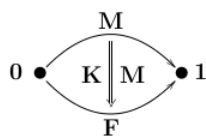


# Elementy Algebry i Geometrii Wyższej w Fizyce ;)

Rafał R. Suszek

KATEDRA METOD MATEMATYCZNYCH FIZYKI



WYDZIAŁ FIZYKI

UNIwersytet Warszawski

Warszawa, 23 lutego 2017 r.

STRESZCZENIE. Niniejszy skrypt stanowi zapis trójsemestralnego wykładu monograficznego algebry i geometrii wyższej przeznaczony dla wszystkich zainteresowanych z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i spoza niego, wygłoszonego w latach akademickich 2015/2016 oraz 2016/2017.

## Spis treści

Przedmowa	7
Podziękowania	10
<b>Część 1. Prolegomena: Rekwizytoria algebro-analityczna</b>	<b>11</b>
Rozdział 1.1. Struktury algebraiczne i ich transport	13
1. Struktury algebraiczne proste	13
2. Struktury algebraiczne złożone	32
Rozdział 1.2. Uniwersalność i internalizacja	61
1. Produkt i koprodukt	69
2. Iloczyn tensorowy	94
3. Produkt włóknisty i koprodukt kowłóknisty	126
Rozdział 1.3. Ciągi dokładne	156
Rozdział 1.4. Rudymenty topologii i geometrii różniczkowej	163
1. Niezbędnik topologiczny	163
2. Fundamentalne struktury i twierdzenia analizy	173
3. Geometria różniczkowa – algebra liniowa jako model lokalny	227
Rozdział 1.5. Grupy topologiczne – struktura i działanie	278
Rozdział 1.6. Grupoidy topologiczne i obiekty symplecjalne	316
1. Grupoidy i ich działanie	316
2. Obiekty symplecjalne i nerwy kategorii	320
<b>Część 2. Algebry – struktury ogólne</b>	<b>322</b>
Rozdział 2.1. Algebry	323
1. Aksjomatyka i podstawowe konstrukcje	323
2. Algebra tensorowa modułu	339
3. Algebry z gradacją	342
4. Algebry różniczkowe	346
5. Algebry Frobeniusa	346
6. Algebry Liego	346
7. Algebroidy	346
8. Superalgebry Liego	346
Rozdział 2.2. Elementy teorii reprezentacji algebr	347
1. Pojęcia podstawowe	347

2. Reprezentacje algebr prostych	351
<b>Część 3. Algebry Clifforda i spinory</b>	<b>360</b>
Rozdział 3.1. Ogólne struktury	361
1. Motywacja	361
2. Konstrukcja uniwersalna i funktor Cliff	362
3. Algebra zewnętrzna jako algebra Clifforda	377
4. Podstawowe własności strukturalne	380
Rozdział 3.2. Klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda	405
1. Rzeczywiste algebry Clifforda w skończonym wymiarze	405
2. Zespolone algebry Clifforda w skończonym wymiarze	413
Rozdział 3.3. Teoria reprezentacji algebr Clifforda	419
1. Ogólne własności modułów Clifforda	419
2. Reprezentacje rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda	422
Rozdział 3.4. Spinory	428
1. Cliffordowskie realizacje izometrii	428
2. Reprezentacje spinorowe	438
3. Spinory czyste i flagi zerowe – studium przypadków	441
<b>Część 4. Wiązki włókniste z powiązaniem</b>	<b>447</b>
Rozdział 4.1. Wprowadzenie do teorii wiązek włóknistych	449
1. Struktury ogólne	449
2. Wiązki wektorowe	462
3. Wiązki główne z grupą strukturalną	471
4. Wiązki stowarzyszone	482
5. Wiązka styczna wiązki włóknistej	508
6. Wiązki główne z grupoidem strukturalnym, grupoidalne i modułowe	509
Rozdział 4.2. Elementy teorii powiązania w wiązce włóknistej	536
1. Powiązanie – poczwórna ścieżka	537
2. Uzgadnianie powiązania ze strukturą na włóknie	548
3. Indukcja powiązania wzdłuż odwzorowania gładkiego	584
4. Powiązanie Crittendena na wiązce stowarzyszonej	584
Rozdział 4.3. Naturalne konstrukcje	590
1. Geometryzacja konstrukcji liniowych	590
2. Redukcja wiązki głównej	596
3. Prolongacja wiązki głównej	598
Rozdział 4.4. Dodatkowa struktura na wiązce włóknistej	607
1. Struktura metryczna	607
2. Orientacja na wiązce wektorowej	611
Rozdział 4.5. Wiązka zewnętrzna rozmaitości w obecności metryki i orientacji	619
1. Gęstości	619
2. Izomorfizmy muzyczne	619

3. Operator Hodge'a	619
4. Całkowanie na rozmaitości i twierdzenie Stokes'a	619
5. Uogólniony lemat Poincaré'go	620
Rozdział 4.6. Geometryczne różniczkowanie pól tensorowych	621
<b>Część 5. Wiązki Clifforda i spinorowe</b>	<b>623</b>
Rozdział 5.1. Struktura Spin na wiązce wektorowej	625
Rozdział 5.2. Geometryzacja algebr i modułów Clifforda	626
Rozdział 5.3. Powiązanie spinowe i operator Diraca	627
<b>Część 6. Wiązki włókniste w teorii pola</b>	<b>628</b>
1. Teoria pola z ładunkiem topologicznym – studium przypadku	630
Rozdział 6.1. Uniwersalna zasada cechowania symetrii globalnych	652
1. Algebra i geometria różniczkowa cechowania – struktury ogólne	652
2. Cechowanie poza schematem minimalnym – studium przypadku cd.	663
Rozdział 6.2. Efekt ABEHGHK[...] albo redukcja grupy cechowania	667
<b>Część 7. Zastosowania algebry homologicznej</b>	<b>668</b>
Rozdział 7.1. Kohomologia snopowa i kohomologia de Rhama	669
Rozdział 7.2. Homologia singularna	670
Rozdział 7.3. Kohomologie Čecha i Beilinsona–Deligne'a	671
Rozdział 7.4. Kohomologia grupowa	672
Rozdział 7.5. Kohomologia (super)algebr Liego	673
Rozdział 7.6. Homologia Morse'a	674
<b>Część 8. Teoria kategorii – więcej niż semiotyka</b>	<b>675</b>
Rozdział 8.1. Język teorii kategorii – rekapitulacja	676
Rozdział 8.2. Kategorie z dodatkową strukturą	677
Rozdział 8.3. Topologiczna kwantowa teoria pola	678
Rozdział 8.4. Wyższe kategorie	679
Rozdział 8.5. Kategorifikacja	680
<b>Część 9. Epilegomena</b>	<b>681</b>
Rozdział 9.1. Co by tu jeszcze...	682
Dodatek A. W 8 stron od teorii grup do teorii kategorii	683

Dodatek B. Konwencje	691
Dodatek C. Tablice	694
Bibliografia	697
Indeks	699

# Przedmowa

Fundamentalną ideą porządkującą niniejszy wykład jest Zasada Lokalnej Trywializacji (ZLT), która otwiera możliwość metodycznego budowania opisu struktur topologicznych o dowolnym stopniu złożoności (w praktyce dyktowanym przez fizykę rozważanych zjawisk) – takich jak chociażby różności symplektyczne z działaniem grupy Liego obecne w kanonicznym opisie układów fizycznych z symetrią ciągłą, geometryzacje całkowitych klas kohomologii de Rhama przydatne w opisie układów z ładunkiem topologicznym, superrozności wykorzystywane w modelowaniu układów z supersymetrią, przestrzenie orbit, orbifolde oraz  $T$ -foldy pojawiające się w modelach układów z symetrią wycechowaną i in. – na gruncie zrozumienia struktur prostszych modelujących te bardziej złożone *lokalnie*, tj. na otoczeniach otwartych (punktów) pokrywających przestrzeń modelowaną. Prosty rekurencyjny schemat logiczny stanowiący treść ZLT precyzuje następująca

DEFINICJA 1. Niechaj  $\text{Top}$  będzie kategorią<sup>1</sup> przestrzeni topologicznych, tj. klasą zbiorów z wyróżnioną topologią wraz z odwzorowaniami ciągłymi pomiędzy tymi zbiorami (w odnośnych topologiach) jako morfizmami<sup>2</sup>, i niech  $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1 \subseteq \text{Top}$  będą dwiema dowolnymi podkategoriami kategorii  $\text{Top}$ , przy czym podkategorię  $\mathcal{C}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  tworzą przestrzenie topologiczne z pewną dodatkową strukturą<sup>3</sup> wraz z odnośnymi morfizmami kategorii  $\text{Top}$ , czyli odwzorowaniami ciągłymi, transportującymi (albo inaczej zachowującymi) ową strukturę. Wówczas obiektami w **kategorii przestrzeni typu  $\mathcal{C}_1$  lokalnie modelowanych na  $\mathcal{C}_2$**  są czwórki  $((X, \mathcal{T}(X)), \mathcal{O}, \mathcal{Y}, \varphi)$  złożone z

- przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  z kategorii  $\mathcal{C}_1$ ;
- otwartego pokrycia  $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(X)$ , zwanego **pokryciem trywializującym**;
- rodziny  $\mathcal{Y} := \{Y_i\}_{i \in I}$  przestrzeni z kategorii  $\mathcal{C}_2$ ;
- rodziny izomorfizmów  $\varphi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow Y_i$  w kategorii  $\mathcal{C}_1$  o złożeniach  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j) \rightarrow \varphi_j(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$  będących izomorfizmami w kategorii  $\mathcal{C}_2$ , określonych dla dowolnych par indeksów  $(i, j)$  ze zbioru

$$\langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}} := \{ (i, j) \in I^{\times 2} \mid \mathcal{O}_{ij} \equiv \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset \}.$$

---

<sup>1</sup>Elementarne wprowadzenie do (języka) teorii kategorii, pozwalającego w pierwszym rzędzie na systematyzację i uzwięzlenie opisu interesujących nas struktur matematycznych, a w dalszej kolejności – także na poszerzenie i pogłębienie zrozumienia strukturalnych relacji między różnymi napotykanymi przez nas bytami formalnymi i fizykalnymi, zawarliśmy we wprowadzeniu do Rozdz. 1.2.

<sup>2</sup>Patrz: Rozdz. 1.

<sup>3</sup>Np. strukturą liniową, co prowadzi do podkategorii topologicznych przestrzeni wektorowych z (liniowymi) odwzorowaniami ciągłymi jako morfizmami.

Niechaj  $((X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha)), \mathcal{O}_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha, \varphi_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema przestrzeniami typu  $\mathcal{C}_1$  lokalnie modelowanymi na  $\mathcal{C}_2$  i niech  $f : X_1 \rightarrow X_2$  będzie morfizmem z kategorii  $\mathcal{C}_1$  między nimi, przy czym w odniesieniu do obu pokryć  $\mathcal{O}_\alpha = \{\mathcal{O}_{\alpha i_\alpha}\}_{i_\alpha \in I_\alpha} \subset \mathcal{T}(X_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  czynimy to założenie, że istnieje odwzorowanie  $\phi : I_1 \rightarrow I_2$  pokrywające  $f$  w sensie relacji

$$f(\mathcal{O}_{1i}) \subset \mathcal{O}_{2\phi(i)}, \quad i \in I_1,$$

co nie stanowi ograniczenia ogólności naszych rozważań<sup>4</sup>. Morfizm  $f$  należy do klasy morfizmów kategorii przestrzeni typu  $\mathcal{C}_1$  lokalnie modelowanych na  $\mathcal{C}_2$ , ilekroć złożenia

$$f_i := \varphi_{2\phi(i)} \circ f \circ \varphi_{1i}^{-1} : Y_{1i} \rightarrow Y_{2\phi(i)},$$

zwane **lokalnymi prezentacjami** odwzorowania  $f$  względem obu lokalnych trywializacji, są morfizmami w kategorii  $\mathcal{C}_2$ . ▲

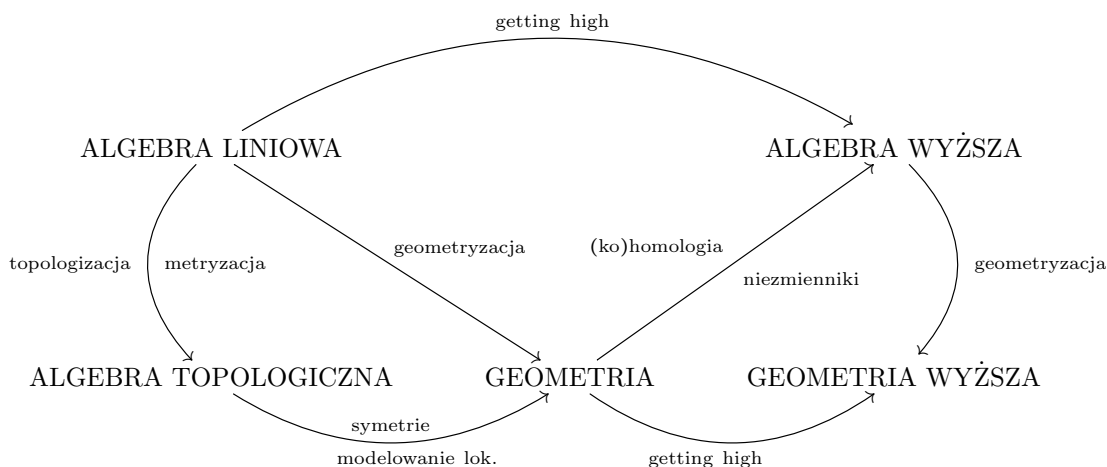
W konkretnych sytuacjach najczęściej  $\mathcal{Y}$  stanowi pewien podzbiór topologii ustalonej globalnie przestrzeni topologicznej (np. indeksowaną przez  $I$  rodzinę zbiorów otwartych w  $\mathbb{R}^{x^n}$ , homeomorficznych z odnośnymi elementami pokrycia  $X$ ), będącej w istocie lokalnym modelem dla  $X$ , o którym mowa w powyższej definicji. Studia nad symetriami pewnych szczególnych (geometrycznych w swej istocie) teorii pola, zw. modelami sigma, prowadzą jednak do bardziej ogólnych struktur, zasadniczo wychodzących poza paradygmat geometrii riemannowskiej, co usprawiedliwia przyjęty przez nas poziom ogólności.

W najniższych rzędach nakreślonej powyżej rekurencji dodatkowa struktura na (modelujących) przestrzeniach topologicznych, o której wspomina Def. 1, jest natury algebraicznej wzgl. korzysta z takowej struktury w bezpośredniej konstrukcji rachunku różniczkowego, oto więc algebra topologiczna staje się wyjściowym źródłem lokalnych modeli przestrzeni topologicznych, które będziemy rozpatrywać w niniejszym kursie, a skonstruowane przy ich użyciu – według schematu nakreślonego w Def. 1 – struktury topologiczne wyższego rzędu możemy często postrzegać jako geometryzacje elementarnych struktur algebraicznych, czyli – mówiąc w sposób z konieczności mało precyzyjny, lecz intuicyjnie zrozumiały – rodziny takich struktur algebraicznych indeksowane przez punkty przestrzeni topologicznej i zależące gładko od punktu (w sensie wymagającym każdorazowo doprecyzowania). Ta konstatacja usprawiedliwia szczegółowy przegląd pojęć i konstrukcji algebry liniowej w Rozdz. 1, poszerzony o istotne konstrukcje z Rozdz. 1.2 i 1.3 leżące poza zakresem merytorycznym standardowego jej kursu. Niezbędnej topologizacji tak określonej bazy algebraicznej naszych rozważań dokonujemy – na gruncie aksjomatyki przypomnianej, wraz z jej elementarnymi konsekwencjami, w Rozdz. 1 – w Rozdz. 2, który daje nam ostatecznie do ręki podstawowy konstrukt algebry topologicznej, odgrywający kluczową rolę w analizie funkcjonalnej (tj. różniczkowej) na przestrzeniach topologicznych ze strukturą, czyli kategorię przestrzeni Banacha. Wreszcie Rozdz. 3

<sup>4</sup>Warunek ten można zawsze spełnić, wychodząc od dowolnej pary pokryć otwartych  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ . Wystarczy dokonać rozdrobnienia  $\mathcal{O}_1$  względem  $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$  (z racji ciągłości  $f$  ta ostatnia rodzina także jest pokryciem otwartym  $M_1$ ), tj. zastąpić  $\mathcal{O}_1$  pokryciem  $\mathcal{O}_1^{(f)} := \{\mathcal{O}_{i_1}^1 \cap f^{-1}(\mathcal{O}_{i_2}^2)\}_{(i_1, i_2) \in I_1^{(f)}}$  o indeksach z podzbioru  $I_1^{(f)} := \{(i_1, i_2) \in I_1 \times I_2 \mid \mathcal{O}_{i_1}^1 \cap f^{-1}(\mathcal{O}_{i_2}^2) \neq \emptyset\}$ . Na tak zdefiniowanym nowym zbiorze indeksującym możemy już określić pożądane odwzorowanie  $\phi : I_1^{(f)} \rightarrow I_2 : (i_1, i_2) \mapsto i_2$ .



przynosi pierwsze przykłady zastosowania ZLT, znane z elementarnych kursów geometrii różniczkowej: rozmaitość różniczkowalną, wiązkę styczną i kostyczną, pole wektorowe narozmaitości i jego potok *etc.* W Rozdz. 1.5 rekapitułujemy geometryzację algebraicznego pojęcia grupy i zbioru z działaniem grupy, przygotowując tym samym grunt pod konstrukcje obiektów bardziej złożonych, takich jak wiązki główne i stowarzyszone, przestrzenie symplektyczne z działaniem hamiltonowskim, struktury ekwiwariantne i in., o fundamentalnym znaczeniu fizykalnym. W dalszej części kursu realizowany jest analogiczny schemat – po wprowadzeniu i gruntownym zbadaniu stosownych struktur algebraicznych przechodzimy do lokalnie na nich modelowanych (w sposób opisany powyżej) przestrzeni topologicznych. Z naszych rozważań wylania się ostatecznie schemat pojęciowy i logiczny kursu, który przedstawiamy poniżej w formie diagramu (częściowo przemiennego):



Na zakończenie dodajmy, że na poziomie meta-matematycznym i meta-fizycznym idea wykładu spisane w niniejszym skrypcie (prawie) mieści się w równaniu:

$$\text{Abstract sense} = \text{Abstract nonsense} \triangleright \text{Common sense},$$

przy czym szczerą intencją Autora jest unikanie nonsensownych komunałów, co prowadzi nas do równania poprawionego:

$$\text{Abstract sense} = \text{Abstract } \cancel{\text{nonsense}} \triangleright \cancel{\text{Common}} \text{ sense},$$

pachnącego tautologią i kurkumą. Reszta nie mieści się w głowie.

Rafał R. Suszek  
Warszawa, sierpień 2016

## Podziękowania

Autor wyraża serdeczną wdzięczność tym wszystkim<sup>5</sup>, bez których powstanie niniejszego skryptu nie byłoby ani potrzebne, ani możliwe, ani satysfakcjonujące. I wszystkim innym – za mądrą powściągliwość w radach.

---

<sup>5</sup>Potrzebne wstawić.

Część 1

Prolegomena:  
Rekwizytornia algebro-analityczna

Qui Bono?

## Struktury algebraiczne i ich transport

### 1. Struktury algebraiczne proste

W schemacie logicznym organizującym nasz dyskurs elementarnym substratem używanym w konstrukcji struktur topologicznych o znaczeniu fizykalnym jest struktura algebraiczna, poddawana następnie geometryzacji, czyli w pierwszym rzędzie – topologizacji, która pozwala uczynić z niej lokalny model konstruowanej przestrzeni topologicznej. Zrealizowanie tak nakreślonego programu w odniesieniu do najprostszych nawet struktur algebraicznych wymaga przywołania i zaadaptowania do naszych celów podstawowych pojęć i stwierdzeń algebry, czemu poświęcamy pierwszą część kursu. Naszą algebraiczną awanturę rozpoczynamy zatem od ustalenia uniwersalnego języka, którego będziemy konsekwentnie używać do opisu konstrukcji i formułowania stwierdzeń w dalszej jego części.

DEFINICJA 2. Niechaj  $S$  będzie zbiorem i wprowadźmy oznaczenie

$$S^{\times n} := \prod_{i=1}^n S.$$

Dla dowolnej liczby  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  **operacja  $n$ -argumentowa** na  $S$  to odwzorowanie

$$\phi_n : S^{\times n} \longrightarrow S.$$

Pojęcie to rozszerzamy na przypadek  $n = 0$  przyjmując konwencję  $S^{\times 0} := \{\bullet\}$  (zbiór jednoelementowy, czyli singleton) i określając **operację 0-argumentową**

$$\phi_0 : S^{\times 0} \longrightarrow S,$$

którą w dalszej części wykładu będziemy najczęściej utożsamiać z obrazem elementu  $\bullet$  w  $S$  względem  $\phi_0$ ,

$$\phi_0(\bullet) \equiv e_0 \in S,$$

zwanym **stałą**. ▲

Powyższa definicja pozwala wprowadzić pojęcie centralne dla całej naszej dalszej dyskusji.

