \mathbb{L}_{\partial_\mu h_{i\,ar}(x)}^2(\phi_r^{(i)}(x)) + \mathbb{L}_{h_{i\,ar}(x)}^2(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)}\phi_r^{(i)}(x)) \\ &= \mathbb{L}_{\partial_\mu h_{i\,as}(x)}^2(\phi_s^{(i)}(x)) + \mathbb{L}_{h_{i\,ar}(x) \cdot \Gamma_{i\,\mu r}^{(2)s}(x)}^2(\phi_s^{(i)}(x)) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)}(\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) &= \Phi(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)}\varepsilon_a^{(i)})(x) = \Phi \circ \mathbb{L}_{\Gamma_{i\,\mu a}^{(1)b}(x)}^{(1)}(\varepsilon_b^{(i)}(x)) \\ &= \mathbb{L}_{\Gamma_{i\,\mu a}^{(1)b}(x)}^{(2)} \circ \Phi(\varepsilon_b^{(i)}(x)) = \mathbb{L}_{\Gamma_{i\,\mu a}^{(1)b}(x) \cdot h_{i\,bs}(x)}^{(2)}(\phi_s^{(i)}(x)). \end{aligned}$$

Z porównania obu wyników wyprowadzamy postulowaną tożsamość.

I odwrotnie, niechaj $h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})$ będą odwzorowaniami macierzowymi opisanymi w treści stwierdzenia. Wówczas możemy zdefiniować odwzorowania lokalne

$$\begin{aligned} \Phi_i & : \pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}_2}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ & : \tau_i^{1-1}(x, v^a \triangleright_{n_1} e_a) \longmapsto \tau_i^{2-1}(x, v^a h_{i ar}(x) \triangleright_{n_2} f_r), \quad i \in I. \end{aligned}$$

W dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ zachodzi przy tym równość

$$\begin{aligned} \Phi_j \circ \tau_i^{1-1}(x, e_a) & = \Phi_j \circ \tau_j^{1-1}(x, g_{ji ab}^1(x) \triangleright_{n_1} e_b) \\ & = \tau_j^{2-1}(x, g_{ji ab}^1(x) h_{j br}(x) \triangleright_{n_2} f_r) \\ & = \tau_j^{2-1}(x, h_{i as}(x) g_{ji sr}^2(x) \triangleright_{n_2} f_r) \\ & = \tau_i^{2-1}(x, h_{i as}(x) \triangleright_{n_2} f_s) = \Phi_i \circ \tau_i^{1-1}(x, e_a), \end{aligned}$$

która w połączeniu z dowodem \mathbb{K} -liniowości odwzorowań Φ_i ,

$$\begin{aligned} \Phi_i \circ \mathbb{L}_\lambda^1(\tau_i^{1-1}(x, v^a \triangleright_{n_1} e_a)) & = \Phi_i \circ \tau_i^{1-1}(x, \lambda v^a \triangleright_{n_1} e_a) \\ & = \tau_i^{2-1}(x, \lambda v^a h_{i ar}(x) \triangleright_{n_2} f_r) = \mathbb{L}_\lambda^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, v^a h_{i ar}(x) \triangleright_{n_2} f_r) \\ & \equiv \mathbb{L}_\lambda^2 \circ \Phi_i(\tau_i^{1-1}(x, v^a \triangleright_{n_1} e_a)), \end{aligned}$$

pokazuje dowodnie, że mamy do czynienia z odwzorowaniem globalnie gładkim $\Phi : \mathbb{V}_1 \longrightarrow \mathbb{V}_2$ o ograniczeniach $\Phi|_{\pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$. Pozostaje sprawdzić warunek (VFCM4) z Tw. 4.2.9, co czynimy najpierw na cięciach bazowych

$$\begin{aligned} \Phi(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} \varepsilon_a^{(i)})(x) & = \Phi \circ \mathbb{L}_{\Gamma_{i\mu a}^{1b}}^1(\varepsilon_b^{(i)}(x)) = \Phi \circ \tau_i^{1-1}(x, \Gamma_{i\mu a}^{1b}(x) \triangleright_{n_1} e_a) \\ & \equiv \tau_i^{2-1}(x, \Gamma_{i\mu a}^{1b}(x) h_{i ar}(x) \triangleright_{n_2} f_r) \\ & = \tau_i^{2-1}(x, (h_{i ar}(x) \Gamma_{i\mu r}^{2s}(x) + \partial_\mu h_{i as}(x)) \triangleright_{n_2} f_s) \\ & \equiv \mathbb{L}_{h_{i ar}(x) \Gamma_{i\mu r}^{2s}(x)}^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, f_s) + \mathbb{L}_{\partial_\mu h_{i as}(x)}^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, f_s) \\ & \equiv \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} \tau_i^{2-1}(\cdot, h_{i ar}(\cdot) \triangleright_{n_2} f_r)(x) \\ & \equiv \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} (\Phi \circ \tau_i^{1-1}(\cdot, e_a))(x) = \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} (\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x), \end{aligned}$$

a na zakończenie – na ogólnych, postaci $\sigma(x) = \tau_i^{1-1}(x, \sigma_i^a(x) \triangleright_{n_1} e_a)$, wykorzystując oba ostatnie rezultaty,

$$\begin{aligned} \Phi(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} \sigma)(x) & = \Phi(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} (\mathbb{L}_{\sigma_i^a(\cdot)}^1(\varepsilon_a^{(i)}(\cdot))))(x) \\ & = \Phi(\mathbb{L}_{\sigma_i^a(\cdot)}^1(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} \varepsilon_a^{(i)}(\cdot)) + \mathbb{L}_{\partial_\mu \sigma_i^a(\cdot)}^1(\varepsilon_a^{(i)}(\cdot)))(x) \\ & = \mathbb{L}_{\sigma_i^a(x)}^2 \circ \Phi(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} \varepsilon_a^{(i)}(\cdot))(x) + \mathbb{L}_{\partial_\mu \sigma_i^a(x)}^2 \circ \Phi(\varepsilon_a^{(i)}(x)) \\ & = \mathbb{L}_{\sigma_i^a(x)}^2 \circ \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} (\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) + \mathbb{L}_{\partial_\mu \sigma_i^a(x)}^2 \circ (\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)}(\mathbb{L}_{\sigma_i^a(\cdot)}^2 \circ \Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) = \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)}(\Phi \circ \mathbb{L}_{\sigma_i^a(\cdot)}^2 \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) \\
&\equiv \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)}(\Phi \circ \sigma)(x).
\end{aligned}$$

Uwaga dotycząca postaci danych lokalnych izomorfizmu wiązek wektorowych jest oczywista. \square

DEFINICJA 139. Przyjmijmy zapis Def. 43 i Stw. 210. Lokalne 1-formy powiązania Γ_i na wiązce wektorowej \mathbb{V} zadają globalnie gładką 2-formę na bazie o ograniczeniach

$$F|_{\mathcal{O}_i} := (\text{id}_{\wedge^2 \mathbb{T}^* B} \otimes \text{tr}_{\mathbb{K}^{n \times n}})(d\Gamma_i + \Gamma_i \wedge \Gamma_i).$$

Formę tę nazywamy **krzywizną (skalarną) powiązania liniowego na wiązce** \mathbb{V} i oznaczamy symbolem

$$\text{curv}(\nabla^{\mathbb{K}}) \equiv F.$$

Powiązanie liniowe płaskie to takie, którego krzywizna jest tożsamościowo równa zeru. \blacktriangle

UWAGA 56. O sensowności powyższej definicji przekonujemy się w bezpośrednim rachunku wykorzystującym Stw. 210, oto bowiem w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned}
d\Gamma_j(x) + \Gamma_j(x) \wedge \Gamma_j(x) &= d((\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x)) \\
&\quad + ((\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x)) \\
&\quad \wedge ((\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x)) \\
&= -g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \wedge ((\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) \\
&\quad + ((\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})d\Gamma_i(x) \\
&\quad - ((\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) \wedge g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \\
&\quad - g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \wedge g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \\
&\quad + (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})(\Gamma_i(x) \wedge \Gamma_i(x)) \\
&\quad + (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) \wedge g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \\
&\quad + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \wedge (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) \\
&\quad + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \wedge g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \\
&= (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})(d\Gamma_i(x) + \Gamma_i(x) \wedge \Gamma_i(x)),
\end{aligned}$$

która pozwala stwierdzić, że

$$(\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{tr}_{\mathbb{K}^{n \times n}})(d\Gamma_j + \Gamma_j \wedge \Gamma_j) = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{tr}_{\mathbb{K}^{n \times n}})(d\Gamma_i + \Gamma_i \wedge \Gamma_i).$$

STWIERDZENIE 211. *Powiązania \mathbb{K} -liniowe na wiązках wektorowych (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) nad ustaloną bazą, między którymi istnieje izomorfizm wiązek wektorowych z powiązaniem pokrywający identyczność na bazie, mają tożsame krzywizny skalarne.* ■

Dowód: W świetle Tw. 4.2.11 wystarczy sprawdzić niezmienniczość krzywizny względem transformacji

$$\Gamma_i \longmapsto (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i - dh_i h_i^{-1} =: \Gamma_i^\theta.$$

Czynimy to w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} d\Gamma_i^\theta + \Gamma_i^\theta \wedge \Gamma_i^\theta &= d((\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i - dh_i h_i^{-1}) \\ &\quad + ((\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i - dh_i h_i^{-1}) \wedge ((\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i - dh_i h_i^{-1}) \\ &= dh_i h_i^{-1} \wedge (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i + (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})d\Gamma_i \\ &\quad + (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i \wedge dh_i h_i^{-1} - dh_i h_i^{-1} \wedge dh_i h_i^{-1} \\ &\quad + (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})(\Gamma_i \wedge \Gamma_i) - (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i \wedge dh_i h_i^{-1} \\ &\quad - dh_i h_i^{-1} \wedge (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i + dh_i h_i^{-1} \wedge dh_i h_i^{-1} \\ &= (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})(d\Gamma_i + \Gamma_i \wedge \Gamma_i), \end{aligned}$$

z którego już wprost wynika pożądana własność krzywizny skalarnej. □

2.2. Powiązanie główne na wiązce głównej.

DEFINICJA 140. Przyjmijmy zapis Def. 127 i 130. Powiązanie włókien w wiązce głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) nazywamy **zgodnym z działaniem grupy strukturalnej**, ilekroć dyfeomorfizmy (klasy C^k)

$$P_{t_1, t_2}^\gamma : P_G \gamma(t_1) \xrightarrow{\cong} P_G \gamma(t_2), \quad t_1, t_2 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

spełniają warunki

$$(4.2.25) \quad \forall_{g \in G} : P_{t_1, t_2}^\gamma \circ r_g \upharpoonright_{P_G \gamma(t_1)} = r_g \circ P_{t_1, t_2}^\gamma,$$

przy czym wtedy

$$(4.2.26) \quad \nabla_{\mathcal{V}}(r_g \circ \sigma)(x) = T_{\sigma(x)} r_g (\nabla_{\mathcal{V}} \sigma(x)).$$

Powiązanie takie określamy również mianem **powiązania głównego włókien w wiązce P_G** . ▲

DEFINICJA 141. Przyjmijmy zapis Def. 127 i 131. Powiązanie Ehresmanna na wiązce głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) nazywamy **zgodnym z działaniem grupy strukturalnej**, ilekroć odwzorowania $r_g, g \in G$ spełniają warunek

$$(4.2.27) \quad \forall_{p \in P_G} : H_{r_g(p)} P_G = T_p r_g (H_p P_G).$$

Powiązanie takie określamy również mianem **Ehresmanna powiązania głównego** na P_G .



STWIERDZENIE 212. *Przyjmijmy zapis Def. 9 i 127 oraz Stw. 121 i niechaj \mathfrak{g} będzie algebrą Liego grupy strukturalnej G wiązki głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) . Podwiązka pionowa VP_G wiązki stycznej TP_G nad przestrzenią totalną P_G jest trywialna w rozumieniu Przykł. 36 (1) i istnieje kanoniczny izomorfizm wiązek wektorowych (nad \mathbb{R})*

$$(VP_G, P_G, \mathbb{K}^{\dim G}, \pi_{TP_G} \upharpoonright_{VP_G}) \cong (P_G \times \mathfrak{g}, P_G, \mathbb{K}^{\dim G}, \text{pr}_1).$$



Dowód: Rozważmy odwzorowanie (jawnie \mathbb{R} -liniowe i C^k -gładkie)

$$\widetilde{\text{Vert.}} : P_G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{(\mathbf{0}_{TP_G}, \text{id}_{\mathfrak{g}})} TP_G \times \mathfrak{g} \cong T_{(\cdot, e)}(P_G \times G) \xrightarrow{T_{(\cdot, e)}r} VP_G \subset TP_G$$

$$(4.2.29) \quad : (p, X) \mapsto (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) \mapsto T_{(p, e)}r \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) \equiv \widetilde{\text{Vert}}_p(X),$$

w którego definicji wykorzystujemy zerowe cięcie $\mathbf{0}_{TP_G}$ wiązki wektorowej TP_G nad P_G . Przeciwdziedzina powyższego odwzorowania jest poprawnie określona, oto bowiem z uwagi na charakter działania definiującego r mamy

$$\begin{aligned} T_p \pi_{P_G}(\widetilde{\text{Vert}}_p(X)) &\equiv T_p \pi_{P_G} \circ T_{(p, e)}r \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) = T_{(p, e)}(\pi_{P_G} \circ r) \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) \\ &= T_{(p, e)}(\pi_{P_G} \circ \text{pr}_1) \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) = T_{(p, e)}(\pi_{P_G} \circ \mathbf{0}_{TP_G}(p)) \\ &= \mathbf{0}_{TB} \circ \pi_{P_G}(p), \end{aligned}$$

czyli – w istocie – nad dowolnym punktem $p \in P_G$ zachodzi inkluzja

$$\text{Im } \widetilde{\text{Vert}}_p \subset V_p P_G,$$

a przy tym odwzorowanie $\widetilde{\text{Vert.}}$ pokrywa identyczność na wspólnej bazie obu wiązek,

$$\pi_{P_G}(\widetilde{\text{Vert}}_p(X)) = p \equiv \text{pr}_1(p, X),$$

mamy przeto do czynienia z morfizmem wiązek wektorowych nad P_G , a ponieważ obrazem pola (stałego) (\cdot, X) jest pole fundamentalne na P_G stowarzyszone z $X \ni \mathfrak{g}$,

$$(4.2.30) \quad T_{(\cdot, e)}r \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(\cdot), X) = \mathcal{K}_X$$

co pokazuje poniższy rachunek, przeprowadzony dla dowolnej $f \in C^1(P_G, \mathbb{R})$ w punkcie (dowolnym) $p \in P_G$,

$$\begin{aligned} T_{\cdot, e}r \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(\cdot), X)(f)(p) &= T_{p, e}r \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) \lrcorner df(p) \\ &= (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) \lrcorner d(r^*f)(p, e) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f(p \triangleleft \exp(t \triangleright X)), \end{aligned}$$

więc też wobec swobodnego charakteru działania G na P_G otrzymujemy równoważność

$$\widetilde{\text{Vert}}_p(X) = 0_{T_p P_G} \iff X = 0_{\mathfrak{g}},$$

czyli $\widetilde{\text{Vert.}}$ jest monomorfizmem. Na podstawie porównania rzędów obu wiązek,

$$\text{rk}(P_G \times \mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim G \equiv \dim P_{\pi_{P_G}(p)} = \dim_{\mathbb{R}} T_p(P_{\pi_{P_G}(p)}) \equiv \text{rk } VP_G,$$

wnioskujemy, że $\widetilde{\text{Vert}}$ jest w istocie postulowanym izomorfizmem. \square

UWAGA 57. Powyższe stwierdzenie pozwala przekonać się, że analogicznie jak w przypadku wiązek wektorowych (por.: Uwagę 53) podwiązka pionowa jest automatycznie zachowywana przez $\text{T}r_g$. Istotnie, dla dowolnego wektora $v \in \text{V}_p\text{P}_G$, $p \in \text{P}_G$ będącego przeciwobrazem $X = \text{pr}_2 \circ \widetilde{\text{Vert}}_p^{-1}(v) \in \mathfrak{g}$ i dowolnego elementu $g \in G$ obliczamy

$$\begin{aligned} \text{T}_p r_g(v) &= \text{T}_p r_g \circ \widetilde{\text{Vert}}_p(X) \equiv \text{T}_p r_g \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p \triangleleft \exp(t \triangleright X) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r_g(p \triangleleft \exp(t \triangleright X)) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r_g(p) \triangleleft \text{Ad}_{g^{-1}}(\exp(t \triangleright X)), \end{aligned}$$

ale też w świetle Stw. 128 zachodzi tożsamość

$$\text{Ad}_{g^{-1}}(\exp(t \triangleright X)) = \exp(t \triangleright \text{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(X)),$$

możemy zatem powyższą równość przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \text{T}_p r_g(v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r_g(p) \triangleleft \exp(t \triangleright \text{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(X)) \\ &\equiv \widetilde{\text{Vert}} \circ (r_g \times \text{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \widetilde{\text{Vert}}_p^{-1}(v), \end{aligned}$$

skąd wniosek, że

$$(4.2.31) \quad \text{T}_p r_g \Big|_{\text{V}_p \text{P}_G} = \widetilde{\text{Vert}} \circ (r_g \times \text{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \widetilde{\text{Vert}}_p^{-1},$$

ten zaś dowodzi izomorficznego charakteru odwzorowania

$$\text{T}_p r_g \Big|_{\text{V}_p \text{P}_G} : \text{V}_p \text{P}_G \longrightarrow \text{V}_{r_g(p)} \text{P}_G.$$

DEFINICJA 142. Przyjmijmy zapis Def. 127 i 132, Stw. 212 oraz Przykł. 7 (4). **Forma powiązania głównego** na wiązce głównej $(\text{P}_G, B, G, \pi_{\text{P}_G})$ to morfizm wiązek wektorowych nad \mathbb{R}

$$(\mathcal{A}, \text{id}_B) : \text{TP}_G \longrightarrow \text{P}_G \times \mathfrak{g}$$

o własnościach

$$(4.2.32) \quad \mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert}} = \text{id}_{\text{P}_G \times \mathfrak{g}}.$$

oraz

$$(4.2.33) \quad \forall_{g \in G} : \mathcal{A} \circ \text{T}r_g = (r_g \times \text{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}.$$

▲

TWIERDZENIE 4.2.12. *W dowolnej wiązce głównej powiązanie główne włókien wyznacza Ehresmanna powiązanie główne i vice versa. Ponadto Ehresmanna powiązanie główne w tejże wiązce określa na niej formę powiązania głównego i vice versa.*

■

Dowód: Różniczkując tożsamość (4.2.25), zapisaną dla $(t_1, t_2) = (0, t)$, względem t w $t = 0$, otrzymujemy – dla dowolnego $p \in \text{P}_G \gamma(0)$ –

$$\begin{aligned} \text{Hor}_{r_g(p)}(\dot{\gamma}(0)) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{P}_{0,t}^\gamma(r_g(p)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r_g \circ \text{P}_{0,t}^\gamma(p) = \text{T}_p r_g \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{P}_{0,t}^\gamma(p) \right) \\ &= \text{T}_p r_g \circ \text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0)), \end{aligned}$$

co wobec dowolności γ i bijektywności Hor_p pozwala stwierdzić, że spełniony jest warunek (4.2.27).

I odwrotnie, wybrawszy dowolną ścieżkę $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow B$, $\varepsilon > 0$ spełniającą warunki $\gamma(0) = x$ i $\dot{\gamma}(0) = X \in T_x B$, a następnie – punkty: $p \in P_x$ i $g \in G$, podnosimy γ poziomo do P_G tworząc ścieżkę

$$\tilde{\gamma}_p :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow P_G$$

całkującą zagazanie początkowe

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_p(t) = \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}_p(0) = p,$$

gdzie – przypomnijmy – $\text{Hor}_q = (T_q \pi_{P_G} \upharpoonright_{H_q P_G})^{-1}$. Niech też $\tilde{\gamma}_{r_g(p)}$ będzie podniesieniem poziomym γ do P_G przez $\tilde{\gamma}_{r_g(p)}(0) = r_g(p)$. Obliczamy

$$\frac{d}{dt} r_g \circ \tilde{\gamma}_p(t) = T_{\tilde{\gamma}_p(t)} r_g \left(\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_p(t) \right) = T_{\tilde{\gamma}_p(t)} r_g \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t)) = \text{Hor}_{r_g \circ \tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t)),$$

przy czym ostatnia równość, odzwierciedlająca założoną zgodność powiązania Ehresmanna z działaniem grupy, pokazuje, że pchnięcie podniesienia (do p w $t = 0$) pola stycznego do γ , czyli $T_{\tilde{\gamma}_p(t)} r_g \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t))$, jest także polem poziomym, czyli pewnym podniesieniem poziomym $\dot{\gamma}(t)$ (do $r_g \circ \tilde{\gamma}_p(0) = r_g(p)$ w $t = 0$). Krzywą całkową (lokalnie jedyną) poziomego podniesienia $\dot{\gamma}$ do TP_G przez $r_g(p)$ jest jednak – wprost z definicji – ścieżka $\tilde{\gamma}_{r_g(p)}$, zatem nieodzownie

$$\tilde{\gamma}_{r_g(p)} = r_g \circ \tilde{\gamma}_p,$$

a to w świetle konstrukcji dyfeomorfizmu P_{t_1, t_2}^γ oznacza pożądaną jego G -ekwiwariantność, (4.2.25).

Przechodząc do drugiej części tezy dowodzonego twierdzenia, rozważamy powiązanie główne $TP_G = VP_G \oplus_{\mathbb{R}, P_G} HP_G$, $H_{r_g(p)} P_G = T_p r_g(H_p P_G)$, które pozwala – w świetle Stw. 212 – zdefiniować morfizm wiązek wektorowych (nad \mathbb{R})

$$(4.2.34) \quad (\mathcal{A}, \text{id}_B) := (\widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ P_{VP_G}^{(HP_G)}, \text{id}_B) : TP_G \rightarrow VP_G \xrightarrow{\cong} P_G \times \mathfrak{g},$$

w którego zapisie $P_{VP_G}^{(HP_G)}$ jest gładką (klasy C^k) rodziną rzutów na podprzestrzeń wektorów pionowych wzdłuż podprzestrzeni wektorów poziomych. Morfizm ten ma pożądaną własność:

$$\mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert.}} = \widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ P_{VP_G}^{(HP_G)} \equiv \text{Vert.}^{-1} \circ \widetilde{\text{Vert.}} = \text{id}_{P_G \times \mathfrak{g}}.$$

Ponadto na mocy Równ. (4.2.31) i założonej G -niezmienniczości rozkładu $TP_G = VP_G \oplus_{\mathbb{R}, P_G} HP_G$ otrzymujemy, zgodnie z oczekiwaniami,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ T r_g &\equiv \widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ P_{VP_G}^{(HP_G)} \circ T r_g = \widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ T r_g \circ P_{VP_G}^{(HP_G)} \\ &= \widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ (\widetilde{\text{Vert.}} \circ (r_g \times T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \widetilde{\text{Vert.}}^{-1}) \circ P_{VP_G}^{(HP_G)} \\ &\equiv (r_g \times T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}. \end{aligned}$$

I odwrotnie, forma powiązania głównego definiuje – w świetle Stw. 197 – podwiązkę wektorową

$$(4.2.35) \quad HP_G := \text{Ker } \mathcal{A} \subset TP_G.$$

Przy tym dla dowolnego $v \in \text{Ker}(T\pi_{P_G} \upharpoonright_{H_p P_G}) \equiv \text{Ker}(\mathcal{A} \upharpoonright_{TP_G}) \cap \text{Ker}(T\pi_{P_G} \upharpoonright_{TP_G})$ stwierdzamy, że

$$v = \widetilde{\text{Vert.}} \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v) \equiv \widetilde{\text{Vert.}} \circ \text{id}_{P_G \times \mathfrak{g}} \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v) = \widetilde{\text{Vert.}} \circ (\mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert.}}) \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v)$$

$$= \widetilde{\text{Vert.}} \circ \mathcal{A}(v) = 0_{T_p P_G},$$

co przesądza o iniektywności $T\pi_{P_G} \upharpoonright_{H_p P_G}$ i (tym samym) dowodzi istnienia izomorfizmu

$$\text{Im}(T\pi_{P_G} \upharpoonright_{H_p P_G}) \cong H_p P_G.$$

Zarazem dla $\mathcal{A} \upharpoonright_{T_p P_G} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p P_G, \mathfrak{g})$ jest spełniona równość

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(\mathcal{A} \upharpoonright_{T_p P_G}) &= \dim_{\mathbb{R}} T_p P_G - \dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(\mathcal{A} \upharpoonright_{T_p P_G}) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} V_p P_G + \dim_{\mathbb{R}} T_{\pi_{P_G}(p)} B - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{R}} T_{\pi_{P_G}(p)} B, \end{aligned}$$

co oznacza, że $T\pi_{P_G} \upharpoonright_{H_p P_G}$ jest w istocie izomorfizmem. Na koniec przekonamy się o G -niezmienniczości tak określonej podwiązki poziomej. Niech zatem $\xi \in H_p P_G \equiv \text{Ker}(\mathcal{A} \upharpoonright_{T_p P_G})$, a wtedy

$$\mathcal{A} \circ T_p r_g(\xi) = (r_g \times T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}(\xi) = (r_g(p), T_e \text{Ad}_{g^{-1}}(0_{\mathfrak{g}})) = (r_g(p), 0_{\mathfrak{g}}),$$

więc prawdziwą jest inkluzja

$$T_p r_g(H_p P_G) \subset H_{r_g(p)} P_G,$$

ale też w takim razie – wobec odwracalności $T_p r_g$ –

$$T_{r_g(p)} r_{g^{-1}}(H_{r_g(p)} P_G) \subset H_{r_g^{-1} \circ r_g(p)} P_G = H_p P_G,$$

czyli

$$H_{r_g(p)} P_G \equiv T_p r_g \circ T_{r_g(p)} r_{g^{-1}}(H_{r_g(p)} P_G) \subset T_p r_g(H_p P_G),$$

co koniec końców daje nam pożądaną równość

$$T_p r_g(H_p P_G) = H_{r_g(p)} P_G.$$

□

TWIERDZENIE 4.2.13. *Na dowolnej wiązce głównej istnieje powiązanie główne.*

■

Dowód: Niechaj (P_G, B, G, π_{P_G}) będzie wiązką główną o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$, $i \in I$. Wykorzystując relacje

$$T_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times G) \equiv T_x \mathcal{O}_i \oplus T_g G \equiv T_x \mathcal{O}_i \oplus T_e \ell_g(\mathfrak{g}),$$

nad każdym z elementów pokrycia trywializującego \mathcal{O}_i definiujemy odwzorowanie

$$\mathcal{A}_i : T\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathfrak{g} : T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, V) \longmapsto (\tau_i^{-1}(x, g), T_g \ell_{g^{-1}}(V)),$$

jawnie \mathbb{R} -liniowe i zachowujące włókna. Sprawdzamy, że odwzorowania te mają własności wymienione w Def. 142. Po pierwsze więc, korzystając z przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times G & \xrightarrow{r} & \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times G \times G & \xrightarrow{\text{id}_B \times m} & \mathcal{O}_i \times G \end{array}$$

oraz Równ. (1.5.4), obliczamy – dla dowolnego wektora $X \in \mathfrak{g}$ –

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\tau_i^{-1}(x,g)}(X) \equiv \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)} r. (\mathbf{0}_{\text{TPG}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X) \\
&= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ \mathbb{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)} (\tau_i \circ r.) (\mathbf{0}_{\text{TPG}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X) \\
&= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ \mathbb{T}_{(x,g,e)} (\text{id}_B \times m) \circ \mathbb{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)} (\tau_i \times \text{id}_G) (\mathbf{0}_{\text{TPG}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X) \\
&= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ (\mathbb{T}_x \text{id}_B \oplus \mathbb{T}_{(g,e)} m) (\mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i \circ \mathbf{0}_{\text{TPG}} \circ \tau_i^{-1}(x,g), \mathbb{T}_e \text{id}_G(X)) \\
&= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ (\text{id}_{\mathbb{T}_x B} \oplus \mathbb{T}_{(g,e)} m) (0_{\mathbb{T}_x B}, 0_{\mathbb{T}_g G}, \text{id}_{\mathbb{T}_e G}(X)) \\
&\equiv (\tau_i^{-1}(x,g), \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_{(g,e)} m(0_{\mathbb{T}_g G}, X)) = (\tau_i^{-1}(x,g), \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_e \ell_g(X)) \\
&= (\tau_i^{-1}(x,g), X) \equiv \text{id}_{\mathbb{P}_G \times \mathfrak{g}} (\tau_i^{-1}(x,g), X)
\end{aligned}$$

Po drugie w dotychczasowych oznaczeniach i dla dowolnego elementu $h \in G$, a w odwołaniu do diagramu przemiennej

$$\begin{array}{ccc}
\pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{r_h} & \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\
\uparrow \tau_i^{-1} & & \uparrow \tau_i^{-1} \\
\mathcal{O}_i \times G & \xrightarrow{\text{id}_B \times \wp_h} & \mathcal{O}_i \times G
\end{array}$$

sprawdzamy warunek G-ekwiwariantności \mathcal{A}_i ,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T} r_h \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, V) = \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,gh)} \tau_i^{-1} \circ \mathbb{T}_{(x,g)} (\text{id}_B \times \wp_h)(v, V) \\
&= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,gh)} \tau_i^{-1} \circ (\mathbb{T}_x \text{id}_B \oplus \mathbb{T}_g \wp_h)(v, V) \\
&= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,gh)} \tau_i^{-1} (\text{id}_{\mathbb{T}_x B}(v), \mathbb{T}_g \wp_h(V)) \equiv (\tau_i^{-1}(x,gh), \mathbb{T}_g \ell_{(gh)^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \wp_h(V)) \\
&= (r_h \circ \tau_i^{-1}(x,g), \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}(V)) \\
&\equiv (r_h \times \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, V).
\end{aligned}$$

W świetle powyższych wyników \mathcal{A}_i tworzą rodzinę lokalnych form powiązania głównego. Na gruncie rozumowania w pełni analogicznego do tego przedstawionego w dowodzie Tw. 4.2.6, więc w szczególności wykorzystując w tym celu dowolny rozkład jedności $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ (klasy C^k) stowarzyszony z pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, tworzymy z nich formę określoną (gładką) globalnie

$$\mathcal{A}(\cdot) := \sum_{i \in I} \rho_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G} \circ \pi_{\text{TPG}}(\cdot) \triangleright \mathcal{A}_i(\cdot),$$

o pożądanym własnościach. □

TWIERDZENIE 4.2.14. *Przyjmijmy zapis Def. 127, 133 oraz 142 i niechaj*

$$\begin{array}{ccc} P_G^1 & \xrightarrow{\Phi} & P_G^2 \\ \pi_{P_G^1} \downarrow & & \downarrow \pi_{P_G^2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

będzie morfizmem wiązek głównych (o tej samej grupie strukturalnej) z powiązaniem głównym (nad dyfeomorfizmem baz). Każdy z (wzajem równoważnych) warunków (FCM1), (FCM2) i (FCM3) z Def. 133, które w przypadku wiązek głównych z powiązaniem głównym uzupełniamy o wymóg G-ekwiwariantności (4.1.12), jest równoważny warunkowi:

(PFCM4) morfizm Φ zachowuje formę powiązania głównego w rozumieniu równości

$$\mathcal{A}_2 \circ T\Phi = (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1.$$

■

Dowód: Na gruncie Tw. 4.2.3 możemy ograniczyć się do sprawdzenia prawdziwości poniższych implikacji.

(FCM2) \Rightarrow (PFCM4) Wziąwszy pod uwagę definicję (4.2.29) oraz warunek (4.1.12), ustalamy tożsamość:

$$\begin{aligned} & \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_p \Phi \circ \widetilde{\text{Vert}}^1(p, X) \equiv \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_p \Phi \circ T_{(p,e)} r^1(\mathbf{0}_{\text{TP}_G^1}(p), X) \\ &= \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_{(p,e)}(\Phi \circ r^1)(\mathbf{0}_{\text{TP}_G^1}(p), X) \\ &= \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_{(p,e)}(r^2 \circ (\Phi \times \text{id}_G))(\mathbf{0}_{\text{TP}_G^1}(p), X) \\ &= \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_{(\Phi(p),e)} r^2 \circ (T_p \Phi \oplus T_e \text{id}_G)(\mathbf{0}_{\text{TP}_G^1}(p), X) \\ &= \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_{(\Phi(p),e)} r^2(T_p \Phi \circ \mathbf{0}_{\text{TP}_G^1}(p), \text{id}_{T_e G}(X)) \\ &= \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_{(\Phi(p),e)} r^2(\mathbf{0}_{\text{TP}_G^2} \circ \Phi(p), X) = (\Phi(p), X) \equiv (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}})(p, X), \end{aligned}$$

zapisaną tu dla dowolnych $(p, X) \in P_G^1 \times \mathfrak{g}$. Wobec powyższego oraz Równ. (4.2.34) zachodzi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 \circ T\Phi &\equiv \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ P_{\text{VP}_G^2}^{(\text{HP}_G^2)} \circ T\Phi = \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T\Phi \circ P_{\text{VP}_G^1}^{(\text{HP}_G^1)} \\ &\equiv \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T\Phi \circ \widetilde{\text{Vert}}^1 \circ \mathcal{A}_1 = (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1. \end{aligned}$$

(PFCM4) \Rightarrow (FCM2) W świetle Równ. (4.2.35) wystarczy jedynie upewnić się, że nad dowolnym punktem $p \in P_G^1$ zachodzi inkluzja

$$T_p \Phi(\text{Ker}(\mathcal{A}_1 \upharpoonright_{T_p P_G^1})) \subset \text{Ker}(\mathcal{A}_2 \upharpoonright_{T_{\Phi(p)} P_G^2}),$$

co czynimy w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 \circ T_p \Phi(\text{Ker}(\mathcal{A}_1 \upharpoonright_{T_p P_G^1})) &= (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1(\text{Ker}(\mathcal{A}_1 \upharpoonright_{T_p P_G^1})) \\ &= (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}})(\{(p, 0_{\mathfrak{g}})\}) = \{(\Phi(p), 0_{\mathfrak{g}})\}. \end{aligned}$$

□

STWIERDZENIE 213. *Przyjmijmy zapis Def. 130, 127 oraz Uwagi 50 i niechaj ∇ będzie pochodną kowariantną na wiązce głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) stwarzoną z powiązaniem głównym. Odwzorowania α_i , $i \in I$ o definicji (4.2.8) są $C^k(B, G)$ -ekwiwariantne w drugim argumencie, tj. dla dowolnych: odwzorowania $g \in C^k(B, G)$ oraz cięcia $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(P_G)$ przyjmującego postać $\tau_i \circ \sigma(\cdot) = (\cdot, \sigma_i(\cdot))$ w obrazie trywializacji lokalnej $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$ zachodzi*

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_i} : \alpha_i(x, r_{g(x)}(\sigma(x))) = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)}) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)).$$

■

Dowód: Podobnie jak we wcześniejszym dowodzie Stw. 208 kluczowym dla naszych rozważań okaże się związek między pochodną kowariantną a formą powiązania głównego. W świetle równości

$$P_{\sqrt{P_G}}^{(\text{HP}_G)} \upharpoonright_{T_p P_G} \equiv \text{id}_{T_p P_G} - \text{Hor}_p \circ T_p \pi_{P_G}$$

oraz Równ. (4.2.7) możemy ustalić – dla dowolnego cięcia σ jak w treści stwierdzenia oraz dowolnego pola wektorowego $\mathcal{V} \in \Gamma_{(\text{loc})}(TB)$ – związek

$$\begin{aligned} P_{\sqrt{P_G}}^{(\text{HP}_G)} \circ T_x \sigma(\mathcal{V}) &= T_x \sigma(\mathcal{V}) - \text{Hor}_{\sigma(\cdot)} \circ T_{\sigma(\cdot)} \pi_{P_G} \circ T_x \sigma(\mathcal{V}) \\ &= T_x \sigma(\mathcal{V}) - \text{Hor}_{\sigma(\cdot)} \circ T_x (\pi_{P_G} \circ \sigma)(\mathcal{V}) = T_x \sigma(\mathcal{V}) - \text{Hor}_{\sigma(\cdot)} \circ T_x \text{id}_B(\mathcal{V}) \\ &= T_x \sigma(\mathcal{V}) - \text{Hor}_{\sigma(\cdot)}(\mathcal{V}) \equiv \nabla_{\mathcal{V}} \sigma(\cdot) \end{aligned}$$

W połączeniu z Równ. (4.2.34) daje nam to przydatną równość

$$(4.2.36) \quad \nabla_{\mathcal{V}} \sigma(\cdot) = \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(\cdot)} \circ \mathcal{A} \circ T_x \sigma(\mathcal{V}).$$

Ta pozwala zapisać – w odwołaniu do szczegółowego rachunku przedstawionego w treści Uwagi 50 –

$$\begin{aligned} &T_x(\wp_{g(\cdot)}(\sigma_i(\cdot)))(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, r_{g(x)}(\sigma(x))) \\ &\equiv \varpi_i \circ T_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i(\nabla_{\mathcal{V}} r_{(\cdot)}(\sigma(\cdot))(x)) \\ &= \varpi_i \circ T_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A} \circ T_x(r_{(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(V) \\ &= \varpi_i \circ T_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A}(T_{\sigma(x)} r_{g(x)} \circ T_x \sigma(V) \\ &\quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_R^A)(x) R_A(r(\sigma(x)))(g(x))), \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej linijce mamy do czynienia z pochodną odwzorowania $r(\sigma(x)) : G \rightarrow P_G$ w kierunku pola prawoniezmienniczego R_A . Pochodną tę obliczamy bezpośrednio,

$$\begin{aligned} R_A(r(\sigma(x)))(g(x)) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} r(\sigma(x))(\exp(t \triangleright t_A) \cdot g(x)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} r_{g(x)} \circ r_{\exp(t \triangleright t_A)}(\sigma(x)) = T_{\sigma(x)} r_{g(x)} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} r_{\exp(t \triangleright t_A)}(\sigma(x)) \right) \\ &\equiv T_{\sigma(x)} r_{g(x)}(\mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))), \end{aligned}$$

gdzie \mathcal{K}_{t_A} jest polem wektorowym fundamentalnym (prawostronnym) na P_G stowarzyszonym z generatorem t_A algebry Liego \mathfrak{g} . Podstawiając powyższy wynik do naszego wcześniejszego rachunku, a następnie wykorzystując tożsamości (4.2.33) oraz (4.2.31), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \mathbb{T}_x(\wp_{g(\cdot)}(\sigma_i(\cdot)))(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, r_{g(x)}(\sigma(x))) \\
& \equiv \varpi_i \circ \mathbb{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i(\nabla_{\mathcal{V}} r_{(\cdot)}(\sigma(\cdot))(x)) \\
& = \varpi_i \circ \mathbb{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A}(\mathbb{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)} \circ \mathbb{T}_x \sigma(V) \\
& \quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \mathbb{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)}(\mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x)))) \\
& = \varpi_i \circ \mathbb{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A} \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)}(\mathbb{T}_x \sigma(V) \\
& \quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\
& = \varpi_i \circ \mathbb{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ (r_{g(x)} \times \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g(x)^{-1}}) \circ \mathcal{A}(\mathbb{T}_x \sigma(V) \\
& \quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\
& = \varpi_i \circ \mathbb{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)} \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}(\mathbb{T}_x \sigma(V) \\
& \quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\
& = \varpi_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i \circ \sigma(x)}(\text{id}_B \times \wp_{g(x)}) \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}(\mathbb{T}_x \sigma(V) \\
& \quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\
& = \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)} \circ \varpi_i \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}(\mathbb{T}_x \sigma(V) \\
& \quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\
& \equiv \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)}(\mathbb{T}_x \sigma_i(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x))) \\
& \quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \varpi_i \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))).
\end{aligned}$$

Jeśli teraz uwzględnić pionową naturę pól fundamentalnych \mathcal{K}_A (wynikającą z charakteru działania definiującego r), to można powyższe przepisać w postaci

$$\begin{aligned}
& \mathbb{T}_x(\wp_{g(\cdot)}(\sigma_i(\cdot)))(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, r_{g(x)}(\sigma(x))) \\
& = \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)}(\mathbb{T}_x \sigma_i(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x))) \\
& \quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \varpi_i \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)} \circ (\mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)}) \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)}^{-1}(\mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x)))) \\
& = \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)}(\mathbb{T}_x \sigma_i(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x))) \\
& \quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \varpi_i \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i(\mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))),
\end{aligned}$$

a stąd już wprost wynika pożądana równość

$$V \lrcorner \alpha_i(x, r_{g(x)}(\sigma(x))) = T_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)}(V \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x))).$$

□

DEFINICJA 143. Przyjmijmy zapis Def. 142 i niechaj $\tau_i : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$, $i \in I$ będą trywializacjami lokalnymi wiązki głównej $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$. Zdefiniujmy

$$s_{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, e).$$

Potencjał powiązania głównego \mathcal{A} na wiązce głównej \mathbb{P}_G nad \mathcal{O}_i (stowarzyszony z cięciami $s_{(i)}$) to odwzorowanie (klasy C^k)

$$A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

przyjmujące w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_i$ postać

$$(4.2.37) \quad A_i(x) := (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}) \circ T_x s_{(i)}.$$

▲

UWAGA 58. Na podstawie relacji (4.2.36) między pochodną kowariantną a formą powiązania głównego oraz treści Stw. 213, a w odwołaniu do tych samych obserwacji co w dowodzie Stw. 213 oraz do Równ. (4.2.30) wyprowadzamy (w użytych wcześniej oznaczeniach) dla cięcia

$$\sigma(x) = \tau_i^{-1}(x, \sigma_i(x)) = r_{\sigma_i(x)}(\tau_i^{-1}(x, e)) \equiv r_{\sigma_i(x)}(s_{(i)}(x))$$

związek

$$\begin{aligned} & (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)}^{-1})(\nabla \cdot \sigma(x)) = (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}) \circ T_x \sigma \\ & \equiv (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}) \circ T_x (r_{\sigma_i(\cdot)}(s_{(i)}(\cdot))) \\ & = (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}) \circ (\text{id}_{T^*B} \otimes T_{s_{(i)}(x)} r_{\sigma_i(x)}) \circ (T_x s_{(i)} + \sigma_i^* \theta_{\mathbb{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}(s_{(i)}(x))) \\ & = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}) \circ (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}) \circ (T_x s_{(i)} + \sigma_i^* \theta_{\mathbb{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}(s_{(i)}(x))) \\ & = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}) \circ (A_i(x) \\ & \quad + \sigma_i^* \theta_{\mathbb{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \text{pr}_2 \circ (\mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert}}_{s_i(x)}^{-1}) \circ \widetilde{\text{Vert}}_{s_i(x)}^{-1}(\mathcal{K}_{t_A}(s_{(i)}(x)))) \\ & = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}) \circ (A_i(x) + \sigma_i^* \theta_{\mathbb{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \text{pr}_2(s_{(i)}(x), t_A)) \\ & \equiv (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}) \circ (A_i(x) + (\sigma_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_{\mathbb{R}}(x)) \\ & = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}) \circ A_i(x) + (\sigma_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x), \end{aligned}$$

przy czym w ostatnim przejściu skorzystaliśmy z tożsamości (1.5.9).

STWIERDZENIE 214. *Przyjmijmy zapis Def. 90 i 143. W dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ należącym do przecięcia dziedzin trywializacji lokalnych τ_i i τ_j wiązki*

główniej (P_G, B, G, π_{P_G}) o odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$ zachodzi tożsamość

$$A_j(x) = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)})A_i(x) + (g_{ij}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L(x).$$

■

Dowód: Wystarczy zauważyć, że

$$s_{(j)}(x) \equiv \tau_j^{-1}(x, e) = \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)) = r_{g_{ij}(x)}(\tau_i^{-1}(x, e)) \equiv r_{g_{ij}(x)}(s_{(i)}(x)),$$

a następnie przeprowadzić rachunek analogiczny do tego z Uwagi 58. \square

STWIERDZENIE 215. *Przyjmijmy zapis Def. 143. W obrazie trywializacji lokalnej $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times G$ forma powiązania głównego wyraża się przez potencjał tegoż powiązania, jak następuje:*

$$\text{pr}_2 \circ \mathcal{A} \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i(x) + \theta_L(g),$$

przy czym obiekt po prawej stronie znaku równości należy traktować jako wektor z przestrzeni $T_{(x,g)}^*(\mathcal{O}_i \times G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \equiv (T_x^*B \oplus T_g^*G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ w dowolnym punkcie $(x, g) \in \mathcal{O}_i \times G$.

■

Dowód: Uwzględniając powyższy rozkład przestrzeni $T_{(x,g)}^*(\mathcal{O}_i \times G)$, możemy zawsze zapisać

$$(4.2.38) \quad \text{pr}_2 \circ \mathcal{A} \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} = a_i(x; g) + \vartheta_i(g; x),$$

gdzie $a_i(x; g) \in T_x^*B \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ oraz $\vartheta_i(g; x) \in T_g^*G \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ są 1-formami o własnościach

$$\forall (v, V) \in T_x B \oplus T_g G : v \lrcorner a_i(x; g) = 0_{\mathfrak{g}} = V \lrcorner \vartheta_i(g; x).$$

Rozłożywszy 1-formę $\vartheta_i(g; x)$ w bazie utworzonej przez formy lewo niezmiennicze,

$$\vartheta_i(g; x) =: \vartheta_{iA}^B(x, g) \triangleright \theta_L^A(g) \otimes_{\mathbb{R}} t_B,$$

obliczamy najpierw obie strony Równ. (4.2.38) na wektorze pionowym $(0_{T_x B}, L_A(g))$, dostając – w odwołaniu do definicji (4.2.29) i Równ. (4.2.30), jak również Równ. (4.2.32)

–

$$\begin{aligned} \vartheta_{iA}^B(x, g) \triangleright t_A &= L_A(g) \lrcorner \vartheta_i(g; x) = (0_{T_x B}, L_A(g)) \lrcorner (a_i(x; g) + \vartheta_i(g; x)) \\ &= \text{pr}_2 \circ \mathcal{A} \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(0_{T_x B}, L_A(g)) = \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}(\mathcal{K}_{t_A}(\tau_i^{-1}(x, g))) \\ &= \text{pr}_2 \circ \mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\tau_i^{-1}(x,g)}(t_A) = \text{pr}_2(\tau_i^{-1}(x, g), t_A) = t_A. \end{aligned}$$

Wnioskujemy na tej podstawie, że

$$\vartheta_i(g; x) \equiv \theta_L(g).$$

W następnej kolejności w miejsce wektora pionowego wstawiamy $(v, 0_{T_g G})$ i wykorzystujemy tożsamość

$$\begin{aligned} T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, 0_{T_g G}) &= T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ T_{(x,e)}(\text{id}_B \times \varrho_g)(v, 0_{T_e G}) \\ &= T_{(x,e)}(\tau_i^{-1} \circ (\text{id}_B \times \varrho_g))(v, 0_{T_e G}) = T_{(x,e)}(r_g \circ \tau_i^{-1})(v, 0_{T_e G}) \\ &= T_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, 0_{T_e G}) \equiv T_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ T_x(\cdot, e)(v) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathbb{T}_x (\tau_i^{-1} \circ (\cdot, e))(v) = \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathbb{T}_x s(i)(v)$$

która pozwala (dzięki Równ. (4.2.33)) zastosować bezpośrednio definicję (4.2.37) potencjału powiązania głównego i tym sposobem otrzymać

$$\begin{aligned} v \lrcorner a_i(x; g) &= (v, 0_{\mathbb{T}_g G}) \lrcorner (a_i(x; g) + \vartheta_i(g; x)) = \text{pr}_2 \circ \mathcal{A} \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, 0_{\mathbb{T}_g G}) \\ &= \text{pr}_2 \circ \mathcal{A} \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathbb{T}_x s(i)(v) = \text{pr}_2 \circ (r_r \times \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A} \circ \mathbb{T}_x s(i)(v) \\ &= \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \text{pr}_2 \circ \mathcal{A} \circ \mathbb{T}_x s(i)(v) \equiv \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (v \lrcorner A_i(x)), \end{aligned}$$

więc też – wobec dowolności v –

$$a_i(x; g) = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i(x).$$

Ostatecznie zatem odtwarzamy postulowaną prezentację lokalną formy powiązania głównego. \square

TWIERDZENIE 4.2.15 (O rekonstrukcji wiązki głównej z powiązaniem). *Przyjmijmy zapis Def. 65, 90 i 142. Każda wiązka główna (P_G, B, G, π_{P_G}) z powiązaniem głównym, rozumianym w sensie dowolnej z wprowadzonych uprzednio definicji 140, 141 i 142, wyznacza nad swym pokryciem trywializującym⁵ $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$*

- rodzinę $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset}$ lokalnie gładkich odwzorowań

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$$

spełniających warunek 1-kocyklu (4.1.2);

- rodzinę $\{A_i\}_{i \in I}$ lokalnie gładkich 1-form o wartościach w algebrze Liego \mathfrak{g} grupy Liego G

$$A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathfrak{g}$$

spełniających warunki

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset, x \in \mathcal{O}_{ij}} : A_j(x) = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)}) \circ A_i(x) + (g_{ij}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x).$$

I odwrotnie, niechaj $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ będzie pokryciem otwartym C^k -rozmaitości B . Dowolna stowarzyszona z \mathcal{O} para rodzin odwzorowań lokalnie gładkich

$$\left(\{g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset}, \{A_k\}_{k \in I} \right)$$

spełniających powyższe warunki określa – zgodnie z (konstruktywnym dowodem) Tw. 4.1.1 – wiązki główną $P_G = (\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times G) / g.$ o grupie strukturalnej G i o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z \mathcal{O}_{ij} tożsamych z g_{ij} , $(i, j) \in (I \times 2)_\emptyset$ oraz formie powiązania głównego zadawanej formułą

$$\mathcal{A}(v, V) := (x, g, v \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i(x) + V \lrcorner \theta_L(g)), \quad (x, g) \in \mathcal{O}_i \times G, \quad (4.2.39)$$

zapisaną dla dowolnego wektora $(v, V) \in \mathbb{T}_x \mathcal{O}_i \oplus \mathbb{T}_g G \equiv \mathbb{T}_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times G)$. Ilekroć odwzorowania te są danymi lokalnymi pewnej wiązki głównej nad B o włóknie typowym G , ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez g_{ij} i A_i . \blacksquare

⁵Nie zakładamy, że pokrycie to jest dobre w rozumieniu Def. 65.

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost z wcześniejszej analizy oraz z Tw. 4.1.1. Pozostaje jedynie upewnić się, że zrekonstruowana z danych lokalnych forma powiązania jest obiektem globalnie gładkim (klasy C^k) o własnościach opisanych w Def. 142. Zasadniczo wniosek taki daje się prosto wyprowadzić ze Stw. 215, niemniej jednak my mozolnie sprawdzimy wszystkie własności. Mamy zatem do porównania, w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$, wynik ewaluacji na dowolnym wektorze $(v, V) \in \mathbb{T}_x \mathcal{O}_i \oplus \mathbb{T}_g G \equiv \mathbb{T}_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times G)$ 1-formy \mathcal{A} wyrażonej w terminach potencjału lokalnego A_i z wynikiem ewaluacji na obrazie tegoż wektora względem odwzorowania stycznego do transformacji przejścia $(x, g) \mapsto (x, g_{ji}(x) \cdot g)$ 1-formy \mathcal{A} wyrażonej w terminach potencjału lokalnego A_j . Przy tym zamiast pchać (v, V) wzdłuż odwzorowania przejścia, moglibyśmy równoważnie cofnąć wzdłuż tegoż odwzorowania 1-formę A_j , a następnie obliczyć ją na (v, V) . Wystarczy zatem porównać wynik cofnięcia 1-formy \mathcal{A} zapisanej przy użyciu potencjału A_j z tą samą 1-formą wyrażoną w terminach potencjału A_i , co czyniąc w odwołaniu do Stw. 214, 134 oraz 130, otrzymujemy pożądaną wynik:

$$\begin{aligned}
& (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{(g_{ji}(x), g)^{-1}}) \circ A_j(x) + \theta_L(g_{ji}(x) \cdot g) \\
= & (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}) \circ ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)}) \circ A_i(x) \\
& + (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x)) + \theta_L(g) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\
= & (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i(x) + \theta_L(g) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\
& + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\
= & (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i(x) + \theta_L(g) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\
& - (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R(x) \\
= & (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i(x) + \theta_L(g) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\
& - (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)}) \\
& \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \theta_L(x) = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i(x) + \theta_L(g).
\end{aligned}$$

Drugą z oczekiwanych własności, Równ. (4.2.32), sprawdzamy w bezpośrednim odwołaniu do Równ. (4.2.30), zauważając na wstępie, że postać (włókna) wiązki odtworzonej z danych lokalnych w konstruktywnym dowodzie Tw. 4.1.1 prowadzi do utożsamienia $\mathcal{K}_X(x, g) \equiv (0_{\mathbb{T}^*B}, L_X(g))$ w dziedzinie $\pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ni (x, g)$ trywializacji lokalnej wiązki zrekonstruowanej \mathbb{P}_G . W obrazie tejże trywializacji otrzymujemy więc – dla dowolnego wektora $X \in \mathfrak{g}$ – równość

$$A \circ \widetilde{\text{Vert}}_{(x,g)}(X) \equiv \mathcal{A}(0_{\mathbb{T}^*B}, L_X(g)) = (x, g, L_X \lrcorner \theta_L(g)) \equiv (x, g, X).$$

Na koniec wreszcie upewniamy się o G-ekwiwariantności zapostulowanej formy powiązania głównego. W równości

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A} \circ \mathbb{T}_{(x,g)}(\text{id}_B \times \wp_h)(v, V) = \mathcal{A} \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \oplus \mathbb{T}_g \wp_h)(v, V) \\
= & (x, g \cdot h, v \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{(g \cdot h)^{-1}}) \circ A_i(x) + \mathbb{T}_g \wp_h(V) \lrcorner \theta_L(g \cdot h))
\end{aligned}$$

uwzględniamy więc raz jeszcze Stw. 130, które pozwala przepisać

$$\mathbb{T}_g \wp_h(V) \lrcorner \theta_L(g \cdot h) = V \lrcorner (\wp_h^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(g) = V \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g),$$

a zatem także

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ \mathbb{T}_{(x,g)}(\text{id}_B \times \wp_h)(v, V) &= ((\text{id}_B \times \wp_h) \times (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}))(x, g, \\ &\quad v \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}_i(x) + V \lrcorner \theta_L(g)) \\ &\equiv ((\text{id}_B \times \wp_h) \times (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}})) \circ \mathcal{A}(v, V). \end{aligned}$$

□

TWIERDZENIE 4.2.16. *Przyjmijmy zapis Def. 133, Stw. 214 oraz dowodu Stw. 201 i niechaj $(P_G^\alpha, B, G, \pi_{P_G^\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema wiązkami głównymi (o grupie strukturalnej G) z powiązaniem głównym nad wspólną bazą B , o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{P_G^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, przy czym wprowadzamy dwie rodziny cięć lokalnych:*

$$s_{(i)}^\alpha := \tau_i^{\alpha-1}(\cdot, e) : \mathcal{O}_i \longrightarrow P_G^\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\},$$

a wraz z nimi – odwzorowania przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$, $\alpha \in \{1, 2\}$ oraz 1-formy $A_i^\alpha \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathfrak{g}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o wartościach w algebrze Liego \mathfrak{g} grupy Liego G . Dowolny morfizm wiązek głównych z powiązaniem

$$\begin{array}{ccc} P_G^1 & \xrightarrow{\Phi} & P_G^2 \\ \pi_{P_G^1} \downarrow & & \downarrow \pi_{P_G^2} \\ B & \xlongequal{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i \in I}$ odwzorowań (lokalnie) klasy C^k

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow G, \quad i \in I$$

spełniających warunki: (4.1.14) oraz

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_i} : A_i^2(x) = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h_i(x)}) \circ A_i^1(x) + ((\text{Inv} \circ h_i)^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x).$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

■

Dowód: Po uwzględnieniu Tw. 201 pozostaje zweryfikować zapostulowaną formułę transformacyjną dla potencjału powiązania. W tym celu przywołujemy warunek (PFCM4) z Tw. 4.2.14 i podstawiamy go do definicji (4.2.37) tegoż potencjału, wykorzystując prostą zależność (4.1.15), którą przepisujemy w obecnej notacji jako

$$\Phi \circ s_{(i)}^1(x) = r_{h_i(x)}(s_{(i)}^2(x)).$$

Otrzymujemy tym sposobem z jednej strony równość

$$\begin{aligned} (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}_2 \circ \mathbb{T}_{s_{(i)}^1(x)} \Phi) \circ \mathbb{T}_x s_{(i)}^1 &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1) \circ \mathbb{T}_x s_{(i)}^1 \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}_1) \circ \mathbb{T}_x s_{(i)}^1 \equiv A_i^1(x), \end{aligned}$$

z drugiej zaś – w świetle szczegółowych rachunków z Uwagi 58 –

$$\begin{aligned} & (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}_2 \circ \mathbb{T}_{s_{(i)}^1(x)} \Phi) \circ \mathbb{T}_x s_{(i)}^1 = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}_2) \circ \mathbb{T}_x (r_{h_i(\cdot)}(s_{(i)}^2(\cdot))) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h_i(x)^{-1}}) \circ \mathbb{A}_i^2(x) + (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x). \end{aligned}$$

Zestawiwszy powyższe wyniki, uzyskujemy – w odwołaniu do Stw. 130 – oczekiwaną tożsamość,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_i^2(x) &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h_i(x)}) \circ \mathbb{A}_i^1(x) - (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h_i(x)}) \circ (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h_i(x)}) \circ \mathbb{A}_i^1(x) - (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R(x) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h_i(x)}) \circ \mathbb{A}_i^1(x) + ((\text{Inv} \circ h_i)^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R(x). \end{aligned}$$

I odwrotnie, mając rodzinę $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{G}$, $i \in I$ odwzorowań z treści dowodzonego stwierdzenia, określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i : \pi_{\mathbb{P}_{\mathbb{G}}^1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \pi_{\mathbb{P}_{\mathbb{G}}^2}^{-1}(\mathcal{O}_i) : \tau_i^{1-1}(x, g) \mapsto \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g), \quad i \in I.$$

Łatwo przekonujemy się, że są to w istocie ograniczenia odwzorowania globalnie gładkiego $\Phi : \mathbb{P}_{\mathbb{G}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{G}}^2$ do poszczególnych elementów pokrycia trywializującego, $\Phi \upharpoonright_{\pi_{\mathbb{P}_{\mathbb{G}}^1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$, oto bowiem w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} \Phi_j \circ s_{(i)}^1(x) &= \Phi_j \circ \tau_j^{1-1}(x, g_{ji}^1(x)) = \tau_j^{2-1}(x, h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x)) \\ &= \tau_j^{2-1}(x, g_{ji}^2(x) \cdot h_i(x)) = \tau_i^{1-1}(x, h_i(x)) \equiv \Phi_i \circ s_{(i)}^1(x), \end{aligned}$$

a nadto odwzorowania Φ_i są G-ekwiwariantne, co sprawdzamy dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_i$ oraz $g, h \in \mathbb{G}$,

$$\begin{aligned} \Phi_i \circ r_h^1 \circ \tau_i^{1-1}(x, g) &= \Phi_i \circ \tau_i^{1-1}(x, g \cdot h) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g \cdot h) \\ &= r_h^2(\tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g)) \equiv r_h^2 \circ \Phi_i \circ \tau_i^{1-1}(x, g). \end{aligned}$$

Na zakończenie dowodu sprawdzamy warunek (PFCM4) z Tw. 4.2.14. Czynimy to w obrazie trywializacji lokalnej τ_i , posiłkując się przy tym Stw. 215. Oto więc stwierdzamy równość

$$\begin{aligned} & \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}_2 \circ \mathbb{T} \Phi \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{1-1}(x, g)} \tau_i^{1-1} \\ &\equiv (\text{pr}_2 \circ \mathcal{A}_2 \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{2-1}(x, g)} \tau_i^{2-1}) \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{1-1}(x, g)} (\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1}) \\ &\equiv (\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1})^* ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv} \circ \text{pr}_2(\cdot)}) \circ \text{pr}_1^* \mathbb{A}_i^2 + \text{pr}_2^* \theta_L)(x, g) \\ &= ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv} \circ \text{pr}_2(\cdot)}) \circ \text{pr}_1^* \mathbb{A}_i^2 + \text{pr}_2^* \theta_L)(x, h_i(x) \cdot g) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{(h_i(x) \cdot g)^{-1}}) \circ \mathbb{A}_i^2(x) + \theta_L(h_i(x) \cdot g) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h_i(x)^{-1}}) \circ \mathbb{A}_i^2(x) + \theta_L(h_i(x) \cdot g), \end{aligned}$$

którą w świetle przyjętych założeń oraz Stw. 134 możemy przepisać w oczekiwanej postaci

$$\text{pr}_2 \circ \mathcal{A}_2 \circ \mathbb{T} \Phi \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{1-1}(x, g)} \tau_i^{1-1}$$

$$\begin{aligned}
&= (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (A_i^1(x) - (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x)) \\
&\quad + \theta_L(g) + (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\
&= (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i^1(x) + \theta_L(g) \equiv \text{pr}_2 \circ \mathcal{A}_1 \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{1-1} \\
&= \text{pr}_2 \circ (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1 \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{1-1}
\end{aligned}$$

□

DEFINICJA 144. Przyjmijmy zapis Def. 143 i Stw. 43. Potencjały powiązania głównego A_i na wiązce głównej P_G zadają globalnie gładką 2-formę na bazie o ograniczeniach

$$F \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} := (\text{id}_{\wedge^2 T^*B} \otimes \text{tr}_{\mathfrak{g}})(dA_i + A_i \wedge A_i).$$

Formę tę nazywamy **krzywizną (skalarną) powiązania głównego na wiązce P_G** i oznaczamy symbolem

$$\text{curv}(\nabla) \equiv F.$$

Powiązanie główne płaskie to takie, którego krzywizna jest tożsamościowo równa zeru.

▲

UWAGA 59. Sensowności powyższej definicji dowodzimy podobnie jak w przypadku Def. 56.

STWIERDZENIE 216. *Powiązania główne na wiązках głównych nad ustaloną bazą, między którymi istnieje izomorfizm wiązek głównych z powiązaniem pokrywającym identyczność na bazie, mają tożsame krzywizny skalarne.*

■

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Stw. 211.

□

3. Indukcja powiązania wzdłuż odwzorowania gładkiego

STWIERDZENIE 217. *Przyjmijmy zapis Def. 139 oraz Przykł. 34 (3) i niech $(V, B_2, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_V)$ będzie wiązką wektorową (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) o powiązaniu Koszula ∇^K reprezentowaną nad pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B_2 przez 1-formy o wartościach macierzowych $\Gamma_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}(n)$, a nadto niech $f : B_1 \rightarrow B_2$ będzie odwzorowaniem klasy C^k . $(f^*V, B_1, \mathbb{K}^{\times n}, \text{pr}_1)$*

■

Dowód:

□

Naturalne konstrukcje

1. Geometryzacje konstrukcji liniowych

1.1. Suma prosta wiązek wektorowych.

DEFINICJA 145. Przyjmijmy zapis Def. 125 i Przykł. 21 (1). **Suma Whitneya wiązek wektorowych** $(V_\alpha, B, \mathbb{K}^{n_\alpha}, \pi_{V_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad \mathbb{K} , o wspólnej bazie B to wiązka wektorowa

$$(V_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} V_2 \equiv V_1 \times_B V_2, B, \mathbb{K}^{n_1} \oplus \mathbb{K}^{n_2} \equiv \mathbb{K}^{n_1+n_2}, \pi_{V_1} \circ \text{pr}_1 \upharpoonright_{V_1 \times_B V_2}),$$

w której $V_1 \times_B V_2$ jest produktem włóknistym rozmaiłości V_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ domykającym kopowłokę $((\pi_{V_1}, \pi_{V_2}), B)$ do diagramu przemienneo

$$\begin{array}{ccc}
 & V_1 \times_B V_2 & \\
 \text{pr}_1 \upharpoonright_{V_1 \times_B V_2} \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \upharpoonright_{V_1 \times_B V_2} \\
 V_1 & & V_2 \\
 \pi_{V_1} \searrow & & \swarrow \pi_{V_2} \\
 & B &
 \end{array}$$

i wyposażonym w strukturę podrozmaiłości gładko włożonej w rozmaiłość produktową $V_1 \times V_2$, zgodnie z tezą Tw. 1.4.24.

▲

Włókno sumy Whitneya nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ przyjmuje postać

$$(V_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} V_2)_x \equiv V_{1x} \oplus V_{2x},$$

stanowi więc suma Whitneya naturalną adaptację konstrukcji sumy prostej przestrzeni wektorowych do geometrycznej kategorii przestrzeni modelowanych lokalnie na produktach (elementów topologii) rozmaiłości różniczkowalnej z topologicznymi przestrzeniami wektorowymi \mathbb{K}^n , $n \in \mathbb{N}$.

Wiązkę tę można również opisać – w duchu Tw. 4.1.1 – w terminach danych lokalnych jej składników, tj. wspólnego pokrycia trywializującego $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ wiązek V_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ (otrzymanego np. poprzez wspólne rozdrobienie odnośnych pokryć trywializujących) wraz z określonymi dlań odwzorowaniami przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha)$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$. Odwzorowania przejścia sumy Whitneya obu wiązek, stowarzyszone z tym samym pokryciem trywializującym i stanowiące podstawę rekonstrukcji (klasy równoważności) wiązki $V_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} V_2$, to

$$g_{ij}^{1 \oplus 2} := g_{ij}^1 \oplus g_{ij}^2 : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(n_1) \oplus \text{GL}_{\mathbb{K}}(n_2) \subset \text{GL}_{\mathbb{K}}(n_1 + n_2).$$

Z sumą Whitneya wiązek wektorowych stowarzyszona jest para epimorfizmów wiązek wektorowych

$$\text{pr}_\alpha : \mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2 \rightarrow \mathbb{V}_\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

przyjmujących nad (dowolnym) punktem $x \in B$ postać

$$\text{pr}_{\alpha x} : \mathbb{V}_{1x} \oplus \mathbb{V}_{2x} \rightarrow \mathbb{V}_{\alpha x} : (x, (v_1, v_2)) \mapsto (x, v_\alpha).$$

STWIERDZENIE 218. *Przyjmijmy zapis Def. 139 oraz 145 i niechaj $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami wektorowymi (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) o odnośnych powiązaniach Koszula $\nabla^{\mathbb{K}(\alpha)}$ reprezentowanych w (lokalnych) bazach przestrzeni cięć $\{\varepsilon_{a_\alpha}^{(i)(\alpha)}\}_{a_\alpha \in \overline{1, n_\alpha}}$ nad wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ przez 1-formy o wartościach macierzowych $\Gamma_i^\alpha \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}(n_\alpha)$. Powiązania $\nabla^{\mathbb{K}(\alpha)}$ indukują na wiązce $\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2$ powiązanie Koszula*

$$\nabla^{\mathbb{K}^\oplus} := \nabla^{\mathbb{K}(1)} \oplus \nabla^{\mathbb{K}(2)},$$

reprezentowane w (lokalnej) bazie

$$\{\varepsilon_{a_1}^{(i)\oplus} \equiv (\varepsilon_{a_1}^{(i)(1)}, \mathbf{0}_{\mathbb{V}_2 \uparrow \mathcal{O}_i}), \varepsilon_{n_1+a_2}^{(i)\oplus} \equiv (\mathbf{0}_{\mathbb{V}_1 \uparrow \mathcal{O}_i}, \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)})\}_{a_\alpha \in \overline{1, n_\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}}$$

nad pokryciem \mathcal{O} przez 1-formy o wartościach macierzowych

$$\Gamma_i^\oplus = \Gamma_i^1 \oplus \Gamma_i^2.$$

Jego krzywizna jest zatem dana wzorem

$$\text{curv}(\nabla^{\mathbb{K}^\oplus}) = \text{curv}(\nabla^{\mathbb{K}(1)}) + \text{curv}(\nabla^{\mathbb{K}(2)}).$$

■

Dowód: Jedyną (względnie) nieoczywistą pożądaną własnością operatora zdefiniowanego w treści dowodzonego stwierdzenia jest spełnianie przezeń tożsamości Leibniza, którą sprawdzamy bezpośrednio biorąc pod uwagę działanie \mathbb{K} na sumie prostej dane oczywistym wzorem:

$$\mathbb{L}_\lambda^\oplus \equiv \mathbb{L}_\lambda^1 \oplus \mathbb{L}_\lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

i licząc – dla dowolnego cięcia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ wiązki $\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2$ nad \mathcal{O}_i danego w postaci pary cięć lokalnych $\sigma_\alpha \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ oraz dla dowolnej funkcji $f \in C^k(B, \mathbb{K})$ –

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbb{K}^\oplus}(\mathbb{L}_f^\oplus(\sigma)) &= \nabla^{\mathbb{K}^\oplus}(\mathbb{L}_f^1(\sigma_1), \mathbb{L}_f^2(\sigma_2)) = (\nabla^{\mathbb{K}(1)}(\mathbb{L}_f^1(\sigma_1)), \nabla^{\mathbb{K}(2)}(\mathbb{L}_f^2(\sigma_2))) \\ &= (\text{df} \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma_1 + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^1)(\nabla^{\mathbb{K}(1)}\sigma_1), \text{df} \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma_2 \\ &\quad + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^2)(\nabla^{\mathbb{K}(2)}\sigma_2)) \\ &= (\text{df} \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma_1, \text{df} \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma_2) \\ &\quad + ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^1)(\nabla^{\mathbb{K}(1)}\sigma_1), (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^2)(\nabla^{\mathbb{K}(2)}\sigma_2)) \\ &\equiv \text{dx}^\mu \otimes_{C^\infty(B, \mathbb{R})} \mathbb{L}_{\partial_\mu f}^\oplus(\sigma) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^\oplus)(\nabla^{\mathbb{K}^\oplus}\sigma), \end{aligned}$$

co (w połączeniu z oczywistymi własnościami powyższego operatora) przesądza o tym, że mamy w istocie do czynienia z pochodną Koszula. Postulowana postać symboli Christoffela we wskazanej (lokalnej) bazie przestrzeni cięć jest oczywistą

konsekwencją struktury $\nabla^{K\oplus}$ oraz \mathbb{L}^\oplus i implikuje wprost postać krzywizny powiązania indukowanego jak w treści stwierdzenia. \square

1.2. Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych.