DEFINICJA 3. W zapisie Def. 2 **struktura algebraiczna prosta o nośniku**  $S$  to kolekcja

$$\mathcal{S} := (S, \phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \dots, \phi_{k_N})$$

złożona ze zbioru  $S$  oraz – dla pewnych ustalonych liczb naturalnych  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_N \geq 0$ ,  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  – z operacji  $k_i$ -argumentowych  $\phi_{k_i}$ ,  $i \in \overline{1, N}$ . Własności

operacji współdefiniujących strukturę oraz ich wzajemne relacje są określane przez aksjomatykę struktury<sup>1</sup>.

**Podstruktura algebraiczna (prosta)** na podzbiorze  $P \subset S$  to analogiczna do poprzedniej kolekcja

$$(P, \phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \dots, \phi_{k_N})$$

spełniająca **warunki domkniętości**

$$\forall_{i \in \overline{1, N}} : \phi_{k_i}(P^{\times k_i}) \subset P.$$

**Homomorfizm struktury algebraicznej prostej**  $(S_1, \phi_{k_1}^{(1)}, \phi_{k_2}^{(1)}, \dots, \phi_{k_N}^{(1)})$  w strukturę algebraiczną (tego samego typu)  $(S_2, \phi_{k_1}^{(2)}, \phi_{k_2}^{(2)}, \dots, \phi_{k_N}^{(2)})$  to odwzorowanie pomiędzy ich nośnikami,

$$\chi : S_1 \longrightarrow S_2,$$

zgodne z obecną na nich strukturą algebraiczną w sensie wyrażanym przez rodzinę diagramów przemiennych:

$$\forall_{i \in \overline{1, N}} : \begin{array}{ccc} S_1^{\times k_i} & \xrightarrow{\phi_{k_i}^{(1)}} & S_1 \\ \downarrow \times_{i=1}^{k_i} \chi & & \downarrow \chi \\ S_2^{\times k_i} & \xrightarrow{\phi_{k_i}^{(2)}} & S_2 \end{array} .$$

Wyróżniamy następujące typy homomorfizmów:

- **monomorfizmy**, czyli homomorfizmy iniektywne<sup>2</sup>  $S_1 \rightarrow S_2$ ;
- **epimorfizmy**, czyli homomorfizmy suriektywne  $S_1 \rightarrow S_2$ ;
- **izomorfizmy**, czyli homomorfizmy bijektywne,  $S_1 \xrightarrow{\cong} S_2$ ;
- **endomorfizmy**, czyli homomorfizmy wewnętrzne  $S_2 \equiv S_1 \circlearrowleft$ ;
- **automorfizmy**, czyli bijektywne homomorfizmy wewnętrzne.

▲

O ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy czasem używać nazwy konkretnej struktury algebraicznej w odniesieniu do zbioru będącego jej nośnikiem.

Jedną z najprostszych struktur algebraicznych, jakie napotkamy w dalszej części kursu, jest

**DEFINICJA 4. Monoid** to trójka  $(S, \phi_2, \phi_0)$ , w której

- $S$  jest zbiorem;
- $\phi_2 : S^{\times 2} \longrightarrow S$  jest operacją 2-argumentową;

<sup>1</sup>Mowa tu o takich własnościach operacji jak łączność, przemienność, neutralność stałej, rozdzielność jednej operacji względem drugiej *etc.*

<sup>2</sup>Należy w tym miejscu zaznaczyć, że w teorii kategorii, a w szczególności – w rozważaniach wychodzących poza kontekst kategorii konkretnych, pojawia się naturalne uogólnienie stosowanego tu pojęcia epimorfizmu struktur algebraicznych, które obejmuje morfizmy o własności prawostronnego skracania. Mimo wszelkie usiłowania S. Mac Lane'a (który nadał mu odrębne miano „morfizmu epi”) owo szersze pojęcie wpisuje się w tę samą denotację. Analogiczna uwaga dotyczy monomorfizmów kategoryalnych, czyli morfizmów o własności lewostronnego skracania, dla których nie przyjęła się zaproponowana przez S. Mac Lane'a nazwa „morfizmy mono”.

- $\phi_0 : \{\bullet\} \longrightarrow S : \bullet \longmapsto e$  jest operacją 0-argumentową o wartości zwanej **elementem neutralnym**.

Elementy struktury spełniają następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(M1) (łączność operacji binarnej)

$$\begin{array}{ccc}
 S \times S \times S & \xrightarrow{\phi_2 \times \text{id}_S} & S \times S \\
 \text{id}_S \times \phi_2 \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 S \times S & \xrightarrow{\phi_2} & S
 \end{array} \equiv \forall_{a,b,c \in S} : \phi_2(\phi_2(a,b),c) = \phi_2(a,\phi_2(b,c));$$

(M2) (neutralność stałej  $e$  względem działania grupowego)

$$\begin{array}{ccc}
 S \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_S \times \phi_0} & S \times S \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \phi_2 \\
 & & S
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{ccc}
 \{\bullet\} \times S & \xrightarrow{\phi_0 \times \text{id}_S} & S \times S \\
 & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & S
 \end{array}$$

$$\equiv \forall_{a \in S} : \phi_2(a,e) = a = \phi_2(e,a).$$

**Monoid przeciwny** do  $(S, \phi_2, \phi_0)$  to monoid  $(S, \phi_2^{\text{opp}}, \phi_0)$  z operacją binarną daną wzorem

$$\phi_2^{\text{opp}} := \phi_2 \circ \tau_S,$$

patrz: Konw. 2.

**Monoid przemienny** to taki, w którym operacja binarna jest przemienna, co wyraża diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym)

$$\begin{array}{ccc}
 S \times S & \xrightarrow{\tau_S} & S \times S \\
 & \searrow \phi_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & S
 \end{array} \equiv \forall_{a,b \in S} : \phi_2(a,b) = \phi_2(b,a),$$

a zatem taki, który jest kanonicznie izomorficzny z monoidem do niego przeciwnym,

$$(S, \phi_2, \phi_0) \stackrel{\text{id}_S}{\cong} (S, \phi_2^{\text{opp}}, \phi_0).$$

**Podmonoid** monoidu  $(S, \phi_2, \phi_0)$  to trójka  $(T, \phi_2 \upharpoonright_{T \times T}, \phi_0)$ , w której  $T$  jest podzbiorem  $S$  o następujących własnościach:

- (SM1)  $\phi_2 : T^{\times 2} \longrightarrow T \subset S$ ;
- (SM2)  $S \ni e$ .

Mówimy, że operacje monoidu ograniczone do  $T$  domykają się w  $T$ .

**Homomorfizm monoidu**  $(S_1, \phi_2^{(1)}, \phi_0^{(1)})$  w monoid  $(S_2, \phi_2^{(2)}, \phi_0^{(2)})$  to odwzorowanie

$$\chi : S_1 \longrightarrow S_2$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym):

$$\begin{array}{ccc}
 S_1 \times S_1 & \xrightarrow{\phi_2^{(1)}} & S_1 \\
 \chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\
 S_2 \times S_2 & \xrightarrow{\phi_2^{(2)}} & S_2
 \end{array} \equiv \forall_{a,b \in S_1} : \chi \circ \phi_2^{(1)}(a,b) = \phi_2^{(2)}(\chi(a), \chi(b)).$$

Element monoidu  $a \in S$  nazwiemy **lewostronnie upraszczalnym** (lub **lewostronnie regularnym**), jeśli spełnia warunek

$$\forall_{b,c \in S} : (\phi_2(a,b) = \phi_2(a,c) \implies b = c).$$

Analogicznie definiujemy **element prawostronnie upraszczalny** (lub **prawostronnie regularny**). Element, który jest zarazem lewostronnie i prawostronnie upraszczalny określamy mianem **elementu upraszczalnego** (lub **regularnego**). ▲

Zwracamy uwagę, że nierzadko narzucenie warunku zachowania niektórych tylko elementów rozważanej struktury algebraicznej pociąga za sobą zachowanie tejeż w całości. Przykładu dostarczają tutaj przywołane poniżej homomorfizmy grup.

Przed przejściem do dyskusji przykładów, warto wysłowić ogólną i oczywistą, acz ważną obserwację.

**STWIERDZENIE 1.** *Każdy monomorfizm jest izomorfizmem dziedziny na jej obraz względem tego monomorfizmu.* ■

*Dowód:* Oczywisty. □

Tytułem ilustracji powyższej abstrakcyjnej i ogólnej definicji przypomnimy teraz szczegółowe definicje podstawowych struktur algebraicznych o kluczowym znaczeniu dla teorii grup i algebry liniowej oraz ich morfizmów.

**DEFINICJA 5.** **Grupa** to czwórka  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ , w której

- $G$  jest zbiorem;
- $\phi_2 : G \times G \rightarrow G$  jest operacją 2-argumentową zwaną **działaniem grupowym**;
- $\phi_1 : G \rightarrow G$  jest operacją 1-argumentową;
- $\phi_0 : \{\bullet\} \rightarrow G : \bullet \mapsto e$  jest operacją 0-argumentową o wartości zwanej **elementem neutralnym**.

Elementy struktury spełniają następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemiennie i równoważne zdania logiczne):

(G1) (łączność działania grupowego)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times G & \xrightarrow{\phi_2 \times \text{id}_G} & G \times G \\
 \text{id}_G \times \phi_2 \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 G \times G & \xrightarrow{\phi_2} & G
 \end{array} \equiv \forall_{g,h,k \in G} : \phi_2(\phi_2(g,h),k) = \phi_2(g,\phi_2(h,k));$$



(G2) (neutralność stałej  $e$  względem działania grupowego)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_G \times \phi_0} & G \times G \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \phi_2 \\
 & & G
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{ccc}
 \{\bullet\} \times G & \xrightarrow{\phi_0 \times \text{id}_G} & G \times G \\
 & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & G
 \end{array}$$

$$\equiv \forall_{g \in G} : \phi_2(g, e) = g = \phi_2(e, g);$$

(G3) (fundamentalna własność  $\phi_1$ )

$$\begin{array}{ccc}
 G \times \{\bullet\} & \xrightarrow{(\text{id}_G, \phi_1) \circ \text{pr}_1} & G \times G \\
 & \searrow \phi_0 \circ \text{pr}_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & G
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{ccc}
 G \times \{\bullet\} & \xrightarrow{(\phi_1, \text{id}_G) \circ \text{pr}_1} & G \times G \\
 & \searrow \phi_0 \circ \text{pr}_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & G
 \end{array}$$

$$\equiv \forall_{g \in G} : \phi_2(g, \phi_1(g)) = e = \phi_2(\phi_1(g), g).$$

**Grupa przeciwna** do  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  to grupa  $(G, \phi_2^{\text{opp}}, \phi_1, \phi_0)$  z działaniem danym wzorem

$$\phi_2^{\text{opp}} := \phi_2 \circ \tau_G,$$

patrz: Konw. 2.

**Grupa przemienna** (zwana też **abelową**) to taka, w której działanie grupowe jest przemiennie, co wyraża diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{\tau_G} & G \times G \\
 & \searrow \phi_2 & \downarrow \phi_2 \\
 & & G
 \end{array}
 \equiv \forall_{g, h \in G} : \phi_2(g, h) = \phi_2(h, g),$$

a zatem taka, która jest kanonicznie izomorficzna z grupą do niej przeciwną,

$$(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0) \stackrel{\text{id}_G}{\cong} (G, \phi_2^{\text{opp}}, \phi_1, \phi_0).$$

**Podgrupa** grupy  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  to czwórka  $(H, \phi_2 \upharpoonright_{H \times H}, \phi_1 \upharpoonright_H, \phi_0)$ , w której  $H$  jest podzbiorem  $G$  o następujących własnościach:

(SG1)  $\phi_2 : H \times H \rightarrow H \subset G;$

(SG2)  $\phi_1 : H \rightarrow H \subset G.$

Mówimy, że operacje grupowe ograniczone do  $H$  domykają się w  $H$ .

**Dzielnik normalny** (albo inaczej **podgrupa normalna**) grupy  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  to jej podgrupa (o nośniku)  $H \subset G$  o własności

$$\forall_{g \in G} : \phi_2(g, \phi_2(H, \phi_1(g))) = H.$$

**Homomorfizm grupy**  $(G_1, \phi_2^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_0^{(1)})$  **w grupę**  $(G_2, \phi_2^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \phi_0^{(2)})$  to odwzorowanie

$$\chi : G_1 \rightarrow G_2$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym):

$$(GH) \quad \begin{array}{ccc} G_1 \times G_1 & \xrightarrow{\phi_2^{(1)}} & G_1 \\ \chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ G_2 \times G_2 & \xrightarrow{\phi_2^{(2)}} & G_2 \end{array} \equiv \forall_{g,h \in G_1} : \chi \circ \phi_2^{(1)}(g,h) = \phi_2^{(2)}(\chi(g), \chi(h)).$$

▲

NOTACJA 1. Dwa najbardziej rozpowszechnione zapisy dla grup to

- zapis mnożeniowy  $(\phi_2, \phi_1, e) \equiv (\cdot \equiv M, \text{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \mathbf{1}) = (\text{mnożenie, odwrotność, jedynka})$ , w którym wprowadzamy pojęcie **potęgi**

$$\forall_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \forall_{g \in G} : g^n := \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{n \text{ razy}} \quad \wedge \quad g^{-n} := \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{n \text{ razy}}, \quad \forall_{g \in G} : g^0 := e,$$

o oczywistych własnościach:

$$\forall_{m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \forall_{g \in G} : g^m \cdot g^n = g^{m+n} \quad \wedge \quad \text{Inv}(g^n) = g^{-n}.$$

- zapis addytywny  $(\phi_2, \phi_1, e) \equiv (+ \equiv A, P \equiv -(\cdot), \mathbf{0}) = (\text{przeciwność, dodawanie, zero})$ , w którym wprowadzamy pojęcie **krotności**

$$\forall_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \forall_{g \in G} : ng := \underbrace{g + g + \dots + g}_{n \text{ razy}} \quad \wedge \quad -ng := \underbrace{(-g) + (-g) + \dots + (-g)}_{n \text{ razy}},$$

$$(1.1.1) \quad \forall_{g \in G} : 0g := \mathbf{0},$$

o oczywistych własnościach:

$$\forall_{m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \forall_{g \in G} : mg + ng = (m+n)g \quad \wedge \quad P(ng) = -ng.$$

Ten ostatni najczęściej stosuje się w odniesieniu do grup przemiennych. Poniżej będziemy (niemal) konsekwentnie używać zapisu mnożeniowego.

\* \* \*

Nader istotnym obiektem, wykorzystywanym w podstawowych konstrukcjach algebraicznych, jest

DEFINICJA 6. W notacji Def. 5 **warstwa lewostronna względem podgrupy  $H$  w grupie  $G$**  to zbiór

$$gH := \{ g \cdot h \mid h \in H \}$$

dla pewnego  $g \in G$ . Analogicznie definiujemy **warstwę prawostronną względem podgrupy  $H$  w grupie  $G$** ,

$$Hg := \{ h \cdot g \mid h \in H \}.$$

▲

Mamy tu także przydatną

DEFINICJA 7. Niechaj  $(G, \phi_2 \equiv \cdot, \phi_1, \phi_0)$  będzie grupą w rozumieniu Def. 5 i niech  $S \subset G$  będzie podzbiorem jej nośnika o własności

$$\forall_{g \in G} \exists \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ x_1, x_2, \dots, x_n \in S \\ k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \end{array} : g = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} .$$

Wówczas  $S$  nazywamy **zbiorem generatorów** grupy  $G$ , o samej zaś grupie mówimy, że **jest generowana** przez zbiór  $S$ , co zapisujemy jako

$$G = \langle S \rangle .$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 1. (Struktury)

- (1) **Grupa trywialna:**  $(\{e\}, (e, e) \mapsto e, e \mapsto e, \{\bullet\} \mapsto e)$ .
- (2) Czwórka  $(\mathfrak{S}_X, \circ, (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto \text{id}_X)$  złożona ze zbioru  $\mathfrak{S}_X$  permutacji elementów pewnego zbioru  $X$  (tj. bijektywnych odwzorowań  $\sigma : X \curvearrowright$ ), (nieprzemiennej) operacji 2-argumentowej  $\circ$  będącej złożeniem (czyli superpozycją) odwzorowań, operacji 1-argumentowej  $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$  brania odwrotności odwzorowania i operacji 0-argumentowej  $\bullet \mapsto \text{id}_X$ , której obrazem jest odwzorowanie identycznościowe. Opisana grupa nosi miano **grupy symetrycznej na  $X$** . W przypadku zbioru  $X = \overline{1, n}$  stosuje się oznaczenie  $\mathfrak{S}_X \equiv \mathfrak{S}_n$ . Grupa symetryczna na zbiorze  $X$  jest generowana przez zbiór wszystkich **transpozycji**, tj. permutacji postaci

$$\tau_{x_0, y_0} : X \curvearrowright : x \mapsto \begin{cases} x, & \text{gdy } x \notin \{x_0, y_0\} \\ y_0, & \text{gdy } x = x_0 \\ x_0, & \text{gdy } x = y_0 \end{cases} .$$

W świetle Twierdzenia Cayleya grupa symetryczna jest strukturą podstawową w teorii grup.

- (3) Czwórka  $(\mathcal{Z}(G), \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  będąca podgrupą (dowolnej) grupy  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  o nośniku

$$\mathcal{Z}(G) := \{ z \in G \mid \forall_{g \in G} : \phi_2(z, g) = \phi_2(g, z) \}$$

zwanym **centrum grupy  $G$** .

- (4) Dla dowolnej grupy przemiennej  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  i dowolnego zbioru niepustego  $S$  określamy grupę przemienną  $(\mathbf{Map}(S, G), \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_0)$ , której nośnikiem jest zbiór odwzorowań z  $S$  w  $G$  z działaniem 2-argumentowym  $\tilde{\phi}_2$  indukowanym przez  $\phi_2$  wedle formuły:

$$\tilde{\phi}_2(f_1, f_2) : S \longrightarrow G : s \mapsto \phi_2(f_1(s), f_2(s)) ,$$

zapisanej dla dowolnych  $f_1, f_2 \in \mathbf{Map}(S, G)$ , z działaniem 1-argumentowym  $\tilde{\phi}_1$  indukowanym przez  $\phi_1$  wedle formuły:

$$\tilde{\phi}_1(f) : S \longrightarrow G : s \mapsto \phi_1(f(s)) ,$$

zapisanej dla dowolnego  $f \in \mathbf{Map}(S, G)$ , oraz z działaniem 0-argumentowym  $\tilde{\phi}_0$  indukowanym przez  $\phi_0$  wedle formuły:

$$\tilde{\phi}_0(\bullet) : S \longrightarrow G : s \mapsto \phi_0(\bullet) .$$

(5) Czwórka

$$(\text{Aut}(G), \circ, (\cdot)^{-1}, \{\bullet\}) \mapsto \text{id}_G,$$

w której  $\text{Aut}(G)$  jest zbiorem automorfizmów grupy  $G$ , jest grupą, określaną mianem **grupy automorfizmów**  $G$ . Odwzorowania postaci

$$\text{Ad}_h : G \curvearrowright : g \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1}, \quad h \in G,$$

są automorfizmami  $G$ , zwanymi **automorfizmami wewnętrznymi**. Tworzą one podgrupę normalną  $\text{Inn}(G) \subset \text{Aut}(G)$  określaną jako **grupa automorfizmów wewnętrznych**  $G$ . Każdy automorfizm z  $\text{Aut}(G) \setminus \text{Inn}(G)$  określamy mianem **automorfizmu zewnętrznego**.

(6) Niechaj  $\chi : G_1 \rightarrow G_2$  będzie homomorfizmem grup. **Jądro homomorfizmu**

$$\text{Ker } \chi := \{ g \in G_1 \mid \chi(g) = e^{(2)} \},$$

wraz z ograniczonymi doń operacjami  $G_1$  jest podgrupą normalną tejże grupy i każda podgrupa normalna jest jądrem pewnego homomorfizmu. Podobnie **obraz homomorfizmu**

$$\text{Im } \chi := \{ g \in G_2 \mid \exists_{h \in G_1} : g = \chi(h) \} \equiv \chi(G_1)$$

wraz z ograniczonymi doń operacjami  $G_2$  jest podgrupą tejże grupy.

(7) **Grupa ilorazowa** grupy  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  względem dzielnika normalnego  $H$  to grupa (patrz: [Sus13, Stw. 40])

$$(G/H, \odot, \text{Inv}_{G/H}, \{\bullet\}) \mapsto H$$

o nośniku

$$G/H := \{ gH \mid g \in G \}$$

i operacjach określonych, jak następuje (poniżej  $g, g_1, g_2 \in G$  są dowolne)

- mnożenie:  $g_1H \odot g_2H := g_1H \cdot g_2H$ ;
- odwrotność:  $\text{Inv}_{G/H}(gH) := g^{-1}H$ ;
- jedyńka:  $1_{G/H} := H$ .

(8) Przykładem grupy ilorazowej jest **grupa automorfizmów zewnętrznych** (zwana także – bardziej adekwatnie<sup>3</sup> – **grupą klas automorfizmów**)

$$\text{Out}(G) := \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G).$$

✓

PRZYKŁAD(Y) 2. (Homomorfizmy)

(1) Przykłady arytmetyczne (opuszczamy oczywiste elementy struktury):

<sup>3</sup>Należy zauważyć, że elementami  $\text{Out}(G)$  nie są automorfizmy zewnętrzne  $G$ , lecz ich warstwy w  $\text{Aut}(G)$ .

$(G_1, \phi_2^{(1)})$	$(G_2, \phi_2^{(2)})$	$\chi$	typ
$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$	$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$	$x \mapsto x^{\frac{p}{q}}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$	injektywny endomorfizm
$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$	$(\mathbb{R}, +)$	$x \mapsto \log x$	izomorfizm
$(\mathbb{R}, +)$	$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$	$x \mapsto e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}^\times$	izomorfizm
$(\mathbb{C}^\times, \cdot_{\mathbb{C}})$	$(\mathbb{C}^\times, \cdot_{\mathbb{C}})$	$z \mapsto \bar{z}$	automorfizm
$(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}})$	$(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}})$	$z \mapsto \bar{z}$	j/w
$(\mathbb{C}^\times, \cdot_{\mathbb{C}})$	$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$	$z \mapsto  z $	epimorfizm
$(\mathbb{R}, +)$	$(U(1), \cdot_{\mathbb{C}})$	$x \mapsto e^{i\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}^\times$	epimorfizm

- (2) Znak permutacji  $\text{sgn} : \mathfrak{S}_X \rightarrow \{-1, +1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  to jedyny homomorfizm grup spełniający tożsamość  $\text{sgn}(\tau_{x_0, y_0}) = -1$  dla dowolnej transpozycji  $\tau_{x_0, y_0} \in \mathfrak{S}_X$  (w zapisie Przykł. 1 (2)).
- (3) Każda podgrupa  $H \subset G$  zadaje kanoniczny monomorfizm  $j_H : H \rightarrow G$ , zwany **włożeniem kanonicznym** (lub **standardowym**), który utożsamia elementy  $H$  traktowanego jako niezależny zbiór z tymi samymi elementami  $H$  traktowanego jako podzbiór  $G$ .
- (4) Operacja 1-argumentowa  $\phi_1 : G \curvearrowright$  zadaje izomorfizm między grupą  $G$  a przeciwną do niej.
- (5) Odwzorowanie

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Inn}(G) : g \mapsto \text{Ad}_g$$

jest epimorfizmem grup.

- (6) Odwzorowanie

$$\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H : g \mapsto gH$$

określamy mianem **homomorfizmu kanonicznego grupy  $G$  w jej grupę ilorazową  $G/H$** . Bywa ono też nazywane **rzutem kanonicznym modulo  $H$** .

✓

Poniżej zbieramy elementarne wyniki strukturalne dotyczące homomorfizmów grup.

**TWIERDZENIE 1.1.1** (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie (dla grup)). *W notacji Def. 5 oraz Przykł. 1 (6) i (7)  $\text{Ker } \chi$  jest dzielnikiem normalnym  $G_1$ , a nadto istnieje kanoniczny izomorfizm grup*

$$G_1/\text{Ker } \chi \cong \text{Im } \chi.$$

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Tw. 5.1]. □

Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie pozwala nam dokonać kanonicznego rozkładu dowolnego homomorfizmu.

**TWIERDZENIE 1.1.2** (O uniwersalności rzutu kanonicznego). *W notacji Def. 5, Przykł. 1 (6) i (7) oraz Przykł. 2 (3) i (6) (dla  $H = \text{Ker } \chi$ ) istnieje dokładnie jeden monomorfizm indukowany*

$$\tilde{\chi} : G_1/\text{Ker } \chi \rightarrow G_2$$

o własności

$$(1.1.2) \quad \chi = \tilde{\chi} \circ \pi_{G_1/\text{Ker } \chi}.$$

Indukuje on – wedle Tw. 1.1.1 – izomorfizm

$$\lambda_\chi : G_1/\text{Ker } \chi \xrightarrow{\cong} \text{Im } \chi,$$

co pozwala rozłożyć  $\chi$  w postaci

$$\chi = \mathcal{J}_{\text{Im } \chi} \circ \lambda_\chi \circ \pi_{G_1/\text{Ker } \chi},$$

gdzie  $\mathcal{J}_{\text{Im } \chi} : \text{Im } \chi \hookrightarrow G_2$  jest standardowym włożeniem. ■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Tw. 5.2]. □

W następnej kolejności rozważymy

**DEFINICJA 8. Pierścień** to szóstka  $(R, A, M, P, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ , w której

- $R$  jest zbiorem;
- $A : R^{\times 2} \rightarrow R : (x, y) \mapsto A(x, y) \equiv x +_R y$  jest operacją 2-argumentową zwaną  **dodawaniem**;
- $M : R^{\times 2} \rightarrow R : (x, y) \mapsto M(x, y) \equiv x \cdot_R y$  jest operacją 2-argumentową zwaną  **mnożeniem**;
- $P : R \rightarrow R : x \mapsto P(x) \equiv -x$  jest operacją 1-argumentową zwaną  **braniem przeciwności**;
- $\mathbf{0} : \{\bullet\} \rightarrow R : \bullet \mapsto 0$  jest operacją 0-argumentową zwaną  **zerem**;
- $\mathbf{1} : \{\bullet\} \rightarrow R : \bullet \mapsto 1$  jest operacją 0-argumentową zwaną  **jedyneką**,

przy czym składowe struktury spełniają następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(R1) (łączność działań)

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times R & \xrightarrow{A \times \text{id}_R} & R \times R \\ \text{id}_R \times A \downarrow & & \downarrow A \\ R \times R & \xrightarrow{A} & R \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x,y,z \in R} : (x +_R y) +_R z = x +_R (y +_R z);$$

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times R & \xrightarrow{M \times \text{id}_R} & R \times R \\ \text{id}_R \times M \downarrow & & \downarrow M \\ R \times R & \xrightarrow{M} & R \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x,y,z \in R} : (x \cdot_R y) \cdot_R z = x \cdot_R (y \cdot_R z);$$

(R2) (przemienność dodawania)

$$\begin{array}{ccc}
 R \times R & \xrightarrow{\tau_R} & R \times R \\
 & \searrow A & \downarrow A \\
 & & R
 \end{array} \equiv \forall_{x,y \in R} : x +_R y = y +_R x ;$$

(R3) (rozdzielność mnożenia względem dodawania)

$$\begin{array}{ccc}
 R \times R \times R & \xrightarrow{\text{id}_R \times A} & R \times R \\
 \downarrow (M \circ \text{opr}_{1,2}, M \circ \text{opr}_{1,3}) & & \downarrow M \\
 R \times R & \xrightarrow{A} & R
 \end{array} \equiv \forall_{x,y,z \in R} : \begin{array}{l} x \cdot_R (y +_R z) \\ = (x \cdot_R y) +_R (x \cdot_R z) \end{array} ;$$

$$\begin{array}{ccc}
 R \times R \times R & \xrightarrow{A \times \text{id}_R} & R \times R \\
 \downarrow (M \circ \text{opr}_{1,3}, M \circ \text{opr}_{2,3}) & & \downarrow M \\
 R \times R & \xrightarrow{A} & R
 \end{array} \equiv \forall_{x,y,z \in R} : \begin{array}{l} (x +_R y) \cdot_R z \\ = (x \cdot_R z) +_R (y \cdot_R z) \end{array} ;$$

(R4) (istnienie elementów neutralnych względem działań)

$$\begin{array}{ccc}
 R \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_R \times \mathbf{0}} & R \times R \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow A \\
 & & R
 \end{array} \equiv \forall_{x \in R} : x +_R \mathbf{0} = x ;$$

$$\begin{array}{ccc}
 R \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_R \times \mathbf{1}} & R \times R \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow M \\
 & & R
 \end{array} , \quad \begin{array}{ccc}
 \{\bullet\} \times R & \xrightarrow{\mathbf{1} \times \text{id}_R} & R \times R \\
 & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow M \\
 & & R
 \end{array}$$

$$\equiv \forall_{x \in R} : x \cdot_R \mathbf{1} = x = \mathbf{1} \cdot_R x ;$$

(R5) (istnienie elementów przeciwnych)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times \{\bullet\} & \xrightarrow{(\text{id}_R, \text{P}) \circ \text{pr}_1} & R \times R \\
 & \searrow \mathbf{0} \circ \text{pr}_2 & \downarrow A \\
 & & R
 \end{array} \equiv \forall_{x \in R} : x +_R (-x) = \mathbf{0} .$$

**Pierścień przeciwny** do  $(R, A, M, \text{P}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  to pierścień  $(R, A, M^{\text{opp}}, \text{P}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  z mnożeniem danym wzorem

$$M^{\text{opp}} := M \circ \tau_R .$$

**Pierścień przemienny** to taki, w którym mnożenie jest operacją przemienną, co wyraża następujący diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym):

$$(CR) \quad \begin{array}{ccc} R \times R & \xrightarrow{\tau_R} & R \times R \\ & \searrow M & \downarrow M \\ & & R \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x,y \in R} : x \cdot_R y = y \cdot_R x.$$

**Dziedzina całkowitości** to pierścień przemienny o własności

$$(ID) \quad \forall_{x,y \in R} : (x \cdot_R y = 0 \implies (x = 0 \vee y = 0)),$$

która wyraża brak nietrywialnych dzielników zera.

**Pierścień z dzieleniem** to taki, w którym spełniony jest warunek

$$\forall_{r \in R \setminus \{0\}} \exists_{s \in R} : r \cdot_R s = s \cdot_R r = \mathbf{1}.$$

**Podpierścień** pierścienia  $(R, A, M, P, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  to szóstka  $(Q, A \upharpoonright_{Q \times Q}, M \upharpoonright_{Q \times Q}, P \upharpoonright_Q, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ , w której  $Q$  jest podzbiorem  $R$  o następujących własnościach:

$$(SR1) \quad A : Q^{\times 2} \longrightarrow Q \subset R;$$

$$(SR2) \quad M : Q^{\times 2} \longrightarrow Q \subset R;$$

$$(SR3) \quad P : Q \longrightarrow Q \subset R;$$

$$(SR4) \quad Q \ni \mathbf{1}.$$

Podpierścień o własności

$$(I) \quad M : R \times Q \longrightarrow Q \subset R \quad (\text{wzgl. } M : Q \times R \longrightarrow Q \subset R)$$

nazywamy **ideałem lewostronnym** (wzgl. **prawostronnym**) pierścienia  $R$ . **Ideał obustronny** to taki, który jest zarówno lewo- jak i prawostronny. **Ideał główny** to ideał spełniający warunek

$$(PI) \quad \exists_{q_* \in R} \forall_{q \in Q} \exists_{r \in R} : q = r \cdot_R q_* \quad (\text{wzgl. } \exists_{q_* \in R} \forall_{q \in Q} \exists_{r \in R} : q = q_* \cdot_R r),$$

co zapisujemy jako

$$Q = \langle q_* \rangle_R.$$

**Homomorfizm pierścienia**  $(R_1, A^{(1)}, M^{(1)}, P^{(1)}, \mathbf{0}^{(1)}, \mathbf{1}^{(1)})$  w pierścień  $(R_2, A^{(2)}, M^{(2)}, P^{(2)}, \mathbf{0}^{(2)}, \mathbf{1}^{(2)})$  to odwzorowanie

$$\chi : R_1 \longrightarrow R_2$$

o własnościach wyrażonych przez diagramy przemiennie (wypisane wraz z równoważnymi zdaniami logicznymi):

$$(RH1) \quad \begin{array}{ccc} R_1 \times R_1 & \xrightarrow{A^{(1)}} & R_1 \\ \chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ R_2 \times R_2 & \xrightarrow{A^{(2)}} & R_2 \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x,y \in R_1} : \begin{array}{l} \chi(x +_{(1)} y) \\ = \chi(x) +_{(2)} \chi(y) \end{array};$$

$$(RH2) \quad \begin{array}{ccc} R_1 \times R_1 & \xrightarrow{M^{(1)}} & R_1 \\ \chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ R_2 \times R_2 & \xrightarrow{M^{(2)}} & R_2 \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x,y \in R_1} : \begin{array}{l} \chi(x \cdot_{(1)} y) \\ = \chi(x) \cdot_{(2)} \chi(y) \end{array};$$



$$(RH3) \quad \begin{array}{ccc} \{\bullet\} & \xrightarrow{\mathbf{1}^{(1)}} & R_1 \\ & \searrow \mathbf{1}^{(2)} & \downarrow \chi \\ & & R_2 \end{array} \quad \equiv \quad \chi(\mathbf{1}^{(1)}) = \mathbf{1}^{(2)}.$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 3. (Struktury)

- (1) **Pierścień trywialny:**  $(\{0 = 1\}, (0, 0) \mapsto 0, (0, 0) \mapsto 0, 0 \mapsto 0, 0 \mapsto 0, \bullet \mapsto 0, \bullet \mapsto 0)$ .
- (2) Szóstka  $(\mathbb{Z}, +, \cdot, n \mapsto -n, \bullet \mapsto 0, \bullet \mapsto 1)$  to pierścień przemienny.
- (3) Szóstka  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, ([k]_n, [l]_n) \mapsto [k + l]_n, ([k]_n, [l]_n) \mapsto [k \cdot l]_n, [k]_n \mapsto [n - k]_n, \bullet \mapsto [0]_n, \bullet \mapsto [1]_n)$ , określona dla  $n := p \cdot q$ , gdzie  $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  są dowolne, jest pierścieniem przemiennym z nietrywialnymi dzielnikami zera (bo np. iloczyn niezerowych liczb  $[p]_n$  i  $[q]_n$  jest równy  $[0]_n$ ).
- (4) Szóstka  $(\mathcal{Z}(R), A \upharpoonright_{\mathcal{Z}(R) \times 2}, M \upharpoonright_{\mathcal{Z}(R) \times 2}, P \upharpoonright_{\mathcal{Z}(R)}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  będąca podpierścieniem (dowolnego) pierścienia  $(R, A, M, P, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  o nośniku

$$\mathcal{Z}(R) := \{ z \in R \mid \forall r \in R : M(z, r) = M(r, z) \}$$

zwanym **centrum pierścienia**  $R$ .

- (5) Zbiór  $C(S, \mathbb{R})$  funkcji ciągłych na podzbiórze  $S \subset \mathbb{R}$  o wartościach rzeczywistych z dodawaniem, mnożeniem i braniem przeciwności zdefiniowanymi punktowo,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad (-f)(x) := -f(x),$$

dla dowolnych  $f, g \in C(S, \mathbb{C})$  i  $x \in S$ , oraz z funkcją zerową

$$0 : S \longrightarrow \{0\} : x \mapsto 0$$

jako elementem neutralnym dodawania, a także funkcją stałą

$$1 : S \longrightarrow \{1\} : x \mapsto 1$$

jako elementem neutralnym mnożenia jest pierścieniem przemiennym nie będącym dziedziną całkowitości, o ile  $|S| > 1$  (wystarczy rozważyć funkcje o rozłącznych nośnikach w  $S$ , np. dla  $S = [0, 1]$  funkcje  $f_1 : x \mapsto \max(\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{4}|, 0)$  oraz  $f_2 : x \mapsto \max(\frac{1}{4} - |x - \frac{3}{4}|, 0)$ ).

- (6) **Pierścień endomorfizmów grupy przemienniej**  $G$  to pierścień

$$(\text{End}(G), \tilde{\phi}_2, \circ, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_0, \bullet \mapsto \text{id}_G),$$

którego nośnikiem jest zbiór  $\text{End}(G) \subset \mathbf{Map}(G, G)$  endomorfizmów grupy  $G$  z operacjami  $\tilde{\phi}_n$ ,  $n \in \{0, 1, 2\}$  jak w Przykł. 1 (4) dla  $S := G$ .

(7) **Pierścień wielomianów o współczynnikach z ciała  $\mathbb{K}$**  to pierścień

$$(\mathbb{K}[t], \boxplus, \odot, \mathbb{P}_{\mathbb{K}[t]}, \bullet \mapsto \mathbf{0}, \bullet \mapsto 1_{\mathbb{K}} t^0),$$

o nośniku

$$\mathbb{K}[t] := \{ w : T_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : w(t^n) = 0_{\mathbb{K}} \},$$

zapisanym w terminach przemiennej monoidu

$$(T_{\geq 0} = \{t^n\}_{n \in \mathbb{N}}, \odot, \bullet \mapsto t^0)$$

w grupie przemiennej

$$(T = \{t^m\}_{m \in \mathbb{Z}}, \odot : (t^k, t^l) \mapsto t^{k+l}, \text{Inv} : t^m \mapsto t^{-m}, \bullet \mapsto t^0)$$

a zwanym **zbiorem wielomianów o współczynnikach z  $\mathbb{K}$** , oraz operacjach 2-argumentowych

$$\begin{aligned} \boxplus & : \mathbb{K}[t]^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}[t] : \left( \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m t^m, \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n t^n \right) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n +_{\mathbb{K}} \mu_n) t^n, \\ \odot & : \mathbb{K}[t]^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}[t] : \left( \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m t^m, \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n t^n \right) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{k,l=0 \\ k+l=n}}^n \lambda_k \cdot_{\mathbb{K}} \mu_l \right) t^n, \end{aligned}$$

i 1-argumentowej

$$\mathbb{P}_{\mathbb{K}[t]} : \mathbb{K}[t] \circlearrowleft : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n) t^n.$$

(8) Niechaj  $\Lambda_1, \Lambda_2$  będą zbiorami,  $S := \{S^{(\lambda_2, \lambda_1)}\}_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1}$  zaś niech będzie rodziną zbiorów indeksowaną przez zbiór  $\Lambda_2 \times \Lambda_1$ . **Macierz typu  $\Lambda_2 \times \Lambda_1$  o wyrazach ze zbioru**

$$S^{\cup} := \bigcup_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} S^{(\lambda_2, \lambda_1)}$$

to dowolne odwzorowanie

$$M \in \prod_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} S^{(\lambda_2, \lambda_1)},$$

które będziemy identyfikować z jego zbiorem wartości zapisywanym w postaci

$$(M^{\lambda_2}_{\lambda_1} \equiv M(\lambda_2, \lambda_1))_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1}.$$

O zbiorze tym można myśleć jako o „dwuwymiarowym” rozkładzie („tablicy”) elementów zbioru  $S^{\cup}$  nad dziedziną  $\Lambda_2 \times \Lambda_1$ . W tym samym „geometrycznym” duchu podrodzinę

$$M^{\lambda_2}_{\bullet} := (M^{\lambda_2}_{\lambda_1})_{\lambda_1 \in \Lambda_1}$$

określamy mianem **wiersza macierzy  $M$  o indeksie  $\lambda_2$** , natomiast podrodzinę

$$M^{\bullet}_{\lambda_1} := (M^{\lambda_2}_{\lambda_1})^{\lambda_2 \in \Lambda_2}$$

nazywamy **kolumną macierzy  $M$  o indeksie  $\lambda_1$** . Zbiór wszystkich macierzy opisanego rodzaju oznaczamy symbolem

$$\text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1) \equiv \prod_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} S^{(\lambda_2, \lambda_1)},$$

a w przypadku  $N_\alpha := |\Lambda_\alpha| < \infty$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  także symbolem

$$\text{Mat}(S; N_2 \times N_1) \equiv \prod_{(n_2, n_1) \in \overline{1, N_2 \times 1, N_1}} S^{(n_2, n_1)}.$$

**Macierz kwadratowa o wyrazach z  $S^U$**  to macierz typu  $\Lambda \times \Lambda$  dla pewnego zbioru indeksów  $\Lambda$ . Podrodzina

$$(M_\lambda^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

wyrazów macierzy kwadratowej  $M$  nosi miano **przekątnej**  $M$ . Zbiór macierzy kwadratowych zapisujemy jako

$$\text{Mat}(S; \Lambda) \equiv \prod_{\lambda, \mu \in \Lambda} S^{(\lambda, \mu)},$$

a w przypadku  $N := |\Lambda| < \infty$  także jako

$$\text{Mat}(S; N) \equiv \prod_{m, n \in \overline{1, N}} S^{(m, n)}.$$

Elementy  $\text{Mat}(S; N)$  nazywamy **macierzami kwadratowymi stopnia  $N$  o wyrazach z  $S^U$** .