DEFINICJA 146. Przyjmijmy zapis Def. 41 i 125. **Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych** $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad \mathbb{K} , o wspólnej bazie B i odnośnych odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha)$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$(\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2, B, \mathbb{K}^{\times n_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\times n_2} \cong \mathbb{K}^{\times n_1 \cdot n_2}, \pi_{\mathbb{V}_1} \circ \mathrm{pr}_1)$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 4.1.1, z danych lokalnych

$$g_{ij}^{1 \otimes 2} := g_{ij}^1 \otimes g_{ij}^2 : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1) \otimes \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_2) \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1 \cdot n_2).$$

▲

Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych można w szczególności utworzyć dokonując stosownej topologizacji sumy rozłącznej włókien nad punktami bazy $B \ni x$, wybierając je w postaci

$$(\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2)_x \cong \mathbb{V}_{1x} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_{2x}.$$

Mamy tu zatem do czynienia z naturalną adaptacją konstrukcji iloczynu tensorowego przestrzeni wektorowych.

STWIERDZENIE 219. Przyjmijmy zapis Def. 139 i 146 oraz Tw. 1.2.7 i niechaj $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami wektorowymi (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) o odnośnych powiązaniach Koszula $\nabla^{K(\alpha)}$ reprezentowanych w (lokalnych) bazach przestrzeni cięć $\{\varepsilon_{a_\alpha}^{(i)(\alpha)}\}_{a_\alpha \in \overline{1, n_\alpha}}$ nad wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ przez 1-formy o wartościach macierzowych $\Gamma_i^\alpha \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}(n_\alpha)$. Powiązania $\nabla^{K(\alpha)}$ indukują na wiązce $\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2$ powiązanie Koszula

$$\nabla^{K\otimes} := \nabla^{K(1)} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{V}_2} + (\mathrm{id}_{\mathbb{V}_1} \otimes \nabla^{K(2)}) \circ (\sigma_{\mathbb{T}B, \mathbb{V}_1} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{V}_2}),$$

reprezentowane w (lokalnej) bazie

$$\{\varepsilon_{(a_1, a_2)}^{(i)\otimes} \equiv \varepsilon_{a_1}^{(i)(1)} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)}\}_{a_\alpha \in \overline{1, n_\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}}$$

nad pokryciem \mathcal{O} przez 1-formy o wartościach macierzowych

$$\Gamma_i^\otimes = \Gamma_i^1 \otimes \mathbf{1}_{n_2} + dx^\mu \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} (\mathbf{1}_{n_1} \otimes \partial_\mu \lrcorner \Gamma_i^2).$$

Jego krzywizna jest zatem dana wzorem

$$\mathrm{curv}(\nabla^{K\otimes}) = \mathrm{curv}(\nabla^{K(1)}) + \mathrm{curv}(\nabla^{K(2)}).$$

■

Dowód: Uwzględnivszy postać działania \mathbb{K} na iloczynie tensorowym:

$$\mathbb{L}_\lambda^\otimes \equiv \mathbb{L}_\lambda^1 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{V}_2} \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{V}_1} \otimes \mathbb{L}_\lambda^2,$$

obliczamy – dla dowolnego cięcia prostego $\sigma = \sigma_1 \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \sigma_2$ wiązki $\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2$ nad \mathcal{O}_i utworzonego z cięć lokalnych $\sigma_\alpha \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathbb{V}_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ oraz dla dowolnej funkcji $f \in C^k(B, \mathbb{K})$ –

$$\nabla^{K\otimes}(\mathbb{L}_f^\otimes(\sigma)) = \nabla^{K\otimes}(\mathbb{L}_f^1(\sigma_1) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \sigma_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla^{K(1)}(\mathbb{L}_f^1(\sigma_1)) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \sigma_2 \\
&\quad + (\sigma_{T^*B, V_1} \otimes \text{id}_{V_2})(\mathbb{L}_f^1(\sigma_1) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \nabla^{K(2)} \sigma_2) \\
&= df \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} (\sigma_1 \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \sigma_2) \\
&\quad + (\text{id}_{T^*B} \otimes \mathbb{L}_f^1 \otimes \text{id}_{V_2})(\nabla^{K(1)} \sigma_1 \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \sigma_2) \\
&\quad + (\text{id}_{T^*B} \otimes \mathbb{L}_f^1 \otimes \text{id}_{V_2}) \circ (\sigma_{T^*B, V_1} \otimes \text{id}_{V_2})(\sigma_1 \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \nabla^{K(2)} \sigma_2) \\
&\equiv df \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma + (\text{id}_{T^*B} \otimes \mathbb{L}_f^\otimes)(\nabla^{K\otimes} \sigma),
\end{aligned}$$

co jest pożądaną tożsamością. Na koniec wyznaczamy symbole Christoffela $\Gamma_{i\mu(a_1, a_2)}^{\otimes(b_1, b_2)}$ w bazie wskazanej w treści dowodzonego stwierdzenia,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{L}_{i\mu(a_1, a_2)}^{\otimes(b_1, b_2)}(\varepsilon_{(a_1, a_2)}^{(i)\otimes}) \equiv \nabla_{\partial_\mu}^{K\otimes}(\varepsilon_{a_1}^{(i)(1)} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)}) \\
&= \nabla_{\partial_\mu}^{K(1)} \varepsilon_{a_1}^{(i)(1)} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)} + \varepsilon_{a_1}^{(i)(1)} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \nabla_{\partial_\mu}^{K(2)} \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)} \\
&= \mathbb{L}_{i\mu a_1}^1(\varepsilon_{b_1}^{(i)(1)}) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)} + \varepsilon_{a_1}^{(i)(1)} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \mathbb{L}_{i\mu a_2}^1(\varepsilon_{b_2}^{(i)(2)}) \\
&= \mathbb{L}_{i\mu a_1}^{\otimes(b_1, b_2)}(\varepsilon_{(b_1, b_2)}^{(i)\otimes}),
\end{aligned}$$

a stąd już bezpośrednio wynika postulowana postać krzywizny powiązania indukowanego. \square

1.3. Wiązka homomorfizmów i wiązka dualna.

DEFINICJA 147. Przyjmijmy zapis Def. 125 oraz Stw. 29. **Wiązka homomorfizmów** (zwana także **wiązką Hom**) wiązek wektorowych $(V_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{V_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad \mathbb{K} , o wspólnej bazie B i odnośnych odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha)$ stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$(\text{Hom}_{\mathbb{K}, B}(V_1, V_2), B, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \cong \mathbb{K}^{\times n_1 \cdot n_2}, \pi_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)})$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 4.1.1, z danych lokalnych

$$\begin{aligned}
g_{ij}^{1 \rightarrow 2} &:= \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_2}, g_{ij}^2(\cdot)) \circ \text{Hom}_{\mathbb{K}}(g_{ij}^1(\cdot)^{-1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \\
&: \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2})),
\end{aligned}$$

zapisanych w terminach odwzorowań \mathbb{K} -liniowych, które w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ przyjmują postać – odpowiednio –

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\mathbb{K}}(g_{ij}^1(x)^{-1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) &: \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \curvearrowright \\
&: \chi \mapsto \chi \circ g_{ij}^1(x)^{-1},
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_2}, g_{ij}^2(x)) &: \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \curvearrowright \\
&: \chi \mapsto g_{ij}^2(x) \circ \chi.
\end{aligned}$$



Włókno wiązki homomorfizmów nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ jest postaci

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)_x \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_{1x}, \mathbb{V}_{2x}),$$

mamy przeto do czynienia z naturalną adaptacją konstrukcji przestrzeni \mathbb{K} -liniowej homomorfizmów między (ustalonymi) przestrzeniami wektorowymi.

DEFINICJA 148. Przyjmijmy zapis Def. 147. **Wiązka dualna** (zwana także **wiązką dwoistą**) wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{n^*}, \pi_{\mathbb{V}})$ to wiązka wektorowa (o oczywistym rzucie na bazę)

$$(\mathbb{V}^* \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}, B}(\mathbb{V}, B \times \mathbb{K}), B, \mathbb{K}^{n^*} \cong \mathbb{K}^{n^*}, \pi_{\mathbb{V}^*}),$$

w której definicji $(B \times \mathbb{K}, B, \mathbb{K}, \mathrm{pr}_1)$ jest trywialną wiązką wektorową rzędu 1 nad \mathbb{K} .



STWIERDZENIE 220. Przyjmijmy zapis Def. 139 oraz 148 i niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{n^*}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) o powiązaniu Koszula $\nabla^{\mathbb{K}}$ reprezentowaną w (lokalnej) bazie przestrzeni cięć $\{\varepsilon_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1, n}}$ nad pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ przez 1-formy o wartościach macierzowych $\Gamma_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}(n)$. Powiązanie $\nabla^{\mathbb{K}}$ indukuje na wiązce dualnej \mathbb{V}^* powiązanie Koszula zadane formułą

$$\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}^*} \sigma^* = \mathcal{V} \circ \sigma^* - \sigma^* \circ \nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}}, \quad \sigma^* \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathbb{V}^*),$$

w której zapisie pole wektorowe $\mathcal{V} \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}B)$ jest traktowane jako różniczkowanie algebry funkcji lokalnie gładkich $\Gamma_{\mathrm{loc}}(B \times \mathbb{K})$, a cięcie σ^* – jako rodzina form liniowych gładko parametryzowana przez punkty w swej dziedzinie. Niechaj $\{\varepsilon_a^{(i)*}\}_{a \in \overline{1, n}}$ będzie (lokalną) bazą dualną względem $\{\varepsilon_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1, n}}$ w rozumieniu relacji

$$\forall_{a, b \in \overline{1, n}} : \left\langle \varepsilon_a^{(i)*}(\cdot), \varepsilon_b^{(i)}(\cdot) \right\rangle = \delta_{ab},$$

w której $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest standardową ewaluacją formy na wektorze. Powyższe powiązanie Koszula jest reprezentowane w tejże (lokalnej) bazie dualnej nad pokryciem \mathcal{O} przez 1-formy o wartościach macierzowych

$$\Gamma_i^* = -\Gamma_i^{\mathrm{T}},$$

gdzie górny indeks T symbolizuje transpozycję czynnika macierzowego. Krzywizna tego powiązania jest zatem dana wzorem

$$\mathrm{curv}(\nabla^{\mathbb{K}^*}) = -\mathrm{curv}(\nabla^{\mathbb{K}}).$$



Dowód: Tożsamość Leibniza jest tutaj pochodną analogicznej tożsamości spełnianej przez różniczkowanie \mathcal{V} , oto bowiem dla dowolnej funkcji $f \in C^k(B, \mathbb{K})$ obliczamy

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}^*}(\mathbb{L}_f(\sigma^*)) &= \mathcal{V} \circ \mathbb{L}_f(\sigma^*) - \mathbb{L}_f(\sigma^*) \circ \nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}} \\ &= \mathbb{L}_{\mathcal{V}(f)}(\sigma^*) + \mathbb{L}_f(\mathcal{V} \circ \sigma^*) - \mathbb{L}_f(\sigma^*) \circ \nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

$$\equiv \mathbb{L}_{\mathcal{V}(f)}(\sigma^*) + \mathbb{L}_f(\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}*} \sigma^*).$$

Postać symboli ustala rachunek

$$\begin{aligned} \Gamma_{i\mu a}^{*b} &= \left\langle \mathbb{L}_{\Gamma_{i\mu a}^{*c}}(\varepsilon_c^{(i)*})(\cdot), \varepsilon_b^{(i)}(\cdot) \right\rangle \equiv \left\langle \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}*}(\varepsilon_a^{(i)*})(\cdot), \varepsilon_b^{(i)}(\cdot) \right\rangle \\ &= \partial_\mu \left\langle \varepsilon_a^{(i)*}(\cdot), \varepsilon_b^{(i)}(\cdot) \right\rangle - \left\langle \varepsilon_a^{(i)*}(\cdot), \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}} \varepsilon_b^{(i)}(\cdot) \right\rangle \\ &= \partial_\mu \delta_{ab} - \left\langle \varepsilon_a^{(i)*}(\cdot), \mathbb{L}_{\Gamma_{i\mu b}^{*c}}(\varepsilon_c^{(i)})(\cdot) \right\rangle = -\Gamma_{i\mu b}^c \delta_{ac} = -\Gamma_{i\mu b}^a, \end{aligned}$$

a wypisana formuła na krzywiznę jest jego trywialną konsekwencją. \square

UWAGA 60. Konstrukcje i stwierdzenia przedstawione w poprzednich rozdziałach otwierają drogę ku naturalnej indukcji powiązania \mathbb{K} -liniowego na wiązkach homomorfizmów $\text{Hom}_{\mathbb{K},B}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ na gruncie oczywistego izomorfizmu

$$\text{Hom}_{\mathbb{K},B}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2) \cong \mathbb{V}_1^* \otimes_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}_2,$$

por.: Równ. (1.2.26).

1.4. Wiązka wyznacznikowa.

DEFINICJA 149. Przyjmijmy zapis Def. 20 i 125. **Wiązka wyznacznikowa wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad \mathbb{K}) o bazie B i odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(n)$ stowarzyszonych z pokryciem trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ to dowolna wiązka wektorowa

$$(\det \mathbb{V}, B, \mathbb{K}, \pi_{\det \mathbb{V}})$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 4.1.1, z danych lokalnych

$$g_{ij}^{\det} := \det_{(n)} \circ g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{K}.$$

▲

Wiązkę wyznacznikową otrzymujemy chociażby w procedurze topologizacji sumy rozłącznej nad bazą $B \ni x$ włókien postaci

$$(\det \mathbb{V})_x \equiv \bigwedge^n \mathbb{V}_x^*,$$

w zgodzie z interpretacją tejsze wiązki jako geometryzacji konstrukcji wyznacznika na przestrzeni wektorowej.

2. Redukcja wiązki głównej

DEFINICJA 150. Przyjmijmy zapis Def. 127 i niechaj G, H będą grupami topologicznymi (wzgl. Liego), dla których określony jest monomorfizm grup topologicznych (wzgl. Liego)

$$\check{\varphi} : H \rightarrow G.$$

Redukcja wiązki głównej wiązki głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) (zwana także **redukcją grupy strukturalnej**) **wzdłuż monomorfizmu** $\check{\varphi}$ to para

$$((P_H, B, H, \pi_{P_H}), (\Phi, \text{id}_B, \check{\varphi}))$$

złożona z

- wiązki głównej (P_H, B, H, π_{P_H}) ;

- morfizmu wiązek głównych

$$(\Phi, \text{id}_B, \check{\varphi}) : (\mathbb{P}_H, B, H, \pi_{\mathbb{P}_H}) \longrightarrow (\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G}),$$

którego wszystkie składowe są zanurzeniami topologicznymi (wzgl. włożeniami) w rozumieniu Def. 54 (wzgl. Def. 81).

Wyznaczaną przezeń podwiązkę

$$(\Phi(\mathbb{P}_H), B, \check{\varphi}(H), \pi_{\Phi(\mathbb{P}_H)} \equiv \pi_{\mathbb{P}_G} \upharpoonright_{\Phi(\mathbb{P}_H)})$$

określamy mianem **wiązki głównej zredukowanej**. ▲

TWIERDZENIE 4.3.1. *Przyjmijmy zapis Def. 150. Redukcja wiązki głównej $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$ wzdłuż monomorfizmu $\check{\varphi}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące tejże wiązki i stowarzyszone z nim jej trywializacje lokalne, dla których odwzorowania przejścia przyjmują wartości w podgrupie $\check{\varphi}(H) \subset G$. W takiej sytuacji mówimy, że grupa strukturalna $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$ jest **redukowalna do $\check{\varphi}(H)$** . ■*

Dowód: Załóżmy na początku, że istnieje wiązka $(\mathbb{P}_H, B, H, \pi_{\mathbb{P}_H})$ i wyznaczona przez nią podwiązka $(\Phi(\mathbb{P}_H), B, \check{\varphi}(H), \pi_{\Phi(\mathbb{P}_H)})$. Wybierzmy pokrycie trywializujące tej ostatniej, $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, a wraz z nim – odnośne trywializacje lokalne $\tau_i^{\check{\varphi}(H)} : \pi_{\Phi(\mathbb{P}_H)}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \check{\varphi}(H)$ o odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^{\check{\varphi}(H)} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \check{\varphi}(H)$. Następnie zdefiniujmy odwzorowania (jawnie ciągle wzgl. gładkie)

$$\tau_i^G : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times G : p \longmapsto (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e_G), p)).$$

W świetle Stw. 198 odwzorowania te są G-ekwiwariantne. Bez trudu konstruujemy ich odwrotności:

$$\tau_i^{G-1} : \mathcal{O}_i \times G \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) : (x, g) \longmapsto \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g,$$

upewniwszy się, że wobec relacji $\pi_{\Phi(\mathbb{P}_H)}^{-1}(\mathcal{O}_i) \subset \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ zachodzą równości:

$$\tau_i^{G-1} \circ \tau_i^G(p) = \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e_G), p) \equiv p$$

oraz

$$\begin{aligned} \tau_i^G \circ \tau_i^{G-1}(x, g) &= \tau_i^G(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g), e_G), \\ &\quad \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), e_G), \\ &\quad \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \\ &= (x, \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \equiv (x, g). \end{aligned}$$

Są to zatem trywializacje lokalne wiązki \mathbb{P}_G , a przy tym odnośne odwzorowania przejścia, wyznaczane w rachunku bezpośrednim:

$$\tau_i^G \circ \tau_j^{G-1}(x, g) = \tau_i^G(\tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)$$

$$\begin{aligned}
&= (\pi_{\mathbb{P}_G}(\tau_j^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(\pi_{\mathbb{P}_G}(\tau_j^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g), e_G), \\
&\quad \tau_j^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \\
&= (x, \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G), \tau_j^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \\
&= (x, \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G), \tau_i^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, g_{ij}^{\check{\varphi}(\mathbb{H})}(x)) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \\
&= (x, \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G), \tau_i^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} (g_{ij}^{\check{\varphi}(\mathbb{H})}(x) \cdot_G g))) \\
&= (x, g_{ij}^{\check{\varphi}(\mathbb{H})}(x) \cdot_G g),
\end{aligned}$$

należą do $\check{\varphi}(\mathbb{H}) \subset G$.

I odwrotnie, niechaj $\tau_i^G : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$, $i \in I$ będą trywializacjami lokalnymi wiązki \mathbb{P}_G , stowarzyszonymi z pokryciem $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, o odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^{(\mathbb{H})} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \check{\varphi}(\mathbb{H}) \subset G$. W świetle Stw. 1 możemy jednoznacznie zdefiniować odwzorowania

$$h_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{H}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

narzucając warunki

$$\check{\varphi} \circ h_{ij} = g_{ij}^{(\mathbb{H})}.$$

Dla dowolnych $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}$ zachodzi tożsamość

$$\check{\varphi} \circ (h_{jk} \cdot \text{Inv} \circ h_{ik} \cdot h_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = (g_{jk}^{(\mathbb{H})} \cdot \text{Inv} \circ g_{ik}^{(\mathbb{H})} \cdot g_{ij}^{(\mathbb{H})}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_G,$$

z której wobec monomorficznego charakteru $\check{\varphi}$ wynika warunek 1-kocyklu

$$(h_{jk} \cdot \text{Inv} \circ h_{ik} \cdot h_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\mathbb{H}}.$$

Możemy zatem przywołać Tw. 4.1.1 i zrekonstruować nad \mathcal{O} wiązkę główną $(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}, B, \mathbb{H}, [\text{pr}_1])$ o grupie strukturalnej \mathbb{H} , przestrzeni totalnej

$$\mathbb{P}_{\mathbb{H}} \equiv \left(\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{H}) \right) / \sim_{h..}$$

i odwzorowaniach przejścia h_{ij} stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi $[\tau_i]$ zdefiniowanymi w dowodzie rzeczonego twierdzenia. Wykorzystując te homeomorfizmy (wzgl. dyfeomorfizmy) oraz ich odpowiedniki τ_i^G na \mathbb{P}_G w połączeniu z zanurzeniami topologicznymi (wzgl. włożeniami) $\check{\varphi}$, określamy lokalne zanurzenia topologiczne (wzgl. włożenia)

$$\Phi_i : [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \mathbb{H} \xrightarrow{\text{id}_B \times \check{\varphi}} \mathcal{O}_i \times G \xrightarrow{\tau_i^{G^{-1}}} \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I,$$

odwzorowujące włókna $\mathbb{P}_{\mathbb{H}}$ we włókna \mathbb{P}_G w sposób ewidentnie \mathbb{H} -ekwiwariantny (wszak $\check{\varphi}$ jest homomorfizmem grup). Pozostaje zatem upewnić się, że zanurzenia te są ograniczeniami (do elementów pokrycia trywializującego) zadanego globalnie morfizmu wiązek głównych, co czynimy w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym nad dowolnym punktem $[(x, i, h)] \in [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$,

$$\begin{aligned}
&\Phi_j([(x, i, h)]) \equiv \tau_j^{G^{-1}} \circ (\text{id}_B \times \check{\varphi}) \circ [\tau_j]([(x, i, h)]) \\
&= \tau_j^{G^{-1}} \circ (\text{id}_B \times \check{\varphi}) \circ [\tau_j]([(x, j, h_{ji}(x) \cdot_{\mathbb{H}} h)]) = \tau_j^{G^{-1}}(x, \check{\varphi}(h_{ji}(x) \cdot_{\mathbb{H}} h))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_j^{G-1}(x, \check{\varphi} \circ h_{ji}(x) \cdot_G \check{\varphi}(h)) = \tau_j^{G-1}(x, g_{ji}^{(H)}(x) \cdot_G \check{\varphi}(h)) = \tau_i^{G-1}(x, \check{\varphi}(h)) \\
&\equiv \Phi_i([(x, i, h)]).
\end{aligned}$$

□

3. Prolongacja wiązki głównej

DEFINICJA 151. Przyjmijmy zapis Def. 127 i niechaj Γ będzie grupą dyskretną, G, \widehat{G} zaś – grupami topologicznymi (wzgl. Liego), dla których określony jest krótki ciąg dokładny grup

$$1 \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\mathcal{J}_\Gamma} \widehat{G} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} G \longrightarrow 1$$

czyniący z trójki $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \widehat{\varphi})$ dyskretne rozszerzenie centralne grupy G przez grupę Γ w rozumieniu Def. 52, przy czym zakładamy, że epimorfizm $\widehat{\varphi}$ jest nakryciem topologicznym (wzgl. dodatkowo też submersją odpowiedniej klasy gładkości) w rozumieniu Def. 59. **Prolongacją wiązki głównej** (P_G, B, G, π_{P_G}) **wzdłuż rozszerzenia centralnego** $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$ (albo \widehat{G} -strukturą na wiązce głównej (P_G, B, G, π_{P_G})) nazywamy parę

$$((P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}}), (\Phi, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$$

złożoną z

- wiązki głównej $(P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}})$;
- morfizmu wiązek głównych

$$(\Phi, \text{id}_B, \widehat{\varphi}) : (P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}}) \longrightarrow (P_G, B, G, \pi_{P_G}).$$

Prolongacje $((P_{\widehat{G}}^\alpha, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^\alpha}), (\Phi_\alpha, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nazywamy **równoważnymi**, ilekroć istnieje izomorfizm wiązek głównych

$$(\Psi, \text{id}_B, \text{id}_{\widehat{G}}) : (P_{\widehat{G}}^1, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^1}) \xrightarrow{\cong} (P_{\widehat{G}}^2, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^2}).$$

▲

TWIERDZENIE 4.3.2. *Przyjmijmy zapis Def. 151. Prolongacja wiązki głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) wzdłuż rozszerzenia centralnego $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy tejże wiązki, z którym stowarzyszona jest rodzina odwzorowań lokalnie ciągłych (wzgl. gładkich klasy C^k)*

$$\widehat{\gamma}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{G}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

o własnościach – zapisanych dla dowolnych $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ –

$$\widehat{\gamma}_{ji} = \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij}$$

oraz

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij},$$

gdzie $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$ są odwzorowaniami przejścia wiązki P_G stowarzyszonymi z pokryciem \mathcal{O} , i takich, dla których są określone odwzorowania lokalnie stałe

$$\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma), \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

spełniające warunki:

$$\forall i \in I : \gamma_{ii} = e_{\widehat{G}}, \quad \forall (i,j) \in \{I \times 2\}_{\mathcal{O}} : \gamma_{ji} = \text{Inv} \circ \gamma_{ij}$$

oraz

$$\forall (i,j,k) \in \{I \times 3\}_{\mathcal{O}} : (\widehat{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = (\gamma_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}}.$$

■

Dowód: Załóżmy, że istnieje prolongacja $((P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}}), (\Phi, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$ wiązki (P_G, B, G, π_{P_G}) i oznaczymy jako \widehat{r} (wzgl. r) działanie definiujące grupy strukturalnej \widehat{G} (wzgl. G) na pierwszej (wzgl. drugiej) z tych wiązek. Wybrawszy trywializacje lokalne: $\widehat{\tau}_i : \pi_{P_{\widehat{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \widehat{G}$ o odwzorowaniach przejścia $\widehat{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$ (dla wiązki $P_{\widehat{G}}$) oraz $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$ o odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$ (dla wiązki P_G), stowarzyszamy z morfizmem Φ jego dane lokalne

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G, \quad i \in I,$$

które w analogii do (dowodu) Stw. 201 definiujemy, jak następuje:

$$\tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) =: (x, h_i(x)), \quad x \in \mathcal{O}_i.$$

Powyższa definicja prowadzi do tożsamości, zapisanej dla dowolnego elementu $g \in \widehat{G}$, a wynikającej z \widehat{G} -ekwiwariantności $\widehat{\tau}_i$ i Φ oraz G -ekwiwariantności τ_i ,

$$\begin{aligned} \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, g) &\equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{r}_g \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) = \tau_i \circ r_{\widehat{\varphi}(g)} \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) \\ &= (\text{id}_B \times \varrho_{\widehat{\varphi}(g)}^G) \circ \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) \equiv (\text{id}_B \times \varrho_{\widehat{\varphi}(g)}^G)(x, h_i(x)) \\ &= (x, h_i(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(g)), \end{aligned}$$

na podstawie której bez trudu wyprowadzamy związek pomiędzy odwzorowaniami przejścia obu wiązek (nad $x \in \mathcal{O}_{ij}$),

$$\begin{aligned} (x, h_i(x) \cdot_G \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}(x)) &\equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, \widehat{g}_{ij}(x)) \equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1} \circ (\widehat{\tau}_i \circ \widehat{\tau}_j^{-1})(x, e_{\widehat{G}}) \\ &= \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_j(x, e_{\widehat{G}}) = (\tau_i \circ \tau_j^{-1}) \circ \tau_j \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_j(x, e_{\widehat{G}}) \\ &= \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, h_j(x)) = (x, g_{ij}(x) \cdot_G h_j(x)), \end{aligned}$$

czyli

$$(4.3.1) \quad \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}(x) = h_i(x)^{-1} \cdot_G g_{ij}(x) \cdot_G h_j(x).$$

Ustalmy dowolne ciągle (wzgl. gładkie) przeciwobrazy $\widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{G}$ odwzorowań h_i ,

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{h}_i = h_i, \quad i \in I.$$

Ich istnienie gwarantuje sama definicja nakrycia (wzgl. Stw. 114), która zapewnia, że każdy punkt w G ma pewne (spójne) otoczenie otwarte równomiernie pokryte przez $\widehat{\varphi}$ (wzgl. takie, na którym jest określone gładkie cięcie lokalne), zatem możemy zawsze tak dobrać (rozdrobnić) pokrycie trywializujące \mathcal{O} , iżby ciągle obrazy jego elementów względem odwzorowań h_i zawierały się w rzeczonych otoczeniach elementów grupy G . Wybór przeciwobrazów \widehat{h}_i pozwala nam przepisać wyprowadzoną wcześniej relację w postaci

$$\widehat{\varphi}(\widehat{h}_i(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ij}(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}_j(x)^{-1}) = g_{ij}(x),$$

z której jasno wynika, że odwzorowania (lokalnie) ciągłe (wzgl. gładkie)

$$(4.3.2) \quad \widehat{\gamma}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{G} : x \longmapsto \widehat{h}_i(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ij}(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}_j(x)^{-1}$$

spełniają warunki wymienione w tezie dowodzonego twierdzenia przy wyborze

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}} : \gamma_{ij} = e_{\widehat{G}} \in \mathcal{J}\Gamma(\Gamma).$$

Odwracając tok rozumowania, przyjmijmy, że dane są trywializacje lokalne $\tau_i^G : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$, $i \in I$ wiązki P_G o odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$, $(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}$ wraz ze stowarzyszonymi z nimi odwzorowaniami $\widehat{\gamma}_{ij}$ oraz γ_{ij} jak w tezie twierdzenia, a wtedy możemy zdefiniować odwzorowania

$$(4.3.3) \quad \widetilde{\gamma}_{ij} := \widehat{\gamma}_{ij} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ij} \equiv \widehat{\gamma}_{ij} \cdot \gamma_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{G}, \quad (i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}$$

które wobec relacji $\text{Ker } \widehat{\varphi} = \mathcal{J}\Gamma(\Gamma)$ spełniają tożsamości

$$\widehat{\varphi} \circ \widetilde{\gamma}_{ij} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij},$$

a nadto – w konsekwencji inkluzji $\mathcal{J}\Gamma(\Gamma) \subset \mathcal{L}(\widehat{G})$ – także

$$\begin{aligned} (\widetilde{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widetilde{\gamma}_{ik} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} &= (\widehat{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \cdot \text{Inv} \circ (\gamma_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \\ &= e_{\widehat{G}}, \end{aligned}$$

Rodzina $\{\widetilde{\gamma}_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}}$ definiuje przeto – na mocy Tw. 4.1.1 – wiązkę główną $(P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, [pr_1])$ o grupie strukturalnej \widehat{G} , przestrzeni totalnej

$$P_{\widehat{G}} \equiv \left(\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \widehat{G}) \right) / \sim_{\widetilde{\gamma}_{..}}$$

i odwzorowaniach przejścia $\widetilde{\gamma}_{ij}$ stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi $[\tau_i]$ zdefiniowanymi w dowodzie tegoż twierdzenia. Na rozmaitości $P_{\widehat{G}}$ możemy przy tym określić odwzorowania lokalnie ciągłe (wzgl. gładkie)

$$\Phi_i : [pr_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \widehat{G} \xrightarrow{\text{id}_B \times \widehat{\varphi}} \mathcal{O}_i \times G \xrightarrow{\tau_i^{G-1}} \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I,$$

odwzorowujące włókna $P_{\widehat{G}}$ we włókna P_G w sposób jawnie \widehat{G} -ekwiwariantny, o czym przekonujemy się nad dowolnym punktem $x \in \mathcal{O}_i$ i dla dowolnych elementów $\widehat{g}, \widehat{h} \in \widehat{G}$,

$$\begin{aligned} \Phi_i([[(x, i, \widehat{g})] \triangleleft_{P_{\widehat{G}}} \widehat{h}]) &= \Phi_i([[(x, i, \widehat{g} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h})]]) = \tau_i^{G-1}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h})) \\ &= \tau_i^{G-1}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h})) = \tau_i^{G-1}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \triangleleft_{P_G} \varphi(\widehat{h}) \\ &\equiv \Phi_i([[(x, i, \widehat{g})]]) \triangleleft_{P_G} \varphi(\widehat{h}). \end{aligned}$$

Łatwo przekonujemy się, że odwzorowania te określają odwzorowanie globalnie ciągłe (wzgl. gładkie)

$$\Phi : P_{\widehat{G}} \longrightarrow P_G$$

o ograniczeniach

$$\Phi \upharpoonright_{[pr_1]^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i,$$

albowiem dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i $\widehat{g} \in \widehat{G}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} \Phi_j([[(x, i, \widehat{g})]]) &= \Phi_j([[(x, j, \widetilde{g}_{ji}(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g})]]) \equiv \tau_j^{G-1}(x, \widehat{\varphi} \circ \widetilde{g}_{ji}(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\ &= \tau_j^{G-1}(x, g_{ji}(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) = \tau_i^{G-1}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \equiv \Phi_i([[(x, i, \widehat{g})]]). \end{aligned}$$

Jest zatem Φ postulowanym morfizmem wiązek głównych. \square

UWAGA 61. Zauważmy, że każda rodzina odwzorowań $\{\widehat{\gamma}_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset}$ o własnościach

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset} : \left(\widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij} \quad \wedge \quad \widehat{\gamma}_{ji} = \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij} \right)$$

oraz

$$\forall_{i \in I} : \widehat{\gamma}_{ii} = e_{\widehat{G}}$$

spełnia – dla dowolnych $(i, j, k) \in (I \times 3)_\emptyset$ – warunki

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} \circ (\widehat{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} &= (\widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{jk}) \cdot (\widehat{\varphi} \circ \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik}) \cdot (\widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \\ &= g_{jk} \cdot \text{Inv} \circ g_{ik} \cdot g_{ij} = e_G, \end{aligned}$$

które wobec założeń poczynionych w odniesieniu do epimorfizmu $\widehat{\varphi}$ implikują

$$\forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_\emptyset} : \widehat{w}_{ijk} := \widehat{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij} : \mathcal{O}_{ijk} \longrightarrow \text{Ker } \widehat{\varphi} = \text{Im } \mathcal{J}_\Gamma \equiv \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma).$$

Z racji inkluzji $\mathcal{J}_\Gamma(\Gamma) \subset \mathcal{L}(\widehat{G})$ otrzymujemy zatem – dla dowolnych $(i, j, k, l) \in (I \times 4)_\emptyset$ – tożsamość

$$\begin{aligned} \check{\delta} \widehat{w}_{ijkl} &:= \left(\widehat{w}_{jkl} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{w}_{ikl}) \cdot \widehat{w}_{ijl} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{w}_{ijk}) \right) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &\equiv \left((\widehat{\gamma}_{kl} \cdot \widehat{\gamma}_{lj} \cdot \widehat{\gamma}_{jk}) \cdot (\widehat{\gamma}_{ki} \cdot \widehat{\gamma}_{il} \cdot \widehat{\gamma}_{lk}) \cdot (\widehat{\gamma}_{jl} \cdot \widehat{\gamma}_{li} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \cdot (\widehat{\gamma}_{ji} \cdot \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{kj}) \right) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &= \left((\widehat{\gamma}_{ki} \cdot \widehat{\gamma}_{il} \cdot \widehat{\gamma}_{lk}) \cdot (\widehat{\gamma}_{kl} \cdot \widehat{\gamma}_{lj} \cdot \widehat{\gamma}_{jk}) \cdot (\widehat{\gamma}_{jl} \cdot \widehat{\gamma}_{li} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \cdot (\widehat{\gamma}_{ji} \cdot \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{kj}) \right) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &= \left(\widehat{\gamma}_{ki} \cdot \widehat{\gamma}_{il} \cdot \widehat{\gamma}_{lj} \cdot \widehat{\gamma}_{jk} \cdot (\widehat{\gamma}_{jl} \cdot \widehat{\gamma}_{li} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \cdot (\widehat{\gamma}_{ji} \cdot \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{kj}) \right) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &= \left(\widehat{\gamma}_{ki} \cdot \widehat{\gamma}_{il} \cdot \widehat{\gamma}_{lj} \cdot (\widehat{\gamma}_{jl} \cdot \widehat{\gamma}_{li} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \cdot (\widehat{\gamma}_{ji} \cdot \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{kj}) \cdot \widehat{\gamma}_{jk} \right) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \equiv e_{\widehat{G}}, \end{aligned}$$

określaną mianem **warunku 2-kocyklu**. Stwierdzamy bez trudu, że tożsamość powyższa nie zmieni się, jeśli wybraliśmy dowolne odwzorowania ciągłe (wzgl. gładkie)

$$\psi_{ij} \equiv \text{Inv} \circ \psi_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma),$$

dokonamy w niej podstawienia

$$\widehat{w}_{ijk} \longmapsto \widehat{w}_{ijk} \cdot \left(\psi_{ji} \cdot (\text{Inv} \circ \psi_{ki}) \cdot \psi_{kj} \right) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} =: \widehat{w}_{ijk} \cdot \check{\delta} \psi_{ijk}.$$

Topologia nakrycia $\widehat{\varphi}$ zapewnia istnienie lokalnie ciągłych (wzgl. gładkich) podniesień $\widehat{\gamma}_{ij}$ odwzorowań przejścia g_{ij} , przy czym (pełna) swoboda wyboru podniesienia jest opisywana przez powyższe podstawienia, możemy więc – w świetle Tw. 4.3.2 – wyciągnąć z naszych dotychczasowych rozważań następujący

WNIOSEK 1. *Ilościową miarą obstrukcji topologicznej dla istnienia prolongacji wiązki głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) wzdłuż rozszerzenia centralnego $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$ jest nieznikająca przy dowolnie rozdrobnionym pokryciu trywializującym \mathcal{O} klasa zdefiniowanych powyżej danych lokalnych $\{ \widehat{w}_{ijk} : \mathcal{O}_{ijk} \longrightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma) \}_{(i,j,k) \in (I \times 3)_\emptyset}$, spełniających warunek 2-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k,l) \in (I \times 4)_\emptyset} : \check{\delta} \widehat{w}_{ijkl} = e_{\widehat{G}},$$

względem relacji równoważności

$$\widehat{w}_{\dots}^2 \sim_{\check{\delta}} \widehat{w}_{\dots}^1 \iff$$

$$\exists \{ \psi_{ij} = \text{Inv} \circ \psi_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma) \}_{(i,j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O}} \quad \forall (i,j,k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_\mathcal{O} : \widehat{w}_{ijk}^2 = \widehat{w}_{ijk}^1 \cdot \check{\delta} \psi_{ijk}.$$

Klasę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia¹) określamy mianem **klasy obstrukcji dla istnienia prolongacji** wiązki głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) wzdłuż rozszerzenia centralnego $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$.

⊗

TWIERDZENIE 4.3.3. *Przyjmijmy zapis Def. 151. Niechaj $((P_G^\alpha, B, \widehat{G}, \pi_{P_G^\alpha}), (\Phi_\alpha, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą prolongacjami wiązki głównej (P_G, B, G, π_{P_G}) wzdłuż rozszerzenia centralnego $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$ i niech $\widehat{g}_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O}$ będą odnośnymi odwzorowaniami przejścia stowarzyszonymi z trywializacjami lokalnymi $\tau_i^\alpha : \pi_{P_G^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \widehat{G}$, $i \in I$ nad wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$. Wówczas istnieją odwzorowania lokalnie ciągłe (wzgl. gładkie klasy C^k)*

$$\widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{G}, \quad i \in I$$

i odwzorowania lokalnie stałe

$$\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma)$$

spełniające dla dowolnych indeksów $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_\mathcal{O}$ warunek 1-kocyklu

$$(\gamma_{jk} \cdot \gamma_{ik}^{-1} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{G}},$$

które ustalają relację pomiędzy odwzorowaniami przejścia w postaci

$$(4.3.4) \quad \widehat{g}_{ij}^2 = \gamma_{ij} \cdot (\widehat{h}_i \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O}.$$

I odwrotnie, każda rodzina odwzorowań ciągłych (wzgl. gładkich) \widehat{g}_{ij}^2 pozostająca w powyższej relacji z odwzorowaniami przejścia \widehat{g}_{ij}^1 ustalonej prolongacji dla pewnych odwzorowań \widehat{h}_i i γ_{ij} spełniających wymienione wcześniej warunki określa prolongację o odwzorowaniach przejścia tożsamych z \widehat{g}_{ij}^2 .

Prolongacje o odwzorowaniach przejścia \widehat{g}_{ij}^1 i \widehat{g}_{ij}^2 są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie \mathcal{O} (współ)trywializujące odnośne wiązki P_G^1 i P_G^2 , w którym relacja (4.3.4) jest spełniona dla

$$\gamma_{ij} = (\eta_j \cdot \text{Inv} \circ \eta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O},$$

gdzie

$$\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma), \quad i \in I$$

są pewnymi odwzorowaniami lokalnie stałymi. ■

Dowód: Niechaj $\widehat{g}_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą odwzorowaniami przejścia wiązek głównych P_G^α , $\alpha \in \{1, 2\}$ wyznaczających prolongacje wiązki głównej P_G i niech

$$(4.3.5) \quad \widehat{\gamma}_{ij}^\alpha = \widehat{h}_i^\alpha \cdot \widehat{g}_{ij}^\alpha \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$$

¹O tym, że granica ta jest dobrze określona, przekonamy się w Części 7.

będą odwzorowaniami, o których mowa w Tw. 4.3.2, stowarzyszonymi z nimi zgodnie z Równ. (4.3.2). Jako że

$$\widehat{\varphi} \circ (\widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^1) = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \widehat{\varphi} \circ \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^1 = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^1 = g_{ij} \cdot \text{Inv} \circ g_{ij} = e_G,$$

a przy tym $\text{Ker } \widehat{\varphi} = \text{Im } \mathcal{J}_\Gamma$, przeto z powyższej równości wynika istnienie odwzorowań lokalnie stałych

$$\gamma_{ij}^{12} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma), \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

o własności

$$\widehat{\gamma}_{ij}^2 = \gamma_{ij}^{12} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}^1.$$

Na jej podstawie wyprowadzamy – w zapisie Uwagi 61 – tożsamość (por.: dowód Tw. 4.3.2)

$$\check{\delta} \gamma_{ijk}^{12} = \check{\delta} \widehat{\gamma}_{ijk}^2 \cdot \text{Inv} \circ \check{\delta} \widehat{\gamma}_{ijk}^1 = e_{\widehat{G}} \cdot e_{\widehat{G}}^{-1} = e_{\widehat{G}}.$$

Przywoławszy definicje (4.3.5), ustalamy postulowaną relację

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{ij}^2 &= \text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \widehat{h}_j^2 = \gamma_{ij}^{12} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{\gamma}_{ij}^1 \cdot \widehat{h}_j^2 \\ &= \gamma_{ij}^{12} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{h}_i^1) \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{h}_i^1 \cdot \widehat{\gamma}_{ij}^1 \cdot \widehat{h}_j^1) \cdot \text{Inv} \circ (\text{Inv} \circ \widehat{h}_j^2 \cdot \widehat{h}_j^1) \\ &= \gamma_{ij}^{12} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{h}_i^1) \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ (\text{Inv} \circ \widehat{h}_j^2 \cdot \widehat{h}_j^1), \end{aligned}$$

w której identyfikujemy odwzorowania

$$\widehat{h}_i = \text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{h}_i^1, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{12}$$

o pożądaných własnościach.

Następnie przypuścmy, odwrotnie, że są dane odwzorowania \widehat{h}_i i γ_{ij} o własnościach wypisanych w treści dowodzonego twierdzenia, które w połączeniu z odwzorowaniami przejścia \widehat{g}_{ij}^1 wiązki głównej $P_{\widehat{G}}^1$ zadającej prolongację wiązki P_G definiują odwzorowania $\widehat{g}_{ij}^2 = \gamma_{ij} \cdot (\widehat{h}_i \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j)$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$. Te ostatnie spełniają warunek 1-kocyklu – dla dowolnych $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}$ –

$$\check{\delta} \widehat{g}_{ijk}^2 = \check{\delta} \gamma_{ijk} \cdot (\widehat{h}_j \cdot \check{\delta} \widehat{g}_{ijk}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{G}} \cdot (\widehat{h}_j \cdot e_{\widehat{G}} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{G}},$$

zatem określają – na mocy Tw. 4.1.1 – wiązkę główną $(P_{\widehat{G}}^2, B, \widehat{G}, [\text{pr}_1])$ o grupie strukturalnej \widehat{G} , przestrzeni totalnej

$$P_{\widehat{G}}^2 \equiv \left(\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \widehat{G}) \right) / \sim_{\widehat{\gamma}^2}$$

i odwzorowaniach przejścia $\widehat{\gamma}_{ij}^2$ pomiędzy trywializacjami lokalnymi $[\tau_i]$ wskazanymi w dowodzie tegoż twierdzenia. Niechaj $h_i^1 : \mathcal{O}_i \longrightarrow G$, $i \in I$ będą danymi lokalnymi morfizmami prolongacji $\Phi_1 : P_{\widehat{G}}^1 \longrightarrow P_G$ określonymi w ścisłej analogii do Równ. (4.3.1), tj. poprzez równości

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}^1 = (\text{Inv} \circ h_i \cdot g_{ij} \cdot h_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}},$$

a wtedy używamy odwzorowań

$$h_i^{12} := h_i^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow G, \quad i \in I,$$

aby na przestrzeni totalnej $P_{\widehat{G}}^2$ zadać odwzorowania lokalnie ciągłe (wzgl. gładkie)

$$\Phi_i : [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \widehat{G} \xrightarrow{\text{id}_B \times \ell_{h_i^{12}} \circ \widehat{\varphi}} \mathcal{O}_i \times G \xrightarrow{\tau_i^{G-1}} \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I,$$

odwzorowujące włókna $P_{\widehat{G}}^2$ we włókna P_G w sposób jawnie \widehat{G} -ekwiwariantny, czego dowodzi bezpośredni rachunek, wykonany nad dowolnym punktem $x \in \mathcal{O}_i$ i dla dowolnych elementów $\widehat{g}, \widehat{h} \in \widehat{G}$,

$$\begin{aligned} \Phi_i([(x, i, \widehat{g})] \triangleleft_{P_{\widehat{G}}} \widehat{h}) &= \Phi_i([(x, i, \widehat{g} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h})]) = \tau_i^{G-1}(x, h_i^{12}(x)) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}) \\ &= \tau_i^{G-1}(x, h_i^{12}(x)) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h}) = \tau_i^{G-1}(x, h_i^{12}(x)) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \triangleleft_{P_G} \varphi(\widehat{h}) \\ &\equiv \Phi_i([(x, i, \widehat{g})]) \triangleleft_{P_G} \varphi(\widehat{h}). \end{aligned}$$

O istnieniu odwzorowania globalnie ciągłego (wzgl. gładkiego)

$$\Phi : P_{\widehat{G}} \longrightarrow P_G$$

spełniającego warunki

$$\Phi \upharpoonright_{[pr_1]^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$$

przesądza bezpośredni rachunek, przeprowadzony dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ i $\widehat{g} \in \widehat{G}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} \Phi_j([(x, i, \widehat{g})]) &= \Phi_j([(x, j, \widehat{g}_{ji}^2(x)) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}]) \\ &\equiv \tau_j^{G-1}(x, h_j^{12}(x)) \cdot_G \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ji}^2(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \\ &= \tau_j^{G-1}(x, h_j^1(x)) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h}_j(x)^{-1}) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}_j(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ji}^1(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}_i(x)^{-1}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \\ &= \tau_j^{G-1}(x, h_j^1(x)) \cdot_G h_j^1(x)^{-1} \cdot_G g_{ji}(x) \cdot_G h_i^1(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h}_i(x)^{-1}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \\ &= \tau_i^{G-1}(x, h_i^1(x)) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h}_i(x)^{-1}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \equiv \tau_i^{G-1}(x, h_i^{12}(x)) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \\ &\equiv \Phi_i([(x, i, \widehat{g})]). \end{aligned}$$

Wraz z podaną wcześniej definicją wiązki głównej $P_{\widehat{G}}$ morfizm ten określa poszukiwaną prolongację wiązki P_G .

Na zakończenie zajmiemy się opisem lokalnym prolongacji (nie)równoważnych. Niechaj więc $P_{\widehat{G}}^\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema wiązkami głównymi współdefiniującymi prolongacje wiązki P_G , o odnośnych odwzorowaniach przejścia $\widehat{g}_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{G}$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$, przy czym założymy, że istnieje morfizm wiązek głównych $\Psi : P_{\widehat{G}}^1 \longrightarrow P_{\widehat{G}}^2$ pokrywający identyczność na bazie. W świetle Tw. 201 dane lokalne $\widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \widehat{G}$, $i \in I$ takiego morfizm zadają relację między odwzorowaniami przejścia w postaci

$$\widehat{g}_{ij}^2 = (\widehat{h}_i \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ij}^1 \cdot_{\widehat{G}} \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

to jednak oznacza, że dla dowolnej pary $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ mamy

$$\gamma_{ij} \equiv e_{\widehat{G}}$$

i możemy położyć

$$\eta_i = e_{\widehat{G}} \in \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma), \quad i \in I.$$

Odwracając bieg rozumowania, rozpatrzmy parę prolongacji o odwzorowaniach przejścia powiązanych relacją (4.3.4), w której odwzorowania lokalnie stałe $\gamma_{ij} = (\eta_j \cdot \text{Inv} \circ \eta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ są wyznaczone przez także odwzorowania $\eta_i :$

$\mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma)$, $i \in I$. Wykorzystując inkluzję $\mathcal{J}_\Gamma(\Gamma) \subset \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{G}})$, przepisujemy Równ. (4.3.4) w postaci

$$\widehat{\mathcal{G}}_{ij}^2 = ((\text{Inv} \circ \eta_i \cdot \widehat{h}_i) \cdot \widehat{\mathcal{G}}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ (\text{Inv} \circ \eta_j \cdot \widehat{h}_j)) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}},$$

z której odczytujemy – ponownie w odwołaniu do Tw. 201 – dane lokalne morfizmu wiązek głównych

$$\widetilde{h}_i := \text{Inv} \circ \eta_i \cdot \widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}, \quad i \in I.$$

Teza Stw. 202 przesądza, że jest to w istocie izomorfizm, i tym samym zamyka dowód. \square

UWAGA 62. Należy odnotować, że skwantyfikowana w powyższym twierdzeniu w Równ. (4.3.4) swoboda redefinicji odwzorowań przejścia $\widehat{\mathcal{G}}_{ij}^1$ w wiązce głównej $P_{\widehat{\mathbb{G}}}$ określającej prolongację wiązki wyjściowej $P_{\mathbb{G}}$ obejmuje wszelkie wybory dowolne, przed jakimi stawia nas procedura prolongacji. Istotnie, uwzględnia ona możliwość przetransformowania wiązki $P_{\widehat{\mathbb{G}}}$ wzdłuż dowolnego morfizmu wiązek głównych o grupie strukturalnej $\widehat{\mathbb{G}}$,

$$\widehat{\mathcal{G}}_{ij}^1 \mapsto \widehat{h}_i \cdot \widehat{\mathcal{G}}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j, \quad \widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{\mathbb{G}},$$

zmiany wyboru podniesienia odwzorowań przejścia na $P_{\mathbb{G}}$ zgodnej ze strukturą rozszerzenia centralnego,

$$\widehat{\mathcal{G}}_{ij}^1 \mapsto \gamma_{ij} \cdot \widehat{\mathcal{G}}_{ij}^1, \quad \gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma),$$

a nawet – spójnie ze Stw. 202 – możliwość przekształcenia wzdłuż dowolnego morfizmu wyjściowej wiązki głównej $P_{\mathbb{G}}$, co prowadzi do kombinacji powyższych transformacji (w których tym razem pojawiają się dowolne podniesienia danych lokalnych morfizmu do grupy nakrywającej).

Wreszcie też na zakończenie warto podsumować wyniki naszych dociekań w formie

WNIOSEK 2. *Ilościową miarą swobody nierównoważnych wyborów prolongacji wiązki głównej $(P_{\mathbb{G}}, B, \mathbb{G}, \pi_{P_{\mathbb{G}}})$ wzdłuż rozszerzenia centralnego $(\widehat{\mathbb{G}}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$ jest określona nad dowolnie rozdrobionym pokryciem trywializującym \mathcal{O} klasa zdefiniowanych w Tw. 4.3.3 danych lokalnych $\{\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma)\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}}$, spełniających warunek 1-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_\mathcal{O}} : \delta \check{\gamma}_{ijk} = e_{\widehat{\mathbb{G}}},$$

względem relacji równoważności

$$\gamma_{..}^2 \sim_\delta \gamma_{..}^1 \iff \exists_{\{\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma)\}_{i \in I}} \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}} : \gamma_{ij}^2 = \gamma_{ij}^1 \cdot \delta \check{\eta}_{ij}.$$

Klasę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia²) określamy mianem **klasy charakterystycznej prolongacji** wiązki głównej $(P_{\mathbb{G}}, B, \mathbb{G}, \pi_{P_{\mathbb{G}}})$ wzdłuż rozszerzenia centralnego $(\widehat{\mathbb{G}}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$.

⊗

²O tym, że granica ta jest dobrze określona, przekonamy się w Części 7.

Dodatkowa struktura na wiązce włóknistej

1. Struktura metryczna

1.1. Metryka na wiązce wektorowej i różniczkowości.

DEFINICJA 152. Przyjmijmy zapis Def. 146 i 148. **Struktura metryczna (klasy C^l) na wiązce wektorowej** $(V, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_V)$ klasy C^k , $k \geq l$ (nad ciałem bazowym \mathbb{R}) to gładkie (klasy C^l) cięcie

$$g : B \longrightarrow V^* \otimes_{\mathbb{K}, B} V^*$$

kwadratu tensorowego wiązki dualnej V^* , którego ograniczenie do dowolnego włókna $V_x \otimes_{\mathbb{K}} V_x$ wiązki $V \otimes_{\mathbb{K}, B} V$ jest niezwyrodniałą symetryczną formą \mathbb{R} -liniową o stałej (nad bazą B) sygnaturze, zadającą formę kwadratową

$$Q_{g(x)} : V_x \longrightarrow \mathbb{R} : v \longmapsto g(x)(v \otimes_{\mathbb{R}} v).$$

Sygnaturę tej ostatniej (w rozumieniu Def. 38) nazywamy **sygnaturą struktury metrycznej**. W przypadku sygnatury postaci $(p, 0)$, $p \in \mathbb{N}^{\times}$ mówimy o **riemansowskiej strukturze metrycznej**. ▲

DEFINICJA 153. **Struktura metryczna (klasy C^l) na różniczkowalnej** (klasy C^k , $k \geq l + 1$) to struktura metryczna (klasy C^l) na wiązce stycznej nad tą różniczkowalnością. ▲

TWIERDZENIE 4.4.1. *Na każdej wiązce wektorowej istnieje struktura metryczna riemannowska. W szczególności więc struktura taka istnieje na każdej różniczkowalnej.* ■

Dowód: Niechaj $(V, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_V)$ będzie wiązką wektorową i niech $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ będzie jej pokryciem trywializującym. Trywializacje lokalne $\tau_i : \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N}$ pozwalają zaindukować lokalne struktury metryczne riemannowskie na V postaci (patrz: Przykł. 14 (1))

$$g_i : \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathbb{R} : (v_1, v_2) \longmapsto \Phi_{\delta_E^{(N)}}(\text{pr}_2 \circ \tau_i(v_1), \text{pr}_2 \circ \tau_i(v_2)),$$

tym samym promując odwzorowania $\text{pr}_2 \circ \tau_i$ do rangi izometrii (lokalnych). Następnie wykorzystujemy rozkład jedności $\{\rho_i\}_{i \in I}$ (klasy C^k) podporządkowany \mathcal{O} do utworzenia ze struktur lokalnych struktury globalnej

$$g := \sum_{i \in I} \rho_i \circ \pi_{V \otimes_{\mathbb{K}, B} V}(\cdot) \triangleright \tilde{g}_i,$$

w której zapisie \tilde{g}_i są odwzorowaniami \mathbb{R} -liniowymi na włóknach $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{K}, B} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ określonymi (jednoznacznie) przez g_i . \square

STWIERDZENIE 221. *Przyjmijmy zapis Def. 126, 150 i 152 oraz Przykł. 2 (3) i 28 (1). Niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem \mathbb{R}). Dowolna struktura metryczna $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze $(p, n-p)$, $p \in \overline{0, n}$ na \mathbb{V} określa redukcję wiązki reperów $F_{\text{GL}}\mathbb{V}$ wzdłuż włożenia kanonicznego*

$$J_{\text{O}_R(p, n-p)} : \text{O}_R(p, n-p) \rightarrow \text{GL}_R(n).$$

Otrzymana tym sposobem wiązka główna zredukowana nosi miano **wiązki reperów ortonormalnych** (lub **wiązki baz ortonormalnych**) **wiązki wektorowej** \mathbb{V} . \blacksquare

Dowód: W świetle Tw. 4.3.1 wystarczy wskazać trywializacje lokalne wiązki głównej $F_{\text{GL}}\mathbb{V}$ o odwzorowaniach przejścia przyjmujących wartości w podgrupie $\text{O}_R(p, n-p) \subset \text{GL}_R(n)$. Teza Stw. 200 czyni to zadanie równoważnym zadaniu znalezienia rodziny cięć lokalnych $\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{\text{GL}}\mathbb{V}$ stowarzyszonych z pewnym pokryciem otwartym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B , które w punktach $x \in \mathcal{O}_{ij}$ pozostają w relacji

$$(4.4.1) \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) \triangleleft g_{ij}(x) \equiv \sigma_i(x) \circ g_{ij}(x)$$

określanej przez odwzorowania przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{O}_R(p, n-p)$. Rozważmy zatem dowolne cięcia lokalne $s_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{\text{GL}}\mathbb{V}$ stowarzyszone z pewnym pokryciem otwartym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$. Wykorzystując konstrukcję przedstawioną w treści Uwagi 46, każdej z par $(s_i(x), e_a)$, $a \in \overline{1, n}$ o drugim składnik będącym elementem bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{K}^{\times n}$ możemy przyporządkować element bazy włókna \mathbb{V}_x dany wzorem

$$[\tilde{e}\mathbb{V}]([(s_i(x), e_a)]) = s_i(x)(e_a) =: s_{i_a}(x).$$

Przywoławszy następnie Stw. 35 (w odniesieniu do form kwadratowych $Q_{g(x)}$, $x \in \mathcal{O}_i$, względem których odnośne układy bazowe $\{s_{i_a}(x)\}_{a \in \overline{1, n}}$ są w oczywisty sposób niezwyrodniałe), możemy następnie przeprowadzić ortogonalizację Grama–Schmidta, która dostarcza nam nowych układów bazowych $\{\sigma_{i_a}(x)\}_{a \in \overline{1, n}}$ o gładkiej zależności od punktu w bazie $x \in \mathcal{O}_i$. Istotnie, przejście od bazy wyjściowej $\{s_{i_a}(x)\}_{a \in \overline{1, n}}$ do bazy $Q_{g(x)}$ -ortogonalnej $\{\sigma_{i_a}(x)\}_{a \in \overline{1, n}}$ jest superpozycją operacji algebraicznych (więc gładkich) o argumentach zależących od x poprzez s_{i_a} oraz g , co na mocy poczynionych założeń gwarantuje rzeczoną gładkość σ_{i_a} . Nowy układ bazowy spełnia – wprost z konstrukcji, a dla dowolnych $a, b \in \overline{1, n}$ oraz $x \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$ – tożsamości

$$g(x)(\sigma_{i_a}(x), \sigma_{i_b}(x)) \equiv \Phi_{Q_{g(x)}}(\sigma_{i_a}(x), \sigma_{i_b}(x)) = \varepsilon_a \delta_{ab}$$

wyrażone przez układ skalarów $\varepsilon_a \in \{-1, 1\}$ zdeteminowany przez sygnaturę struktury metrycznej. Bez straty ogólności rozważań (po dokonaniu stosownej permutacji indeksów bazy) możemy przy tym założyć, że

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_p = 1 = -\varepsilon_{p+1} = -\varepsilon_{p+2} = \dots = -\varepsilon_n.$$

Układu tego możemy użyć do określenia izomorfizmów

$$\sigma_i(x) : \mathbb{K}^{\times n} \rightarrow \mathbb{V}_x$$

będących jedynymi \mathbb{R} -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\sigma_i(x)(e_a) := \sigma_{i_a}(x), \quad a \in \overline{1, n},$$

patrz: Stw. 14, a zatem – w szczególności – zależącymi gładko od punktu w bazie. Tym samym uzyskujemy nowe cięcia lokalne

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbf{F}_{\text{GL}}\mathbf{V} : x \longmapsto \sigma_i(x),$$

które na mocy Stw. 200 wyznaczają trywializacje lokalne

$$\tau_{\sigma_i} : \sqcup_{x \in \mathcal{O}_i} \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbf{V}_x) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times \text{GL}_{\mathbb{R}}(n),$$

a nadto określają bazy we włóknach \mathbf{V} postaci

$$[\widehat{\text{ev}}](\lceil(\sigma_i(x), e_a)\rceil) = \sigma_i(x)(e_a) \equiv \sigma_{ia}(x), \quad a \in \overline{1, n}, \quad x \in \mathcal{O}_i, \quad i \in I.$$

Wyznaczwszy odnośne odwzorowania przejścia,

$$\tau_{\sigma_i} \circ \tau_{\sigma_j}^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times \text{GL}_{\mathbb{R}}(n) \curvearrowright : (x, A) \longmapsto (x, g_{ij}(x) \boxtimes A),$$

o reprezentacji macierzowej

$$g_{ij}(x) = g_{ijab}(x) \triangleright e_a^* \otimes_{\mathbb{R}} e_b$$

(w której zapisie wykorzystaliśmy Tw. 1.2.11), otrzymujemy relacje (4.4.1), których obrazem względem izomorfizmu $[\widehat{\text{ev}}]$ są relacje

$$\begin{aligned} \sigma_{ja}(x) &\equiv [\widehat{\text{ev}}](\lceil(\sigma_j(x), e_a)\rceil) = [\widehat{\text{ev}}](\lceil(\sigma_i(x) \circ g_{ij}(x), e_a)\rceil) \\ &\equiv [\widehat{\text{ev}}](\lceil(\sigma_i(x), g_{ij}(x)(e_a))\rceil) = [\widehat{\text{ev}}](g_{ijab}(x) \triangleright \lceil(\sigma_i(x), e_b)\rceil) \\ &= g_{ijab}(x) \triangleright [\widehat{\text{ev}}](\lceil(\sigma_i(x), e_b)\rceil) \equiv g_{ijab}(x) \triangleright \sigma_{ib}(x). \end{aligned}$$

Te pozwalają nam ustalić, na podstawie wcześniejszych rezultatów, tożsamości

$$\begin{aligned} g(x)(\sigma_{ia}(x), \sigma_{ib}(x)) &= \varepsilon_a \delta_{ab} \equiv g(x)(\sigma_{ja}(x), \sigma_{jb}(x)) \\ &= g_{ijac}(x) \cdot g_{ijbd}(x) \cdot g(x)(\sigma_{ic}(x), \sigma_{id}(x)), \end{aligned}$$

które wyrażają pożądaną własność skonstruowanych przez nas odwzorowań przejścia względem metryki g . \square

UWAGA 63. Wiązka reperów ortonormalnych wiązki wektorowej $(\mathbf{V}, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{\mathbf{V}})$ wyposażonej w strukturę metryczną g o sygnaturze $(p, n-p)$ jest wiązką główną

$$(\mathbf{F}_O\mathbf{V}, B, \mathbf{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p), \pi_{\mathbf{F}_{\text{GL}}\mathbf{V}} \upharpoonright_{\mathbf{F}_O\mathbf{V}})$$

o grupie strukturalnej $\mathbf{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$. Naturalnym modelem dla $\mathbf{F}_O\mathbf{V}$ jest przestrzeń

$$\mathbf{F}_O\mathbf{V} := \bigsqcup_{x \in B} \text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbf{V}_x)^{\mathfrak{g}},$$

w której zapisie włókno $\text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbf{V}_x)^{\mathfrak{g}} \ni \beta_x$ jest zbiorem bijektywnych izometrii

$$\beta_x : \mathbb{R}^{p, n-p} \xrightarrow{\cong} (\mathbf{V}_x, Q_{g(x)}),$$

przy czym topologia i struktura różniczkowalna na tak określonej przestrzeni totalnej wiązki są określone analogicznie jak w przypadku wiązki reperów $\mathbf{F}_{\text{GL}}\mathbf{V}$ z Def. 126.