Ilekoż każdy ze zbiorów  $S^{(\lambda_2, \lambda_1)}$  jest nośnikiem struktury grupy przemiennej  $(S^{(\lambda_2, \lambda_1)}, +_{(\lambda_2, \lambda_1)}, P_{(\lambda_2, \lambda_1)}, \bullet \mapsto 0_{(\lambda_2, \lambda_1)})$ , na zbiorze macierzy  $\text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1)$  indukowana jest struktura grupy przemiennej

$$(\text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1), \phi_2^\square \equiv \boxplus_S, \phi_1^\square \equiv P_S, \phi_0^\square : \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\Lambda_2 \times \Lambda_1}),$$

którą na zbiorze wartości odwzorowań z  $\text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1)$  realizują następujące operacje, określone “wyraz po wyrazie” i zwane **dodawaniem macierzy**

$$\begin{aligned} \boxplus_S &: \text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1)^{\times 2} \longrightarrow \text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1) \\ &: \left( (M_{\lambda_1}^{\lambda_2})_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1}, (N_{\mu_1}^{\mu_2})_{(\mu_2, \mu_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \right) \\ &\quad \longmapsto (M_{\lambda_1}^{\lambda_2} +_{(\lambda_2, \lambda_1)} N_{\lambda_1}^{\lambda_2})_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \end{aligned}$$

oraz **braniem przeciwności macierzowej**

$$\begin{aligned} P_S &: \text{Mat}(S; \Lambda_2 \times \Lambda_1) \curvearrowright \\ &: (M_{\lambda_1}^{\lambda_2})_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \longmapsto (P_{(\lambda_2, \lambda_1)}(M_{\lambda_1}^{\lambda_2}))_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1}, \end{aligned}$$

a wraz z nimi element neutralny dla dodawania macierzy  $\boxplus_S$  dany przez **macierz zerową**

$$\mathbf{0}_{\Lambda_2 \times \Lambda_1} := (0_{(\lambda_2, \lambda_1)})_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1}.$$

W szczególnym przypadku, gdy  $|\Lambda_\alpha| \equiv N_\alpha < \infty$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  i wszystkie zbiory  $S^{(n_3, n_2)}, S^{(n_2, n_1)} \equiv R$  o indeksach  $n_\alpha \in \overline{1, N_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  są nośnikami (tej samej) struktury pierścienia  $(R, +_R, \cdot_R, P_R, \bullet \mapsto 0_R)$ , możemy określić **mnożenie macierzy**

$$\begin{aligned} \boxtimes_R &: \text{Mat}(R; N_3 \times N_2) \times \text{Mat}(R; N_2 \times N_1) \longrightarrow \text{Mat}(R; N_3 \times N_1) \\ &: \left( (M_{m_2}^{m_3})_{(m_3, m_2) \in \overline{1, N_3 \times 1, N_2}}, (N_{n_1}^{n_2})_{(n_2, n_1) \in \overline{1, N_2 \times 1, N_1}} \right) \end{aligned}$$

$$\mapsto \left( \sum_{n_2=1}^{N_2} M_{n_2}^{n_3} \cdot_R N_{n_1}^{n_2} \right)_{(n_3, n_1) \in \overline{1, N_3} \times \overline{1, N_1}},$$

jawnie łączne i rozdzielne względem dodawania  $\boxplus_R$ . Odwzorowania te indukują na zbiorze  $\text{Mat}(R; N)$  strukturę pierścienia

$$(\text{Mat}(R; N), \boxplus_R, \boxtimes_R, P_R, \bullet \mapsto \mathbf{0}_N, \bullet \mapsto \mathbf{1}_N)$$

o jedności danej przez **macierz jednostkową**

$$\mathbf{1}_N := (\delta_{m,n}^R)_{m,n \in \overline{1, N}}.$$

Pierścień ten nosi miano **pierścienia macierzowego stopnia  $N$  nad  $R$** .

✓

PRZYKŁAD(Y) 4. (Homomorfizmy)

- (1) Dla dowolnego pierścienia  $R$  odwzorowanie  $\mathbb{Z} \rightarrow R : n \mapsto \underbrace{1 +_R 1 +_R \cdots +_R 1}_{n \text{ razy}}$  jest homomorfizmem.
- (2) Odwzorowanie ewaluacji  $\text{ev}_{\frac{1}{2}} : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(\frac{1}{2})$  jest epimorfizmem pierścienia z Przykł. 3 (5) na pierścień  $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, P_{\mathbb{R}}, \bullet \mapsto [(\frac{0}{1})_{n \in \mathbb{N}}]_{\sim}, \bullet \mapsto [(\frac{1}{1})_{n \in \mathbb{N}}]_{\sim})$ .
- (3) Odwzorowanie  $\mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}(2; \mathbb{R}) : x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$  jest monomorfizmem pierścienia  $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}, P_{\mathbb{C}}, \mathbf{0}_{\mathbb{C}}, \mathbf{1}_{\mathbb{C}})$  w pierścień z Przykł. 3 (6).

✓

Na koniec naszego przeglądu elementarnych struktur algebraicznych natrafiamy na

DEFINICJA 9. **Ciało** to siódemka  $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ , w której

- $\mathbb{K}$  jest zbiorem;
- $A : \mathbb{K}^{\times 2} \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto A(x, y) \equiv x +_{\mathbb{K}} y$  jest operacją 2-argumentową zwaną **dodawaniem**;
- $M : \mathbb{K}^{\times 2} \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto M(x, y) \equiv x \cdot_{\mathbb{K}} y$  jest operacją 2-argumentową zwaną **mnożeniem**;
- $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto P(x) \equiv -x$  jest operacją 1-argumentową zwaną **braniem przeciwności**;
- $\text{Inv} : \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}(\bullet)\} \rightarrow \mathbb{K}^{\times} : x \mapsto \text{Inv}(x) \equiv x^{-1}$  jest operacją 1-argumentową (o ograniczonym nośniku) zwaną **braniem odwrotności**;
- $\mathbf{0} : \{\bullet\} \rightarrow \mathbb{K} : \bullet \mapsto 0$  jest operacją 0-argumentową zwaną **zerem**;
- $\mathbf{1} : \{\bullet\} \rightarrow \mathbb{K} : \bullet \mapsto 1$  jest operacją 0-argumentową zwaną **jedynką**,

przy czym składowe struktury spełniają następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(F1) (łączność działań)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{A \times \text{id}_{\mathbb{K}}} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ \text{id}_{\mathbb{K}} \times A \downarrow & & \downarrow A \\ \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{A} & \mathbb{K} \end{array} \quad \equiv \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K} : (x +_{\mathbb{K}} y) +_{\mathbb{K}} z = x +_{\mathbb{K}} (y +_{\mathbb{K}} z);$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{M \times \text{id}_{\mathbb{K}}} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
\text{id}_{\mathbb{K}} \times M \downarrow & & \downarrow M \\
\mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{M} & \mathbb{K}
\end{array} \equiv \forall_{x,y,z \in \mathbb{K}} : (x \cdot_{\mathbb{K}} y) \cdot_{\mathbb{K}} z = x \cdot_{\mathbb{K}} (y \cdot_{\mathbb{K}} z);$$

(F2) (przemienność działań)

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{K}}} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
& \searrow A & \downarrow A \\
& & \mathbb{K}
\end{array} \equiv \forall_{x,y \in \mathbb{K}} : x +_{\mathbb{K}} y = y +_{\mathbb{K}} x;$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{\tau_{\mathbb{K}}} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
& \searrow M & \downarrow M \\
& & \mathbb{K}
\end{array} \equiv \forall_{x,y \in \mathbb{K}} : x \cdot_{\mathbb{K}} y = y \cdot_{\mathbb{K}} x;$$

(F3) (rozdzielność mnożenia względem dodawania)

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{K}} \times A} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
(M \circ \text{pr}_{1,2}, M \circ \text{pr}_{1,3}) \downarrow & & \downarrow M \\
\mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}
\end{array} \equiv \forall_{x,y,z \in \mathbb{K}} : \begin{aligned} & x \cdot_{\mathbb{K}} (y +_{\mathbb{K}} z) \\ & = (x \cdot_{\mathbb{K}} y) +_{\mathbb{K}} (x \cdot_{\mathbb{K}} z) \end{aligned};$$

(F4) (istnienie elementów neutralnych względem działań)

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K} \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{K}} \times 0} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
& \searrow \text{pr}_1 & \downarrow A \\
& & \mathbb{K}
\end{array} \equiv \forall_{x \in \mathbb{K}} : x +_{\mathbb{K}} 0 = x;$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K} \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{K}} \times 1} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
& \searrow \text{pr}_1 & \downarrow M \\
& & \mathbb{K}
\end{array} \equiv \forall_{x \in \mathbb{K}} : x \cdot_{\mathbb{K}} 1 = x;$$

(F5) (istnienie elementów przeciwnych i odwrotnych do niezerowych)

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K} \times \{\bullet\} & \xrightarrow{(\text{id}_{\mathbb{K}}, \text{P}) \circ \text{pr}_1} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\
& \searrow 0 \circ \text{pr}_2 & \downarrow A \\
& & \mathbb{K}
\end{array} \equiv \forall_{x \in \mathbb{K}} : x +_{\mathbb{K}} (-x) = 0;$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}^\times \times \{\bullet\} & \xrightarrow{(\text{id}_{\mathbb{K}}, \text{Inv}) \circ \text{pr}_1} & \mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}^\times \\
& \searrow \text{pr}_2 & \downarrow M \\
& & \mathbb{K}^\times
\end{array}
\quad \equiv \quad \forall_{x \in \mathbb{K}^\times} : x \cdot_{\mathbb{K}} x^{-1} = 1;$$

(F6) (nietrywialność)  $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ .

**Podciało** ciała  $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  to siódemka  $(\mathbb{L}, A|_{\mathbb{L} \times \mathbb{L}}, M|_{\mathbb{L} \times \mathbb{L}}, P|_{\mathbb{L}}, \text{Inv}|_{\mathbb{L} \setminus \{0\}}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ , w której  $\mathbb{L}$  jest podzbiorem  $\mathbb{K}$  o następujących własnościach:

- (SF1)  $A : \mathbb{L}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ ;
- (SF2)  $M : \mathbb{L}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ ;
- (SF3)  $P : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ ;
- (SF4)  $\text{Inv} : \mathbb{L} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ ;
- (SF5)  $\mathbb{L} \ni 1$ .

**Homomorfizm ciała**<sup>4</sup>.  $(\mathbb{K}_1, A^{(1)}, M^{(1)}, P^{(1)}, \text{Inv}^{(1)}, \mathbf{0}^{(1)}, \mathbf{1}^{(1)})$  w ciało  $(\mathbb{K}_2, A^{(2)}, M^{(2)}, P^{(2)}, \text{Inv}^{(2)}, \mathbf{0}^{(2)}, \mathbf{1}^{(2)})$  to odwzorowanie

$$\chi : \mathbb{K}_1 \longrightarrow \mathbb{K}_2$$

o własnościach

$$\text{(FH1)} \quad \begin{array}{ccc}
\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_1 & \xrightarrow{A^{(1)}} & \mathbb{K}_1 \\
\chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\
\mathbb{K}_2 \times \mathbb{K}_2 & \xrightarrow{A^{(2)}} & \mathbb{K}_2
\end{array}
\quad \equiv \quad \forall_{x, y \in \mathbb{K}_1} : \chi(x +_{(1)} y) = \chi(x) +_{(2)} \chi(y);$$

$$\text{(FH2)} \quad \begin{array}{ccc}
\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_1 & \xrightarrow{M^{(1)}} & \mathbb{K}_1 \\
\chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\
\mathbb{K}_2 \times \mathbb{K}_2 & \xrightarrow{M^{(2)}} & \mathbb{K}_2
\end{array}
\quad \equiv \quad \forall_{x, y \in \mathbb{K}_1} : \chi(x \cdot_{(1)} y) = \chi(x) \cdot_{(2)} \chi(y).$$

Dowolny inwolutywny (anty)automorfizm<sup>5</sup>

$$J : \mathbb{K} \curvearrowright : \lambda \mapsto \bar{\lambda},$$

$$J(\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) = J(\lambda) +_{\mathbb{K}} J(\mu), \quad J(\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \mu) = J(\mu) \cdot_{\mathbb{K}} J(\lambda), \quad J \circ J = \text{id}_{\mathbb{K}}$$

określamy mianem **sprzężenia**.

**Jądro homomorfizmu** to zbiór

$$\text{Ker } \chi := \{ x \in \mathbb{K}_1 \mid \chi(x) = \mathbf{0}^{(2)} \},$$

natomiast **obraz homomorfizmu** to zbiór

$$\text{Im } \chi := \{ x \in \mathbb{K}_2 \mid \exists_{y \in \mathbb{K}_1} : x = \chi(y) \} \equiv \chi(\mathbb{K}_1).$$

<sup>4</sup>Godzi się w tym miejscu zauważyć, że wszystkie homomorfizmy ciał są monomorfizmami.

<sup>5</sup>Według konwencji przyjętej w tym wykładzie każde ciało jest pierścieniem przemiennym, co usuwa podstawę do rozróżnienia pomiędzy izomorfizmami mnożącymi i antymnożącymi (tj. takimi, które odwracają porządek czynników). Ponieważ jednak niektóre z konstrukcji opisywanych w dalszej części kursu dopuszczają uogólnienia na szerszą klasę pierścieni, zdecydowaliśmy się zachować – tam gdzie jest to możliwe – bardziej ogólny zapis.



PRZYKŁAD(Y) 5. (Struktura)

- (1) Liczby rzeczywiste ze strukturą indukowaną przez tę obecną na zbiorze liczb wymiernych poprzez konstrukcję Cantora–Méraya.
- (2) Siódemka  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, ([k]_p, [l]_p) \mapsto [k+l]_p, ([k]_p, [l]_p) \mapsto [k \cdot l]_p, [k]_p \mapsto [p-k]_p, [k]_p \mapsto [\tilde{k}]_p, \bullet \mapsto [0]_p, \bullet \mapsto [1]_p)$ , określona dla dowolnej liczby pierwszej  $p$ , o nośniku

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{[0]_p, [1]_p, [2]_p, \dots, [p-1]_p\}$$

będącym zbiorem reszt *modulo*  $p$  ( $[x]_p$  jest resztą z dzielenia liczby  $x$  przez  $p$ ), w którym każdej reszcie  $[k]_p$  odpowiada (dokładnie jedna) reszta  $[\tilde{k}]_p$  o własności  $[k \cdot \tilde{k}]_p = [0]_p$ . Struktura ta nosi miano **ciała reszt modulo**  $p$ .

- (3) **Ciało liczb zespolonych**  $(\mathbb{C}, A_{\mathbb{C}} \equiv +_{\mathbb{C}}, M_{\mathbb{C}} \equiv \cdot_{\mathbb{C}}, P_{\mathbb{C}}, \text{Inv}_{\mathbb{C}}, \mathbf{0}_{\mathbb{C}}, \mathbf{1}_{\mathbb{C}})$ , w którym
- $\mathbb{C} := \mathbb{R}^{\times 2}$ ;
  - $A_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{\times 2} \rightarrow \mathbb{C} : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ ;
  - $M_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{\times 2} \rightarrow \mathbb{C} : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$ ;
  - $P_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ ;
  - $\text{Inv}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\} =: \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ ;
  - $\mathbf{0}_{\mathbb{C}} : \bullet \mapsto (0, 0)$ ;
  - $\mathbf{1}_{\mathbb{C}} : \bullet \mapsto (1, 0)$ .



PRZYKŁAD(Y) 6. (Homomorfizmy)

- (1) Niechaj  $(\mathbb{K}, A \equiv +, M \equiv \cdot, P, \text{Inv}, \bullet \mapsto 0, \bullet \mapsto 1)$  będzie ciałem o **charakterystyce**  $\text{char}(\mathbb{K}) = p$  danej przez liczbę pierwszą  $p$ , przy czym przez charakterystykę ciała rozumiemy najmniejszą z liczb  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , dla których jest spełniona równość

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ razy}} = 0,$$

np.  $\text{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$ . Odwzorowanie

$$\mathbb{K} \curvearrowright : x \mapsto x^p \equiv \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{p \text{ razy}}$$

jest endomorfizmem ciała  $\mathbb{K}$ . Prawdziwość tego stwierdzenia jest prostą konsekwencją twierdzenia o współczynniku dwumianowym dla liczby pierwszej  $p$ , które stwierdza, co następuje:

$$\forall_{k \in \overline{1, p-1}} : \binom{p}{k}_p = 0.$$

- (2) Odwzorowanie

$$(1.1.3) \quad \mathcal{J}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$$

jest monomorfizmem ciał.



## 2. Struktury algebraiczne złożone

Tytułem ustalenia języka dyskursu zaczniemy od ogólnej

DEFINICJA 10. **Struktura algebraiczna złożona** to kolekcja

$$(\mathcal{S}_\alpha, \phi_i)_{(\alpha, i) \in A \times I}$$

(indeksowana przez zbiór  $A \times I$ ) struktur algebraicznych prostych  $\mathcal{S}_\alpha$  (w rozumieniu Def. 3) pozostających w relacji określonej przez odwzorowania  $\phi_i$ , których dziedzinami i przeciwdziedzinaami są iloczyny kartezyjańskie nośników rzeczonych struktur prostych. Własności operacji współdefiniujących każdą ze struktur składowych oraz ich wzajemne relacje, jak również relacje pomiędzy strukturami składowymi ustanawiane przez odwzorowania  $\phi_i$  są określane przez aksjomatykę struktury.

**Homomorfizm struktury algebraicznej**  $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{S}_{1\alpha}, \phi_i^{(1)})_{(\alpha, i) \in A \times I}$  w **strukturę algebraiczną**  $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{S}_{2\alpha}, \phi_i^{(2)})_{(\alpha, i) \in A \times I}$  (tego samego rodzaju) to kolekcja homomorfizmów  $\chi_\alpha : S_{1\alpha} \rightarrow S_{2\alpha}$  struktur prostych  $\mathcal{S}_1$  (o nośnikach  $S_{1\alpha}$ ) w struktury proste  $\mathcal{S}_2$  (o nośnikach  $S_{2\alpha}$ ), związanych dodatkowym warunkiem: niechaj  $\phi_i^{(1)}$ ,  $i \in I$  będzie dowolnym odwzorowaniem współdefiniującym  $\mathcal{S}_1$ , niech też  $\times_{k=1}^{N_1} S_{1\alpha_k}$  i  $\times_{l=1}^{N_2} S_{2\alpha_l}$  będą – odpowiednio – dziedziną i przeciwdziedzina  $\phi_i^{(1)}$ , a wtedy

$$\phi_i^{(2)} \circ \times_{k=1}^{N_1} \chi_{\alpha_k} = \times_{l=1}^{N_2} \chi_{\alpha_l} \circ \phi_i^{(1)}.$$

Częstą praktyką jest ograniczanie rozważań do struktur złożonych, dla których część definiujących struktur prostych jest identyczna, i zarazem do homomorfizmów zachowujących te składowe struktury proste (tj. takich, dla których  $\chi_\alpha = \text{id}_{S_{1\alpha}}$  dla wyróżnionego podzbioru zbioru indeksów  $A$ ), a wtedy zwyczajowo opuszczamy nie tylko odnośne składowe  $\chi_\alpha$ , lecz także nośniki  $S_{1\alpha}$  ustalonych struktur prostych w zapisie struktury złożonej. ▲

Pośród nieskończonych galaktyk struktur złożonych znajdujemy te o wyjątkowym znaczeniu fizykalnym, dla których cechą wspólną jest obecność szczególnego homomorfizmu pewnej wyróżnionej (bazowej) struktury prostej (grupy, pierścienia) w zbiór automorfizmów nośnika struktury złożonej. Sytuację tę porządkuje pojęciowo

DEFINICJA 11. Niechaj  $X$  i  $\Omega$  będą zbiorami. **Realizacja zbioru  $\Omega$  na zbiorze  $X$**  to odwzorowanie

$$\mathcal{R} : \Omega \rightarrow \mathbf{Map}(X, X) : \omega \mapsto \mathcal{R}_\omega.$$

Z powyższym stowarzyszamy **lewostronne działanie zbioru  $\Omega$  na zbiorze  $X$**  dane przez

$$\ell : \Omega \times X \rightarrow X : (\omega, x) \mapsto \mathcal{R}_\omega(x) \equiv \omega \triangleright x,$$

jak również **prawostronne działanie zbioru  $\Omega$  na zbiorze  $X$**  dane przez

$$\rho : X \times \Omega \rightarrow X : (x, \omega) \mapsto \mathcal{R}_\omega(x) \equiv x \triangleleft \omega.$$

Zbiór  $X$  określamy mianem **nośnika działania**, natomiast zbiór  $\Omega$  – mianem **dziedziny operatorów**. ▲



Ilekoć któryś ze zbiorów  $X, \Omega$  występujących w powyższej definicji sam jest nośnikiem struktury algebraicznej, naturalnym staje się wyróżnienie tych realizacji (a więc także działań), które są w oczywistym znaczeniu zgodne z ową strukturą. Tak właśnie będzie w przypadkach przywołanych poniżej.

Pierwszego ważnego przykładu z tak ogólnie scharakteryzowanej kategorii struktur dostarcza

DEFINICJA 12. Przyjmijmy zapis Def. 5 i Przykł. 1 (2). Niechaj  $X$  będzie zbiorem i niech  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  będzie grupą. **Lewostronne działanie grupy  $G$  na zbiorze  $X$**  to odwzorowanie

$$\lambda : G \times X \longrightarrow X : (g, x) \longmapsto g \triangleright x$$

spełniające następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(IDG1) (homomorficzność działania)

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\text{id}_G \times \lambda} & G \times X \\ \phi_2 \times \text{id}_X \downarrow & & \downarrow \lambda \\ G \times X & \xrightarrow{\lambda} & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{g, h \in G} \forall_{x \in X} : g \triangleright (h \triangleright x) = \phi_2(g, h) \triangleright x;$$

(IDG2) (trywialność działania elementu neutralnego)

$$\begin{array}{ccc} \{\bullet\} \times X & \xrightarrow{\phi_0 \times \text{id}_X} & G \times X \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \lambda \\ & & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x \in X} : e \triangleright x = x.$$

Parę  $(X, \lambda)$  określamy mianem **zbioru z działaniem lewostronnym  $G$**  (lub też – z angielska –  **$G$ -zbiorem lewostronnym**).

**Prawostronne działanie grupy  $G$  na zbiorze  $X$**  to odwzorowanie

$$\varrho : X \times G \longrightarrow X : (x, g) \longmapsto x \triangleleft g$$

spełniające następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(rDG1) (homomorficzność działania)

$$\begin{array}{ccc} X \times G \times G & \xrightarrow{\varrho \times \text{id}_G} & X \times G \\ \text{id}_X \times \phi_2 \downarrow & & \downarrow \varrho \\ X \times G & \xrightarrow{\varrho} & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{g, h \in G} \forall_{x \in X} : (x \triangleleft h) \triangleleft g = x \triangleleft \phi_2(h, g);$$

(rDG2) (trywialność działania elementu neutralnego)

$$\begin{array}{ccc} X \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_X \times \phi_0} & X \times G \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \varrho \\ & & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x \in X} : x \triangleleft e = x.$$

Parę  $(X, \varrho)$  określamy mianem **zbioru z działaniem prawostronnym**  $G$  (lub też **prawostronnym  $G$ -zbiorem**).

Oznaczywszy – dla dowolnego  $g \in G$  –

$$\lambda_g : X \rightarrow X : x \mapsto g \triangleright x, \quad \varrho_g : X \rightarrow X : x \mapsto x \triangleleft g.$$

otrzymujemy homomorfizm

$$\lambda : G \rightarrow \mathfrak{S}_X : g \mapsto \lambda_g$$

grupy  $G$  w grupę symetryczną  $\mathfrak{S}_X$  zbioru  $X$ . Homomorfizm ten określamy mianem **lewostronnej realizacji** (albo inaczej **reprezentacji**) **grupy  $G$  na zbiorze  $X$**  indukowanej przez działanie  $\lambda$ . Analogicznie homomorfizm

$$\varrho : G \rightarrow \mathfrak{S}_X : g \mapsto \varrho_g$$

grupy  $G$  w grupę  $\mathfrak{S}_X$  jest określamy mianem **prawostronnej realizacji** (albo inaczej **reprezentacji**) **grupy  $G$  na zbiorze  $X$**  indukowanej przez działanie  $\varrho$ . W przypadku zbiorów z dodatkową strukturą domagamy się zwykle, iżby obraz grupy względem reprezentacji zawierał się w podgrupie  $\text{Aut}(X) \subset \mathfrak{S}_X$  automorfizmów rzeczonyj struktury.

Niech  $(X_\alpha, \lambda^{(\alpha)})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą zbiorami z działaniem lewostronnym odpowiednich grup  $G_\alpha$ . **Odwzorowanie lewostronnie ekwiwariantne**  $(X_1, \lambda^{(1)})$  w  $(X_2, \lambda^{(2)})$  to para  $(\varphi, f)$  odwzorowań

$$\varphi : G_1 \rightarrow G_2, \quad f : X_1 \rightarrow X_2,$$

z których pierwsze jest homomorfizmem grup, drugie zaś spełnia aksjomat (wyrażony przez diagram przemienny i równoważne zdanie logiczne):

$$(1GE) \quad \begin{array}{ccc} G_1 \times X_1 & \xrightarrow{\lambda^{(1)}} & X_1 \\ \varphi \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G_2 \times X_2 & \xrightarrow{\lambda^{(2)}} & X_2 \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{(g,x) \in G_1 \times X_1} : f \circ \lambda_g^{(1)}(x) = \lambda_{\varphi(g)}^{(2)} \circ f(x).$$

Jeśli  $f$  jest przy tym bijekcją, to mówimy o **ekwiwariantnym izomorfizmie zbiorów z działaniem lewostronnym**. Ilekroć  $G_1 = G_2$  i  $\varphi = \text{id}_{G_1}$ , mówimy nierzadko o **odwzorowaniu lewostronnie  $G$ -ekwiwariantnym**. Zbiór takich odwzorowań będziemy oznaczać symbolem

$$\text{Hom}_G(X_1, X_2).$$

**Odwzorowanie prawostronnie ( $G$ -)ekwiwariantne** definiujemy analogicznie. ▲

NOTACJA 2. O ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy czasem używać pojęcia „działanie” w odniesieniu do odwzorowania  $\lambda$ . (wzgl.  $\varrho$ ).

\* \* \*

PRZYKŁAD(Y) 7. (Struktura)

(1) **Działanie trywialne:**  $\lambda : G \rightarrow \mathfrak{S}_X : g \mapsto \text{id}_X$ .

- (2) Naturalne działanie grupy symetrycznej  $\mathfrak{S}_X$  na zbiorze  $X$  poprzez permutacje jego elementów:  $\lambda = \text{id}_{\mathfrak{S}_X}$ .
- (3) Działanie grupy  $\mathbb{Z}$  (z dodawaniem) na zbiorze  $\mathbb{R}$  przez przesunięcia,  $\lambda = T : \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{R}} : n \mapsto T_n$ , gdzie  $T_n : \mathbb{R} \circlearrowleft : r \mapsto r + n$ . Innym typem działania tej samej grupy  $\mathbb{Z}$  na tym samym zbiorze  $\mathbb{R}$  jest odwzorowanie  $\lambda = (-1)^n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{R}} : n \mapsto (-1)^n$ , gdzie  $(-1)^n : \mathbb{R} \circlearrowleft : r \mapsto (-1)^n \cdot r$ . Przykłady te dokumentują możliwość istnienia *całkowicie różnych* realizacji *tej samej* grupy na *tym samym* zbiorze.
- (4) **Działanie dołączone** grupy  $G$  na sobie:  $\lambda = \text{Ad} : G \rightarrow \text{Inn}(G) \subset \mathfrak{S}_G$ . Elementy  $g, \text{Ad}_h(g) \in G$  nazywamy **(wzajem) sprzężonymi**. Określenie to przenosimy także na podgrupy nazywając podgrupę  $\text{Ad}_g(H)$  **podgrupą sprzężoną względem podgrupy  $H \subset G$** .
- (5) **Działanie regularne lewostronne** grupy  $G$  na sobie:  $\lambda = \ell : G \rightarrow \mathfrak{S}_G : g \mapsto \ell_g$ , gdzie  $\ell_g : G \circlearrowleft : h \mapsto g \cdot h$ . **Działanie regularne prawostronne** grupy  $G$  na sobie:  $\rho = \wp : G \rightarrow \mathfrak{S}_G : g \mapsto \wp_g$ , gdzie  $\wp_g : G \circlearrowleft : h \mapsto h \cdot g$ .
- (6) Działanie grupy symetrycznej  $\mathfrak{S}_X$  na  $\text{Map}(X, Y)$ , dla dowolnej pary zbiorów  $X, Y$ , poprzez **cofnięcie** względem odwrotności permutacji,

$$(\cdot)^* \circ \text{Inv} : \mathfrak{S}_X \rightarrow \mathfrak{S}_{\text{Map}(X, Y)} : \sigma \mapsto (\sigma^{-1})^*,$$

$$(\sigma^{-1})^* : \text{Map}(X, Y) \circlearrowleft : f \mapsto f \circ \sigma^{-1}.$$

Jego złożenie z działaniem dowolnej grupy  $G$  na  $X$  prowadzi do realizacji tejże grupy na  $\text{Map}(X, Y)$ , szczególnie istotnej w kontekście fizycznym (w którym najczęściej zbiór  $X$  jest nośnikiem dodatkowej struktury, np. struktury topologicznej lub różniczkowej, jak to ma miejsce choćby w przypadku czasoprzestrzeni, na której działa grupą izometrii, albo też wiązki pól rozważanego modelu dynamiki, na której to wiązce działa grupa symetrii teorii pola).

- (7) Naturalne działanie grupy obrotów w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  o środku w punkcie o współrzędnych  $(0, 0, 0)$  ogranicza się do dowolnej 2-sfery o środku w tymże punkcie.

✓

#### PRZYKŁAD(Y) 8. (Homomorfizmy)

- (1) Niechaj  $\Delta_{(0,0)}$  będzie zbiorem trójkątów na płaszczyźnie o jednym z wierzchołków w punkcie  $(0, 0)$ . Na zbiorze tym grupa  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  odwracalnych przekształceń liniowych punktów płaszczyzny działa w naturalny sposób: obrazem punktu trójkąta o współrzędnych  $(x, y)$  względem działania macierzy  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$  jest punkt płaszczyzny o współrzędnych  $(a \cdot x + b \cdot y, c \cdot x + d \cdot y)$ . Odwzorowanie  $A : \Delta_{(0,0)} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  przyporządkowujące trójkątowi jego pole powierzchni jest  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ -ekwiwariantne względem rzeczzonego działania na  $\Delta_{(0,0)}$  i następującego działania na  $\mathbb{R}_{>0}$ :

$$\text{GL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, r \right) \mapsto (a \cdot d - b \cdot c) \cdot r.$$

- (2) Dla pary grup  $(G_\alpha, \phi_2^{(\alpha)}, \phi_1^{(\alpha)}, \phi_0^{(\alpha)})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  dowolny homomorfizm  $\chi : G_1 \rightarrow G_2$  jest odwzorowaniem  $G_1$ -ekwiwariantnym względem działania

dołączonego,

$$\chi : (G_1, \text{Ad}) \longrightarrow (G_2, \text{Ad} \circ (\chi \times \text{id}_{G_2})),$$

przy czym

$$\text{Ad} : G_1 \times G_1 \longrightarrow G_1 : (g, h) \longmapsto \text{Ad}_g(h),$$

jak również względem działania lewostronnego regularnego,

$$\chi : (G_1, \ell) \longrightarrow (G_2, \ell \circ (\chi \times \text{id}_{G_2})),$$

przy czym

$$\ell : G_1 \times G_1 \longrightarrow G_1 : (g, h) \longmapsto g \cdot h,$$

por. Przykł. 7 (5). W tym ostatnim przypadku konkretnym przykładem jest automorfizm antypodalny  $\alpha : \text{U}(1) \circlearrowleft : u \longmapsto -u$  na okręgu jednostkowym  $\text{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$ .

- (3) Niechaj  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  będzie grupą,  $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  zaś – dowolnym ciałem, traktowanym jako zbiór z trywialnym działaniem  $\lambda_0 : G \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : (g, k) \longmapsto k$ . **Funkcje klas grupy  $G$  o wartościach z ciała  $\mathbb{K}$**  są definiowane jako odwzorowania  $G$ -ekwivariantne

$$f : (G, \text{Ad}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \lambda_0).$$

Konkretnym przykładem jest tutaj znak permutacji.

✓

Przypomnijmy też istotne elementy anatomii działania grupy na zbiorze, pozwalające sklasyfikować w naturalny sposób typy działań.

**DEFINICJA 13.** W notacji Def. 5 i 12 **stabilizator** (lub **grupa izotropii**) **elementu**  $x \in X$  nośnika działania grupy  $G$  to zbiór

$$G_x := \{ g \in G \mid g \triangleright x = x \}.$$

**Orbita elementu**  $x \in X$  **względem działania**  $\lambda$  to zbiór

$$G \triangleright x := \{ \lambda_g(x) \mid g \in G \}.$$

▲

**PRZYKŁAD(Y) 9.**

- (1) Orbitą  $x \in X$  wzgl. działania trywialnego grupy  $G$  na  $X$  jest  $\{x\}$ .
- (2) Orbitą  $x \in X$  wzgl. naturalnego działania  $\mathfrak{S}_X$  na  $X$  jest  $X$ .
- (3) Zbiór  $\{-r, r\}$  jest orbitą działania  $(-1)$  grupy  $\mathbb{Z}$  na  $\mathbb{R}$  z Przykł. 7 (3).
- (4) Orbitę  $g \in G$  wzgl. działania dołączonego grupy  $G$  na sobie (Przykł. 7 (4)) określamy mianem **klasy sprzężoności**  $g$  i oznaczamy

$$C(g) := \{ \text{Ad}_h(g) \mid h \in G \}.$$

- (5) Orbitą  $g \in G$  wzgl. działania regularnego grupy  $G$  na sobie (Przykł. 7 (5)) jest  $G$ . Orbitą wzgl. tegoż działania ograniczonego do podgrupy  $H$ ,

$$\ell : H \times G \longrightarrow G : (h, g) \longmapsto h \cdot g,$$

jest warstwa prawostronna  $Hg$ .

- (6) Orbitą  $z \in \mathbb{C}$  wzgl. działania  $R$  grupy  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  z Przykł. 7 (7) jest okrąg  $|z|\text{U}(1)$ .

✓

Podstawową własność orbit opisuje

STWIERDZENIE 2. *Przyjmijmy zapis Def. 13. Relacja na zbiorze  $X \ni x, y$  będącym nośnikiem działania grupy  $G$  zadana, jak następuje:*

$$x \sim_\lambda y \iff x \in G \triangleright y,$$

*jest relacją równoważności. Działanie grupy zadaje zatem rozkład nośnika na sumę rozłączną orbit względem tego działania.*

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 53].

□

W odwołaniu do wprowadzonych powyżej pojęć możemy wysławić

DEFINICJA 14. W notacji Def. 5, 12, 13 działanie  $\lambda$  nazywamy

- **trywialnym**, jeśli  $\forall_{g \in G} : \lambda_g = \text{id}_X$ , tj. wszystkie orbity działania są jednoelementowe;
- **przechodnim** (lub **tranzytywnym**), jeśli  $\forall_{x, y \in X} : x \sim_\lambda y$ , tj. zbiór  $X$  jest pojedynczą orbitą  $G \triangleright x = X$  (dowolnego) swojego elementu  $x \in X$ ;
- **swobodnym** (lub **wolnym**), jeśli  $\forall_{g, h \in G} : g \triangleright x = h \triangleright x \implies g = h$ ,  
tj.  $\forall_{x \in X} : G_x = \{e\}$ , co oznacza, że odwzorowanie  $\lambda_g$  nie ma punktów stałych dla  $g \in G \setminus \{e\}$ , a wtedy określamy  $X$  mianem **przestrzeni jednorodnej**;
- **wiernym** (lub **efektywnym**), jeśli  $\forall_{g, h \in G} : (g \neq h \implies \exists_{x \in X} : g \triangleright x \neq h \triangleright x)$ , czyli  $\text{Ker } \lambda = \{e\}$ , a wtedy grupa  $G$  jest kanonicznie izomorficzna z podgrupą  $\text{Im } \lambda \subset \mathfrak{S}_X$ ;
- **regularnym**, jeśli jest ono przechodnie i swobodne, a wtedy określamy  $X$  mianem  **$G$ -torsora** lub **główniej przestrzeni jednorodnej**.

▲

PRZYKŁAD(Y) 10.

- (1) Ograniczenie działania grupy na zbiorze do jądra tego działania jest działaniem trywialnym.
- (2) Działanie grupy diedralnej rzędu  $2n$  na zbiorze wierzchołków  $n$ -kąta foremego oraz (indukowane) działanie lewostronne grupy  $G$  na zbiorze warstw  $G/H$  wzgl. podgrupy  $H \subset G$  są przechodnie.
- (3) Antypodalne działanie grupy odbić wzgl. punktu  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  (izomorficznej z  $\mathbb{Z}_2$ ) na dowolnej 2-sferze o środku w tym punkcie jest wolne, tak samo – działanie regularne dowolnej grupy na sobie.
- (4) Działanie dołączone grupy  $G$  na sobie z Przykł. 7(4) jest wierne wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathcal{Z}(G) = \{e\}$ . Podobnie, (indukowane) działanie lewostronne grupy  $G$  na zbiorze warstw  $G/H$  wzgl. podgrupy  $H \subset G$  jest tego typu wtedy i tylko wtedy, gdy  $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$ .
- (5) Zbiór izomorfizmów  $\text{Iso}(G_1, G_2)$  pomiędzy grupami  $G_1$  i  $G_2$  jest torsorem grupy  $\text{Aut}(G_1)$  wzgl. działania prawostronnego

$$\varrho : \text{Iso}(G_1, G_2) \times \text{Aut}(G_1) \longrightarrow \text{Iso}(G_1, G_2) : (\chi, \alpha) \longmapsto \chi \circ \alpha.$$

Jest on zarazem torskorem grupy  $\text{Aut}(G_2)$  wzgl. działania lewostronnego  
 $\lambda : \text{Aut}(G_2) \times \text{Iso}(G_1, G_2) \longrightarrow \text{Iso}(G_1, G_2) : (\alpha, \chi) \longmapsto \alpha \circ \chi.$

✓

Zbiory (z dodatkową strukturą taką jak, np., struktura topologiczna, różniczkowa, metryczna, liniowa itp.) z działaniem grupy (także – bywa – wyposażonej w zgodną ze strukturą algebraiczną strukturę analityczno-geometryczną) pojawiają się w niniejszym kursie w szczególności w kontekście geometrycznej konstrukcji spinorów (à la Cartan), wiązek spinorowych oraz dyskusji anomalii cechowania. Wtedy też rozwiniemy nieco opis zbiorów z działaniem w sposób podyktowany przez konkretne zagadnienia fizyczne. Teraz natomiast przejdziemy do przypomnienia istotnych (dla dalszych naszych rozważań) aspektów teorii modułów nad pierścieniem oraz przestrzeni wektorowych, będących jednymi z najbardziej fundamentalnych i zarazem pojemnych struktur algebraicznych zbudowanych na relacji działania. Obiekty te łączą w swej definicji struktury elementarne: grupy przemiennej oraz pierścienia, dając nam z jednej strony wgląd w metody algebry liniowej na dowolnych grupach przemiennych, a z drugiej – wyposażając nas w aparat pojęciowy przydatny w dyskusji elementów geometrii różniczkowej (patrz: struktura modułu nad pierścieniem funkcji gładkich na bazie wiązki wektorowej na przestrzeni gładkich cięć tejże wiązki) oraz algebry homologicznej, które znajdują szerokie zastosowanie w klasycznej i kwantowej teorii pól, o czym będziemy mieli okazję przekonać się niebawem. Zaczynamy od pojęcia podstawowego

**DEFINICJA 15.** Przyjmijmy zapis Def. 5 i 8. **Moduł lewostronny nad pierścieniem**  $R$  (zwany też z angielska  **$R$ -modułem lewostronnym**) to para  $((G, \phi_2 = +_G, \phi_1 = -(\cdot), \phi_0 : \bullet \longmapsto 0_G), \ell)$  złożona z grupy przemiennej  $(G, \phi_2 = +_G, \phi_1 = -(\cdot), \phi_0 : \bullet \longmapsto 0_G)$  oraz z **lewostronnego działania pierścienia**  $R$ , o elementach określanych mianem **skalarów, na grupie**  $G$

$$\ell : R \times G \longrightarrow G : (r, g) \longmapsto r \triangleright g$$

spełniającego następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(IRM1)  $(G, \ell)$  jest zbiorem z lewostronnym działaniem monoidu  $(R, M, \phi_0^M)$ , tj.

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times G & \xrightarrow{\text{id}_R \times \ell} & R \times G \\ M \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow \ell \\ R \times G & \xrightarrow{\ell} & G \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{r,s \in R} \forall_{g \in G} : r \triangleright (s \triangleright g) = (r \cdot_R s) \triangleright g$$

oraz

$$\begin{array}{ccc} \{\bullet\} \times G & \xrightarrow{\phi_0^M \times \text{id}_G} & R \times G \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \ell \\ & & G \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{g \in G} : 1_R \triangleright g = g;$$

(IRM2) (rozdzielność działania względem dodawania skalarów)

$$\begin{array}{ccc}
 R \times R \times G & \xrightarrow{(\ell \circ \text{pr}_{1,3}, \ell \circ \text{pr}_{2,3})} & G \times G \\
 \text{A} \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 R \times G & \xrightarrow{\ell} & G
 \end{array} \equiv \forall_{r,s \in R} \forall_{g \in G} : \begin{array}{l} (r +_R s) \triangleright g \\ = (r \triangleright g) +_G (s \triangleright g) \end{array} ;$$

(IRM3) (rozdzielność działania względem dodawania grupowego)

$$\begin{array}{ccc}
 R \times G \times G & \xrightarrow{(\ell \circ \text{pr}_{1,2}, \ell \circ \text{pr}_{1,3})} & G \times G \\
 \text{id}_R \times \phi_2 \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 R \times G & \xrightarrow{\ell} & G
 \end{array} \equiv \forall_{r \in R} \forall_{g,h \in G} : \begin{array}{l} r \triangleright (g +_G h) \\ = (r \triangleright g) +_G (r \triangleright h) \end{array} .$$

Równoważnie<sup>6</sup> możemy określić lewostronne działanie pierścienia  $R$  na grupie  $G$  jako homomorfizm  $R$  w pierścieniu endomorfizmów  $G$ .