STWIERDZENIE 222. *Przyjmijmy zapis Def. 126, 150 i 152 oraz Przykł. 2 (3) i 28 (1). Niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{x^n}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem \mathbb{R}). Dowolna redukcja wiązki reperów $F_{GL}\mathbb{V}$ wzdłuż włożenia kanonicznego*

$$J_{O_{\mathbb{R}}(n)} : O_{\mathbb{R}}(n) \rightarrow GL_{\mathbb{R}}(n).$$

wyznacza na \mathbb{V} strukturę metryczną $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze $(n, 0)$. ■

Dowód: Metrykę na włóknach wiązki \mathbb{V} definiujemy punkt po punkcie nad jej bazą, używając w tym celu cięć (lokalnych) wiązki reperów ortonormalnych $F_{O}\mathbb{V}$ zrekonstruowanej z odwzorowań przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow O_{\mathbb{R}}(n)$ wiązki $F_{GL}\mathbb{V}$ zredukowanych do $O_{\mathbb{R}}(n) \subset GL_{\mathbb{R}}(n)$. Niechaj zatem $\beta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{O}\mathbb{V}$ będzie dowolnym takim cięciem nad zbiorem $\mathcal{O}_i \ni x$ należącym do pokrycia trywializującego \mathbb{V} (nad którym rekonstruujemy $F_{O}\mathbb{V}$), określającym trywializację lokalną wiązki $F_{O}\mathbb{V}$. Iloczyn skalarny na \mathbb{V}_x ustanawiamy formułą

$$g_i : \mathbb{V}_x \times \mathbb{V}_x \rightarrow \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)),$$

której struktura przesądza o gładkiej zależności odwzorowań g_i od punktu w \mathcal{O}_i , jak również o ich dodatniej określoności i symetrii względem transpozycji argumentów wektorowych. Przy tym dowolne dwa cięcia lokalne $\beta_i, \tilde{\beta}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{O}\mathbb{V}$ są powiązane przez pewne odwzorowanie (gładkie) $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow O_{\mathbb{R}}(n)$ zgodnie z formułą

$$\tilde{\beta}_i(x) = \beta_i(x) \circ h_i(x), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

co zapewnia niezależność definicji g_i od wyboru cięcia lokalnego,

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(\tilde{\beta}_i(x)^{-1}(v), \tilde{\beta}_i(x)^{-1}(w)) &= \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(h_i(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(v), h_i(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(w)) \\ &= \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)). \end{aligned}$$

Pozostaje upewnić się, że tak zadane riemannowskie metryki lokalne wyznaczają metrykę globalną. W tym celu rozważmy punkt $x \in \mathcal{O}_{ij}$, nad którym cięcia lokalne β_i i β_j pozostają w relacji

$$\beta_j(x) = \beta_i(x) \circ g_{ij}(x).$$

Ortogonalny charakter odwzorowań przejścia pozwala stwierdzić, że

$$\begin{aligned} g_j(v, w) &\equiv \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(\beta_j(x)^{-1}(v), \beta_j(x)^{-1}(w)) \\ &= \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(v), g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(w)) \\ &= \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)) \equiv g_i(v, w). \end{aligned}$$

i na tej podstawie wnioskować o istnieniu odwzorowania globalnie gładkiego

$$g : B \rightarrow \mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}^*, \quad g|_{\mathcal{O}_i} \equiv g_i$$

o pożądanym własnościach. □

1.2. Metryka Kobayashiego na wiązce głównej.

2. Orientacja na wiązce wektorowej

Dokonyamy obecnie geometryzacji algebraicznego pojęcia orientacji przestrzeni wektorowej (rzeczywistej), rozumianego jako wybór jednego z dwóch rozłącznych podzbiorów w zbiorze baz tejże przestrzeni utworzonego przez bazy powiązane (wzajemnie) odwracalnymi odwzorowaniami liniowymi o wyznaczniku dodatnim, przy czym w obecności formy kwadratowej, więc w ograniczeniu do automorfizmów ortogonalnych, ten ostatni staje się równy jedności. W tym celu rozważymy rodzinę cięć (lokalnych) wiązki reperów ortonormalnych $F_O\mathbb{V}$ (rzeczywistej) wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ wyposażonej w strukturę metryczną o sygnaturze $(p, n-p)$, $p \in \overline{0, n}$,

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow F_O\mathbb{V}$$

stowarzyszonych z pewnym pokryciem otwartym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B . Ciągłość cięć σ_i oznacza, że wszystkie bazy w $\mathbb{R}^{\times n}$ otrzymane w obrazie trywializacji lokalnej $\tau_i : \pi_{F_O\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ z obrazu cięcia $\sigma_i(\mathcal{O}_i)$ leżą w tej samej spójnej składowej grupy ortogonalnej $O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$, każde zatem dwa punkty obrazu łączy odwzorowanie ze składowej spójnej jedności tejże grupy, czyli z grupy specjalnej ortogonalnej $SO_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ przy $p(n-p) = 0$, wzgl. z grupy specjalnej ortogonalnej ortochronicznej $SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p)$ przy $p(n-p) \neq 0$, por.: Przykł. 28 (1). W punktach $x \in \mathcal{O}_{i_j}$ cięcia lokalne pozostają w relacji (patrz: Def. 128)

$$\sigma_j(x) = \sigma_i(x) \triangleleft \phi_{F_O\mathbb{V}}(\sigma_i(x), \sigma_j(x)),$$

przy czym

$$\phi_{F_O\mathbb{V}}(\sigma_i(x), \sigma_j(x)) \equiv g_{ij}(x) \in O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$$

są tożsame z odwzorowaniami przejścia stowarzyszonymi z trywializacjami lokalnymi wyznaczanymi przez cięcia lokalne σ_i w duchu Stw. 200. W świetle powyższych uwag naturalną adaptacją pojęcia orientacji staje się

DEFINICJA 154. Przyjmijmy zapis Stw. 221. Wiązkę wektorową $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad ciałem bazowym \mathbb{R}) wyposażoną w strukturę metryczną o sygnaturze $(p, n-p)$, $p \in \overline{0, n}$ określamy mianem **orientowalnej**, ilekroć istnieje taki wybór pokrycia trywializującego dla wiązki reperów ortonormalnych $F_O\mathbb{V}$, przy którym odwzorowania przejścia $F_O\mathbb{V}$ przyjmują wartości w podgrupie specjalnej ortogonalnej $SO_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$. W takim przypadku wiązkę zredukowaną (wzdłuż iniekcji kanonicznej) nazywamy **wiązką reperów ortonormalnych z orientacją** (albo też **wiązką baz ortonormalnych z orientacją**) **wiązki wektorowej \mathbb{V}** i zapisujemy jako

$$(F_{SO}\mathbb{V}, B, SO_{\mathbb{R}}(p, n-p), \pi_{F_{SO}\mathbb{V}})$$

W przypadku $p(n-p) \neq 0$ mówimy o wiązce **orientowalnej przestrzennie** (wzgl. **czasowo**), jeśli możliwa jest jej redukcja wzdłuż iniekcji kanonicznej $SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \sqcup P_{e_{p+1}} \cdot SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \subset O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ (wzgl. $SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \sqcup P_{e_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \subset O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$), wprowadzając zarazem pochodne pojęcie **wiązki reperów ortonormalnych z orientacją przestrzenną** (wzgl. **czasową**) lub też **wiązki baz ortonormalnych z orientacją przestrzenną** (wzgl. **czasową**) **wiązki wektorowej \mathbb{V}** . Wreszcie też jeśli możliwa jest redukcja wiązki reperów wzdłuż iniekcji kanonicznej $SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \subset O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$, mamy do czynienia z wiązką **orientowalną**

czasowo i przestrzenie, a odnośną wiązkę zredukowaną nazywamy **wiązką reperów ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną** (albo też **wiązką baz ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną**) **wiązki wektorowej** \mathbb{V} i oznaczamy symbolem

$$(\mathbb{F}_{\text{SO}^+ \mathbb{V}}, B, \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, n-p), \pi_{\mathbb{F}_{\text{SO}^+ \mathbb{V}}}).$$

Ilkroć wymienione powyżej własności strukturalne charakteryzują wiązkę wektorową styczną nad rozmaitością różniczkowalną, odnośne określenia stosują się do tejże rozmaitości. Mamy zatem **rozmaitość różniczkowalną orientowalną, rozmaitość różniczkowalną orientowalną czasowo** wzgl. **przestrzenie** oraz **rozmaitość różniczkowalną orientowalną czasowo i przestrzennie**. ▲

TWIERDZENIE 4.4.2. *Przyjmijmy zapis Def. 20 i 154. Wiązka wektorowa $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{x_n}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad ciałem bazowym \mathbb{R}) wyposażona w strukturę metryczną o sygnaturze $(p, n-p)$, $p \in \bar{0}, n$ jest orientowalna (względem tejże struktury) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy wiązki reperów ortonormalnych $\mathbb{F}_{\mathbb{O}\mathbb{V}}$ i odnośne trywializacje lokalne $\tau_i : \pi_{\mathbb{F}_{\mathbb{O}\mathbb{V}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$, $i \in I$ o stowarzyszonych z nimi odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$, $(i, j) \in \langle I^{x_2} \rangle_{\mathcal{O}}$, dla których odwzorowania (lokalnie) stałe*

$$\gamma_{ij} := \det_{(n)} \circ g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad (i, j) \in \langle I^{x_2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

przyjmują postać

$$(4.4.2) \quad \gamma_{ij} = (\eta_j \cdot \text{Inv} \circ \eta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}$$

dla pewnych odwzorowań (lokalnie) stałych

$$\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

■

Dowód: W świetle Def. 129 oraz Uwagi 46 orientowalność \mathbb{V} oznacza istnienie pokrycia trywializującego \mathcal{O} i odnośnych trywializacji τ_i , dla których odwzorowania przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{SO}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$, a wówczas $\det_{(n)} g_{ij} = 1$ i możemy położyć $\eta_i \equiv 1$.

I odwrotnie, mając dane odwzorowania $\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $i \in I$, wybierzmy dowolnie odwzorowania (klasy C^k)

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p), \quad i \in I$$

o własności

$$\det_{(n)} \circ h_i = \eta_i,$$

która pozwala stwierdzić, że odwzorowania

$$\tilde{g}_{ij} := h_i \cdot g_{ij} \cdot \text{Inv} \circ h_j : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p), \quad (i, j) \in \langle I^{x_2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

spełniają – w świetle Stw. 10 – warunek

$$\det_{(n)} \circ \tilde{g}_{ij} = \eta_i \cdot \gamma_{ij} \cdot \text{Inv} \circ \eta_j \equiv 1,$$

czyli w istocie

$$\tilde{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{SO}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p).$$

Na gruncie Stw. 201 konstatujemy, że wiązka główna zrekonstruowana – według schematu podanego w dowodzie Tw. 4.1.1 – z danych lokalnych \tilde{g}_{ij} jest izomorficzna z wiązką reperów $x \in F_O \mathbb{V}$. Równoważnie możemy powiedzieć, że stosowna redefinicja trywializacji lokalnych tej ostatniej pozwala dokonać redukcji grupy strukturalnej wzdłuż włożenia kanonicznego

$$J_{\text{SO}_R(p,n-p)} : \text{SO}_R(p, n-p) \rightarrow \text{O}_R(p, n-p),$$

w rozumieniu Tw. 4.3.1. Istotnie, jeśli wyjściowe trywializacje lokalne τ_i o odwzorowaniach przejścia g_{ij} zastąpić odwzorowaniami

$$\tilde{\tau}_i : \pi_{F_O \mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \text{O}_R(p, n-p) : \tau_i^{-1}(x, g) \mapsto (x, h_i(x) \cdot g), \quad i \in I,$$

to w bezpośrednim rachunku – przeprowadzonym dla dowolnych $(x, g) \in \mathcal{O}_i \times \text{O}_R(p, n-p)$ –

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(x, g) &\equiv \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(x, h_j(x) \cdot (h_j(x)^{-1} \cdot g)) = \tilde{\tau}_i \circ \tau_j^{-1}(x, h_j(x)^{-1} \cdot g) \\ &\equiv \tilde{\tau}_i \circ \tau_i^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, h_j(x)^{-1} \cdot g) = \tilde{\tau}_i \circ \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x) \cdot h_j(x)^{-1} \cdot g) \\ &= (x, h_i(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot h_j(x)^{-1} \cdot g) \end{aligned}$$

wyznaczymy nowe odwzorowania przejścia

$$h_i(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot h_j(x)^{-1} \equiv \tilde{g}_{ij}(x) \in \text{SO}_R(p, n-p).$$

□

UWAGA 64. Należy podkreślić, że rodzina odwzorowań lokalnie stałych $\{\gamma_{ij} = \det_{(n)} \circ g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}}$ zdefiniowanych w treści Tw. 4.4.2 spełnia – dla dowolnych $(i, j, k) \in (I \times 3)_\mathcal{O}$ – tożsamość

$$\check{\delta}\gamma_{ijk} := (\gamma_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \equiv \det_{(n)}(g_{jk} \cdot g_{ki} \cdot g_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = \det_{(n)} \mathbf{1}_n = 1,$$

nazywaną **warunkiem 1-kocyklu**. Jest przy tym zupełnie jasnym, że dla dowolnych odwzorowań lokalnie stałych

$$\psi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

tożsamość powyższa jest niezmiennicza ze względu na podstawienia

$$\gamma_{ij} \mapsto \gamma_{ij} \cdot (\psi_j \cdot \text{Inv} \circ \psi_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} =: \gamma_{ij} \cdot \check{\delta}\psi_{ij}.$$

Otrzymujemy zatem

WNIOSEK 3. *Płociową miarą obstrukcji topologicznej dla orientowalności wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^n, \pi_{\mathbb{V}})$ wyposażonej w strukturę metryczną jest nieznikająca przy dowolnie rozdrobionym pokryciu trywializującym \mathcal{O} klasa zdefiniowanych powyżej danych lokalnych $\{\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{Z}_2\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}}$, spełniających warunek 1-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_\mathcal{O}} : \check{\delta}\gamma_{ijk} = 1,$$

względem relacji równoważności

$$\gamma_{ij}^2 \sim_{\check{\delta}} \gamma_{ij}^1 \iff \exists \{\psi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2\}_{i \in I} \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}} : \gamma_{ij}^2 = \gamma_{ij}^1 \cdot \check{\delta}\psi_{ij}.$$

Klasę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia¹) oznaczamy symbolem

$$w_1(\mathbb{V})$$

¹O tym, że granica ta jest dobrze określona, przekonamy się w Części 7.

i określamy mianem **pierwszej klasy Stiefela–Whitneya wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{x_n}, \pi_{\mathbb{V}})$.

W przypadku wiązki wektorowej stycznej nad rozmaitości różniczkowalną, mówimy o **pierwszej klasie Stiefela–Whitneya rozmaitości różniczkowalnej**. \oplus

Pojawienie się wyznacznika odwzorowań przejścia w naszej dyskusji zagadnienia orientowalności wiązki wektorowej sugeruje – w kontekście rozważań z Rozdz. 1 – bezpośredni związek tego pojęcia z geometryzacją innego (równoważnego) algebraicznego modelu orientacji, jakiego dostarcza konstrukcja wyznacznika na przestrzeni wektorowej \mathbb{K}^{x_n} , modelującej włókno wiązki \mathbb{V} , czyli (dowolnego niezerowego) elementu $\Delta \in \wedge^n (\mathbb{K}^{x_n})^*$. Jeśli teraz przywołać procedurę – opisaną w Uwadze 46 – rekonstrukcji wiązki wektorowej jako wiązki stowarzyszonej z wiązką reperów, a procedura ta działa także w przypadku zredukowanej grupy strukturalnej (patrz: Tw. 4.3.1), to widzimy, że możliwość ograniczenia się do odwzorowań przejścia z $\text{SO}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset \text{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ dotyczy w jednakim stopniu wiązki wektorowej \mathbb{V} i jej wiązek reperów $\text{F}_0\mathbb{V}$ oraz $\text{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}$. Idąc dalej tym tropem, dochodzimy do

STWIERDZENIE 223. *Przyjmijmy zapis Def. 149 i 154. Wiązka wektorowa $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{x_n}, \pi_{\mathbb{V}})$ (nad ciałem bazowym \mathbb{R}) wyposażona w strukturę metryczną g jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wiązka wyznacznikowa $\det \mathbb{V}$ ma nigdzie nieznikające globalne cięcie.* \blacksquare

Dowód: Wynika wprost z konstrukcji wiązki wyznacznikowej przedstawionej w Rozdz. 1.4 i wcześniejszej dyskusji. \square

TWIERDZENIE 4.4.3. *Przyjmijmy zapis Def. 145 oraz 152 i niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{x_n}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem bazowym \mathbb{R}). Struktura metryczna $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze $(p, n-p)$, $p \in \overline{1, n-1}$ istnieje na \mathbb{V} wtedy i tylko wtedy, gdy \mathbb{V} można przedstawić jako sumę Whitneya*

$$(4.4.3) \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}^+ \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}^-$$

podwiązek wektorowych:

$$(\mathbb{V}^+, B, \mathbb{R}^{x_p}, \pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{V}^+})$$

oraz

$$(\mathbb{V}^-, B, \mathbb{R}^{x_{n-p}}, \pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{V}^-}),$$

przy czym odnośne włókna zadają wówczas rozkład włókna wiązki \mathbb{V} na sumę ortogonalną

$$\forall_{x \in B} : \mathbb{V}_x = \mathbb{V}_x^+ \oplus_{Q_{g(x)}} \mathbb{V}_x^-$$

zgodny z tezą Tw. 1.2.3, tj. taki, przy którym

$$\pm Q_{g(x)} \upharpoonright_{\mathbb{V}_{\pm}^{\pm}} > 0,$$

i podwiązki \mathbb{V}^{\pm} są maksymalne w tym sensie, że nie istnieje podwiązka wektorowa $\mathbb{W}^+ \subset \mathbb{V}$ o własnościach

$$\mathbb{W}^+ \not\supseteq \mathbb{V}^+ \quad \wedge \quad Q_g \upharpoonright_{\mathbb{W}^+} > 0 \quad \wedge \quad \mathbb{W}^+ \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}^- = \mathbb{V},$$

ani też podwiązka wektorowa $W^- \subset V$ o własnościach

$$W^- \not\cong V^- \quad \wedge \quad Q_g \upharpoonright_{W^-} < 0 \quad \wedge \quad V^+ \oplus_{\mathbb{K}, B} W^- = V.$$

W takim przypadku podwiązkę V^+ nazywamy **maksymalną podwiązką przestrzenną wiązki** V , podwiązkę V^- zaś – **maksymalną podwiązką czasową wiązki** V . ■

Dowód: Załóżmy najpierw, że dany jest rozkład (4.4.3) i niechaj $g_{\mathbb{R}} \in \Gamma(V^* \otimes_{\mathbb{K}, B} V^*)$ będzie riemannowską strukturą metryczną na V skonstruowaną w dowodzie Tw. 4.4.1, orzekającego o jej istnieniu. Postulowaną strukturę metryczną g o nietrywialnej sygnaturze otrzymujemy, położywszy

$$g := g_{\mathbb{R}} \upharpoonright_{V^+ \times_B V^+} \oplus (-g_{\mathbb{R}} \upharpoonright_{V^- \times_B V^-}).$$

Dowód implikacji odwrotnej wymaga znajomości „efektu Higgsa” i dyskusji maksymalnych podgrup zwartych grupy Lorentza (alternatywne dowody, jak ten pochodzący od Gilkeya, mają poważne luki logiczne), więc pojawi się później. \square

TWIERDZENIE 4.4.4. *Przyjmijmy zapis Def. 154 oraz Tw. 4.4.3 i niechaj $(V, B, \mathbb{R}^{x^n}, \pi_V)$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem bazowym \mathbb{R}) wyposażoną w strukturę metryczną $g \in \Gamma(V^* \otimes_{\mathbb{K}, B} V^*)$ o sygnaturze $(p, n-p)$, $p \in \overline{1, n-1}$. Wiązka V jest orientowalna przestrzennie (wzgl. czasowo) wtedy i tylko wtedy, gdy jej maksymalna podwiązka przestrzenna V^+ (wzgl. czasowa V^-) jest orientowalna, w szczególności więc gdy V^+ (wzgl. V^-) spełnia warunki wymienione w tezie Tw. 4.4.2.* ■

Dowód: W świetle dowodu Tw. 4.4.3 istnienie struktury metrycznej g o sygnaturze $(p, n-p)$ implikuje redukowalność wiązki reperów wzdłuż monomorfizmu

$$J_{O_{\mathbb{R}(p)} \times O_{\mathbb{R}(n-p)}} : O_{\mathbb{R}(p)} \times O_{\mathbb{R}(n-p)} \longrightarrow O_{\mathbb{R}(p, n-p)} : (A, B) \longmapsto A \oplus B,$$

w którego zapisie $A \oplus B$ jest endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^{xp} \oplus \mathbb{R}^{x(n-p)} \cong \mathbb{R}^{xn}$. W świetle Stw. 205 przesądza to o istnieniu trywializacji lokalnych

$$\tau_i : \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{xp} \oplus \mathbb{R}^{x(n-p)}) \cong \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn}$$

wiązki V o odwzorowaniach przejścia

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow J_{O_{\mathbb{R}(p)} \times O_{\mathbb{R}(n-p)}}(O_{\mathbb{R}(p)} \times O_{\mathbb{R}(n-p)}).$$

Maksymalna podwiązka przestrzenna $V^+ \subset V$ dziedziczy tym samym trywializację o odwzorowaniach przejścia

$$g_{ij}^+ : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow J_{O_{\mathbb{R}(p)} \times O_{\mathbb{R}(n-p)}}(O_{\mathbb{R}(p)} \times \{\mathbf{1}_{n-p}\}) \cong O_{\mathbb{R}(p)}.$$

Orientowalność V^+ jest równoznaczna z dalszą redukcją jej grupy strukturalnej $J_{O_{\mathbb{R}(p)} \times O_{\mathbb{R}(n-p)}}(O_{\mathbb{R}(p)} \times \{\mathbf{1}_{n-p}\})$ do podgrupy izomorficznej z $SO_{\mathbb{R}(p)}$, co ostatecznie pozwala ograniczyć grupę strukturalną sumy Whitneya $V^+ \oplus_{\mathbb{K}, B} V^- \cong V$ do postaci

$$\begin{aligned} & J_{O_{\mathbb{R}(p)} \times O_{\mathbb{R}(n-p)}}(SO_{\mathbb{R}(p)} \times O_{\mathbb{R}(n-p)}) \\ \cong & J_{O_{\mathbb{R}(p)} \times O_{\mathbb{R}(n-p)}}(SO_{\mathbb{R}(p)} \times (SO_{\mathbb{R}(n-p)} \sqcup P_{e_1} \cdot SO_{\mathbb{R}(n-p)})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= J_{O_{\mathbb{R}}(p) \times O_{\mathbb{R}}(n-p)} \left((SO_{\mathbb{R}}(p) \times SO_{\mathbb{R}}(n-p)) \sqcup (SO_{\mathbb{R}}(p) \times P_{e_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(n-p)) \right) \\
&\subset SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \sqcup P_{e_{p+1}} \cdot SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p).
\end{aligned}$$

Powyższe rozumowanie bez trudu odwracamy na gruncie Tw.?? (o redukcji grupy strukturalnej do maksymalnej podgrupy zwartej – pojawi się później), zauważając, że maksymalna podgrupa zwarta grupy $SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \sqcup P_{e_{p+1}} \cdot SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \subset O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ to (obraz względem włożenia kanonicznego w grupę $O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ jej podgrupy) $SO_{\mathbb{R}}(p) \times O_{\mathbb{R}}(n-p)$.

Dowód w przypadku maksymalnej podwiązki czasowej przebiega w pełni analogicznie. \square

DEFINICJA 155. Przyjmijmy zapis Def. 149 i 154. **Orientacja na wiązce wektorowej** $(V, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_V)$ (nad ciałem bazowym \mathbb{R}) wyposażonej w strukturę metryczną o sygnaturze (p, q) i względem tej struktury orientowalnej to wybór podwiązki zredukowanej (w rozumieniu Def. 150)

$$F_{SO} V \subset F_O V$$

wzdłuż włożenia kanonicznego

$$J_{SO_{\mathbb{R}}(n)} : SO_{\mathbb{R}}(n) \rightarrow O_{\mathbb{R}}(p, q)$$

lub – równoważnie – wybór nigdzie nie znikającego globalnego cięcia wiązki wyznacznikowej $\det V$.

W szczególności **orientacja na rozmaitości różniczkowalnej** orientowalnej to orientacja na jej wiązce stycznej.

Analogicznie określamy **orientację przestrzenną** oraz **orientację czasową** na wiązce wektorowej i na rozmaitości. \blacktriangle

UWAGA 65. Wiązka wyznacznikowa $\det V$ jest wiązką liniową, przeto warunek orientowalności wiązki wektorowej V wysłowiony w Stw. 223 jest w świetle Stw. 195 tożsamy z warunkiem globalnej trywialności $\det V$. Przy tym pojawiają się naturalnie dwie rozłączne klasy abstrakcji *nigdzie nieznikających* cięć $\det V$ (tj. orientacji) względem relacji homotopijnej (wzgl. dyfeotopijnej) równoważności, którą definiujemy, jak następuje: nigdzie nieznikające cięcia $\sigma_\alpha : B \rightarrow \det V \setminus \mathbf{0}_{\det V}(B) \subset \det V$, $\alpha \in \{1, 2\}$ są równoważne, jeśli istnieje ciągłe (wzgl. gładkie klasy C^k) odwzorowanie

$$h : [0, 1] \times B \rightarrow \det V \setminus \mathbf{0}_{\det V}(B) : (t, x) \mapsto h_t(x)$$

o własnościach

$$h_0 = \sigma_1 \quad \wedge \quad h_1 = \sigma_2.$$

Należy podkreślić, że przeciwdziedzina h jest wiązką wyznacznikową z *wyjętym cięciem zerowym*, każde więc z odwzorowań $h_t : B \rightarrow \det V \setminus \mathbf{0}_{\det V}(B)$, $t \in [0, 1]$ jest nigdzie nieznikającym cięciem (globalnym) $\det V$. Obecność dwóch nierównoważnych klas orientacji na V objawia się także bezpośrednio w opisie lokalnym przedstawionym w tezie i dowodzie Tw. 4.4.2, o czym przekonamy się obecnie. Niechaj $\tau_i : \pi_{\det V}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}$, $i \in I$ będzie rodziną trywializacji lokalnych wiązki wyznacznikowej stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi wiązki reperów ortonormalnych o (zredukowanych) odwzorowaniach przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$.

Odwzorowania przejścia dla tej rodziny trywializacji przyjmują znajomą postać

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{R} \curvearrowright : (x, r) \mapsto (x, \gamma_{ij}(x) \cdot r),$$

przy czym – zgodnie z wprowadzoną wcześniej notacją –

$$\gamma_{ij} = \det_{(n)} \circ g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathbb{Z}_2.$$

W świetle Stw. 195 istnienie trywializacji τ_i jest równoznaczne z istnieniem cięć lokalnych, które konstruujemy według przepisu podanego w dowodzie tegoż stwierdzenia,

$$\sigma_{\tau_i} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \det \mathbb{V} : x \mapsto \tau_i^{-1}(x, 1).$$

Założenie o orientowalności \mathbb{V} daje nam do ręki rodzinę odwzorowań lokalnie stałych $\eta_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, $i \in I$ o własności (4.4.2), których możemy użyć do zdefiniowania nowych cięć lokalnych

$$\tilde{\sigma}_{\tau_i} := \sigma_{\tau_i} \cdot \text{Inv} \circ \eta_i, \quad i \in I.$$

Bez trudu przekonujemy się, że te ostatnie są ograniczeniami cięcia globalnego, o którym jest mowa wyżej, oto bowiem w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\tau_j}(x) &= \eta_j(x)^{-1} \cdot \tau_j^{-1}(x, 1) = \eta_j(x)^{-1} \cdot \tau_i^{-1}(x, \gamma_{ij}(x)) = \eta_j(x)^{-1} \cdot \gamma_{ij}(x) \cdot \tau_i^{-1}(x, 1) \\ &= \eta_i(x)^{-1} \cdot \tau_i^{-1}(x, 1) \equiv \tilde{\sigma}_{\tau_i}(x). \end{aligned}$$

W wyborze danych trywializujących (globalnie) $\{\eta_i\}_{i \in I}$ ogranicza nas jedynie warunek (4.4.2), przeto dowolne dwie rodziny takich danych: $\{\eta_i^\alpha\}_{i \in I}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ spełniają warunki

$$(\eta_j^2 \cdot \text{Inv} \circ \eta_i^2) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = \gamma_{ij} = (\eta_j^1 \cdot \text{Inv} \circ \eta_i^1) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\emptyset},$$

z których dla odwzorowań

$$\Delta_i := \eta_i^2 \cdot \text{Inv} \circ \eta_i^1 : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

wyprowadzamy **warunek 0-kocyklu**

$$\forall_{(i,j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\emptyset}} : \delta \Delta_{ij} = (\Delta_j \cdot \text{Inv} \circ \Delta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = 1.$$

Odwzorowania te są zatem ograniczeniami odwzorowania gładkiego

$$\Delta : B \longrightarrow \mathbb{Z}_2, \quad \Delta \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} \equiv \Delta_i,$$

czyli stałego na spójnych składowych bazy (tj. w istocie należącego do $\mathbb{Z}_2^{|\pi_0(B)|}$, gdzie $|\pi_0(B)|$ jest liczbą spójnych składowych B). Zauważmy, że przejściu

$$\eta_i \mapsto \Delta \cdot \eta_i^1, \quad i \in I$$

towarzyszy (globalna) transformacja znaku skonstruowanego powyżej cięcia globalnego,

$$\tilde{\sigma}_{\tau_i} \mapsto \Delta^{-1} \cdot \tilde{\sigma}_{\tau_i} \equiv \Delta \cdot \tilde{\sigma}_{\tau_i},$$

przy czym ilekroć $\Delta = -1$ otrzymujemy tym sposobem cięcie homotopijnie nierównoważne (w sensie sprecyzowanym wcześniej) z wyjściowym, reprezentujące nierównoważną wyjściową orientację na \mathbb{V} .

Nasze rozumowanie podsumowujemy w poniższym

WNIOSEK 4. Ilościową miarą swobody nierównoważnych wyborów orientacji na (orientowalnej) wiązce wektorowej $(V, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_V)$ wyposażonej w strukturę metryczną $g \in \Gamma(V^* \otimes_{\mathbb{K}, B} V^*)$ o sygnaturze $(p, n-p)$, $p \in \overline{0, n}$ jest określona nad dowolnie rozdrobnionym pokryciem trywializującym \mathcal{O} rodzina danych lokalnych $\{ \Delta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2 \}_{i \in I}$ spełniających warunek 0-kocyklu

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}} : \check{\delta} \Delta_{ij} = 1.$$

Relacja między dowolnymi dwiema orientacjami na V , rozumianymi jako redukcje wiązki reperów ortogonalnych $F_{\mathbb{O}} V$ wzdłuż włożenia kanonicznego $J_{\text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, n-p)} : \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \rightarrow \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ o zdefiniowanych w dowodzie Tw. 4.4.2 danych lokalnych $\{ h_i^\alpha : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \}_{i \in I}$, $\alpha \in \{1, 2\}$, jest ustalana przez (stosowne) dane lokalne Δ_i według schematu

$$\det_{(n)} \circ h_i^2 = \Delta_i \cdot \det_{(n)} \circ h_i^1,$$

przy czym **klasy orientacji** wiązki V są określone jako klasy abstrakcji relacji równoważności

$$h_i^2 \sim_{\check{\delta}} h_i^1 \iff \Delta_i := \det_{(n)} \circ h_i^2 \cdot \text{Inv} \circ \det_{(n)} \circ h_i^1 \equiv 1.$$

⊗

Część 5

Wiązki Clifforda i spinorowe

Qui bono?

Rozdział 5.1

Struktura Spin na wiązce wektorowej

Rozdział 5.2

Geometryzacja algebr i modułów Clifforda

Rozdział 5.3

Powiązanie spinowe i operator Diraca

Część 6

Wiązki włókniste w teorii pola

Część 7

Zastosowania algebry homologicznej

Rozdział 7.1

Kohomologia snopowa i kohomologia de Rhama

Rozdział 7.2

Homologia singularna

Rozdział 7.3

Kohomologie Čecha i Beilinsona–Deligne’a

Rozdział 7.4

Kohomologia grupowa

Rozdział 7.5

Kohomologia (super)algebr Liego

Rozdział 7.6

Homologia Morse'a

Część 8

Teoria kategorii – więcej niż semiotyka

Rozdział 8.1

Język teorii kategorii – rekapitulacja

Rozdział 8.2

Kategorie z dodatkową strukturą

Rozdział 8.3

Topologiczna kwantowa teoria pola

Rozdział 8.4

Wyższe kategorie

Rozdział 8.5

Kategoryfikacja

Część 9

Epilegomena

Co by tu jeszcze...

- algebry operatorów wierzchołkowych?
- (super)algebry Kaca–Moody’ego?
- grupy kwantowe (w rozumieniu Drinfelda–Jimbo)?
- NCG (à la Connes)?
- kwantowanie deformacyjne?
- systemy całkowne i algebraiczny Ansatz Bethego?
- niezmienniki węzłów a trójwymiarowe rozmaitości zwarte?
- ciągi spektralne, orientifoldy itp.?

W 8 stron od teorii grup do teorii kategorii

Zacniemy od przeformułowania opisu pojęcia grupy. Oto w sposób nieco sztuczny przedstawimy grupę G jako zbiór bijekcji singletonu (zbioru jednoelementowego) $\{\bullet\}$ „udekorowanych” elementami grupy $g \in G$. Taką oczywistą nadmiarowością w zbiorze odwzorowań singletonu w siebie możemy traktować jako sposób na zapisanie informacji o ukrytej wewnętrznej strukturze obiektu \bullet , której nie określamy w żaden inny (bezpośredni) sposób. W tym obrazku G stanowi (albo indeksuje) kompletny zbiór odwzorowań uzgodnionych z ukrytą strukturą obiektu \bullet , tj. strukturę tę respektujących (i w tym sensie „zachowujących” obiekt \bullet), więc *dozwolonych* z punktu widzenia naszych rozważań. Istnienie operacji binarnej na G możemy zrozumieć jako prawo orzekające, że superpozycja odwzorowań dozwolonych jest także odwzorowaniem dozwolonym, a łączność operacji binarnej tłumaczy się na łączność tejże dobrze określonej superpozycji. Pośród odwzorowań dozwolonych istnieje jedno odwzorowanie wyróżnione, które odpowiada trywialnej bijekcji obiektu \bullet i z tej przyczyny stanowiące nie zmieniające żadnego innego odwzorowania dozwolonego po przyłożeniu go przed tym odwzorowaniem lub po nim – tym odwzorowaniem jest bijekcja indeksowana elementem neutralnym $e \in G$. Wreszcie też każdemu odwzorowaniu odpowiada odwzorowanie *odwrotne*, tj. takie, którego superpozycja z wyjściowym daje poprzednio omówione odwzorowanie trywialne. Jego istnienie zapewnia operacja unarna $\text{Inv} : G \rightarrow G$.

Z naszej dotychczasowej dyskusji wyłania się już pewna (z konieczności dość banalna w swej zawartości) struktura, dostarczająca równoważnego przeformułowania opisu grupy, które poddaje się dalekosięzalnemu uogólnieniu. Mamy więc do czynienia z dwoma zbiorami: **zbiorem obiektów** $\text{Obj } G \equiv \{\bullet\}$ i **zbiorem dozwolonych odwzorowań** między nimi, który będziemy określać mianem **zbioru morfizmów** $\text{Mor } G \cong G$ i przedstawiać jako zbiór strzałek „udekorowanych” elementami grupy,



Każde z odwzorowań ma swoją dziedzinę, z której wychodzi stowarzyszona z nim strzałka i którą w dalszej części wywodu będziemy nazywać **początkiem morfizmu**,

$$s : \text{Mor } G \rightarrow \text{Obj } G : \leftarrow^g \text{---} \mapsto \bullet,$$

oraz przeciwdziedzinę, do której strzałka sięga i którą będziemy nazywać **końcem morfizmu**,

$$t : \text{Mor } G \rightarrow \text{Obj } G : \leftarrow^g \text{---} \mapsto \bullet.$$

Na zbiorze $\text{Mor } G_s \times_t \text{Mor } G$ par strzałek składalnych, tj. takich, u których koniec poprzednika pokrywa się z początkiem następnika (w naszym przypadku są to

wszystkie strzałki), określona jest łączna operacja **złożenia (superpozycji)**

$$\circ : \text{Mor } G_s \times_t \text{Mor } G \longrightarrow \text{Mor } G : (\leftarrow h \text{---} , \leftarrow g \text{---}) \longmapsto \leftarrow h \cdot g \text{---}$$

o oczywistych (u nas wręcz trywialnych) własnościach

$$s(\leftarrow h \text{---} \circ \leftarrow g \text{---}) = s(\leftarrow g \text{---}) , \quad t(\leftarrow h \text{---} \circ \leftarrow g \text{---}) = t(\leftarrow h \text{---}) .$$

Na zbiorze obiektów określamy odwzorowanie

$$\text{Id} : \text{Obj } G \longrightarrow \text{Mor } G : \bullet \longmapsto \leftarrow e \text{---} ,$$

które przypisuje obiektowi **morfizm identycznościowy** o własnościach

$$s \circ \text{Id} = \text{id}_{\text{Obj } G} = t \circ \text{Id} ,$$

$$\leftarrow g \text{---} \circ \text{Id}_s(\leftarrow g \text{---}) = \leftarrow g \text{---} = \text{Id}_t(\leftarrow g \text{---}) \circ \leftarrow g \text{---} .$$

Odwracalność wszystkich morfizmów (strzałek) jest równoznaczna z istnieniem odwzorowania

$$\text{Inv} : \text{Mor } G \longrightarrow \text{Mor } G : \leftarrow g \text{---} \longmapsto \text{---} g \text{---} \equiv \leftarrow g^{-1} \text{---}$$

o własnościach

$$s \circ \text{Inv} = t , \quad t \circ \text{Inv} = s ,$$

$$\leftarrow g \text{---} \circ \text{Inv}(\leftarrow g \text{---}) = \text{Id}_t(\leftarrow g \text{---}) ,$$

$$\text{Inv}(\leftarrow g \text{---}) \circ \leftarrow g \text{---} = \text{Id}_s(\leftarrow g \text{---}) .$$

Zanim przejdziemy do dyskusji realizacji grupy, zaadaptujemy nowy formalizm do opisu struktury nieco mniej sztywnej niż rozpatrywana dotąd struktura grupy, a mianowicie: monoidu $\mathbf{Map}(X, X)$ odwzorowań (ustalonego) zbioru X w siebie. Struktura ta doskonale, a przy tym całkowicie naturalnie ilustruje ideę modelowania wewnętrznej struktury obiektu (jakim w tym przypadku jest sam zbiór X) w mnogości dozwolonych morfizmów. Mamy tu zatem do czynienia z jednoelementowym zbiorem obiektów

$$\text{Obj } \mathbf{Map}(X, X) = \{X\} ,$$

zbiorem morfizmów zaś – w pełnej analogii do sytuacji wcześniejszej – jest zbiór strzałek udekorowanych odwzorowaniami $f \in \mathbf{Map}(X, X)$. Reszta dyskusji przebiega analogicznie jak w przypadku grupy G , z tą wszelako istotną różnicą, że tym razem opuszczamy wymóg odwracalności morfizmów.