Analogicznie, **moduł prawostronny nad pierścieniem  $R$**  (zwany też  **$R$ -modułem prawostronnym**) to para  $((G, \phi_2 = +_G, \phi_1, \phi_0 : \bullet \mapsto 0_G), \wp)$ , w której  $\wp$  jest odwzorowaniem

$$\wp : G \times R \longrightarrow G : (g, r) \mapsto g \triangleleft r,$$

zwanym **prawostronnym działaniem pierścienia skalarów  $R$  na grupie  $G$**  i spełniającym oczywiste prawostronne odpowiedniki powyższych aksjomatów:

(rRM1)  $(G, \wp)$  jest zbiorem z prawostronnym działaniem monoidu  $(R, M, \phi_0^M)$ , tj.

$$\begin{array}{ccc}
 G \times R \times R & \xrightarrow{\wp \times \text{id}_R} & G \times R \\
 \text{id}_G \times M \downarrow & & \downarrow \wp \\
 G \times R & \xrightarrow{\wp} & G
 \end{array} \equiv \forall_{r,s \in R} \forall_{g \in G} : (g \triangleleft r) \triangleleft s = g \triangleleft (r \cdot_R s)$$

oraz

$$\begin{array}{ccc}
 G \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_G \times \phi_0^M} & G \times R \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \wp \\
 & & G
 \end{array} \equiv \forall_{g \in G} : g \triangleleft 1_R = g;$$

(rRM2)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times R \times R & \xrightarrow{(\wp \circ \text{pr}_{1,2}, \wp \circ \text{pr}_{1,3})} & G \times G \\
 \text{id}_G \times A \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 G \times R & \xrightarrow{\wp} & G
 \end{array} \equiv \forall_{r,s \in R} \forall_{g \in G} : \begin{array}{l} g \triangleleft (r +_R s) \\ = (g \triangleleft r) +_G (g \triangleleft s) \end{array} ;$$

<sup>6</sup>Obraz odwzorowania  $\ell : R \rightarrow \mathbf{Map}(G, G) : r \mapsto \ell_r$ , gdzie  $\ell_r(g) := r \triangleright g$ , jest zawarty w podzbiórze  $\text{End}(G) \subset \mathbf{Map}(G, G)$ .

(rRM3)

$$\begin{array}{ccc}
G \times G \times R & \xrightarrow{(\wp \circ \text{pr}_{1,3}, \wp \circ \text{pr}_{2,3})} & G \times G \\
\phi_2 \times \text{id}_R \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
G \times R & \xrightarrow{\wp} & G
\end{array} \quad \equiv \quad \forall_{r \in R} \forall_{g, h \in G} : \begin{array}{l} (g +_G h) \triangleleft r \\ = (g \triangleleft r) +_G (h \triangleright r) \end{array} .$$

Równoważnie prawostronne działanie pierścienia  $R$  na grupie  $G$  możemy określić jako homomorfizm pierścienia przeciwnego do  $R$  w pierścień endomorfizmów  $G$ .

**Podmoduł** modułu lewostronnego  $((G, \phi_2, \phi_1, \phi_0), \ell)$  nad pierścieniem  $R$  to para  $((H, \phi_2, \phi_1, \phi_0), \ell)$ , w której  $H$  jest podgrupą  $G$  o własności

$$(IPM) \quad \ell : R \times H \longrightarrow H \subset G .$$

Mówimy, że działanie pierścienia  $R$  zachowuje  $H$ . Podmoduł modułu prawostronnego definiujemy analogicznie.

Dla pary pierścieni  $R_1, R_2$  określamy ponadto w naturalny sposób przydatne pojęcie  $(R_1, R_2)$ -**bimodułu**, – jest to grupa przemienną ze strukturą modułu lewostronnego nad  $R_1$  oraz modułu prawostronnego nad  $R_2$  uzgodnionymi wzajemnie w sensie wyrażonym przez diagram przemienny (wypisany wraz z równoważnym zdaniem logicznym)

$$\begin{array}{ccc}
R_1 \times G \times R_2 & \xrightarrow{\text{id}_{R_1} \times \wp} & R_1 \times G \\
\ell \times \text{id}_{R_2} \downarrow & & \downarrow \ell \\
G \times R_2 & \xrightarrow{\wp} & G
\end{array} \quad \equiv \quad \forall_{(r, g, s) \in R_1 \times G \times R_2} : \begin{array}{l} (r \triangleright g) \triangleleft s \\ = r \triangleright (g \triangleleft s) \end{array} .$$

**Homomorfizm  $R$ -modułu lewostronnego**  $((G_1, \phi_2^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_0^{(1)}), \ell^{(1)})$  w  $R$ -**moduł lewostronny**  $((G_2, \phi_2^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \phi_0^{(2)}), \ell^{(2)})$  to  $R$ -ekwiwariantny homomorfizm grup przemiennych

$$\chi : (G_1, \phi_2^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_0^{(1)}) \longrightarrow (G_2, \phi_2^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \phi_0^{(2)}) ,$$

tj. taki ich homomorfizm, który spełnia aksjomat (wyrażony przez diagram przemienny i równoważne zdanie logiczne):

$$\begin{array}{ccc}
R \times G_1 & \xrightarrow{\ell^{(1)}} & G_1 \\
\text{id}_R \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\
R \times G_2 & \xrightarrow{\ell^{(2)}} & G_2
\end{array} \quad \equiv \quad \forall_{(r, g) \in R \times G_1} : \begin{array}{l} \chi \circ \ell_r^{(1)}(g) \\ = \ell_r^{(2)} \circ \chi(g) \end{array} .$$

Bijektywny homomorfizm  $R$ -modułów lewostronnych, którego odwrotność jest homomorfizmem  $R$ -modułów lewostronnych, nazywamy **izomorfizmem  $R$ -modułów lewostronnych**. **Homomorfizmy  $R$ -modułów prawostronnych** oraz **homomorfizmy  $(R_1, R_2)$ -bimodułów** są zdefiniowane analogicznie.

Opisane homomorfizmy noszą miano **odwzorowań  $R$ -liniowych**. Wprowadzamy oznaczenie

$$\text{Hom}_R(G_1, G_2) := \{ \chi : G_1 \longrightarrow G_2 \mid \chi \text{ } R\text{-liniowe} \}$$



dla zbioru wszystkich odwzorowań  $R$ -liniowych z  $R$ -modułu  $G_1$  w  $R$ -moduł  $G_2$  i odrębne:

$$\text{Iso}_R(G_1, G_2) := \{ \chi \in \text{Hom}_R(G_1, G_2) \mid \chi \text{ bijektywne} \}$$

dla homomorfizmów odwracalnych (izomorfizmów). W szczególnym przypadku  $G_1 = G_2 =: G$ , będziemy pisać

$$\text{End}_R(G) := \text{Hom}_R(G, G),$$

wyróżniając dodatkowo endomorfizmy (obustronnie) odwracalne, czyli automorfizmy,

$$\text{Aut}_R(G) := \{ \chi \in \text{End}_R(G) \mid \chi \text{ bijektywne} \}.$$

W szczególności jeśli  $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  jest ciałem, to moduł nad pierścieniem  $(\mathbb{K}, A, M, P, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  określamy mianem **przestrzeni wektorowej nad ciałem**  $\mathbb{K}$  (wzgl. **przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej**). Elementy nośnika tej struktury to **wektory**. Podmoduł określamy w tym przypadku mianem **podprzestrzeni (wektorowej)**.

▲

Wzajemnie jednoznaczłą relację między modułami lewo- i prawostronnymi, pozwalającą bez jakiegokolwiek straty ogólności ograniczyć nasze rozważania (tymczasowo) do modułów lewostronnych, ustala proste

**STWIERDZENIE 3.** *Przyjmijmy zapis Def. 8 i 15. Struktura modułu lewostronnego nad pierścieniem  $R$  na grupie  $G$  indukuje na tej ostatniej w kanoniczny sposób strukturę modułu prawostronnego nad pierścieniem przeciwnym do  $R$  i vice versa.*

■

Dowód: Niechaj  $\ell \cdot \triangleright$  będzie działaniem lewostronnym  $R$  na  $G$ . Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowanie

$$\wp \cdot : G \times R^{\text{opp}} \longrightarrow G : (g, r) \longmapsto r \triangleright g \equiv g \triangleleft_{\text{opp}} r$$

jest prawym działaniem  $R^{\text{opp}}$  na  $G$ , oto bowiem – dla dowolnych  $r, s \in R^{\text{opp}}$  i  $g \in G$  – zachodzi równość

$$g \triangleleft_{\text{opp}} (r \cdot_{\text{opp}} s) = g \triangleleft_{\text{opp}} (s \cdot r) \equiv (s \cdot r) \triangleright g = s \triangleright (r \triangleright g) \equiv (g \triangleleft_{\text{opp}} r) \triangleleft_{\text{opp}} s.$$

□

**PRZYKŁAD(Y) 11.** (Struktura)

- (1) Grupa trywialna niesie strukturę modułu nad dowolnym pierścieniem. Jest to tzw. **moduł trywialny**, który będziemy oznaczać symbolem  $\mathbf{0}$ .
- (2) Grupa przemiana  $(R, A, P, \phi_0^A)$  definiowana przez dowolny pierścień  $(R, A = +, M = \cdot, P = -(\cdot), \phi_0^A : \bullet \longmapsto 0_R, \phi_0^M : \bullet \longmapsto 1_R)$  jest modułem lewostronnym nad  $R$  z działaniem  $\ell : R \times R \longrightarrow R : (r, s) \longmapsto r \cdot s$ . Ogólniej, dla dowolnego  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  grupa  $(R^{\times n}, A^n, P^n, \phi_0^{A^n})$  zdefiniowana przez pierścień  $R$ , z operacjami określonymi „współrzędna po współrzędnej”:

$$A^n((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$P^n(x_1, x_2, \dots, x_n) := (-x_1, -x_2, \dots, -x_n),$$

$$\phi_0^{A^n}(\bullet) := (0_R, 0_R, \dots, 0_R),$$

dla  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^{\times n}$ , niesie naturalną strukturę modułu lewostronnego nad  $R$  z działaniem

$$\ell^n : R \times R^{\times n} \longrightarrow R^{\times n} : (r, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \longmapsto (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n),$$

dla którego będziemy używać oznaczenia  $\triangleright_n$ . Oczywiście zbiór  $R^{\times n}$  jest także nośnikiem naturalnej struktury  $R$ -modułu prawostronnego, zadawanej przez mnożenie („współrzędna po współrzędnej”) z prawej strony przez elementy pierścienia  $R$ . Dla jawnego rozróżnienia – ważnego w dalszej części kursu – tych dwóch struktur na  $R^{\times n}$  będziemy ich nośniki zapisywać odpowiednio jako  ${}_R R^{\times n}$  ( $R$ -moduł lewostronny) i  $R_R^{\times n}$  ( $R$ -moduł prawostronny).

- (3) Z dowolnym zbiorem  $S$  można stowarzyszyć  **$R$ -moduł wolny na  $S$**

$$((\langle S \rangle_R, \phi_2^{(S)_R} \equiv +_{\langle S \rangle_R}, \phi_1^{(S)_R} \equiv P_{\langle S \rangle_R}, \phi_0^{(S)_R}), \ell^{(S)_R}),$$

o nośniku

$$\langle S \rangle_R := \{ f \in R^S \mid |f^{-1}(R \setminus \{0_R\})| < \infty \},$$

punktowo zdefiniowanej strukturze grupy przemiennej, jak w Przykł. 1 (4), oraz działaniu pierścienia  $R$

$$\forall_{(r,f) \in R \times \langle S \rangle_R} : (r \triangleright_{\langle S \rangle_R} f)(s) := r \cdot_R f(s).$$

- (4) Dowolny homomorfizm  $\chi : R_1 \longrightarrow R_2$  pierścieni  $(R_\alpha, M^{(\alpha)}, A^{(\alpha)}, P^{(\alpha)}, \phi_0^{M^{(\alpha)}}, \phi_0^{A^{(\alpha)}})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  indukuje na grupie  $(R_2, A^{(2)}, P^{(2)}, \phi_0^{A^{(2)}})$  strukturę modułu lewostronnego nad  $R_1$  z działaniem  $\ell : R_1 \times R_2 \longrightarrow R_2 : (r, s) \longmapsto M^{(2)}(\chi(r), s)$ .
- (5) Odwzorowanie Inv.
- (6) Grupa przemienna  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  jest nośnikiem kanonicznej struktury modułu lewostronnego nad pierścieniem endomorfizmów z Przykł. 3 (6), przy czym działanie  $\text{End}(G)$  jest tu zadawane przez odwzorowanie ewaluacji  $\ell : \text{End}(G) \times G \longrightarrow G : (\chi, g) \longmapsto \chi(g) =: \text{ev}_\chi(g)$ .
- (7) Grupa przemienna jest też nośnikiem struktury modułu lewostronnego nad pierścieniem  $\mathbb{Z}$  z Przykł. 2, przy czym działanie  $\mathbb{Z}$  jest określone przez branie krotności jak w (1.1.1).
- (8) Struktura modułu lewostronnego nad pierścieniem  $R$  na grupie przemiennej  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  indukuje na grupie  $(\mathbf{Map}(S, G), \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_0)$  z Przykł. 1 (4) naturalną strukturę modułu lewostronnego nad  $R$  z działaniem  $\ell : R \times \mathbf{Map}(S, G) \longrightarrow \mathbf{Map}(S, G) : (r, f) \longmapsto r \triangleright f$ , przy czym dla dowolnego  $x \in S$  jest  $(r \triangleright f)(x) := r \triangleright f(x)$ .
- (9) Grupa trywialna jest nośnikiem struktury przestrzeni wektorowej nad dowolnym ciałem. Jest to tzw. **przestrzeń trywialna** (lub **zerowa**), którą będziemy oznaczać wprowadzonym wcześniej symbolem  $\mathbf{0}$ .
- (10) Dla dowolnego  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  grupa przemienna  $(\mathbb{K}^{\times n}, A^n, P^n, \mathbf{0}^n)$  definiowana przez dowolne ciało  $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  na sposób opisany w Przykł. 11 (2) niesie naturalną strukturę przestrzeni wektorowej. W szczególności grupa  $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \bullet \longmapsto 0)$  jest przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{R}$ .

- (11) Uogólnieniem struktury opisanej w ostatnim punkcie jest struktura przestrzeni wektorowej nad  $\mathbb{K}$  na zbiorze  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  ciągów o wartościach w  $\mathbb{K}$  z operacjami zdefiniowanymi “wyraz po wyrazie”.
- (12) Grupa przemienna  $(\mathbb{K}[t], +, -(\cdot), \bullet \mapsto 0)$  definiowana przez pierścień wielomianów  $\mathbb{K}[t]$  o współczynnikach z ciała  $\mathbb{K}$  jest przestrzenią wektorową nad  $\mathbb{K}$  z działaniem

$$\begin{aligned} \ell^{n+1} &: \mathbb{K} \times \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}[t] \\ &: (r, r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \dots + r_n t^n) \longmapsto r \cdot r_0 + r \cdot r_1 t + r \cdot r_2 t^2 + \dots + r \cdot r_n t^n. \end{aligned}$$

- (13) Jądro homomorfizmu modułów lewostronnych nad dowolnym pierścieniem jest podmodułem dziedziny tegoż homomorfizmu, natomiast jego obraz jest podmodułem przeciwdziedziny.
- (14) Struktura modułu lewostronnego nad pierścieniem  $R$  na grupie  $G$  indukuje kanoniczną strukturę modułu lewostronnego nad  $R$  na grupie ilorazowej  $(G/H, +_{G/H}, P_{G/H}, H)$  względem podmodułu  $H \subset G$  z operacjami (zdefiniowanymi dla dowolnych  $g, g_1, g_2 \in G$ )

$$(g_1 +_G H) +_{G/H} (g_2 +_G H) := (g_1 +_G H) +_G (g_2 +_G H) = (g_1 +_G g_2) +_G H,$$

$$P_{G/H}(g +_G H) := (-g) +_G H.$$

Struktura ta jest określona przez działanie

$$\ell^{G/H} : R \times (G/H) \longrightarrow G/H : (r, g +_G H) \longmapsto (r \triangleright g) +_G H$$

i nosi nazwę **modułu ilorazowego** (wzgl. **przestrzeni ilorazowej**, gdy  $R$  jest ciałem).

✓

#### PRZYKŁAD(Y) 12. (Homomorfizmy)

- (1) Odwzorowanie identycznościowe na dowolnym module lewostronnym.
- (2) Rzut kanoniczny  $\text{pr}_i : R^{x^n} \longrightarrow R$  na  $i$ -ty czynnik kartezjański modułu z Przykł. 11 (2), traktowany jako nośnik kanonicznej struktury modułu nad  $R$  dla  $n = 1$ .
- (3) Odwzorowanie grupy przemienniej  $G_1$  będącej nośnikiem struktury modułu lewostronnego nad pierścieniem  $R$  w grupę przemienną  $G_2$  dane wzorem  $\mathbf{0} : G_1 \longrightarrow G_2 : g \longmapsto \phi_0^{(2)}(\bullet)$  jest odwzorowaniem  $R$ -liniowym (względem trywialnej struktury  $R$ -modułu lewostronnego na grupie trywialnej  $\{\phi_0^{(2)}(\bullet)\}$ ). Odwzorowanie to nazywamy **homomorfizmem zerowym**.
- (4) Włożenie kanoniczne  $j_H : H \longrightarrow G$  (nośnika struktury) dowolnego podmodułu  $H \subset G$  w zawierający go moduł lewostronny nad pierścieniem  $R$  (patrz: Przykł. 2 (3)).
- (5) Rzut kanoniczny  $\pi_{G/H} : G \longrightarrow G/H$  (nośnika struktury) modułu lewostronnego nad pierścieniem  $R$  na moduł ilorazowy  $G/H$  względem dowolnego podmodułu  $H \subset G$  (patrz: Przykł. 2 (6)).
- (6) Dowolny homomorfizm grup przemiennych traktowanych jako moduły lewostronne nad pierścieniem  $\mathbb{Z}$  (jak w Przykł. 11 (4)) jest odwzorowaniem  $\mathbb{Z}$ -liniowym.

- (7) Automorfizmy dowolnej przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  tworzą grupę (z superpozycją jako operacją binarną) zwaną **grupą liniową główną przestrzeni** i oznaczaną symbolem

$$\mathrm{GL}(V; \mathbb{K}) \equiv \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V).$$

W szczególności w przypadku przestrzeni  $V := \mathbb{K}^{\times N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  otrzymujemy w ten sposób **grupę liniową główną stopnia  $N$  o współczynnikach z  $\mathbb{K}$** , oznaczaną symbolem

$$\mathrm{GL}(N; \mathbb{K}) \equiv \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(N).$$

✓

Pojęcie odwzorowania  $R$ -liniowego ma swoje naturalne, a istotne uogólnienie, które przypominamy w poniższej

DEFINICJA 16. Przyjmijmy zapis Def. 15 i niechaj  $G_A$ ,  $A \in \overline{1, N}$  oraz  $G$  będą modułami nad pierścieniem przemiennym  $R$ . **Odwzorowanie  $N$ -liniowe nad  $R$**  to dowolne odwzorowanie

$$\varphi : G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_N \longrightarrow G,$$

które jest  $R$ -liniowe (tj.  $\mathbb{Z}$ -liniowe i  $R$ -jednorodnie) względem każdego swojego argumentu, czyli spełnia warunek

$$\forall_{i \in \overline{1, N}} \forall_{(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_N) \in \times_{A \in \overline{1, N} \setminus \{i\}} G_A}$$

$$: \varphi(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, \cdot, g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_N) \in \mathrm{Hom}_R(G_i, G).$$

Zbiór wszystkich takich odwzorowań oznaczamy symbolem

$$\mathbb{L}_R(G_1, G_2, \dots, G_N; G).$$

W przypadku, gdy  $\forall_{A \in \overline{1, N}} : G_A = H$ , mówimy o **odwzorowaniu  $N$ -liniowym na  $H$** , a odnośny zbiór zapisujemy jako

$$\mathbb{L}_R^N(H; G) \equiv \mathbb{L}_R(\underbrace{H, H, \dots, H}_{N \text{ razy}}; G).$$

Jeśli ponadto  $G = R$ , to mamy do czynienia z **formami  $N$ -liniowymi** oznaczanymi – odpowiednio – jako

$$\mathbb{L}_R(G_1, G_2, \dots, G_N) \quad \text{lub} \quad \mathbb{L}_R^N(H).$$

W szczególności **forma liniowa** (lub inaczej **funkcjonał liniowy**) na  $G$  to dowolny element zbioru  $\mathrm{Hom}_R(G, R)$ . Ten ostatni jest nośnikiem naturalnej struktury  $R$ -modułu opisanej w Przykł. 11 (8) (w połączeniu z Przykł. 11 (2)). Owa struktura nosi miano **modułu sprzężonego do  $G$** , wzgl. **przestrzeni sprzężonej** w przypadku, gdy  $R = \mathbb{K}$  jest ciałem. W tym kontekście stosujemy oznaczenie

$$G^* := \mathrm{Hom}_R(G, R).$$

Niech  $\mathfrak{S}_N$  oznacza grupę symetryczną zbioru  $N$ -elementowego, działającą w naturalny sposób na  $H^{\times N}$ . Odwzorowanie  $\varphi \in \mathbb{L}_R^N(H; G)$  (wzgl.  $\varphi \in \mathbb{L}_R^N(H)$ ) nazywamy

- **symetrycznym**, jeśli  $\forall_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} : \varphi \circ \sigma = \varphi$  – ich zbiór oznaczamy symbolem  $\mathbb{L}_R^{N, \mathrm{sym}}(H; G)$  (wzgl.  $\mathbb{L}_R^{N, \mathrm{sym}}(H)$ );

- **skośnie symetrycznym** (lub **antysymetrycznym**), jeśli  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_N : \varphi \circ \sigma = \text{sgn}(\sigma) \varphi$  – ich zbiór oznaczamy symbolem  $\mathbb{L}_R^{N, \text{antysym}}(H; G)$  (wzgl.  $\mathbb{L}_R^{N, \text{antysym}}(H)$ );
- **alternującym**, jeśli

$$\forall_{\substack{i, j \in \overline{1, N} \\ i < j}} : (g_i = g_j \implies \varphi(g_1, g_2, \dots, g_N) = 0_G);$$

ich zbiór oznaczamy symbolem  $\mathbb{L}_R^{N, \text{alt}}(H; G)$  (wzgl.  $\mathbb{L}_R^{N, \text{alt}}(H) \equiv \wedge^N H^*$ ).