Dokonawszy powyższej – może nieco dziwacznej na pierwszy rzut oka, ale też – jak się okaże – nader pożytecznej – formalizacji struktury grupy i wyróżnionego monoidu $\mathbf{Map}(X, X)$, możemy poddać analogicznemu zabiegowi strukturę realizacji R (tj. działania) grupy G na zbiorze X . Realizacja taka jest homomorfizmem monoidu definiowanego przez G (poprzez „zapomnienie” o odwracalności wszystkich elementów¹ $\mathbf{Map}(X, X)$).

W wypracowanym wcześniej języku, stwierdzamy więc istnienie odwzorowania o **składowych: obiektowej**

$$R : \text{Obj } G \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Map}(X, X) : \bullet \longmapsto X$$

¹Obraz G leży w grupie symetrycznej \mathfrak{S}_X , jednak to uściślenie pozbawiłoby nasze rozumowanie nieodzownej ogólności.

i **morfizmowej** (zwyczajowo oznaczanej tym samym symbolem)

$$R : \text{Mor } G \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Map}(X, X) : \leftarrow g \text{---} \longmapsto \leftarrow R(g) \text{---}$$

o własnościach (zapisanych w konwencji zgodnej z tym zwyczajem)

$${}_s \mathbf{Map}(X, X) \circ R = R \circ {}_s G, \quad {}_t \mathbf{Map}(X, X) \circ R = R \circ {}_t G$$

oraz

$$R(\leftarrow h \text{---} \circ_G \leftarrow g \text{---}) = R(\leftarrow h \text{---}) \circ_{\mathbf{Map}(X, X)} R(\leftarrow g \text{---}),$$

$$R \circ \text{Id}^G = \text{Id}^{\mathbf{Map}(X, X)} \circ R.$$

Na najniższym szczeblu hierarchii struktur algebraicznych stowarzyszonych z pojęciem grupy i jej działania na wybranym zbiorze znajdujemy odwzorowania G-ekwiwariantne splatające realizacje R_1 i R_2 , które w rozbudowanym tu formalizmie możemy (znów w sposób nieco nadmiarowy) przedstawić jako indeksowane przez zbiór $\text{Obj } G$ rodziny morfizmów

$$\eta_\bullet : \text{Obj } G \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Map}(X, X) : \bullet \longmapsto \eta_\bullet$$

o **składowych** (tutaj w liczbie 1)

$$\eta_\bullet : R_1(\bullet) \rightarrow R_2(\bullet),$$

na które został nałożony definiujący warunek G-ekwiwariantności

$$\forall \leftarrow g \text{---} \in_{\text{Mor } G} : \eta_t(\leftarrow g \text{---}) \circ R_1(\leftarrow g \text{---}) = R_2(\leftarrow g \text{---}) \circ \eta_s(\leftarrow g \text{---}).$$

Sformułowany przez nas schemat opisu struktur grupy i zbioru z jej działaniem poddaje się następującym istotnym i przez to interesującym ogólnieniom:

- Dopuszczenie dowolnej liczby obiektów we wcześniejszym opisie grupy (co prowadzi do wyodrębnienia podzbioru właściwego par morfizmów składowych w kwadracie kartezjańskim zbioru morfizmów) przy zachowaniu odwracalności wszystkich morfizmów daje **grupoid**.
- Rezygnacja z odwracalności morfizmów (czyli cofnięcie się do poziomu monoidu) prowadzi do ogólnej **małej kategorii**.
- Jeśli dodatkowo dopuścić tę ewentualność, że obiekty lub morfizmy nie tworzą zbioru, lecz klasę właściwą (tj. mnogość nie będącą zbiorem a określaną przez wspólną cechę elementów, jak np. klasa wszystkich zbiorów określaną przez cechę „bycie zbiorem”), to mamy do czynienia także z **dużymi kategoriami**, przy czym wyróżniamy takie, u których klasy morfizmów są zbiorami, nazywając je **lokalnie małymi**.
- Odwzorowanie między kategoriami spełniające warunki wypisane dla realizacji grupy to **funktor kowariantny** $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$. Jeśli warunki te zastąpimy układem

$$s^2 \circ F = F \circ t^1, \quad t^2 \circ F = F \circ s^1,$$

$$F(\chi_2 \circ_1 \chi_1) = F(\chi_1) \circ_2 F(\chi_2),$$

$$F \circ \text{Id}^1 = \text{Id}^2 \circ F,$$

to otrzymamy definicję **funktora kontrawariantnego**. Ilekroć składowa morfizmowa funktora jest injekcją w ograniczeniu do każdej klasy $\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y)$, mówimy o **funktorze wiernym**, kiedy natomiast jej ograniczenia są surjekcjami, funktor nazywamy **pełnym**. Przy spełnieniu obu warunków funktor określamy mianem **w pełni wiernego**. Szczególnymi i szczególnie ważnymi przykładami funktorów są **funktory** $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ dla ustalonej lokalnie małej kategorii \mathcal{C} : **kowariantny**

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

określony dla dowolnego $X \in \text{Obj } \mathcal{C}$, o składowej obiektowej

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) : \text{Obj } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Set} : Y \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

i morfizmowej

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Set}$$

$$: (Y \xrightarrow{X} Z) \longmapsto (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{X^{\circ}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z))$$

oraz **kontrawariantny**

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

określony analogicznie jak wyżej, o składowej obiektowej

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) : \text{Obj } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Set} : Y \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

i morfizmowej

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Set}$$

$$: (Y \xrightarrow{X} Z) \longmapsto (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \xrightarrow{X^{\circ}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)).$$

- Wreszcie też rodzinę odwzorowań w rodzaju tych przypisanych splataczowi realizacji R_1 i R_2 nazywamy **transformacją naturalną**, a kiedy każdy z morfizmów składowych jest odwracalny, mówimy o **izomorfizmie naturalnym (funktorów)**, bądź **równoważności naturalnej**. Warunek naturalności dla funktorów kowariantnych jest więc postaci

$$(A.1) \quad \forall_{\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y)} : \eta_Y \circ_2 F(\chi) = G(\chi) \circ_2 \eta_X.$$

W przypadku funktorów kontrawariantnych należy dokonać stosownej korekty relacji definicji transformacji naturalnej, kładąc

$$\forall_{\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y)} : \eta_X \circ_2 F(\chi) = G(\chi) \circ_2 \eta_Y.$$

Elementarnym, lecz istotnym wynikiem strukturalnym teorii grup, eksponującym pierwszorzędne znaczenie grup symetrycznych w tej teorii, jest Twierdzenie Cayleya, które orzeka, że każda grupa jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy symetrycznej \mathfrak{S}_X pewnego zbioru X , czyli może być zrealizowana jako podzbiór zbioru bijekcji X w siebie, z ograniczonym doń składaniem odwzorowań w roli operacji binarnej (tj. działania grupowego). Dokonamy teraz transkrypcji klasycznego konstruktywnego dowodu tego twierdzenia w rozwijanym przez nas konsekwentnie formalizmie kategoryalnym, co pozwoli wysłowić twierdzenie w sposób poddający się naturalnemu uogólnieniu. Takie uogólnienie będzie następnie przedmiotem naszych dalszych dociekań.

Przypomnijmy: we wspomnianym wyżej dowodzie jako zbiór X wybieramy samą grupę G (innymi słowy, aplikujemy do niej **funktor zapominania** $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ z kategorii grup w kategorię zbiorów), wyróżniając zarazem te spośród jej bijekcji w siebie, które pochodzą od lewego regularnego działania grupy na sobie,

$$\ell : G \times X \rightarrow X : (g, h) \mapsto g \cdot h,$$

czyli rozważamy podzbiór

$$\Lambda_G := \{ \ell_g \mid g \in G \} \subset \mathfrak{S}_X,$$

jawnie izomorficzny (czyli będący w bijekcji) ze zbiorem G i zamknięty ze względu na składanie odwzorowań,

$$\Lambda_G \times \Lambda_G \ni (\ell_{g_2}, \ell_{g_1}) \mapsto \ell_{g_2} \circ \ell_{g_1} \equiv \ell_{g_2 \cdot g_1} \in \Lambda_G,$$

które realizują wiernie strukturę grupy, przez co należy rozumieć, że odwzorowanie

$$\tilde{\ell} : G \rightarrow \mathfrak{S}_X : g \mapsto \ell_g,$$

indukowane przez ℓ , jest monomorfizmem grup, więc też

$$(G, \cdot, \text{Inv}, \bullet \mapsto e) \cong (\Lambda_G, \circ \upharpoonright_{\Lambda_G^2}, \text{Inv}^*, \bullet \mapsto \ell_e) \subset (\mathfrak{S}_X, \circ, (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto \text{id}_X),$$

przy czym wskazany tu obraz odwzorowania $\tilde{\ell}$ jest podgrupą \mathfrak{S}_X , o której mowa w tezie twierdzenia. Należy przy tym zauważyć, że wykorzystane tutaj działanie lewe regularne G na sobie jest przemiennie z prawymi translacjami na G o dowolny element grupy, czyli z działaniem prawym regularnym

$$\wp : X \times G \rightarrow X : (h, g) \mapsto h \cdot g,$$

czyli słuszne jest stwierdzenie

$$(A.2) \quad \forall_{g, h \in G} : \ell_g \circ \wp_h = \wp_h \circ \ell_g,$$

będące konsekwencją łączności działania grupowego. Warto podkreślić, że powyższa własność odwzorowań $\wp_h \in \mathbf{Map}(X, X)$ jest dla nich definiująca, tzn. każde odwzorowanie $\gamma \in \mathbf{Map}(X, X)$ przemiennie z działaniem lewym regularnym jest prawą translacją o pewien element grupy. W rzeczy samej, warunek

$$\forall_{g \in G} : \ell_g \circ \gamma = \gamma \circ \ell_g$$

implikuje równość

$$\forall_{g \in G} : g \cdot \gamma(e) = \gamma(g \cdot e) \equiv \gamma(g),$$

która prowadzi do identyfikacji

$$(A.3) \quad \gamma = \wp_{\gamma(e)}.$$

Okazuje się, że całą opisaną tu strukturę można zwięźle wysłowić, jak następuje: Morfizm $\tilde{\ell}$ określa kontrawariantne funktorialne zanurzenie (czyli funktor w pełni wierny z) kategorii G , wprowadzonej wcześniej, w kategorię \mathbf{Set}^G (kowariantnych) funktorów² z kategorii G w kategorię \mathbf{Set} zbiorów. W szczególności funktorialny obraz kategorii G w \mathbf{Set}^G , jakim jest pełna podkategoria Λ_G , jest kanonicznie izomorficzny z wyjściową kategorią G . Istotnie, odwzorowanie $\tilde{\ell}$ stowarzysza z jedynym obiektem \bullet kategorii G kowariantny funktor

$$\text{Hom}_G(\bullet, \cdot) \equiv \ell : G \rightarrow \mathbf{Set}$$

²Morfizmami w kategorii, której obiektami są funktory pomiędzy dwiema ustalonymi kategoriami, są transformacje naturalne pomiędzy owymi funktorami.

o składowej obiektowej

$$\ell : \text{Obj } G \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Set} : \bullet \longmapsto X(\equiv G) = \text{Hom}_G(\bullet, \bullet)$$

i składowej morfizmowej

$$\ell : \text{Mor } G \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Set} : \longleftarrow g \longleftarrow \longmapsto \ell_g = \text{Hom}_G(\bullet, \longleftarrow g \longleftarrow),$$

przy czym ostatnie przyporządkowanie ma sens, gdyż $\ell_g \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\ell(\bullet), \ell(\bullet)) \equiv \mathbf{Map}(X, X)$. Funktorialność ℓ sprowadza się do stwierdzonych wcześniej strukturalnych własności odwzorowania ℓ , tj.

$$\ell(\text{Id}_\bullet^G) = \text{Id}_{\ell(\bullet)}^{\mathbf{Set}} \iff \ell_e = \text{id}_X,$$

$$\ell(\longleftarrow g_2 \longleftarrow \circ_G \longleftarrow g_1 \longleftarrow) = \ell(\longleftarrow g_2 \longleftarrow) \circ_{\mathbf{Set}} \ell(\longleftarrow g_1 \longleftarrow) \iff \ell_{g_2 \cdot g_1} = \ell_{g_2} \circ \ell_{g_1}.$$

Wreszcie też $\tilde{\ell}$ pozwala przyporządkować dowolnemu morfizmowi $\longleftarrow g \longleftarrow \in \text{Hom}_G(\bullet, \bullet) (\equiv \text{Mor } G)$ transformację naturalną

$$\text{Hom}_G(\longleftarrow g \longleftarrow, \cdot) : \text{Hom}_G(t(\longleftarrow g \longleftarrow), \cdot) \implies \text{Hom}_G(s(\longleftarrow g \longleftarrow), \cdot),$$

czyli indeksowaną przez $\text{Obj } G = \{\bullet\}$ rodzinę morfizmów o jedynym elemencie

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(\longleftarrow g \longleftarrow, \bullet) &\equiv \wp_g \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_G(t(\longleftarrow g \longleftarrow), \bullet), \text{Hom}_G(s(\longleftarrow g \longleftarrow), \bullet)) \\ &\equiv \mathbf{Map}(X, X) \end{aligned}$$

o własności

$$\begin{aligned} &\text{Hom}_G(\longleftarrow g \longleftarrow, t(\longleftarrow h \longleftarrow)) \circ_{\mathbf{Set}} \text{Hom}_G(t(\longleftarrow g \longleftarrow), \longleftarrow h \longleftarrow) \\ &= \text{Hom}_G(s(\longleftarrow g \longleftarrow), \longleftarrow h \longleftarrow) \circ_{\mathbf{Set}} \text{Hom}_G(\longleftarrow g \longleftarrow, s(\longleftarrow h \longleftarrow)), \end{aligned}$$

zapisanej dla dowolnego $\longleftarrow h \longleftarrow \in \text{Mor } G$, a wyrażającej stwierdzoną uprzednio własność (A.2). Podkreślmy, że kontrawariantny charakter opisanego tu funktora $G \longrightarrow \mathbf{Set}^G$ niesie informację o prawym charakterze działania prawego regularnego grupy G na sobie, oto bowiem zapis

$$\text{Hom}_G(\longleftarrow g_2 \longleftarrow \circ_G \longleftarrow g_1 \longleftarrow, \cdot) = \text{Hom}_G(\longleftarrow g_1 \longleftarrow, \cdot) \circ_{\mathbf{Set}^G} \text{Hom}_G(\longleftarrow g_2 \longleftarrow, \cdot)$$

oznacza w istocie tożsamość

$$\wp_{g_2 \cdot g_1} = \wp_{g_1} \circ \wp_{g_2}.$$

Na koniec zauważmy, że jest to, zgodnie z wypowiedzianą wcześniej tezą, funktor w pełni wierny, albowiem dla jedynej pary obiektów jego dziedziny, (\bullet, \bullet) , zadawane przezeń przyporządkowanie (podkreślenie pierwszego „wolnego” miejsca oznacza, że to właśnie miejsce przyjmuje argument z dziedziny)

$$\text{Hom}_G(\cdot, \cdot) : \text{Hom}_G(\bullet, \bullet) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}^G}(\text{Hom}_G(\bullet, \cdot), \text{Hom}_G(\bullet, \cdot))$$

jest omówioną wcześniej bijekcją $\wp : G \xrightarrow{\cong} \mathbf{Map}(X, X) : g \longmapsto \wp_g$, patrz: (A.3).

Dokonane tutaj abstrakcyjne przeformułowanie Twierdzenia Cayleya w języku teorii kategorii stawia nas przed oczywistym pytaniem: Czy twierdzenie to jest przejawem szczególnego statusu G pośród kategorii, czy też raczej jest ono emanacją ogólniejszego prawa, któremu podlegają wszystkie kategorie lokalnie małe? (Wymóg lokalnej małości staje się koniecznością, kiedy staramy się odwzorować

klasy morfizmów pomiędzy dowolnymi parami obiektów wyjściowej kategorii *bijektywnie* w klasy transformacji naturalnych między funktorialnymi obrazami tychże obiektów.) Bardzo ogólnej odpowiedzi na tak postawione pytanie dostarcza

TWIERDZENIE A.1 (Lemat Yonedy). *Niechaj \mathcal{C} będzie dowolną kategorią lokalnie małą, a X – dowolnym jej obiektem i niech $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ będzie dowolnym funktorem kowariantnym³. Wówczas istnieje kanoniczny izomorfizm (bijekcja) pomiędzy zbiorem $\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F)$ transformacji naturalnych między funktorami $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ i F a elementami zbioru $F(X)$,*

$$\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F) \cong F(X).$$

■

Dowód: Punktem wyjścia do konstruktywnego dowodu istnienia bijekcji, o której mowa w treści twierdzenia, jest następująca obserwacja: Oto dowolna transformacja naturalna $\eta \in \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F)$ jest w pełni określona przez element

$$\xi_X^\eta := \eta_X(\text{Id}_X^{\mathcal{C}}) \in F(X)$$

zbioru będącego funktorialnym obrazem wyróżnionego obiektu $X \in \text{Obj } \mathcal{C}$. W rzeczy samej, warunek (A.1) naturalności η implikuje tożsamość

$$\eta_Y(\chi) \equiv \eta_Y(\chi \circ \text{Id}_X^{\mathcal{C}}) = (\eta_Y \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \chi))(\text{Id}_X^{\mathcal{C}}) = (F(\chi) \circ \eta_X)(\text{Id}_X^{\mathcal{C}}) = F(\chi)(\xi_X^\eta),$$

słuszną dla dowolnego morfizmu $\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ o początku w dowolnym obiekcie $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$, a pokazującą dowodnie, że znajomość ξ_X^η pozwala wyznaczyć wszystkie elementy rodziny $\{\eta_Y\}_{Y \in \text{Obj } \mathcal{C}}$. Odwzorowanie

$$\xi_X : \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F) \rightarrow F(X) : \eta \mapsto \xi_X^\eta$$

to właśnie szukana bijekcja. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy wskazać odwzorowanie odwrotne. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\eta : F(X) \rightarrow \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F) : \xi \mapsto \eta^\xi$$

wzorem

$$\eta_Y^\xi(\chi) := F(\chi)(\xi).$$

Podana definicja ma sens, gdyż dla dowolnego morfizmu $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ zachodzi

$$\begin{aligned} (\eta_Z^\xi \circ_{\mathbf{Set}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \psi))(\chi) &= \eta_Z^\xi(\psi \circ \chi) = F(\psi \circ \chi)(\xi) = (F(\psi) \circ_{\mathbf{Set}} F(\chi))(\xi) \\ &= F(\psi)(F(\chi)(\xi)) = (F(\psi) \circ_{\mathbf{Set}} \eta_Y^\xi)(\chi), \end{aligned}$$

czyli – w istocie – η^ξ jest transformacją naturalną między $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ a F . Pokażemy, że η^\cdot jest poszukiwaną odwrotnością odwzorowania ξ_X . W tym celu wyznaczamy transformację naturalną przyporządkowaną przez η^\cdot elementowi ξ_X^η ,

$$\eta_Y^{\xi_X^\eta}(\chi) = F(\chi)(\xi_X^\eta) = \eta_Y(\chi),$$

uzyskując pożądaną wynik

$$\eta_Y^{\xi_X^\eta} = \eta_Y,$$

³Istnieje także wersja kontrawariantna Lematu Yonedy, którą Czytelnik bez trudu wymyśli sam.

a następnie wskazujemy element zbioru $F(X)$ będący obrazem transformacji naturalnej η_X^ξ względem odwzorowania ξ_X ,

$$\xi_X^{\eta_X^\xi} = \eta_X^\xi(\text{Id}_X^{\mathcal{C}}) = F(\text{Id}_X^{\mathcal{C}})(\xi) = \text{Id}_{F(X)}^{\mathbf{Set}}(\xi) \equiv \text{id}_{F(X)}(\xi) = \xi,$$

co kończy dowód postulowanej relacji między η i ξ_X , a tym samym także dowód twierdzenia. \square

Bezpośredniego uogólnienia teoriogrupowego Twierdzenia Cayleya dostarcza poniższe elementarne corollarium Lematu Yonedy.

STWIERDZENIE 224 (Zanurzenie Yonedy). *W oznaczeniach Twierdzenia A.1 kontrawariantny funktor*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$$

jest w pełni wierny, przeto określa zanurzenie kategorii \mathcal{C} w kategorii $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, którego obrazem jest pełna podkategoria tej ostatniej o zbiorze obiektów $\{ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) \mid X \in \text{Obj } \mathcal{C} \}$, izomorficzna z kategorią \mathcal{C} . ■

Dowód: Odnosząc tezę Lematu Yonedy do funktora $F := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \cdot)$, stwierdzamy istnienie bijekcji

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \xrightarrow{\cong} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \cdot)) : \chi \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\chi, \cdot),$$

co oznacza właśnie, że funktor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ jest w pełni wierny. Tym samym kontrawariantny funktor

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}},$$

o składowej obiektowej

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) : \text{Obj } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} : X \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$$

i morfizmowej

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) & : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} \\ & : (X \xrightarrow{\chi} Y) \longmapsto (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \cdot) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\chi, \cdot)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)) \end{aligned}$$

zadaje zanurzenie kategorii \mathcal{C} w kategorii funktorów $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, zwane **zanurzeniem Yonedy**. \square

Lematu Yonedy i wynikającego zeń stwierdzenie o zanurzeniu stanowią doskonałą ilustrację najgłębszej idei, jaka tkwi u podstaw teorii kategorii, sformułowanej – nie bez kozery – w pierwszej połowie XX w., tj. w czasach fenomenalnej eksplozji myślenia abstrakcyjnego w naukach przyrodniczych na wszystkich skalach dostępnym poznaniu – od skali atomowej po skalę kosmiczną. Ich zawartość „filozoficzna” powinna być bliska sercu i umysłowi każdego fizyka, oto bowiem jedynym dostępnym nam sposobem empirycznego poznania elementarnych składników materii są obserwacje ich oddziaływań z innymi składnikami materii. Najbardziej bodaj wiążącej i obrazowej wulgaryzacji socjologicznej tych twierdzeń dostarcza stare rosyjskie (?) powiedzenie

Powiedz mi, kto jest twoim przyjacielem, a powiem ci, kim jesteś.

Konwencje

KONWENCJA 1 (Iloczyn kartezjański zbiorów). Mnożenie kartezjańskie zbiorów nie jest operacją łączną. W celu uniknięcia przeładowania zapisu formalnego niniejszego skryptu wskutek każdorazowego wypisywania w jawnej postaci naturalnych bijekcji pomiędzy wielokrotnymi iloczynami kartezjańskimi zbiorów różnie pogrupowanych (występującymi chociażby w diagramatycznym zapisie aksjomatyki struktur algebraicznych), np. $(X_1 \times X_2) \times X_3$ i $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ dla trójki zbiorów X_1, X_2 i X_3 , będziemy opuszczać nawiasy określające schemat pogrupowania czynników, pisząc np. $X_1 \times X_2 \times X_3$. Pełna informacja o domyślnym schemacie pogrupowania (i ukrytej obecności stosownych bijekcji) będzie zawarta w strukturze odwzorowań o tak (niejednoznacznie) zadanej dziedzinie. I tak, np., dla odwzorowań $f_1 : X_1 \rightarrow X_4$ i $f_3 : X_3 \rightarrow X_5$ oraz $f_{i,i+1} : X_i \times X_{i+1} \rightarrow X_{i+5}$, $i \in \{1, 2\}$ skrócony zapis

$$X_4 \times X_7 \xleftarrow{f_1 \times f_{2,3}} X_1 \times X_2 \times X_3 \xrightarrow{f_{1,2} \times f_3} X_6 \times X_5$$

należy odczytać jako

$$X_4 \times X_7 \xleftarrow{f_1 \times f_{2,3}} X_1 \times (X_2 \times X_3) \xrightarrow{\alpha_{1,2,3}} (X_1 \times X_2) \times X_3 \xrightarrow{f_{1,2} \times f_3} X_6 \times X_5,$$

przy czym utożsamienie $\alpha_{1,2,3}$ przyjmuje tu postać

$$\alpha_{1,2,3} : X_1 \times (X_2 \times X_3) \rightarrow (X_1 \times X_2) \times X_3 : (x_1, (x_2, x_3)) \mapsto ((x_1, x_2), x_3).$$

* * *

KONWENCJA 2 (Zapis odwzorowań).

- Odwzorowanie identycznościowe zbioru X w siebie zapiszemy jako

$$\text{id}_X : X \rightarrow X : x \mapsto x.$$

- Odwzorowanie zbioru X w siebie zapiszemy jako $f : X \circlearrowright$.
- Niechaj będą dane zbiory X_1, X_2, Y_1, Y_2 oraz odwzorowania $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$, $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$. Zapiszemy

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

- Niechaj będą dane zbiory X, Y_1, Y_2 oraz odwzorowania $f_1 : X \rightarrow Y_1$, $f_2 : X \rightarrow Y_2$. Zapiszemy

$$(f_1, f_2) : X \rightarrow Y_1 \times Y_2 : x \mapsto (f_1(x), f_2(x)).$$

- W przypadku odwzorowania stałego $f : X \rightarrow Y : x \mapsto y_0$ zapiszemy $f \equiv y_0$.
- Transpozycję elementów zbioru X zapiszemy jako

$$\tau_X : X \times X \rightarrow X \times X : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1).$$

- Niechaj S_1, S_2, \dots, S_N będą zbiorami. Kanoniczne odwzorowania rzutowe (zwane też rzutami kanonicznymi), określone na iloczynie kartezjańskim tych zbiorów i dla dowolnych indeksów $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N$, $n \in \overline{1, N}$, zapiszemy następująco

$$\text{pr}_{i_1, i_2, \dots, i_n} : \prod_{i=1}^N S_i \longrightarrow S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_n} : (x_1, x_2, \dots, x_N) \longmapsto (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}).$$

* * *

KONWENCJA 3 (Diagramy przemienne). Niechaj A, B, C oraz D będą obiektami pewnej kategorii \mathcal{C} i niech $\alpha : A \longrightarrow B$, $\beta : B \longrightarrow D$, $\gamma : A \longrightarrow C$ oraz $\delta : C \longrightarrow D$ będą morfizmami pomiędzy tymi obiektami. Diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\delta} & D \end{array}$$

nazywamy **przemienym**, gdy w kategorii \mathcal{C} zachodzi relacja

$$\beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma.$$

W przypadku bardziej złożonym mówimy o diagramie przemienym, ilekroć każdy z zamkniętych konturów wewnątrz diagramu jest diagramem przemienym w powyższym sensie.

* * *

KONWENCJA 4 (Operacje wieloargumentowe na podzbiorach nośnika struktury algebraicznej). Niechaj S będzie zbiorem wyposażonym w operację n -argumentową $\phi_n : S^{\times n} \longrightarrow S$ i niech $S_i \subset S$, $i \in \overline{1, n}$ będą podzbiorami S . Wówczas definiujemy zbiór

$$\phi_n(S_1, S_2, \dots, S_n) := \{ \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall_{i \in \overline{1, n}} : x_i \in S_i \},$$

który będziemy nazywać **obrazem algebraicznym zbiorów** (S_1, S_2, \dots, S_n) **względem operacji** ϕ_n . W szczególności możemy mówić o sumie algebraicznej podzbiorów zbioru z dodawaniem i iloczynie algebraicznym podzbiorów zbioru z mnożeniem.

* * *

PRZYKŁAD(Y) 38.

- (1) Niech S będzie zbiorem, na którym jest zadana operacja 2-argumentowa $\phi_2 := \cdot$ zwana mnożeniem. Wówczas możemy określić **iloczyn algebraiczny** dowolnych dwóch podzbiorów $S_1, S_2 \subset S$ w postaci

$$S_1 \cdot S_2 := \{ x \cdot y \mid (x, y) \in S_1 \times S_2 \}.$$

- (2) Analogicznie definiujemy **sumę algebraiczną** podzbiorów S , ilekroć na zbiorze tym jest zadana operacja 2-argumentowa $\phi_2 := +$ zwana dodawaniem,

$$S_1 + S_2 := \{ x + y \mid (x, y) \in S_1 \times S_2 \}.$$

- (3) Jeśli na S określona jest relacja 1-argumentowa $\phi_1 := -(\cdot)$ zwana braniem przeciwności, to możemy zdefiniować **przeciwność algebraiczną** dowolnego podzbioru $S_1 \subset S$ jako zbiór

$$-S_1 := \{ -s \mid s \in S_1 \}.$$

- (4) Analogicznie definiujemy **odwrotność algebraiczną** podzbioru S , zawsze gdy na zbiorze tym jest zadana operacja 1-argumentowa $\phi_1 := (\cdot)^{-1}$ zwana braniem odwrotności,

$$S_1^{-1} := \{ s^{-1} \mid s \in S_1 \}.$$

✓

Dodatek C

Tablice

TABLICA 1. Niskowymiarowe rzeczywiste algebry Clifforda.

$C_{p,q}^{\mathbb{R}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	\xrightarrow{q}
0	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$	
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4) \oplus \mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	
5	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{H}(32) \oplus \mathbb{H}(32)$	
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(32) \oplus \mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{H}(64)$	
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(64) \oplus \mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{C}(128)$	
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(128) \oplus \mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(256)$	
$p \downarrow$										

C. TABLICE

TABLICA 2. Niskowymiarowe zespolone algebry Clifforda.

\xrightarrow{n}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$C_n^{\mathbb{C}}$	\mathbb{C}	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$

Bibliografia

- [Art61] E. Artin, Geometric algebra, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 3, Interscience Publishers, 1961.
- [Bor99a] F. Borceux, Handbook of Categorical Algebra. I. Basic Category Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, 1999.
- [Bor99b] ———, Handbook of Categorical Algebra. II. Categories and Structures, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 51, Cambridge University Press, 1999.
- [Bor99c] ———, Handbook of Categorical Algebra. III. Categories of Sheaves, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 52, Cambridge University Press, 1999.
- [Bou07a] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Algèbre, chapitres 1 à 3, Springer, 2007.
- [Bou07b] ———, Éléments de mathématique, Algèbre, chapitre 9, Springer, 2007.
- [Car38a] É.J. Cartan, Leçons sur la théorie des spineurs. I : les spineurs de l'espace à trois dimensions, Actualités scientifiques et industrielles: Exposés de géométrie, vol. 9, Hermann & cie., 1938.
- [Car38b] ———, Leçons sur la théorie des spineurs. II : les spineurs de l'espace à $n > 3$ dimensions, les spineurs en géométrie riemannienne, Actualités scientifiques et industrielles: Exposés de géométrie, vol. 11, Hermann & cie., 1938.
- [Coh82] P.M. Cohn, Algebra, vol. 1, John Wiley & Sons, 1982.
- [Coh89] ———, Algebra, vol. 2, John Wiley & Sons, 1989.
- [Coh91] ———, Algebra, vol. 3, John Wiley & Sons, 1991.
- [Die55] J.A. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 5, Springer, 1955.
- [Die65] J. Dieudonné, Éléments d'analyse, vol. 1, Gauthier-Villars, 1965.
- [GP74] V. Guillemin and A. Pollack, Differential Topology, American Mathematical Society, 1974.
- [Gre78] W.H. Greub, Multilinear Algebra, Universitext, Springer, 1978.
- [Gre81] ———, Linear Algebra, Graduate Texts in Mathematics, vol. 23, Springer, 1981.
- [Hel01] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Graduate studies in mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, 2001.
- [HN12] J. Hilgert and K.-H. Neeb, Structure and Geometry of Lie Groups, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2012.
- [KM76] K. Kuratowski and A. Mostowski, Teoria mnogości, Monografie Matematyczne, vol. XXVII, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976.
- [Koc03] J. Kock, "Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories", London Mathematical Society Student Texts, vol. 59, Cambridge University Press, 2003.
- [Lan93] S. Lang, Real and Functional Analysis, Graduate Texts in Mathematics, vol. 142, Springer, 1993.
- [Lan99] ———, Fundamentals of Differential Geometry, Graduate Texts in Mathematics, vol. 191, Springer, 1999.
- [Lan02] ———, Algebra, Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer, 2002.
- [Lea56] W.G. Leavitt, "Modules over rings of words", Proc. AMS **7** (1956), 188–193.
- [Lea57] ———, "Modules without invariant basis number", Proc. AMS **8** (1957), 322–328.
- [Lee02] J.M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, 2002.
- [Lee09] ———, Manifolds and Differential Geometry, Graduate Studies in Mathematics, vol. 107, American Mathematical Society, 2009.
- [Mic08] P.W. Michor, Topics in Differential Geometry, Graduate Studies in Mathematics, vol. 93, American Mathematical Society, 2008.

- [ML98] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer, 1998.
- [Pen68] R. Penrose, “Structure of Space-Time”, pp. 121–235, W.A. Benjamin, 1968.
- [Sus13] R.R. Suszek, “Algebra. Podstawy”, notatki wykładowe, 2013.
- [Sus15] ———, “Algebra grupowa, kategoriycznie”, notatki wykładowe, 2015.
- [Wei52] A. Weil, “Sur les théorèmes de de Rham”, *Comment. Math. Helv.* **26** (1952), 119–145.