Dowolne odwzorowanie 2-liniowe  $\varphi \in L_R(G_1, G_2; G)$  określa **odwzorowanie lewostronnie stowarzyszone z  $\varphi$** ,

$$l_\varphi : G_1 \longrightarrow \text{Hom}_R(G_2, G) : g \longmapsto \varphi(g, \cdot),$$

oraz **odwzorowanie prawostronnie stowarzyszone z  $\varphi$** ,

$$r_\varphi : G_2 \longrightarrow \text{Hom}_R(G_1, G) : g \longmapsto \varphi(\cdot, g),$$

oba jawnie  $R$ -liniowe. Ilekroć oba odwzorowania stowarzyszone są iniektywne,  $\varphi$  określamy mianem **odwzorowania 2-liniowego niezwyrodniałego**, w przeciwnym razie mówimy o **odwzorowaniu 2-liniowym zwyrodniałym**. Odwzorowanie 2-liniowe o bijektywnych odwzorowaniach stowarzyszonych (obu) nazywamy **odwzorowaniem 2-liniowym nieosobliwym**. Nieosobliwa forma 2-liniowa  $\Delta : G_1 \times G_2 \longrightarrow R$  to **dwoistość** (lub inaczej **dualność**), a odnośna dwójka  $(G_1, G_2)$  bywa nazywana **parą dwoistą** (lub inaczej **parą dualną**). ▲

Ilekroć mamy do czynienia z modułami wolnymi, opis odwzorowań wieloliniowych alternujących ulega istotnemu uproszczeniu, o czym orzeka

**STWIERDZENIE 4.** *Przyjmijmy notację Def. 18 oraz 16. Niechaj  $G$  będzie modulem wolnym (skończonego rzędu) nad pierścieniem  $R$  o bazie  $\{g_i\}_{i \in \overline{1, n}}$  i niech  $\varphi \in \mathbb{L}_R^{N, \text{alt}}(G)$ . Wówczas  $\varphi \equiv 0$ , jeśli  $N > n$ , gdy zaś  $N \leq n$ , to forma  $\varphi$  jest jednoznacznie określona przez wartości przyjmowane przezeń na  $\binom{n}{N}$  układach  $(g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_N})$  uporządkowanych przez relację  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq n$ . W szczególności przy  $N = n$  formę  $\varphi$  zadaje pojedynczy skalar  $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_n)$ .* ■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 110]. □

Suma prosta modułów form alternujących  $\wedge^N G^*$  na dowolnym module  $G$  nad pierścieniem przemiennym  $R$  jest nośnikiem naturalnej operacji binarnej, o której mówi

**DEFINICJA 17.** Przyjmijmy zapis Def. 16 i niechaj  $G$  będzie modulem nad pierścieniem przemiennym  $R$ . **Iloczyn zewnętrzny form alternujących**  $\omega_1 \in \wedge^{N_1} G^*$ ,  $N_1 \in \mathbb{N}^\times$  i  $\omega_2 \in \wedge^{N_2} G^*$ ,  $N_2 \in \mathbb{N}^\times$  to forma alternująca z  $\wedge^{N_1+N_2} G^*$  dana wzorem

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge_{N_1, N_2} \omega_2 & : G^{\times N_1+N_2} \longrightarrow R : (g_1, g_2, \dots, g_{N_1+N_2}) \longmapsto \\ & \frac{1}{N_1! N_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{N_1+N_2}} \text{sgn}(\sigma) \omega_1(g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \dots, g_{\sigma(N_1)}) \\ & \quad \cdot \mathbb{K} \omega_2(g_{\sigma(N_1+1)}, g_{\sigma(N_1+2)}, \dots, g_{\sigma(N_1+N_2)}). \end{aligned}$$



Podstawowe własności powyższej operacji opisuje

STWIERDZENIE 5. *Przyjmijmy zapis Def. 17. Odwzorowanie*

$$\wedge_{N_1, N_2} : \bigwedge^{N_1} G^* \wedge \bigwedge^{N_2} G^* \longrightarrow \bigwedge^{N_1+N_2} G^* : (\omega_1, \omega_2) \longmapsto \omega_1 \wedge_{N_1, N_2} \omega_2$$

jest dwu-R-liniowe, a nadto zachodzi tożsamość

$$\omega_2 \wedge_{N_1, N_2} \omega_1 = (-1)^{N_1 \cdot N_2} \omega_1 \wedge_{N_2, N_1} \omega_2.$$

W tych samych oznaczeniach i dla dowolnej formy  $\omega_3 \in \bigwedge^{N_3} G^*$ ,  $N_3 \in \mathbb{N}^\times$  prawdziwa jest także równość

$$(\omega_1 \wedge_{N_1, N_2} \omega_2) \wedge_{N_1+N_2, N_3} \omega_3 = \omega_1 \wedge_{N_1, N_2+N_3} (\omega_2 \wedge_{N_2, N_3} \omega_3).$$



*Dowód:* Oczywisty. □

Mamy także proste, acz istotne

STWIERDZENIE 6. *Przyjmijmy zapis Def. 16. Dowolna dwoistość*

$$\Delta : G_1 \times G_2 \longrightarrow R$$

zadaje parę izomorfizmów  $R$ -modułów

$$l_\Delta : G_1 \xrightarrow{\cong} G_2^*, \quad r_\Delta : G_2 \xrightarrow{\cong} G_1^*.$$



*Dowód:* Patrz: [Sus13, Cor. 16]. □

Na zakończenie wstępnej części wykładu, poświęconej przypomnieniu podstawowych pojęć z pierwszorocznego kursu algebry i stosownemu ich przeformułowaniu w języku niniejszego wykładu, przedstawimy kilka istotnych twierdzeń charakteryzujących moduły nad pierścieniami. Zaczniemy od uzupełnienia bazy pojęciowej.

DEFINICJA 18. Niechaj  $\Lambda$  i  $S$  będą zbiorami. **Rodzina elementów zbioru  $S$  indeksowana przez zbiór  $\Lambda$**  to odwzorowanie  $x : \Lambda \longrightarrow S : \lambda \longmapsto x_\lambda$ , przy czym element  $\lambda \in \Lambda$  określamy mianem **indeksu**, zbiór  $\Lambda$  zaś – mianem **zbioru indeksów**. Rodzinę taką zapisujemy w postaci  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Ilekroć  $S$  jest nośnikiem struktury monoidu o elemencie neutralnym  $e$ , wprowadzamy pojęcie **nośnika rodziny**  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  danego wzorem

$$\text{supp } \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} := \{ \lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \neq e \}.$$

**Rodzina o nośniku skończonym** to taka, której nośnik ma moc skończoną. Zbiór wszystkich takich rodzin będziemy oznaczać symbolem  $\mathcal{R}_0(S; \Lambda)$ .

Przyjmując notację Def. 15, a dla dowolnego podzbioru  $S \subset G$  modułu  $G$ , **kombinacja liniowa elementów zbioru  $S$  o współczynnikach z pierścienia  $R$**  to dowolna suma (w sensie dodawania  $+_G$  w grupie przemiennej  $G$ )

$$\sum_{g \in S} r_g \triangleright g,$$

wyznaczona przez rodzinę  $\{r_g\}_{g \in S}$  elementów z  $R$  indeksowaną przez  $S$ , o nośniku skończonym. Elementy tej rodziny określamy mianem **współczynników kombinacji liniowej**.

Podmoduł

$$\langle S \rangle_R := \left\{ \sum_{g \in S} r_g \triangleright g \mid \{r_g\}_{g \in S} \in \mathcal{R}_0(R; S) \right\} \subset G,$$

będący najmniejszym podmodulem  $G$  zawierający  $S$ , określamy mianem **(pod)modułu generowanego** (albo **rozpinanego**) **przez zbiór  $S$**  (albo inaczej **powłoki liniowej zbioru  $S$  nad  $R$**  czy wreszcie **powłoki  $R$ -liniowej zbioru  $S$** ), ten ostatni zaś nazywamy **zbiorem generatorów** (lub **generującym**) **podmodułu  $\langle S \rangle_R$** . Jeśli  $S = \{g\}$  (jest singletonem), to odnośny moduł oznaczamy przez  $\langle S \rangle_R \equiv \langle g \rangle_R$  i nazywamy **modulem cyklicznym**. Moduł o skończonej liczbie generatorów, tj. taki, dla którego  $|S| < \infty$ , nosi miano **modułu skończenie generowanego**.

**Rodzina  $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  elementów modułu  $G$  jest liniowo niezależna nad pierścieniem  $R$** , jeśli spełnia warunek

$$\forall_{\{r_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{R}_0(R; \Lambda)} : \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright g_\lambda = 0_G \implies \forall_{\lambda \in \Lambda} : r_\lambda = 0_R \right).$$

**Podzbiór  $S \subset G$  nazywamy liniowo niezależnym nad pierścieniem  $R$** , jeśli jako rodzina elementów z  $R$  indeksowana przez  $S$  jest liniowo niezależny nad  $R$ , tj. jeśli znikanie dowolnej kombinacji liniowej  $\sum_{g \in S} r_g \triangleright g = 0_G$  implikuje równość  $r_g = 0_R$  dla każdego  $g \in S$ .

Rodzinę  $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  (wzgl. podzbiór  $S \subset G$ ) nazywamy **liniowo zależną(-nym)**, jeśli nie jest liniowo niezależna(-ny).

Rodzinę  $\mathcal{B} = \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  elementów modułu  $G$  nad pierścieniem  $R$  nazwiemy **bazą modułu  $G$** , jeśli jest ona niepusta, liniowo niezależna nad  $R$  i generuje  $G$ . Podzbiór  $S \subset G$  o tych samych własnościach określimy w ten sam sposób. Równoważnie powiemy, że podzbiór  $\mathcal{B} \subset G$  jest bazą modułu  $G$ , gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{g \in G} \exists!_{\{r_h\}_{h \in \mathcal{B}} \in \mathcal{R}_0(R; \mathcal{B})} : g = \sum_{h \in \mathcal{B}} r_h \triangleright h,$$

tj. gdy każdy element modułu ma jednoznaczne przedstawienie w postaci kombinacji liniowej elementów tego podzbioru.

**Moduł wolny (na zbiorze  $\mathcal{B}$ )** to moduł trywialny lub taki, który posiada bazę  $\mathcal{B}$ .

▲

Poniższe przykłady ilustrują (m.in.) pewne istotne różnice między modułami nad ogólnymi (choćby nawet "najbanalniejszymi") pierścieniami i przestrzeniami wektorowymi w kontekście wprowadzonych pojęć.

PRZYKŁAD(Y) 13.

- (1) W  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}^2$  z Przykł. 11 (2) zbiór  $\{(2, 0), (3, 0)\}$  jest liniowo zależny, bo

$$3 \triangleright (2, 0) + (-2) \triangleright (3, 0) = (0, 0),$$

ale zarazem nie istnieje  $n \in \mathbb{Z}$  o własności  $(2, 0) = n \triangleright (3, 0)$ .

- (2) W  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  z Przykł. 11 (6) dowolny singleton  $\{[k]_n\}$  jest liniowo zależny (każdy element  $[k]_n$  tego modułu jest liniowo zależny). W konsekwencji moduł ten, choć cykliczny, nie posiada bazy.

- (3) W kanonicznym  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}$  (patrz: Przykł. 11 (2)) podzbiór  $\{2\}$  jest w oczywisty sposób maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym, ale nie generuje całego modułu (bo np.  $1 \notin \langle 2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ ).
- (4) Element neutralny  $1_R$  jest bazą modułu  $R$  z Przykł. 11 (2).
- (5) Rodzina elementów  $\{e_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ ,  $e_i = (\delta_{i, j}^R)_{j \in \overline{1, n}}$ , gdzie

$$\delta_{i, j}^R = \begin{cases} 1_R & \text{dla } j = i \\ 0_R & \text{dla } j \neq i \end{cases}$$

jest **symbolem Kroneckera** (zwanym też **delta Kroneckera**), jest **bazą standardową** modułu wolnego  $R^{\times n}$  z Przykł. 11 (2). W przypadku pierścienia  $R = \mathbb{K}$  o strukturze ciała ta sama rodzina elementów (wektorów) jest bazą standardową przestrzeni wektorowej  $\mathbb{K}^{\times n}$ .

- (6)  $R$ -moduł wolny z Przykł. 11 (3) jest wolny w rozumieniu Def. 18, a jego bazą jest, np., układ  $\{\delta_s\}_{s \in S}$  odwzorowań

$$\delta_s : S \longrightarrow R : t \longmapsto \begin{cases} 1_R & \text{dla } t = s \\ 0_R & \text{dla } t \neq s \end{cases} .$$

✓

Istnienie skończonej bazy w module nad pierścieniem (o cesze IBN) można wykrywać do uporządkowania struktury izomorficznego z nim modułu sprzężonego.

**STWIERDZENIE 7.** *Przyjmijmy notację Def. 18 oraz 16 i niechaj  $G$  będzie lewostronnym modulem wolnym nad pierścieniem  $R$ , o bazie  $\mathcal{B} = \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ . W module  $G^*$  doń sprzężonym istnieje układ liniowo niezależny  $\mathcal{B}^* := \{g_\lambda^*\}_{\lambda \in \Lambda}$  o własności*

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda : g_\lambda^*(g_\mu) = \delta_{\lambda, \mu}^R .$$

*Jego elementy określamy mianem **form współrzędniowych** (lub **funkcjonałów współrzędniowych**, wzgl. **współrzędnych**) na  $G$  względem  $\mathcal{B}$ . Jeśli  $|\Lambda| < \infty$ , to  $\mathcal{B}^*$  jest bazą modułu sprzężonego, zwaną **bazą dualną do  $\mathcal{B}$** .*

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 140].

□

Bazę dualną możemy następnie wykorzystać w połączeniu z konstrukcją iloczynu zewnętrznego z Def. 17 w celu wyprowadzenia niezwykle przydatnego konkretnego opisu baz modułów  $\wedge^N G^*$ ,  $N \in \mathbb{N}^{\times}$  dla modułu wolnego  $G$  skończonego rzędu.

**STWIERDZENIE 8.** *Przyjmijmy zapis Def. 17 i 18 oraz Stw. 7, ustalmy (dowolnie)  $N \in \overline{1, n}$  i niechaj  $G$  będzie modulem nad pierścieniem przemiennym  $R$  o bazie  $\{g_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ . Wówczas rodzina form  $N$ -liniowych*

$$\mathcal{B}_N := \{g_{i_1}^* \wedge g_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge g_{i_N}^*\}_{i_k \in \overline{1, n}, k \in \overline{1, N}, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leq n}$$

*jest bazą modułu  $\wedge^N G^*$ .*

■

*Dowód:* W świetle Stw. 4 dowolną formę  $\varphi$  można zapisać w postaci

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leq n} \varphi(g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_N}) \triangleright g_{i_1}^* \wedge g_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge g_{i_N}^* ,$$



skąd wniosek, że  $\mathcal{B}_N$  jest układem generującym dla  $\wedge^N G^*$ . Przy tym ilekroć

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq n} \lambda_{i_1 i_2 \dots i_N} \triangleright g_{i_1}^* \wedge g_{i_2}^* \wedge \dots \wedge g_{i_N}^* = 0, \quad \lambda_{i_1 i_2 \dots i_N} \in R,$$

ewaluacja obu stron powyższej równości na układzie  $(g_{j_1}, g_{j_2}, \dots, g_{j_N})$ ,  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_N \leq n$  daje tożsamość

$$\lambda_{j_1 j_2 \dots j_N} = 0_R,$$

zatem  $\mathcal{B}_N$  jest też układem liniowo niezależnym, czyli bazą.  $\square$

Prostą praktyczną konsekwencją istnienia baz w modułach nad pierścieniem jest dostępność opisu macierzowego odwzorowań  $R$ -liniowych między nimi, który przypomina

DEFINICJA 19. Przyjmijmy zapis Def. 18. Niechaj  $G_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą  $R$ -modułami lewostronnymi nad pierścieniem  $R$ , o odnośnych bazach  $\mathcal{B}_\alpha = \{g_{\lambda_\alpha}^{(\alpha)}\}_{\lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha}$  i niech  $\chi \in \text{Hom}_R(G_1, G_2)$  będzie oddwzorowaniem  $R$ -liniowym określonym wzorami

$$\chi(g_{\lambda_1}^{(1)}) = \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \chi_{\lambda_1}^{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}^{(2)},$$

słusznymi dla wszystkich  $\lambda_1 \in \Lambda_1$ . Odwzorowanie

$$(1.1.4) \quad [\chi]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} : \Lambda_2 \times \Lambda_1 \longrightarrow R : (\lambda_2, \lambda_1) \longmapsto \chi_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

nosi miano **macierzy odwzorowania  $R$ -liniowego  $\chi$  względem baz  $\mathcal{B}_1$  i  $\mathcal{B}_2$** .  $\blacktriangle$

Użytecznego alternatywnego spojrzenia na pojęcie bazy dostarcza

DEFINICJA 20. Przyjmijmy zapis Def. 16 i 19 oraz Przykł. 3 (8). Niechaj  $G$  będzie modulem wolnym rzędu  $\text{rk}_R G := N \in \mathbb{N}$  nad pierścieniem przemiennym  $R$ . **Wyznacznik na module  $G$**  to dowolna alternująca forma  $N$ -liniowa  $\Delta_{\mathcal{B}}$  spełniająca warunek

$$\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) := \Delta_{\mathcal{B}}(g_1, g_2, \dots, g_N) := \mathbf{1}_R$$

dla pewnej bazy  $\mathcal{B} := \{g_i\}_{i \in \overline{1, N}}$  modułu  $G$ , przy czym w świetle Def. 16 zapis powyższy *implicite* wyróżnia porządek na  $\mathcal{B}$  wyznaczony przez ustaloną numerację jej elementów. W szczególności wyznacznik  $\Delta_{\mathcal{E}}$  na module  $R^{\times N}$  z Przykł. 11 (2) stowarzyszony z bazą standardową  $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$  z Przykł. 13 (5), uporządkowaną według wzrostu wartości indeksu  $i$  określamy mianem **wyznacznika macierzowego stopnia  $N$  (o wyrazach z  $R$ )** i oznaczamy symbolem

$$\Delta_{\mathcal{E}} \equiv \det_{(N)}.$$

Na tej podstawie definiujemy **wyznacznik endomorfizmu  $\chi \in \text{End}_R(G)$**  jako skalar

$$\det \chi := \det_{\text{rk}_R G}([\chi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}),$$

określony dla dowolnego wyboru bazy  $\mathcal{B}$  modułu  $G$ .