Indeks

- C^k -dyfeomorfizm, 224
- C^k -rozmaitość, 222
- C^k -dyfeomorfizm, 224
- C^p -odwzorowanie, 223
- p -forma różniczkowa, 236
- ścieżka
 - krzywa całkowa, 249
 - różniczkowalna, 229
 - trajektoria, 249
 - zwarta (klasy C^l), 248
- atlas, 222
 - maksymalny, 222
- cofnięcie pola form wzdłuż odwzorowania, 258
- dyfeomorfizm (klasy C^k), 224
- ewaluacja pola p -form na polach wektorowych, 253
- grupa Liego, 272
- immersja, 259
- klasa Stiefela–Whitneya (pierwsza), 542
- kowektor, 235
- mapa, 222
- moduł form różniczkowych, 254
- odwzorowanie immersywne w punkcie, 259
- odwzorowanie różniczkowalne (klasy C^p), 223
- odwzorowanie submersywne w punkcie, 259
 - cięcie lokalne, 265
 - poziomica regularna, 262
 - punkt krytyczny, 262
 - punkt regularny, 262
 - wartość krytyczna, 262
 - wartość regularna, 262
- orientacja, 544
 - czasowa, 544
 - przestrzenna, 544
- orientowalna, 540
- orientowalna czasowo, 540
- orientowalna czasowo i przestrzennie, 540
- orientowalna przestrzennie, 540
- parametryzacja (lokalna), 222
- pchnięcie pola wektorowego wzdłuż dyfeomorfizmu, 245
- pokrycie dobre, 225
- pole
 - p -form, 253
 - wektorowe, 244
- przestrzeń
 - różniczkowa (w punkcie), 236
- przestrzeń styczna (w punkcie), 228
- różniczkowanie
 - w punkcie, 236
 - wzdłuż pola wektorowego, 245
- rozkład jedności (klasy C^k), 237
- struktura, 223
- struktura metryczna, 535
- submersja, 259
 - włókno, 262
- topologiczna ($k = 0$), 223
- transformacja współrzędniowa (lokalna), 222
- układ współrzędnych (lokalny), 222
- włożenie, 259
- wektor styczny
 - do ścieżki różniczkowalnej, 249
 - do rozmaitości, 227
- wiązka p -form różniczkowych (jako rozmaitość), 235
- wiązka baz, 456
- wiązka kostyczna (jako rozmaitość), 234
- wiązka styczna (jako rozmaitość), 226
- wiązka styczna (jako wiązka włóknista), 444
 - mapa naturalna, 445
 - wiązka baz, 456
- wymiar, 222
- zanurzenie, 259
- C^p -odwzorowanie, 223
 - odwzorowanie styczne, 232
 - prezentacja lokalna, 223
- G -torsor, 37
- G -zbiór
 - lewostronny, 33
 - prawostronny, 34
- N -kostka, 172

- R -moduł
 - lewostronny, 38
 - podmoduł, 40
 - prawostronny, 39
- G -przestrzeń topologiczna
 - lewostronna, 295
 - prawostronna, 295
 - rozmaitość ilorazowa, 301
- G -rozmaitość gładka
 - lewostronna, 296
 - prawostronna, 296
- \bar{G} -struktura na wiązce głównej, 527
 - równoważność, 527
- p -forma różniczkowa, 236
- $(Q-)$ ortogonalność
 - przestrzeni, 57
 - wektorów, 57
- $(Q-)$ prostokątność
 - przestrzeni, 57
 - wektorów, 57
- ścieżka
 - ciągła, 166
 - pętla, 166
- ścieżka (ciągła)
 - ścieżki drogowo homotopijne, 167
- ścieżka różniczkowalna w rozmaitości, 229
 - krzywa całkowa, 249
 - przeniesienie równoległe, 473
 - podniesienie poziome (horyzontalne)
 - ścieżki, 476
 - podniesienie poziome (horyzontalne)
 - wektorów, 474
 - trajektoria, 249
 - zwarta (klasy C^l), 248
 - wektor styczny, 249
- 0-spójność, 167
- algebra, 311
 - łączna, 312
 - idempotent, 319
 - kategoria, 312
 - centrum, 315
 - Clifforda, 350
 - antycentrum, 381
 - antyinwolucja główna, 371
 - antyinwolucja kanoniczna, 371
 - centrum, 381
 - element kanoniczny, 378
 - element objętości (rzeczywisty), 398
 - element objętości (zespolony), 406
 - grupa Pin, 421
 - grupa Spin, 421
 - grupa Clifforda, 417
 - inwolucja główna, 371
 - inwolucja kanoniczna, 371
 - moduł ε -ortogonalny, 408
 - moduł Clifforda, 407
 - mnożylika grupa jedności, 415
 - reprezentacja, 407
 - reprezentacja ε -ortogonalna, 408
- endomorfizmów, 313
 - grupowa, 315
 - splot funkcji, 315
- homomorfizm, 312
 - unitalny, 312
- idempotent
 - centralny, 319
 - minimalny, 319
- iloczyn tensorowy
 - standardowy, 320
- ilorazowa, 318
- jedność, 312
- jedynka, 312
- kategoria, 312
- kwaternionów, 313
- Liego, 276
 - grupy Liego, 277
 - homomorfizm, 276
 - kategoria, 276
 - nawias Liego, 276
 - podalgebra, 276
 - równania struktury, 278
 - stałe struktury, 278
 - tożsamość Jacobiego, 276
- macierzowa, 313
 - reprezentacja definiująca, 342
- mnożenie
 - antykomutator, 315
 - komutator, 315
- półprosta, 341
- pól
 - lewniezmiennicznych (na grupie Liego), 276
 - prawoniezmiennicznych (na grupie Liego), 276
- pól wektorowych (na rozmaitości), 246
- podalgebra, 312
 - centralizator podzbioru, 315
 - centrum, 315
 - ideał generowany przez podzbiór, 317
 - ideał lewostronny, 316
 - ideał lewostronny minimalny, 316
 - ideał obustronny, 316
 - ideał obustronny minimalny, 316
 - ideał prawostronny, 316
 - ideał prawostronny minimalny, 316
- podalgebra generowana przez podzbiór, 315
 - zbiór generujący, 315
- prosta, 316
- przeciwna, 312
- przemieniana, 312
- reprezentacja, 335
 - dwoista (dualna), 337
 - homomorfizm, 336
 - iloczyn tensorowy, 337

- lewa regularna, 337
- maksymalna podalgebra komutująca, 336
- nieprzywiedlna, 336
- nierozkładalna, 336
- nośnik, 335
- półprosta, 336
- podmoduł niezmienniczy, 336
- podprzestrzeń niezmiennicza, 336
- podreprezentacja, 336
- prawa regularna, 337
- przywiedlna, 336
- równoważność, 336
- splatacz, 336
- suma prosta, 337
- trywialna, 336
- typu C , 337
- typu H , 337
- typu R , 337
- typu kwaternionowego, 337
- typu rzeczywistego, 337
- typu zespolonego, 337
- wierna, 336
- wymiar, 335
- zredukowana względem ideału, 337
- tensorowa modułu, 327
 - tensor stopnia n , 331
- unitalna, 312
 - kategoria, 312
 - unipotent, 319
 - unipotent centralny, 319
- unitalna łączna
 - kategoria, 312
- wolna, 315
- z gradacją, 330
 - element jednorodny, 330
 - homomorfizm, 330
 - homomorfizm stopnia D , 330
 - ideał gradowany, 330
 - podalgebra gradowana, 330
 - podmoduł z gradacją, 330
 - skośny iloczyn tensorowy, 334
 - stopień, 330
 - unitalna, 332
- z jednością, 312
 - unipotent, 319
 - unipotent centralny, 319
- zewnętrzna przestrzeni wektorowej, 365
 - iloczyn zewnętrzny, 365
- zredukowana, 319
- antycentrum algebry Clifforda, 381
- antynwolucja
 - główna (algebry Clifforda), 371
 - kanoniczna (algebry Clifforda), 371
- antykomutator
 - w algebrze, 315
- atlas, 222
 - maksymalny, 222
- automorfizm
 - ortogonalny, 55
 - odbicie elementarne, 58
 - transformacja Householdera, 58
- baza
 - diagonalizująca
 - formy kwadratowej, 59
 - modułu nad pierścieniem, 47
 - dualna, 48
 - standardowa, 48
 - nakrycia, 167
 - otoczeń punktu, 160
 - przestrzeni kwadratowej
 - ortogonalna, 58
 - ortonormalna, 58
 - przestrzeni wektorowej
 - algebraiczna, 50
 - Hamela, 50
 - topologii, 158
 - wiązki włóknistej, 436
- bimoduł nad pierścieniami, 40
 - homomorfizm, 40
- całka
 - Cauchy'ego–Bochnera (regulowana), 189
- cecha IBN, 52
- centralizator
 - podzbioru, 315
 - centrum, 315
- centrum
 - algebry, 315
 - Clifforda, 381
 - grupy, 19
 - pierścienia, 25
- charakterystyka ciała, 31
- ciąg
 - Cauchy'ego, 169
 - punkt skupienia, 161
 - zbieżny punktów przestrzeni topologicznej
 - granica, 161
 - zbieżny punktów przestrzeni topologicznej, 161
- ciąg dokładny
 - grup, 151
 - krótki, 151
 - normalny, 152
 - rozszerzenie, 151
 - rozszerzenie centralne, 151
- cięcie
 - homomorfizmu grup, 155
 - lokalne, 265
 - wiązki
 - globalne, 439
 - lokalne, 439
 - pochodna kowariantna, 474
 - zerowe, 227, 447
- ciało, 28

- charakterystyka, 31
- homomorfizm, 30
 - a monomorfizmy, 30
 - jądło, 30
 - obraz, 30
- jedynka, 28
- liczb zespolonych, 31
- nietrywialność, 30
- operacje, 28
- reszt *modulo*, 31
- spinowe, 422
- topologiczne, 159
- unormowane, 169
- z normą, 169
- zero, 28
- cofnięcie
 - funkcji wzdłuż odwzorowania, 243
 - polą p -form wzdłuż odwzorowania, 258
- delta Kroneckera, 48
- diagram
 - przemienny, 577
 - w i modelowany na kategorii, 62
 - kategoria, 63
 - kopułoka, 125
 - powłoka, 125
- domknięcie
 - równoważnościowe relacji, 131
- domknięcie zbioru, 158
- dopełnienie proste podmodułu, 84
- dualność modułów nad pierścieniem, 45
 - para dualna, 45
- dwoistość modułów nad pierścieniem, 45
 - para dwoista, 45
- dyfeomorfizm (klasy C^k), 224
- działanie
 - grupy
 - G -przestrzeń topologiczna, 295
 - G -rozmaitość gładka, 296
 - G -torsor, 37
 - G -zbiór, 33
 - dołączone, 35
 - dołączone (klasa sprzężoności), 36
 - efektywne, 37
 - grupa izotropii, 36
 - homomorfizm przestrzeni z działaniem gładkim, 296
 - homomorfizm przestrzeni z działaniem topologicznym, 295
 - homomorfizm zbiorów z działaniem, 34
 - izomorfizm ekwiwariantny, 34
 - izomorfizm zbiorów z działaniem, 34
 - lewostronne, 33
 - odwzorowanie ekwiwariantne, 34
 - odwzorowanie gładkie ekwiwariantne, 296
 - odwzorowanie topologiczne ekwiwariantne, 295
 - orbita, 36
 - pole wektorowe fundamentalne, 296
 - prawostronne, 33
 - przechodnie, 37
 - przestrzeń jednorodna, 37
 - przestrzeń jednorodna główna, 37
 - przestrzeń z działaniem
 - topologicznym, 295
 - regularne, 37
 - regularne lewostronne, 35
 - regularne prawostronne, 35
 - rozmaitość z działaniem gładkim, 296
 - stabilizator, 36
 - symetrycznej naturalne, 34
 - symetrycznej przez cofnięcie, 35
 - tranzytywne, 37
 - trywialne, 34, 37
 - właściwe (topologiczne), 298
 - wierne, 37
 - wolne, 37
 - zbiór z działaniem, 33
- pierścienia
 - lewostronne, 38
 - prawostronne, 39
- zbioru, 32
 - dziedzina operatorów, 32
 - nośnik, 32
- dziedzina
 - całkowalności
 - polą wektorowego, 250
 - zagadnienia początkowego, 211
 - całkowitości, 24
 - operatorów, 32
- dzielnik
 - normalny, 17
- element
 - jednorodny, 330
 - kanoniczny algebry Clifforda, 378
 - neutralny
 - grupa, 16
 - monoid, 15
 - objętości rzeczywistej algebry Clifforda, 398
 - objętości zespolonej algebry Clifforda, 406
- elementy sprzężone grupy, 35
- endomorfizm
 - algebra, 313
 - grupy
 - przemiennej, 25
 - idempotentny, 83
 - modułu nad pierścieniem, 40
 - cofnięcie wyznacznika, 50
 - wyznacznik, 49
- ewaluacja
 - polą p -form na polach wektorowych, 253
- forma

- N -liniowa na module nad pierścieniem, 44
- 2-liniowa na module nad pierścieniem
 - dualność, 45
 - dwoistość, 45
 - stowarzyszona z formą kwadratową, 55
- kwadratowa, 55
 - baza diagonalizująca, 59
 - euklidesowa, 56
 - forma 2-liniowa stowarzyszona, 55
 - jądro, 55
 - macierz względem bazy, 55
 - niezwyrodniała, 55
 - suma prosta, 85
 - sygnatura, 86
 - zwyrodniała, 55
- liniowa na module nad pierścieniem, 44
 - współrzędniowa, 48
- Maurera–Cartana na grupie
 - lewoniezmiennicza, 286
 - prawoniezmiennicza, 286
- Maurera–Cartana na grupie Liego
 - lewoniezmiennicza, 286
 - prawoniezmiennicza, 286
- powiązania na wiązce włóknistej, 477
 - K -liniowego, 486
 - głównego, 505
- funkcja
 - cofnięcie wzdłuż odwzorowania, 243
 - klas grupy, 36
 - typu Uluru, 238
- funkcjonał
 - Picarda, 208
- funktor
 - identycznościowy, 65
 - kontrawariantny, 62
 - kowariantny, 62
 - diagram, 62
 - kategoria diagramów w i
 - modelowanych na kategorii, 63
 - kategoria funktorów, 63
 - styczny, 231
 - transformacja naturalna, 62
 - izomorfizm naturalny, 63
 - wewnętrzny, 143
- gałąź nakrycia, 167
- generator, 19
- gradacja, 330
 - element jednorodny, 330
 - homomorfizm, 330
 - homomorfizm stopnia D , 330
 - stopień, 330
 - totalna, 333
- granica
 - ciągu, 161
- grupa, 16
 - Pin, 421
- Spin, 421
- abelowa, 17
- algebra grupowa, 315
 - splot funkcji, 315
- automorfizmów, 20
 - wewnętrznych, 20
 - zewnętrznych, 20
- centrum, 19
- ciąg dokładny, 151
 - krótki, 151
 - normalny, 152
 - rozszerzenie, 151
 - rozszerzenie centralne, 151
- Clifforda, 417
- częściowa, 251
- działanie
 - lewostronne, 33
 - prawostronne, 33
- dzielnik normalny, 17
- element neutralny, 16
- elementy sprzężone, 35
- funkcja klas, 36
- generatory, 19
- homomorfizm, 17
 - izomorfizm kanoniczny, 21
 - monomorfizm indukowany, 22
- iloczyn półprosty
 - lewo-stowarzyszony, 153
 - prawo-stowarzyszony, 153
- ilorazowa, 20
- izotropii, 36
- jedności mnożymy, 415
 - reprezentacja J_V -wektorowa, 417
 - reprezentacja dołączona, 415
 - reprezentacja dołączona zwichrowana, 417
 - reprezentacja wektorowa, 415
- jednoparametrowa dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy C^l), 250
- jednoparametrowa lokalnych dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy C^l), 250
- klas automorfizmów, 20
- Liego, 272
 - G -rozmaitość, 296
 - algebra Liego, 277
 - działanie lewostronne, 296
 - działanie prawostronne, 296
 - forma Maurera–Cartana
 - lewoniezmiennicza, 286
 - forma Maurera–Cartana
 - prawoniezmiennicza, 286
 - homomorfizm, 272
 - pochodna logarytmiczna lewostronna, 288
 - pochodna logarytmiczna
 - prawostronna, 288
 - podgrupa Liego, 272

- pole 1-form lewonieźmiennicznych (kanoniczne), 286
 - pole 1-form prawonieźmiennicznych (kanoniczne), 286
 - pole wektorowe fundamentalne, 296
 - pole wektorowe lewonieźmienniczne, 275
 - pole wektorowe prawonieźmienniczne, 275
 - przestrzeń jednorodna gładka, 308
 - rozmaitość z działaniem, 296
 - styczna, 273
- liniowa
 - główna o współczynnikach z ciała, 44
 - główna przestrzeni wektorowej, 43
- lokalna jednoparametrowa lokalnych dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy C^l), 250
 - pole wektorowe lokalnie nieźmienniczne, 251
- norma, 169
- operacje, 16
- ortogonalna
 - o współczynnikach z ciała, 56
 - stowarzyszona z formą kwadratową, 55
- podgrupa, 17
 - normalna, 17
 - sprężona, 35
- przeciwna, 17
- przemienna, 17
- realizacja
 - lewostronna, 34
 - prawostronna, 34
- specjalna ortogonalna
 - o współczynnikach z ciała, 57
 - ortochroniczna, 295
 - stowarzyszona z formą kwadratową, 57
- strukturalna (wiązki głównej), 455
 - redukcja, 524
 - redukowalna, 525
- strukturalna wiązki włóknistej, 436
- symetryczna, 19
 - permutacja, 19
 - transpozycja, 19
- topologiczna, 159, 272
 - G-przestrzeń topologiczna, 295
 - działanie lewostronne, 295
 - działanie prawostronne, 295
 - homomorfizm topologiczny, 272
 - podgrupa topologiczna, 272
 - przestrzeń topologiczna z działaniem, 295
- trywialna, 19
- unormowana, 169
- warstwa, 18
- wewnętrzna (w kategorii), 146
 - morfizm jedności, 146
 - morfizm mnożenia, 146
 - morfizm odwrotności, 146
- z normą, 169
- zapis addytywny, 18
 - krotność, 18
- zapis moltiplikatywny, 18
 - jedynka, 18
 - potęga, 18
- homeomorfizm, 159
- homomorfizm, 14, 32
 - algebr, 312
 - Liego, 276
 - unitalny, 312
 - z gradacją, 330
 - z gradacją, stopnia D , 330
- automorfizm, 14
- bimodułów nad pierścieniami, 40
- ciał, 30
 - a monomorfizm, 30
 - jądro, 30
 - obraz, 30
- endomorfizm, 14
- epimorfizm, 14
- gradowane, 330
- grup, 17
 - automorfizm wewnętrzny, 20
 - automorfizm zewnętrzny, 20
 - cięcie, 155
 - grupa automorfizmów, 20
 - grupa automorfizmów wewnętrznych, 20
 - grupa automorfizmów zewnętrznych, 20
 - grupa klas automorfizmów, 20
 - izomorfizm kanoniczny, 21
 - jądro, 20
 - Liego, 272
 - monomorfizm indukowany, 22
 - obraz, 20
 - retrakcja, 155
 - topologiczny, 272
 - włożenie kanoniczne (standardowe), 21
- izomorfizm, 14
- kanoniczny
 - grupy w grupę ilorazową, 21
- modułów
 - endomorfizm idempotentny, 83
- modułów nad pierścieniem, 40
 - automorfizm, 41
 - endomorfizm, 40
 - endomorfizm (wyznacznik), 49
 - jądro, 43, 54
 - kojądro, 54
 - koobraz, 54
 - obraz, 43, 54
 - zerowy, 43
- monoidów, 15
- monomorfizm, 14
- pierścieni, 24

- przestrzeni kwadratowych, 55
- reprezentacji algebry, 336
- homotopia, 167
 - drogowa, 167
 - klasa homotopii, 167
 - względem podzbioru, 167
 - odzworowania homotopijne, 167
 - względem podzbioru, 167
- ideał
 - główny, 24
 - generowany przez podzbiór, 317
 - gradowany, 330
 - lewostronny, 24, 316
 - minimalny, 316
 - obustronny, 24, 316
 - minimalny, 316
 - prawostronny, 24, 316
 - minimalny, 316
- idempotent
 - algebry
 - centralny, 319
 - minimalny, 319
 - algebry łącznej, 319
- identyczność, 61
- iloczyn
 - algebraiczny podzbiorów, 577
 - Hamiltona, 313
 - kartezjański, 576
 - przestrzeni metrycznych (typu p), 169
 - rodziny zbiorów, 71
 - półprosty grup
 - lewo-stowarzyszony, 153
 - pravo-stowarzyszony, 153
 - tensorowy
 - algebr standardowy, 320
 - algebr z gradacją skończone, 334
 - modułów, 94
 - reprezentacji algebry, 337
 - wiązek wektorowych, 521
 - wielokrotny, 103
 - zewnątrzny, 365
 - form liniowych, 45
 - form różniczkowych, 254
- immersja, 259
 - kanoniczna, 259
- inwolucja
 - główna (algebry Clifforda), 371
 - kanoniczna (algebry Clifforda), 371
- izometria, 55
 - przestrzeni metrycznych, 168
- izomorfizm
 - kanoniczny
 - sumy prostej modułów, 80
 - naturalny, 63
- jądro
 - formy
 - kwadratowej, 55
 - homomorfizmu, 20, 30
- jakobian
 - na algebrze Liego, 276
 - pól wektorowych, 246
- jedność algebry, 312
- jednorodność
 - odzworowania, 55
- jedynka algebry, 312
- kategoria, 61
 - G-przestrzeni topologicznych, 295
 - G-rozmaitości gładkich, 296
 - algebr
 - Liego (nad ciałem K), 276
 - algebr (nad pierścieniem R), 312
 - łącznych, 312
 - unitalnych, 312
 - unitalnych łącznych, 312
 - ciągów (uogólnionych) w kategorii
 - modelowanych na zbiorze, 64
 - diagramów w i modelowanych na
 - kategorii, 63
 - funktor
 - kontrawariantny, 62
 - kowariantny, 62
 - funktorów, 63
 - grup
 - Liego, 272
 - topologicznych, 272
 - identyczność, 61
 - kategoria zbioru, 64
 - klasa
 - morfizmów, 61
 - obiektów, 61
 - kopułowa w kategorii, 125
 - korozpięcie zbioru, 64
 - lokalnie mała, 62
 - mała, 62
 - morfizm, 61
 - koniec, 61
 - początek, 61
 - złożenie, 61
 - obiekt
 - inicjalny, 65
 - końcowy, 65
 - początkowy, 65
 - terminalny, 65
 - zerowy, 65
 - powłoka w kategorii, 125
 - produktowa, 63
 - przestrzeni
 - Banacha, 170
 - metrycznych, 168
 - przestrzeni topologicznych, 159
 - przestrzeni topologicznych lokalnie
 - modelowanych, 6
 - przestrzeni z działaniem topologicznym
 - G , 295

- rozmaitości
 - różniczkowalnych (klasy C^k), 223
 - topologicznych, 224
- rozmaitości z działaniem gładkim G , 296
- rozpięcie zbioru, 64
- struktura
 - inicjalna, 67
 - końcowa, 67
 - początkowa, 67
 - terminalna, 67
 - uniwersalna, 67
- transformacja naturalna, 62
 - izomorfizm naturalny, 63
- własność
 - inicjalna, 67
 - końcowa, 67
 - początkowa, 67
 - terminalna, 67
- wewnętrzna, 141
 - funktor wewnętrzny, 143
 - morfizm identyczności, 142
 - morfizm końca, 141
 - morfizm początku, 141
 - morfizm złożenia, 142
 - obiekt morfizmów, 141
 - obiekt obiektów, 141
 - transformacja naturalna wewnętrzna, 144
- wiązek głównych (o ustalonych: grupie strukturalnej i bazie), 456
- wiązek włóknistych (nad ustaloną bazą), 437
- wiązek wektorowych skończonego wymiaru (nad ustalonym ciałem i bazą), 447
- wielka, 62
- z koproduktami, 69
 - kowłóknistymi, 128
- z produktami, 69
 - włóknistymi, 127
- zbioru, 64
- klasa, 61
 - charakterystyczna prolongacji, 534
 - gładkości odwzorowania, 187
 - homotopii, 167
 - względem podzbioru, 167
 - morfizmów, 61
 - obiektów, 61
 - obstrukcji dla istnienia prolongacji, 531
 - orientacji wiązki wektorowej, 546
 - Stiefela–Whitneya
 - pierwsza (rozmaitości różniczkowalnej), 542
 - pierwsza (wiązki wektorowej), 542
- klasa sprzężoności, 36
- kombinacja liniowa, 46
 - współczynniki, 46
- kompleksyfikacja
 - algebry (rzeczywistej), 321
- przestrzeni
 - kwadratowej (rzeczywistej), 121
 - wektorowej (rzeczywistej), 120
- komutator
 - pól wektorowych, 246
 - jakobiator, 246
 - w algebrze, 315
- kontrakcja, 184
- kopowłoka
 - w kategorii, 125
- koprodukt
 - kowłóknisty
 - morfizmów kategorii, 135
 - zbiorów, 131
 - kowłóknisty obiektów kategorii, 127
 - kowłóknisty obiektów kategorii wielokrotny, 129
- rodziny, 69
 - suma prosta, 69
 - suma prosta algebr, 318
 - suma prosta modułów, 76
 - suma prosta modułów (wewnętrzna), 82
 - suma rozłączna (zbiory), 71
 - włożenie kanoniczne składowej, 69
- korozpięcie zbioru (kategoria), 64
- kowektor, 235
- kowymiar (podrozmaitości), 223
- krotność
 - elementu grupy, 18
 - krotność nakrycia, 167
 - krzywizna (skalarna)
 - powiązania na wiązce głównej, 518
 - wektorowej, 502
- kula otwarta, 168
- kwaternionifikacja
 - przestrzeni wektorowej (rzeczywistej), 121
- kwaterniony, 313
 - iloczyn Hamiltona, 313
 - kwaternionowa przestrzeń wektorowa, 121
 - norma, 314
 - sprężenie, 314
- lemat
 - linelöfa, 182
 - o zwartym pokryciu, 183
- liczby
 - hölderowsko sprzężone, 171
 - zespolone, 31
- liniowa niezależność, 47
- macierz, 26
 - branie przeciwności, 27
 - dodawanie, 27
 - formy kwadratowej względem bazy, 55

- kolumna, 26
- kwadratowa, 27
 - przekątna, 27
 - stopnia N , 27
 - wyznacznik, 49
- mnożenie, 27
- odwzorowania R -liniowego względem
 - baz, 49
- ortogonalna, 56
- Pauliego, 346
- struktura pierścienia, 28
- wiersz, 26
- zerowa, 27
- mapa, 222
 - naturalna
 - na wiązce p -form różniczkowych, 235
 - na wiązce kostycznej, 234
 - na wiązce stycznej, 227
- metryka, 168
 - produktowa typu p , 169
 - równoważność, 168
- moduł Clifforda, 407
 - ε -ortogonalny, 408
- moduł form różniczkowych, 254
- moduł nad pierścieniem
 - algebra tensorowa, 327
 - baza, 47
 - cykliczny, 47
 - dualność, 45
 - dwoistość, 45
 - forma
 - liniowa, 44
 - funkcjonal liniowy, 44
 - współrzędniowy, 48
 - generowany przez zbiór, 46
 - grupa przemienna jako \mathbb{Z} -moduł, 42
 - homomorfizm, 40
 - automorfizm, 41
 - endomorfizm, 40
 - zerowy, 43
 - iloczyn tensorowy, 94
 - wielokrotny, 103
 - ilorazowy, 43
 - kombinacja liniowa, 46
 - lewostronny, 38
 - odwzorowanie
 - 2-liniowe nieosobliwe, 45
 - 2-liniowe niezwyrodniałe, 45
 - 2-liniowe zwyrodniałe, 45
 - N -liniowe, 44
 - R -liniowe, 40
 - śródo- R -jednorodne, 93
 - śródo- R -liniowe, 93
 - śródo- R -liniowe kanoniczne, 94
 - para dualna, 45
 - para dwoista, 45
 - pierścień jako (bi)moduł standardowy, 41
 - baza standardowa, 48
- podmoduł, 40
 - dopełnienie proste, 84
- podzbiór
 - liniowo niezależny, 47
 - liniowo zależny, 47
- potęga tensorowa, 327
- prawostronny, 39
- przestrzeń wektorowa, 41
 - baza algebraiczna, 50
 - baza Hamela, 50
 - ilorazowa, 43
 - podprzestrzeń wektorowa, 41
 - trywialna, 42
 - wektor, 41
 - zerowa, 42
- rodzina liniowo niezależna, 47
- rząd, 52
- skalar, 38
- skończenie generowany, 47
- sprzężony, 44
 - baza dualna, 48
 - reprezentacja dwoista (dualna)
 - algebry, 337
- topologiczny, 159
- trywialny, 41
- wolny, 42, 47
- współrzędne, 48
- wyznacznik, 49
 - cofnięcie wzdłuż endomorfizmu, 50
- zbiór generujący, 46
- monoid, 14
 - element neutralny, 15
 - element regularny, 16
 - prawostronnie, 16
 - element upraszczalny, 16
 - lewostronnie, 16
 - prawostronnie, 16
 - homomorfizm, 15
 - podmonoid, 15
 - przeciwna, 15
 - przemienny, 15
- morfizm, 61
 - identyczności, 142
 - jedności, 146
 - końca, 141
 - koniec, 61
 - mnożenia, 146
 - odwrotności, 146
 - początek, 61
 - początku, 141
 - wiązek
 - głównych, 455
 - wektorowych, 447
 - wiązek włóknistych, 437
 - równoważność, 437
 - z powiązaniem (nad dyfeomorfizmem
 - baz), 481
 - złożenia, 142

- złożenie, 61
- nakrycie (topologiczne), 167
 - baza, 167
 - gałąź, 167
 - krotność, 167
 - przestrzeń nakrywająca, 167
 - przestrzeń totalna, 167
 - rzut, 167
 - uniwersalne, 167
 - włókno, 167
- nawias
 - Liego, 276
- nierówność
 - Grönwalla–Bellmana, 196
 - Höldera, 171
 - Minkowskiego, 172
 - Schwarza, 171
 - Younga, 171
- nośnik, 13
 - działania, 32
 - funkcji, 237
 - reprezentacji (algebry), 335
- norma
 - euklidesowa, 172
 - kwaternionowa, 314
 - na grupie, 169
 - operatorowa, 177
 - supremum, 176
- obiekt
 - grupowy (w kategorii), 146
 - morfizm odwrotności, 146
 - inicjalny, 65
 - kategorialny (w kategorii), 141
 - morfizm identyfikacji, 142
 - morfizm końca, 141
 - morfizm początku, 141
 - morfizm złożenia, 142
 - obiekt morfizmów, 141
 - obiekt obiektów, 141
 - końcowy, 65
 - morfizmów, 141
 - objektów, 141
 - początkowy, 65
 - terminalny, 65
 - zerowy, 65
- obrót (uogólniony), 57
- obraz
 - homomorfizmu, 20, 30
- obraz algebraiczny zbiorów względem
 - operacji, 577
- odbicie elementarne, 58
- odwrotność algebraiczna podzbioru, 578
- odwzorowania
 - homotopijne, 167
 - względem podzbioru, 167
 - przejścia (wiązki włóknistej), 436
- odwzorowanie
 - 2-liniowe nad pierścieniem
 - niesobliwe, 45
 - niezwyrodniale, 45
 - zwyrodniale, 45
 - N -liniowe
 - na module nad pierścieniem, 44
 - nad pierścieniem, 44
 - N -liniowe alternujące
 - na module nad pierścieniem, 44
 - N -liniowe antysymetryczne
 - na module nad pierścieniem, 44
 - N -liniowe skośnie symetryczne
 - na module nad pierścieniem, 44
 - N -liniowe symetryczne
 - na module nad pierścieniem, 44
 - R -liniowe, 40
 - ε -hermitowskie, 408
 - śródo- R -jednorodnie, 93
 - śródo- R -liniowe, 93
 - kanoniczne, 94
 - 2-liniowe nad pierścieniem
 - odwzorowanie lewostronnie
 - stowarzyszone, 45
 - odwzorowanie prawostronnie
 - stowarzyszone, 45
 - między przestrzeniami topologicznymi
 - lokalna prezentacja, 7
 - anty- C -liniowe, 123
 - ciągłe, 159
 - homeomorfizm, 159
 - w punkcie, 159
 - zanurzenie topologiczne, 159
 - Clifforda, 350
 - kanoniczne, 350
 - domknięte, 159
 - dwu- \mathbb{Z} -liniowe, 93
 - dwu-addytywne, 93
 - eksponencjalne (na grupie Liego), 283
 - ewaluacji, 177
 - gładkie, 187
 - identycznościowe, 576
 - ilorazowe, 159
 - ilorazowe (wiązki głównej), 456
 - immersywne w punkcie, 259
 - jednorodnie stopnia 2, 55
 - jednostajnie ciągłe, 175
 - ograniczone, 168, 189
 - ortogonalne, 55
 - otwarte, 159
 - para transwersalna, 268
 - różniczkowalne
 - na zbiorze, 187
 - w punkcie, 187
 - różniczkowalne (klasy C^p), 223
 - odwzorowanie styczne, 232
 - prezentacja lokalna, 223
 - regulowane, 189
 - schodkowe, 189

- sprężone hermitowsko, 57
- stowarzyszone z 2-liniowym
 - lewostronnie, 45
 - prawostronnie, 45
- styczne, 232
 - immersja, 259
 - submersja, 259
 - włożenie, 259
 - zanurzenie, 259
- submersywne w punkcie, 259
 - cięcie lokalne, 265
 - poziomica regularna, 262
 - punkt krytyczny, 262
 - punkt regularny, 262
 - wartość krytyczna, 262
 - wartość regularna, 262
- transwersalne względem podrozmaitości, 267
 - w punkcie, 267
- właściwe, 162
- wykres, 264
- zwężające, 184
- ograniczone rozszerzenie liniowe, 185
- operacja, 13
 - n -argumentowa, 13
 - 0-argumentowa, 13
- operator
 - chiralności, 378
 - liniowy
 - ograniczony, 170
 - rzutu, 83
- orbita
 - działania grupy, 36
- orientacja
 - na rozmaitości różniczkowalnej, 544
 - czasowa, 544
 - przestrzenna, 544
 - na wiązce wektorowej, 544
 - czasowa, 544
 - przestrzenna, 544
 - rzeczywistej przestrzeni wektorowej, 49
- ortogonalizacja Grama–Schmidta, 87
- ortogonalność
 - przestrzeni
 - względem formy kwadratowej, 57
 - wektorów
 - względem formy kwadratowej, 57
- otoczenie
 - podzbioru, 160
 - punktu, 160
- otoczenie punktu
 - baza, 160
- pętla (zaczepiona w punkcie), 166
- płaszczyzna
 - hiperboliczna, 56
- para
 - dualna (modułów nad pierścieniem), 45
 - dwoista (modułów nad pierścieniem), 45
 - hiperboliczna, 56
- parametryzacja (lokalna), 222
- pchnięcie
 - poła wektorowego wzdłuż dyfeomorfizmu, 245
 - różniczkowania w punkcie wzdłuż odzworowania, 243
- permutacja, 19
- pierścień, 22
 - centrum, 25
 - endomorfizmów grupy przemiennej, 25
 - homomorfizm, 24
 - jedynka, 22
 - macierzowy, 28
 - o cesze IBN, 52
 - operacje, 22
 - podpierścień, 24
 - ideał główny, 24
 - ideał lewostronny, 24
 - ideał obustronny, 24
 - ideał prawostronny, 24
 - przeciwny, 40
 - przemienny, 24
 - dziedzina całkowitości, 24
- topologiczny, 159
 - trywialny, 25
 - unormowany, 169
 - wielomianów, 26
 - z dzieleniem, 24
 - z normą, 169
 - zero, 22
- pochodna
 - Fréchet’a, 187
 - Koszula, 489
 - kowariantna (cięcia wiązki włóknistej), 474
 - logarytmiczna
 - lewostronna, 288
 - prawostronna, 288
 - zewnątrzna, 255
- podalgebra, 312
 - gradowana, 330
 - Liego, 276
 - maksymalna komutująca (reprezentacji algebry), 336
- podbaza
 - topologii, 158
- podgrupa, 17
 - Liego, 272
 - normalna, 17
 - topologiczna, 272
- podmoduł
 - modułu nad pierścieniem, 40
 - niezmienniczy reprezentacji (algebry), 336
 - z gradacją, 330
- podniesienie poziome (horyzontalne)

- ścieżki, 476
- wektorów, 474
- podpokrycie, 162
- podprzestrzeń
 - horyzontalna, 476
 - niezmiennicza reprezentacji (algebry), 336
 - pionowa, 453
 - pozioma, 476
 - przestrzeni wektorowej, 41
 - topologiczna, 158
 - wertykalna, 453
- podreprezentacja algebry, 336
- podrozmaitość, 223
 - kowymiar, 223
 - para transwersalna, 268
- podwiązka, 437
 - główna, 455
 - horyzontalna, 476
 - pionowa, 453
 - pozioma, 476
 - wektorowa, 447
 - czasowa, 543
 - przestrzenna, 543
 - wertykalna, 453
- podzbiór
 - liniowo niezależny, 47
 - liniowo zależny, 47
 - ograniczony, 168
- pokrycie
 - otwarte, 162
 - dobrze (rozmaitości różniczkowalnej), 225
 - lokalnie skończone, 162
 - podpokrycie, 162
 - rozdrobienie, 162
 - trywializujące, 6
 - trywializujące (wiązkę), 436
- pole
 - p -form, 253
 - cofnięcie wzdłuż odwzorowania, 258
 - ewaluacja na polach wektorowych, 253
 - iloczyn zewnętrzny, 254
 - pochodna zewnętrzna, 255
 - różniczkowalne (klasy C^k), 253
 - 1-form
 - lewniezmiennicznych (kanoniczne) na grupie Liego, 286
 - prawoniezmiennicznych (kanoniczne) na grupie Liego, 286
 - wektorowe, 244
 - algebra, 246
 - dziedzina całkowalności, 250
 - fundamentalne, 296
 - jednoparametrowa grupa
 - dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy C^l), 250
 - jednoparametrowa grupa lokalnych dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy C^l), 250
 - komutator, 246
 - krzywa całkowa, 249
 - lewniezmienniczne (na grupie Liego), 275
 - lokalna jednoparametrowa grupa lokalnych dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy C^l), 250
 - lokalnie niezmienniczne, 251
 - para w relacji określonej przez odwzorowanie różniczkowalne, 248
 - pchnięcie wzdłuż dyfeomorfizmu, 245
 - potok, 250
 - prawoniezmienniczne (na grupie Liego), 275
 - różniczkowalne (klasy C^k), 245
 - różniczkowanie, 245
 - trajektoria, 249
 - zupelne, 250
 - potęga
 - elementu grupy, 18
 - tensorowa modułu, 327
 - potencjał
 - powiązania głównego, 512
 - potok
 - odwzorowania definiującego zagadnienie początkowe, 212
 - poła wektorowego, 250
 - powłoka
 - w kategorii, 125
 - powłoka (R -)liniowa zbioru, 46
 - powiązanie
 - Ehresmanna, 476
 - K -liniowe, 485
 - główne, 503
 - zgodne z działaniem grupy strukturalnej, 503
 - zgodne ze strukturą K -liniową, 485
 - forma powiązania, 477
 - K -liniowego, 486
 - główne, 505
 - główna
 - potencjał, 512
 - Koszula, 489
 - symbole Christoffela, 496
 - krzywizna (skalarna), 502, 518
 - płaskie
 - główne, 518
 - liniowe, 502
 - włókien w wiązce, 474
 - K -liniowe, 484
 - główne, 503
 - zgodne z działaniem grupy strukturalnej, 503
 - zgodne ze strukturą K -liniową, 484
 - poziomica

- regularna odwzorowania, 262
- produkt
 - algebr, 318
 - kartezjański
 - rodziny zbiorów, 71
 - rodziny, 68
 - modułów, 72
 - rzut kanoniczny na składową, 69
 - rodziny struktur
 - algebr, 318
 - rodziny zbiorów
 - kartezjański, 71
 - włóknisty
 - morfizmów kategorii, 132
 - obiektów kategorii, 127
 - obiektów kategorii wielokrotny, 129
 - zbiorów, 130
- prolongacja wiązki głównej, 527
 - klasa charakterystyczna, 534
 - klasa obstrukcji, 531
 - równoważność, 527
- prostopadłość
 - przestrzeni
 - względem formy kwadratowej, 57
 - wektorów
 - względem formy kwadratowej, 57
- przeciwność algebraiczna podzbioru, 578
- przeniesienie równoległe, 473
 - podniesienie poziome (horyzontalne)
 - ścieżki, 476
 - wektorów, 474
- powiązanie włókien, 474
 - K -liniowe, 484
 - główne, 503
 - zgodne z działaniem grupy
 - strukturalnej, 503
 - zgodne ze strukturą K -liniową, 484
- przestrzeń
 - C -liniowa
 - struktura kwaternionowa, 123
 - struktura rzeczywista, 123
 - K -liniowa, 41
 - (Q) -ortogonalna, 57
 - (Q) -prostopadła, 57
 - 1-spójna, 167
 - anizotropowa, 58
 - Banacha, 170
 - całka Cauchy'ego–Bochnera
 - (regulowana), 189
 - odwzorowanie różniczkowalne na
 - zbiorze, 187
 - odwzorowanie różniczkowalne w
 - punkcie, 187
 - ograniczone rozszerzenie liniowe, 185
 - pochodna Fréchet'a odwzorowania, 187
 - sumocalka odwzorowania
 - schodkowego, 189
 - ciągowo zwarta, 162
 - dyskretna, 162
 - Hausdorffa, 162
 - hermitowska
 - odbicie elementarne, 58
 - transformacja Householdera, 58
 - transformacja ortogonalna, 55
 - hiperboliczna, 88
 - horyzontalna, 476
 - ilorazowa, 163
 - izotropowa, 58
 - całkowicie, 58
 - całkowicie maksymalna, 88
 - jednorodna, 37
 - główna, 37
 - gładka, 308
 - jednospójna, 167
 - kwadratowa, 55
 - (pod)przestrzeń całkowicie izotropowa, 58
 - (pod)przestrzeń całkowicie izotropowa maksymalna, 88
 - (pod)przestrzeń izotropowa, 58
 - (pod)przestrzeń zerowa, 58
 - (pod)przestrzeń zerowa maksymalna, 88
 - algebra Clifforda, 350
 - anizotropowa, 58
 - automorfizm ortogonalny, 55
 - baza ortogonalna, 58
 - baza ortonormalna, 58
 - grupa ortogonalna, 55
 - grupa specjalna ortogonalna, 57
 - hiperboliczna, 88
 - homomorfizm, 55
 - izometria, 55
 - kompleksyfikacja, 121
 - nieizotropowa, 58
 - niezwyrodniała, 58
 - odbicie elementarne, 58
 - odwzorowanie ortogonalne, 55
 - plaszczyna hiperboliczna, 56
 - suma prosta, 84
 - transformacja Householdera, 58
 - wektor anizotropowy, 58
 - wektor izotropowy, 58
 - wektor nieizotropowy, 58
 - wektor zerowy, 58
 - wyznacznik unormowany, 87
 - lokalnie przewarta, 162
 - lokalnie zwarta, 162
 - metryczna, 168
 - jednostajna ciągłość, 175
 - kula otwarta, 168
 - odwzorowanie ograniczone, 168
 - podzbiór ograniczony, 168
 - zupełna, 169
 - nakrywająca, 167
 - nieizotropowa, 58

- niezwyrodniała, 58
- ortogonalna
 - względem formy kwadratowej, 57
- pętli (swobodnych), 166
- parazwarta, 162
- pionowa, 453
- pozioma, 476
- produktowa, 163
- prostopadła
 - względem formy kwadratowej, 57
- różniczkowań (w punkcie), 236
- styczna (w punkcie), 228
 - podprzestrzeń horyzontalna, 476
 - podprzestrzeń pionowa, 453
 - podprzestrzeń pozioma, 476
 - podprzestrzeń wertykalna, 453
 - przestrzeń horyzontalna, 476
 - przestrzeń pionowa, 453
 - przestrzeń pozioma, 476
 - przestrzeń wertykalna, 453
- topologiczna, 158
 - ścieżka (ciągła), 166
 - 0-spójna, 167
 - ciąg zbieżny punktów, 161
 - ciągowo zwarta, 162
 - drogowo spójna, 167
 - grupa topologiczna, 272
 - homotopia, 167
 - lokalnie drogowo spójna, 167
 - lokalnie modelowana, 6
 - lokalnie przewzarta, 162
 - lokalnie spójna, 166
 - lokalnie zwarta, 162
 - niespójna, 166
 - pętla, 166
 - parazwarta, 162
 - składowa drogowo spójna, 166
 - składowa drogowo spójna punktu, 167
 - składowa spójna, 166
 - składowa spójna punktu, 166
 - spójna, 166
 - spełniająca drugi aksjomat
 - przeliczalności, 160
 - spełniająca pierwszy aksjomat
 - przeliczalności, 160
 - z działaniem grupy, 295
 - zbiór 1-spójny, 167
 - zbiór jednospójny, 167
 - zbiór spójny, 166
 - zwarta, 162
- totalna
 - nakrycia, 167
 - wiązki włóknistej, 436
- wektorowa, 41
 - ciało jako przestrzeń wektorowa, 42
 - ciało jako przestrzeń wektorowa (baza standardowa), 48
 - ilorazowa, 43
 - kompleksyfikacja, 120
 - kwaternionifikacja, 121
 - kwaternionowa, 121
 - orientacja, 49
 - podprzestrzeń ortogonalna względem formy kwadratowej, 57
 - podprzestrzeń prostopadła względem formy kwadratowej, 57
 - podprzestrzeń wektorowa, 41
 - sprzężona, 44
 - topologiczna, 159
 - trywialna, 42
 - unormowana, 169
 - wektor, 41
 - wymiar (\mathbb{K} -liniowy), 53
 - z normą, 169
 - zerowa, 42
 - wertykalna, 453
 - zerowa, 58
 - maksymalna, 88
 - zwarta, 162
- punkt
 - krytyczny odwzorowania, 262
 - regularny odwzorowania, 262
 - skupienia ciągu, 161
- różniczkowanie
 - w punkcie, 236
 - pchnięcie wzdłuż odwzorowania, 243
 - wzdłuż pola wektorowego, 245
- równania struktury (algebra Liego), 278
- równoważność
 - reprezentacji algebry, 336
 - wiązek włóknistych, 437
- realizacja
 - grupy
 - lewostronna, 34
 - prawostronna, 34
 - zbioru, 32
- reprezentacja
 - J_V -wektorowa
 - multiplikatywnej grupy jedności, 417
 - algebry, 335
 - Clifforda, 407
 - definiująca (algebry macierzowej), 342
 - homomorfizm, 336
 - lewa regularna, 337
 - maksymalna podalgebra komutująca, 336
 - nieprzywiedlna, 336
 - nierozkładalna, 336
 - nośnik, 335
 - półprosta, 336
 - podmoduł niezmienniczy, 336
 - podprzestrzeń niezmiennicza, 336
 - podreprezentacja, 336
 - prawa regularna, 337
 - przywiedlna, 336

- równoważność, 336
- splatacz, 336
- trywialna, 336
- typu C , 337
- typu H , 337
- typu R , 337
- typu kwaternionowego, 337
- typu rzeczywistego, 337
- typu zespolonego, 337
- wierna, 336
- wymiar, 335
- zredukowana względem ideału, 337
- dolączona
 - mnożykatywnej grupy jedności, 415
- dolączona zwichrowana
 - mnożykatywnej grupy jedności, 417
- grupy Spin
 - spinorowa, 425
 - spinorowa rzeczywista, 425
 - spinorowa zespolona, 425
- wektorowa
 - mnożykatywnej grupy jedności, 415
- retrakcja
 - homomorfizmu grup, 155
 - różniczkowalna (klasy C^k), 225
- rodzina
 - funkcji lokalnie skończona, 237
 - indeksowana, 46
 - nośnik, 46
 - o nośniku skończonym, 46
 - liniowo niezależna, 47
 - rzutów dopełniających, 83
 - zupełna, 83
 - rzutów komplementarnych, 83
 - zupełna, 83
- rozdrobienie pokrycia, 162
- rozkład jedności (klasy C^k), 237
- rozmaitość
 - ilorazowa, 301
 - podrozmaitość, 223
 - kowymiar, 223
 - różniczkowalna (klasy C^k), 222
 - C^k -dyfeomorfizm, 224
 - C^p -odwzorowanie, 223
 - p -forma różniczkowa, 236
 - ścieżka różniczkowalna, 229
 - ścieżka zwarta (klasy C^l), 248
 - atlas, 222
 - atlas maksymalny, 222
 - cofnięcie pola form wzdłuż
 - odwzorowania, 258
 - dyfeomorfizm (klasy C^k), 224
 - ewaluacja pola p -form na polach
 - wektorowych, 253
 - grupa Liego, 272
 - immersja, 259
 - klasa Stiefela–Whitneya (pierwsza), 542
 - kowektor, 235
 - krzywa całkowita, 249
 - mapa, 222
 - moduł form różniczkowych, 254
 - odwzorowanie immersywne w punkcie, 259
 - odwzorowanie różniczkowalne (klasy C^p), 223
 - odwzorowanie submersywne w punkcie, 259
 - orientacja, 544
 - orientacja czasowa, 544
 - orientacja przestrzenna, 544
 - orientowalna, 540
 - orientowalna czasowo, 540
 - orientowalna czasowo i przestrzennie, 540
 - orientowalna przestrzennie, 540
 - parametryzacja (lokalna), 222
 - pchnięcie pola wektorowego wzdłuż
 - dyfeomorfizmu, 245
 - pokrycie dobre, 225
 - pole p -form, 253
 - pole wektorowe, 244
 - pole wektorowe fundamentalne, 296
 - poziomica regularna odwzorowania, 262
 - przestrzeń różniczkowa (w punkcie), 236
 - przestrzeń styczna (w punkcie), 228
 - punkt krytyczny odwzorowania, 262
 - punkt regularny odwzorowania, 262
 - różniczkowanie w punkcie, 236
 - różniczkowanie wzdłuż pola
 - wektorowego, 245
 - rozkład jedności (klasy C^k), 237
 - struktura, 223
 - struktura cofnięta, 224
 - struktura metryczna, 535
 - struktura produktowa, 224
 - submersja, 259
 - topologiczna ($k = 0$), 223
 - trajektoria, 249
 - transformacja współrzędniowa
 - (lokalna), 222
 - układ współrzędnych (lokalny), 222
 - włókno submersji, 262
 - włożenie, 259
 - wartość krytyczna odwzorowania, 262
 - wartość regularna odwzorowania, 262
 - wektor styczny (do ścieżki
 - różniczkowalnej), 249
 - wektor styczny (do rozmaitości), 227
 - wiązka p -form różniczkowych (jako
 - rozmaitość), 235
 - wiązka baz, 456
 - wiązka kostyczna (jako rozmaitość), 234

- wiązka styczna (jako rozmaitość), 226
- wiązka styczna (jako wiązka włóknista), 444
- wymiar, 222
- z działaniem grupy (gładkim), 296
- zanurzenie, 259
- topologiczna, 223
- rozpięcie zbioru (kategoria), 64
- rozszerzenie
 - grupy, 151
 - centralne, 151
- rozwłóknienie Hopfa, 456
- rząd
 - modułu nad pierścieniem, 52
 - morfizmu wiązek wektorowych, 447
 - odwzorowania liniowego, 54
- rzut, 83
 - kanoniczny, 577
 - modulo* podgrupa, 21
 - na bazę wiązki, 226, 234, 235
 - na składową produktu rodziny, 69
 - na bazę
 - wiązki włóknistej, 436
 - nakrycia, 167
 - rodzina rzutów dopełniających, 83
 - zupełna, 83
 - rodzina rzutów komplementarnych, 83
 - zupełna, 83
- singleton, 13
- sinusoida
 - zagęszczona (warszawska), 167
- składowa
 - łukowo spójna punktu, 167
 - drogowo spójna, 166
 - spójna, 166
 - spójna punktu, 166
- sklejenie (przestrzeni topologicznych), 131
- spójność, 166
 - drogowa, 167
- spinor
 - czysty (Cartana), 428
 - Diraca, 426
 - Pauliego, 425
 - Weyla (chiralny), 426
- splatacz
 - reprezentacji algebry, 336
- splot funkcji na grupie, 315
- sprzężenie
 - hermitowskie, 57
 - kwaternionowe, 314
- stała, 13
- stałe struktury (algebra Liego), 278
- stabilizator, 36
- stopień
 - podmodułu, 330
- struktura
 - C^k -rozmaitości, 223
- inicjalna, 67
 - koprodukt kowłóknisty obiektów kategorii, 127
 - koprodukt kowłóknisty obiektów kategorii wielokrotny, 129
 - koprodukt rodziny, 69
- końcowa, 67
 - produkt rodziny, 68
 - produkt włóknisty obiektów kategorii, 127
 - produkt włóknisty obiektów kategorii wielokrotny, 129
- kwaternionowa (na rzeczywistej przestrzeni wektorowej), 122
- kwaternionowa na przestrzeni C -liniowej, 123
- metryczna
 - na rozmaitości różniczkowalnej, 535
 - na wiązce wektorowej, 535
- metryczna riemannowska
 - na wiązce wektorowej, 535
- początkowa, 67
 - koprodukt kowłóknisty obiektów kategorii, 127
 - koprodukt kowłóknisty obiektów kategorii wielokrotny, 129
 - koprodukt rodziny, 69
- różniczkowa (klasy C^k), 223
- rozmaitości (różniczkowalnej klasy C^k), 223
- rzeczywista na przestrzeni C -liniowej, 123
- terminalna, 67
 - produkt rodziny, 68
 - produkt włóknisty obiektów kategorii, 127
 - produkt włóknisty obiektów kategorii wielokrotny, 129
- uniwersalna, 67
- zespólna (na rzeczywistej przestrzeni wektorowej), 122
- struktura algebraiczna
 - prosta, 13
 - homomorfizm, 14
 - podstruktura, 14
 - topologiczna, 159
 - złożona, 32
 - homomorfizm, 32
 - topologiczna, 159
- stwierdzenie
 - bilans wymiarów, 53
 - kwazi-uniwersalna własność submersji, 265
 - lemat Steinitza o wymianie, 51
 - o naturalności kompleksyfikacji (algebr Clifforda), 401
 - o naturalności odwzorowania eksponencjalnego, 284

- o postaci kanonicznej (macierzy)
 - odwzorowania K -liniowego, 53
 - o rozszerzaniu funkcji, 240
 - o rozszerzeniu hiperbolicznym
 - przestrzeni izotropowej, 87
- reguła łańcuchowa w przestrzeni
 - Banacha, 187
- Sylwestera–Jacobiego wyznacznikowy
 - wzór na sygnaturę, 86
- twierdzenie Lagrange’a o diagonalizacji
 - formy kwadratowej, 59
- twierdzenie o lokalnej immersji, 259
- twierdzenie o lokalnej submersji, 260
- wzór wyznacznikowy Cauchy’ego, 50
- submersja, 259
 - cięcie lokalne, 265
 - kanoniczna, 260
 - włókno, 262
- suma
 - (Q -)ortogonalna, 85
 - algebraiczna podzbiorów, 577
 - prosta, 69
 - algebr, 318
 - form kwadratowych, 85
 - modułów, 76
 - modułów (izomorfizmy kanoniczne), 80
 - modułów a rodzina rzutów
 - komplementarnych, 83
 - modułów wewnętrzna, 82
 - przestrzeni kwadratowych, 84
 - reprezentacji algebry, 337
 - rozłączna, 71
 - spójna, 131
 - Whitneya, 519
- sumocalka odwzorowania schodkowego, 189
- super-iloczyn tensorowy algebr z gradacją, 334
- sygnatura
 - formy kwadratowej, 86
 - struktury metrycznej (na wiązce
 - wektorowej), 535
- symbol Kroneckera, 48
- symbol Levi-Civitty, 346
- symbole Christoffela
 - powiązania Koszula, 496
- tensor
 - stopnia n , 331
- teoria kategorii, 61
- tożsamość
 - Jacobiego, 276
 - dla stałych struktury, 278
 - Leibniza, 489
- topologia, 158
 - baza, 158
 - cofnięciowa, 163
 - dyskretna, 162
 - generowana (przez bazę), 158
 - Hausdorffa, 162
 - ilorazowa, 163
 - końcowa, 163
 - metryczna, 168
 - mocna, 163
 - odwzorowanie
 - ciągłe, 159
 - ciągłe w punkcie, 159
 - domknięte, 159
 - ilorazowe, 159
 - jednostajnie ciągłe, 175
 - otwarte, 159
 - właściwe, 162
 - otoczenie
 - podzbioru, 160
 - punktu, 160
 - otoczenie punktu
 - baza, 160
 - początkowa, 163
 - podbaza, 158
 - podprzestrzeni, 159
 - produktowa, 163
 - słaba, 163
 - słabsza, 158
 - silniejsza, 158
 - sumy rozłącznej, 163
 - trywialna, 162
 - względna, 159
 - zbiór
 - domknięty, 158
 - otwarty, 158
 - względnie domknięty, 159
 - względnie otwarty, 159
 - zwarto-otwarta, 163
- torsor grupy, 37
- transformacja
 - Householdera, 58
 - naturalna, 62
 - izomorfizm naturalny, 63
 - wewnętrzna, 144
 - ortogonalna, 55
 - Householdera, 58
 - odbicie elementarne, 58
 - współrzędniowa (lokalna), 222
- transpozycja, 19
- trywializacja
 - lokalna
 - wiązki włóknistej, 436
- twierdzenie
 - „Szachownica Clifforda”, 396
 - Banacha o punkcie stałym, 184
 - Cartana o podgrupie domkniętej, 291
 - Cartana–Dieudonnégo, 89
 - de Rhama–Weila o istnieniu pokrycia
 - dobrego, 225
 - Heinego–Borela, 181

- klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych $/\mathbb{C}$ (zespolone algebry Clifforda), 412
- klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych $/\mathbb{R}$ (rzeczywiste algebry Clifforda), 412
- klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych $/\mathbb{C}$ (grupa Spin), 427
- klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych $/\mathbb{R}$ (grupa Spin), 425
- klasyfikacyjne I \mathbb{C} (zespolone algebry Clifforda), 404
- klasyfikacyjne I \mathbb{R} (rzeczywiste algebry Clifforda), 393
- klasyfikacyjne II \mathbb{C} (zespolone algebry Clifforda), 404
- klasyfikacyjne II \mathbb{R} (rzeczywiste algebry Clifforda), 394
- klasyfikacyjne III \mathbb{C} (zespolone algebry Clifforda), 405
- klasyfikacyjne III \mathbb{R} (rzeczywiste algebry Clifforda), 395
- klasyfikacyjne IV \mathbb{R} (rzeczywiste algebry Clifforda), 395
- klasyfikacyjne V \mathbb{R} (rzeczywiste algebry Clifforda), 396
- Lagrange'a o diagonalizacji formy kwadratowej, 59
- o łączności (ko)produktu (ko)włóknistego, 136
- o łączności iloczynu tensorowego, 101
- o ciągłej zależności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego od warunków początkowych, 211
- o funktorialności Lie, 279
- o istnieniu bazy przestrzeni wektorowej, 50
- o istnieniu rozkładu jedności, 237
- o izomorfizmie pierwsze (dla algebr z gradacją), 333
- o pierwsze (dla grup), 21
- o pierwsze (dla modułów), 54
- o jednoznaczności obiektów terminalnych i inicjalnych, 66
- o jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego w dziedzinie określoności, 209
- o jednoznaczności struktur uniwersalnych, 68
- o kanonicznym iloczynie tensorowym algebr Clifforda, 387
- o lokalnej odwracalności odwzorowań, 199
- o naturalności kompleksyfikacji algebr Clifforda, 401
- o odwzorowaniu uwikłanym, 201
- o ograniczonym rozszerzeniu liniowym, 185
- o przedłużaniu rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego, 210
- o przemienności (ko)produktu (ko)włóknistego, 136
- o przemienności iloczynu tensorowego, 99
- o różniczkowalności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego, 217
- o redukcji zagadnienia Cauchy'ego do postaci autonomicznej, 214
- o rekonstrukcji wiązki głównej z powiązaniem, 514
- o wiązki włóknistej, 439
- o wiązki wektorowej z powiązaniem, 498
- o różnorodności ilorazowej, 301
- o rzędzie odwzorowania, 203
- o ekwiwariantnego, 298
- o uniwersalności rzutu kanonicznego (dla grup), 22
- o wartości średniej, 198
- o wartości regularnej, 262
- o wymiarze przestrzeni wektorowej, 52
- Picarda–Lindelöfa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego, 207
- podstawowe rachunku różniczkowego i całkowego, 196
- rozwnięcie Taylora dla funkcji wielu zmiennych, 197
- Sylwestera prawo bezwładności, 85
- układ współrzędnych (lokalny), 222
- unipotent algebry unitalnej, 319
- centralny, 319
- włókno nad punktem bazy wiązki, 437
- surjektywnej submersji, 262
- typowe wiązki włóknistej, 436
- włókno nakrycia, 167
- własność inicjalna, 67
- końcowa, 67
- początkowa, 67
- terminalna, 67
- włożenie, 259
- kanoniczne podgrupy, 21
- składowej koproduktu rodziny, 69
- standardowe podgrupy, 21
- warstwa, 18
- wartość krytyczna odwzorowania, 262
- regularna odwzorowania, 262
- warunek 0-kocyklu, 545
- 1-kocyklu, 439, 541

- 2-kocyklu, 530
- kowariancji (dla pochodnej kowariantnej), 481
- Lipschitza, 184
- warunek Leibniza, 236
- warunek samodwoistości (samodualności), 398, 406
- warunek skośnej samodwoistości (antysamodualności), 398, 406
- wektor
 - (Q -)ortogonalny, 57
 - (Q -)prostopadły, 57
 - anizotropowy, 58
 - horyzontalny, 476
 - izotropowy, 58
 - nieizotropowy, 58
 - pionowy, 453
 - poziomy, 476
 - styczny
 - do ścieżki różniczkowalnej, 249
 - do rozmaitości, 227
 - horyzontalny, 476
 - pionowy, 453
 - poziomy, 476
 - wertykalny, 453
 - wertykalny, 453
 - zerowy, 58
- wiązka
 - Hom, 522
 - p -form różniczkowych (jako rozmaitość), 235
 - p -forma różniczkowa, 236
 - mapa naturalna, 235
 - rzut kanoniczny (na bazę wiązki), 235
 - włókno, 235
 - baz nad rozmaitością, 456
 - baz wiązki wektorowej, 453
 - ortonormalnych, 536
 - ortonormalnych z orientacją, 539
 - ortonormalnych z orientacją czasową, 539
 - ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną, 540
 - ortonormalnych z orientacją przestrzenną, 539
 - dołączona, 466
 - dualna wiązki wektorowej, 523
 - dwoista wiązki wektorowej, 523
 - główna, 455
 - \widehat{G} -struktura, 527
 - forma powiązania głównego, 505
 - grupa strukturalna, 455
 - morfizm, 455
 - odwzorowanie ilorazowe, 456
 - podwiązka, 455
 - potencjał powiązania głównego, 512
 - powiązanie Ehresmanna zgodne z działaniem grupy strukturalnej, 503
 - powiązanie główne, 503
 - powiązanie włókien zgodne z działaniem grupy strukturalnej, 503
 - prolongacja, 527
 - redukcja, 524
 - rozwłóknienie Hopfa, 456
 - wiązka dołączona, 466
 - zredukowana, 525
 - główne
 - powiązanie Ehresmanna główne, 503
 - homomorfizmów wiązek wektorowych, 522
 - horyzontalna, 476
 - kostyczna (jako rozmaitość), 234
 - kowektor, 235
 - mapa naturalna, 234
 - rzut kanoniczny (na bazę wiązki), 234
 - włókno, 234
 - liniowa, 447
 - pionowa, 453
 - pozioma, 476
 - reperów nad rozmaitością, 456
 - reperów wiązki wektorowej, 453
 - ortonormalnych, 536
 - ortonormalnych z orientacją, 539
 - ortonormalnych z orientacją czasową, 539
 - ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną, 540
 - ortonormalnych z orientacją przestrzenną, 539
 - stowarzyszona z główną, 464
 - dołączona, 466
 - styczna (jako rozmaitość), 226
 - cięcie zerowe, 227
 - mapa naturalna, 227
 - rzut kanoniczny (na bazę wiązki), 226
 - włókno, 227
 - wektor styczny (do rozmaitości), 227
 - styczna (jako wiązka włóknista), 444
 - mapa naturalna, 445
 - podwiązka horyzontalna, 476
 - podwiązka pionowa, 453
 - podwiązka pozioma, 476
 - podwiązka wertykalna, 453
 - wiązka baz nad rozmaitością, 456
 - wiązka horyzontalna, 476
 - wiązka pionowa, 453
 - wiązka pozioma, 476
 - wiązka reperów nad rozmaitością, 456
 - wiązka wertykalna, 453
 - styczna grupy Liego (jako grupa Liego), 273
 - włóknista, 436
 - baz nad rozmaitością, 456
 - baz ortonormalnych wiązki wektorowej, 536

- baz ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją, 539
- baz ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją czasową, 539
- baz ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją czasową i przestrzenną, 540
- baz ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją przestrzenną, 539
- baz wiązki wektorowej, 453
- baza, 436
- cofnięta, 438
- forma powiązania, 477
- główna, 455
- grupa strukturalna, 436
- liniowa, 447
- morfizm, 437
- odwzorowania przejścia, 436
- podwiązka, 437
- podwiązka horyzontalna, 476
- podwiązka pionowa, 453
- podwiązka pozioma, 476
- podwiązka wertykalna, 453
- pokrycie trywializujące, 436
- powiązanie Ehresmanna, 476
- powiązanie włókien, 474
- przeniesienie równoległa, 473
- przestrzeń totalna, 436
- równoważność, 437
- reperów nad rozmaitością, 456
- reperów ortonormalnych wiązki wektorowej, 536
- reperów ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją, 539
- reperów ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją czasową, 539
- reperów ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją czasową i przestrzenną, 540
- reperów ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją przestrzenną, 539
- reperów wiązki wektorowej, 453
- rzut na bazę, 436
- stowarzyszona z główną, 464
- styczna nad rozmaitością, 444
- trywialna, 438
- włókno nad punktem, 437
- włókno typowe, 436
- wektorowa, 446
- wiązka horyzontalna, 476
- wiązka pionowa, 453
- wiązka pozioma, 476
- wiązka wertykalna, 453
- wektorowa, 446
- cięcie zerowe, 447
- forma powiązania K -liniowego, 486
- iloczyn tensorowy, 521
- klasa orientacji, 546
- klasa Stiefela–Whitneya (pierwsza), 542
- liniowa, 447
- morfizm, 447
- orientacja, 544
- orientacja czasowa, 544
- orientacja przestrzenna, 544
- orientowalna, 539
- orientowalna czasowo, 539
- orientowalna czasowo i przestrzenie, 540
- orientowalna przestrzenie, 539
- pochodna Koszula, 489
- podwiązka, 447
- podwiązka czasowa, 543
- podwiązka przestrzenna, 543
- powiązanie Ehresmanna K -liniowe, 485
- powiązanie Ehresmanna zgodne ze strukturą K -liniową, 485
- powiązanie Koszula, 489
- powiązanie włókien K -liniowe, 484
- powiązanie włókien zgodne ze strukturą K -liniową, 484
- rzeczywista, 446
- struktura metryczna, 535
- struktura metryczna riemannowska, 535
- suma Whitneya, 519
- symbole Christoffela powiązania Koszula, 496
- wiązka Hom, 522
- wiązka baz, 453
- wiązka baz ortonormalnych, 536
- wiązka baz ortonormalnych z orientacją, 539
- wiązka baz ortonormalnych z orientacją czasową, 539
- wiązka baz ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną, 540
- wiązka baz ortonormalnych z orientacją przestrzenną, 539
- wiązka dualna, 523
- wiązka dwoista, 523
- wiązka homomorfizmów, 522
- wiązka reperów, 453
- wiązka reperów ortonormalnych, 536
- wiązka reperów ortonormalnych z orientacją, 539
- wiązka reperów ortonormalnych z orientacją czasową, 539
- wiązka reperów ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną, 540
- wiązka reperów ortonormalnych z orientacją przestrzenną, 539
- wiązka wyznacznikowa, 524

- zespólona, 446
- wertykalna, 453
- wielomian
 - pierścień wielomianów, 26
- współrzędne
 - na module nad pierścieniem, 48
- wstęga Möbiusa, 438
- wykres odwzorowania, 264
- wymiar
 - przestrzeni wektorowej (K -liniowy), 53
 - reprezentacji (algebry), 335
 - rozmaitości różniczkowalnej (klasy C^k), 222
- wyznacznik
 - endomorfizmu, 49
 - macierzowy, 49
 - na module nad pierścieniem, 49
 - cofnięcie wzdłuż endomorfizmu, 50
 - unormowany, 87
 - wiązka wyznacznikowa wiązki wektorowej, 524
- wzór
 - Cauchy'ego, 50
- zagadnienie początkowe, 207
 - autonomiczne, 208, 215
 - dziedzina całkowalności, 211
 - funkcjonał Picarda, 208
 - nieautonomiczne, 214
 - parametryczne, 215
 - potok, 212
- zanurzenie, 259
 - topologiczne, 159
- zbiór
 - C^k -ściągalny, 225
 - 1-spójny, 167
 - domknięcie, 158
 - domknięty, 158
 - generujący, 46
 - jednospójny, 167
 - otwarty, 158
 - prezwarty, 162
 - spójny, 166
 - względnie domknięty, 159
 - względnie otwarty, 159
 - z działaniem grupy
 - lewostronnym, 33
 - prawostronnym, 34
 - zwarty, 162