Rozważmy na koniec przestrzeń  $R$ -liniową  $V$ . Niech  $\mathfrak{B}_V$  będzie zbiorem (wszystkich) baz modułu  $V$ . **Orientacja przestrzeni  $R$ -liniowej** to klasa abstrakcji baz względem relacji równoważności

$$\forall \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathfrak{B}_V : (\mathcal{B}_1 \sim_o \mathcal{B}_2 \iff \det_{(N)}([\text{id}_G]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}) > 0).$$



Mamy fundamentalne

**STWIERDZENIE 9.** *Wyznacznik na dowolnym module nad dowolnym pierścieniem przemiennym istnieje, wyznacznik endomorfizmu natomiast nie zależy od wyboru bazy modułu.*



*Dowód:* Patrz: [Sus13, Tw. 8.12 oraz Stw. 115 i 116].



Jedną z podstawowych własności algebraicznych wyznacznika opisuje

**STWIERDZENIE 10** (Wzór wyznacznikowy Cauchy’ego). *Przyjmijmy notację Def. 20. Dla dowolnych dwóch macierzy  $M_1, M_2 \in \text{Mat}(R; N)$  zachodzi wzór Cauchy’ego*

$$\det_{(N)}(M_1 \boxplus M_2) = \det_{(N)}(M_1) \cdot_R \det_{(N)}(M_2),$$

*tj. wyznacznik jest odwzorowaniem mnożącym.*



*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 114].



Prosty związek między wyznacznikiem endomorfizmu modułu wolnego i (dowolnym) wyznacznikiem na tymże module opisuje poniższe

**STWIERDZENIE 11.** *Przyjmijmy zapis Def. 20. Niechaj  $G$  będzie modulem wolnym rzędu  $\text{rk}_R G := N \in \mathbb{N}$  nad pierścieniem przemiennym  $R$ , niech  $\Delta_{\mathcal{B}} \in \mathbb{L}_R^{N, \text{alt}}(G)$  będzie wyznacznikiem na  $G$  stowarzyszonym z (dowolną) bazą  $\mathcal{B}$  modułu  $G$  i niech  $\chi \in \text{End}_R(G)$  będzie jego endomorfizmem. **Cofnięcie wyznacznika  $\Delta_{\mathcal{B}}$  wzdłuż endomorfizmu  $\chi$** , zdefiniowane wzorem*

$$\chi^* \Delta_{\mathcal{B}} := \Delta_{\mathcal{B}} \circ (\chi \times \chi \times \cdots \times \chi) \in \mathbb{L}_R^{N, \text{alt}}(G),$$

*spełnia tożsamość*

$$(1.1.5) \quad \chi^* \Delta_{\mathcal{B}} = \det \chi \triangleright \Delta_{\mathcal{B}}.$$



*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 117].



Możemy już teraz wysłowić kilka istotnych wyników ogólnych z teorii modułów. Zaczniemy od twierdzenia, które w sposób fundamentalny wyróżnia przestrzenie wektorowe spośród modułów nad pierścieniami (por.: Przykł. 13 (2)).

**TWIERDZENIE 1.1.3** (O istnieniu bazy przestrzeni wektorowej). *Przyjmijmy zapis Def. 9 oraz 18 i załóżmy, że  $V$  jest nietrywialną przestrzenią wektorową. Jeśli  $\Gamma$  jest dowolnym zbiorem generatorów  $V$  nad  $\mathbb{K}$ , a  $S$  – pewnym liniowo niezależnym (nad  $\mathbb{K}$ ) podzbiorem  $\Gamma$ , to wtedy istnieje w  $V$  baza  $\mathcal{B}$  o własności  $S \subset \mathcal{B} \subset \Gamma$ .*



*Dowód:* Twierdzenie to ma status logicznego równoważnika Aksjomatu Wyboru, gdyż niekonstruktywny dowód istnienia bazy  $\mathcal{B}$ , zwanej często **bazą Hamela** lub **bazą algebraiczną** (w kontekście nieskończeniowym, a przy braku dodatkowej struktury na  $V$ ), odwołuje się wprost do Lematu Kuratowskiego–Zorna. Dowód taki został przedstawiony w notatkach wykładowych [Sus13, Tw. 8.5].



Należy podkreślić, że powyższe twierdzenie orzeka twierdząco o istnieniu bazy w *dowolnej* przestrzeni wektorowej – istotnie, każda przestrzeń  $V$  ma zbiór generujący, np.  $V$ . Przedstawiony jego dowód, jakkolwiek szalenie elegancki, nie niesie najskromniejszej nawet sugestii odnośnie do *konstrukcji* bazy przestrzeni wektorowej. W przypadku przestrzeni skończenie generowanej (tj. takiej, w której  $|\Gamma| < \infty$ ) niezręczność tę usuwa konstruktywny dowód poniższego

**STWIERDZENIE 12.** (Lemat Steinitza o wymianie) *Dowolny podzbiór liniowo niezależny skończenie generowanej przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  ma moc mniejszą od mocy zbioru generującego lub jej równą, a ponadto można go uzupełnić do bazy tej przestrzeni wektorami ze zbioru generującego.* ■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 78]. □

Tę część wykładu zakończymy podsumowaniem własności bazy modułu wolnego.

**STWIERDZENIE 13.** *Przyjmijmy zapis Def. 18 i 15. W dowolnym module  $G$  nad pierścieniem  $R$  poniższe zdania*

- (i)  $\mathcal{B}$  jest bazą  $G$ .
- (ii)  $\mathcal{B}$  jest maksymalnym (w sensie  $\subset$ ) podzbiorem liniowo niezależnym  $G$ .
- (iii)  $\mathcal{B}$  jest minimalnym (w sensie  $\subset$ ) podzbiorem generującym  $G$ .

pozostają w relacji

$$(i) \implies (ii) \quad (\text{BL})$$

oraz

$$(i) \implies (iii). \quad (\text{BG})$$

Jeśli  $R = \mathbb{K}$  jest ciałem, to także

$$(ii) \implies (i) \quad (\text{K-LB})$$

oraz

$$(iii) \implies (i). \quad (\text{K-GB})$$

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 79]. □

Przykładem modułu nad pierścieniem, w którym nie jest spełnione wynikanie (K-LB) jest kanoniczny  $\mathbb{Z}$ -moduł  $\mathbb{Z}$  (patrz: Przykł. 11 (2)), w którym podzbiór  $\{2\}$  jest w oczywisty sposób maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym, ale nie generuje całego modułu (bo np.  $1 \notin \langle 2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ ). Zdanie (K-GB) traci słuszność np. w przypadku  $\mathbb{Z}$ -modułu  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (patrz: Przykł. 11 (6)), w którym minimalny zbiór generujący  $\{\{1\}_n\}$  nie jest liniowo niezależny (patrz: Przykł. 13 (2)).

Chwila zastanowienia pozwala stwierdzić, że wybór bazy – ilekroć jest możliwy – nie jest w ogólności jednoznaczny. Pozostaje jednak intuicyjne pytanie o istnienie niezmiennika takiego wyboru określonego jako moc dowolnego podzbioru bazowego. Do sformułowania pierwszej odpowiedzi w tym kontekście prowadzi nas

**STWIERDZENIE 14.** *Przyjmijmy zapis Def. 15 i 18. Niechaj  $\Lambda \neq \emptyset$  będzie zbiorem (indeksów) i niech rodzina  $\mathcal{B}_1 := \{g_\lambda^{(1)}\}_{\lambda \in \Lambda} \subset G_1$  będzie bazą modułu  $G_1$ . Dla dowolnej rodziny  $\{g_\lambda^{(2)}\}_{\lambda \in \Lambda} \subset G_2$  istnieje jedyny homomorfizm  $R$ -modułów*

$$\chi : G_1 \longrightarrow G_2$$

o własności

$$(1.1.6) \quad \forall \lambda \in \Lambda : \chi(g_\lambda^{(1)}) = g_\lambda^{(2)}.$$

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 80].

□

Powyższe stwierdzenie można wysłowić w sposób przemawiający do wyobraźni bardziej bezpośrednio: Oto każde odwzorowanie  $R$ -liniowe  $\chi : G_1 \rightarrow G_2$  jest jednoznacznie zadane przez wartości, jakie przyjmuje na elementach bazy  $\mathcal{B}$  swej dziedziny, a zarazem dowolne odwzorowanie  $\mathcal{B} \rightarrow G_2$  można rozszerzyć do odwzorowania  $R$ -liniowego o dziedzinie  $G_1 \supset \mathcal{B}$ .

Jako istotny wniosek z tego stwierdzenia wyprowadzamy

**COROLLARIUM 1.** *W notacji Stw. 14  $\chi$  jest izomorfizmem  $R$ -modułów, jeśli rodzina  $\{g_\lambda^{(2)}\}_{\lambda \in \Lambda}$  jest bazą modułu  $G_2$ .*

■

Stąd też oczywiste

**COROLLARIUM 2.** *Dowolne dwa moduły nad tym samym pierścieniem mające bazy jednakowej mocy są izomorficzne.*

■

Powyższa analiza skłania do postawienia pytania o słuszność implikacji odwrotnej. Odpowiedź dla przypadku modułu nieskończenie generowanego zawiera

**STWIERDZENIE 15.** *Przyjmijmy zapis Def. 15 i niech  $\Gamma_0$  będzie minimalnym podzbiorem generującym  $R$ -modułu  $G$ , przy czym zakładamy, że moc  $|\Gamma_0| =: \kappa_0$  jest nieskończona ( $\kappa_0$  jest stosowną liczbą kardynalną). Każdy podzbiór generujący  $G$  ma moc nie mniejszą niż  $\kappa_0$ . W szczególności  $G$  nie jest skończenie generowany. Ponadto dowolne dwa minimalne zbiory generujące mają jednaką moc.*

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 81].

□

Okazuje się, że równoliczność dowolnych dwóch baz modułu nad pierścieniem nie jest cechą uniwersalną. Ta konstatacja uzasadnia

**DEFINICJA 21. Pierścień o cesze IBN<sup>7</sup>**  $R$  to taki, dla którego każde dwie bazy dowolnego modułu (wolnego)  $G$  nad tymże pierścieniem mają tę samą moc. Tę ostatnią określamy wtedy mianem **rzędu modułu** i oznaczamy symbolem  $\text{rk}_R G$ .

▲

Brak cechy IBN jest uznawany za patologię w kategorii pierścieni, są jednak znane przykłady struktur tego rodzaju, a nawet całe ich rodziny, patrz: prace Leavitt(-Forgettitta) [Lea56, Lea57]. Określoność rzędu jest kolejną cechą wyróżniającą przestrzenie wektorowe spośród modułów. Oto bowiem zachodzi

**TWIERDZENIE 1.1.4** (O wymiarze przestrzeni wektorowej). *Dowolne ciało ma cechę IBN, tj. dowolna przestrzeń wektorowa ma dobrze określony rząd.*

<sup>7</sup>Z jęz. ang., w którym akronim IBN pochodzi od wyrażenia „Invariant Basis Number”, które w wolnym tłumaczeniu oznacza „niezmienniczą moc bazy”.

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Tw. 8.8]. □

Powyższy wynik uzasadnia

DEFINICJA 22. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz 21. Rząd przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  określamy mianem **wymiaru** ( $\mathbb{K}$ -liniowego) tej przestrzeni i oznaczamy symbolem

$$\dim_{\mathbb{K}} V := \text{rk}_{\mathbb{K}} V.$$

▲

Wprowadzony niezmiennik jest stały na klasach izomorfizmu przestrzeni wektorowych.

STWIERDZENIE 16. *Izomorficzne przestrzenie wektorowe mają ten sam wymiar.*

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 82]. □

Ma on też (intuicyjnie) oczekiwaną cechę monotoniczności

STWIERDZENIE 17 (Bilans wymiarów). *Przyjmijmy zapis Def. 22. Niechaj  $V$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{K}$  i niech  $W \subset V$  będzie jej podprzestrzenią. Wówczas*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} V/W.$$

*W szczególności więc*

$$\dim_{\mathbb{K}} W \leq \dim_{\mathbb{K}} V,$$

*przy czym ilekroć  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ , równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $W = V$ .*

*Ogólniej, niech  $\chi : V_1 \rightarrow V_2$  będzie odwzorowaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym, a wtedy*

$$\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \chi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \chi.$$

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 83]. □

Pojęcie wymiaru pozwala nam wysłowić istotną obserwację porządkującą dotyczącą reprezentacji macierzowej odwzorowań  $\mathbb{K}$ -liniowych między przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ , opisanej w Def. 19. Oto okazuje się, że wszelka nietrywialna struktura macierzy (dowolnego) odwzorowania  $\mathbb{K}$ -liniowego jest związana z wyborem baz w dziedzinie oraz w przeciwdziedzinie (a ściślej – w obrazie) tegoż odwzorowania. Obserwację tę precyzuje

STWIERDZENIE 18 (O postaci kanonicznej (macierzy) odwzorowania  $\mathbb{K}$ -liniowego). *Przyjmijmy notację Def. 19 i 22 oraz Przykł. 1 (6). Dla dowolnych dwóch skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych  $V_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nad ciałem  $\mathbb{K}$ , i dla dowolnego odwzorowania  $\mathbb{K}$ -liniowego  $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  istnieje taki wybór odnośnych baz  $\mathcal{B}_\alpha$ , przy którym macierz  $\chi$  przyjmuje kanoniczną postać blokową*

$$[\chi]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0}_{r \times k} \\ \mathbf{0}_{(D_2-r) \times r} & \mathbf{0}_{(D_2-r) \times k} \end{pmatrix},$$

gdzie  $\mathbf{0}_{m \times n} \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ ,  $m, n \in \mathbb{N}^*$  jest macierzą (rozmiaru  $m \times n$  o współczynnikach z  $\mathbb{K}$ ) o wszystkich wyrazach równych  $0_{\mathbb{K}}$  i gdzie

$$r := \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \chi, \quad k := \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \chi, \quad D_2 := \dim_{\mathbb{K}} V_2.$$

Wymiar  $r$  obrazu odwzorowania liniowego  $\chi$  określamy mianem **rzędu odwzorowania liniowego**  $\chi$  i oznaczamy symbolem

$$\text{rk } \chi := \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \chi.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw.102].

□

Wiele pojęć wprowadzanych w kontekście rozważań nad grupami przemiennymi przenosi się w naturalny sposób do obecnego kontekstu dyskusji struktury modułu nad ustalonym pierścieniem. To samo dotyczy niektórych fundamentalnych konstrukcji homomorfizmów kanonicznych oraz indukowanych, z których dwie przytaczamy poniżej bez dowodu<sup>8</sup> po ich uprzednim przeformułowaniu.

**STWIERDZENIE 19.** *Jądro homomorfizmu modułów lewostronnych nad dowolnym pierścieniem jest podmodułem dziedziny tegoż homomorfizmu, natomiast jego obraz jest podmodułem przeciwdziedziny.*

■

Wprowadzamy wygodną

**DEFINICJA 23.** W notacji Def. 15, Przykł. 1 (6) i (7) oraz 11 (14) **koobraz homomorfizmu  $\chi$  modułów nad pierścieniem** to moduł ilorazowy

$$\text{Coim } \chi := G_1 / \text{Ker } \chi,$$

natomiast jego **kojądro** to moduł ilorazowy

$$\text{Coker } \chi := G_2 / \text{Im } \chi.$$

▲

**TWIERDZENIE 1.1.5 (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie (dla modułów)).** *W notacji Def. 15 i 23 oraz Przykł. 12 (4) i (5)  $\text{Ker } \chi$  jest podmodułem  $G_1$ , a nadto istnieje kanoniczny izomorfizm modułów*

$$\lambda_{\chi} : \text{Coim } \chi \xrightarrow{\cong} \text{Im } \chi,$$

który czyni przemiennym następujący diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \text{Ker } \chi & \xrightarrow{J_{\text{Ker } \chi}} & G_1 & \xrightarrow{\chi} & G_2 & \xrightarrow{\pi_{\text{Coker } \chi}} & \text{Coker } \chi & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & & & & \downarrow \pi_{\text{Coim } \chi} & & \uparrow J_{\text{Im } \chi} & & & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \text{Coim } \chi & \xrightarrow{\lambda_{\chi}} & \text{Im } \chi & \longrightarrow & \mathbf{0} & & & & \\ & & \downarrow & & \uparrow & & & & & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & & & & & \end{array}$$

<sup>8</sup>W każdym z przypadków dowód sprowadza się do bezpośredniego sprawdzenia  $R$ -liniowości stosownych homomorfizmów grup skonstruowanych w dowodach odpowiedników wypisanych twierdzeń zamieszczonych w części poświęconej grupom przemiennym.

o wierszach i kolumnach **dokładnych**, tj. o tej własności, że dla każdej pary następujących po sobie homomorfizmów jądro następnika jest obrazem poprzednika. Diagram ten opisuje kanoniczny rozkład homomorfizmu  $\chi$  jak w Tw. 1.1.2. ■

W dalszych naszych studiach natrafimy na przestrzenie wektorowe z dodatkową strukturą, która będzie odgrywać centralną rolę w dyskutowanych konstrukcjach i dowodach omawianych twierdzeń. Fakt ten usprawiedliwia zwięzłą rekapitulację elementów teorii ogólnej owych struktur znanych z wykładu algebry liniowej. Zaczniemy od

DEFINICJA 24. Przyjmijmy zapis Def. 16 i 18 oraz Przykł. 6 (1) i niechaj  $\mathbb{K}$  będzie ciałem o charakterystyce  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ , a  $V$  – przestrzenią wektorową nad  $\mathbb{K}$ . **Forma kwadratowa** na  $V$  to odwzorowanie

$$Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

**jednorodnego stopnia 2**, tj. spełniające warunek

$$\forall_{(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V} : Q(\lambda \triangleright_V v) = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v),$$

i o tej własności, że odwzorowanie

$$\Phi_Q : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} : (v, w) \longmapsto 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} (Q(v +_V w) - Q(v) - Q(w)),$$

zapisane z użyciem  $2_{\mathbb{K}} := 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}$ , jest formą dwuliniową na  $V$ . Formę tę, jawnie symetryczną, określamy mianem **formy dwuliniowej stowarzyszonej z  $Q$** . **Jądro formy kwadratowej** to jądro odwzorowania lewostronnie stowarzyszonego z  $\Phi_Q$ , tj. odwzorowania  $\mathbb{K}$ -liniowego

$$l_{\Phi_Q} : V \longrightarrow V^* : v \longmapsto \Phi_Q(v, \cdot),$$

a zatem

$$\text{Ker } Q := \text{Ker } l_{\Phi_Q} \subset V.$$

Formę kwadratową  $Q$  nazywamy **niezwyrodniałą**, jeśli  $\text{Ker } Q = \{0_V\}$ , i **zwyrodniałą** w przeciwnym przypadku. Te same określenia odnosimy do przestrzeni wektorowej, na której określona jest forma kwadratowa.

**Macierz formy kwadratowej  $Q$**  względem bazy  $\mathcal{B} = \{v_n\}_{n \in \overline{1, N}}$  przestrzeni  $V$  (wymiaru  $\dim_{\mathbb{K}} V = N$ ), to macierz stowarzyszonej z nią formy dwuliniowej, tj.

$$[Q]_{\mathcal{B}} : \overline{1, N} \times \overline{1, N} \longrightarrow \mathbb{K} : (m, n) \longmapsto \Phi_Q(v_m, v_n).$$

**Przestrzeń kwadratowa** to para  $\left( ((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V), Q \right)$  złożona z przestrzeni wektorowej  $((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V)$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  oraz formy kwadratowej  $Q$  na niej określonej.

**Homomorfizm przestrzeni kwadratowej**  $\left( ((V_1, +_1, P_1, \bullet \longmapsto 0_1), \ell_1), Q_1 \right)$  w przestrzeń kwadratową  $\left( ((V_2, +_2, P_2, \bullet \longmapsto 0_2), \ell_2), Q_2 \right)$ , zwany także **izometrią** lub **odwzorowaniem ortogonalnym** między tymi przestrzeniami, to odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe  $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  o własności

$$Q_2 \circ \chi = Q_1.$$

W szczególności automorfizmy danej przestrzeni kwadratowej  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q)$  określamy mianem **automorfizmów ortogonalnych** (lub **transformacji ortogonalnych**), generowaną zaś przez nie grupę

$$O(V, Q) := \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V, Q)$$

nazywamy **grupą ortogonalną stowarzyszoną z  $Q$** . W szczególności w przypadku przestrzeni  $V := \mathbb{K}^{\times N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  wyposażonej w formę symetryczną o macierzy względem bazy standardowej danej przez macierz jednostkową stopnia  $N$  otrzymujemy w ten sposób **grupę ortogonalną stopnia  $N$  o współczynnikach z  $\mathbb{K}$** , oznaczaną symbolem

$$O(N; \mathbb{K}) \equiv O_{\mathbb{K}}(N).$$

Macierz transformacji ortogonalnej  $O \in O(N; \mathbb{K})$  względem bazy standardowej nazywamy **macierzą ortogonalną (stopnia  $N$ )**. ▲

#### PRZYKŁAD(Y) 14.

- (1) Szczególnie prostym i zarazem ważnym przykładem przestrzeni kwadratowej jest przestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa  $\mathbb{R}^{p+q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  z (pseudo)euklidesową formą kwadratową

$$\delta_{\mathbb{E}}^{(p,q)} := \delta_{\mathbb{E}}^{(p)} \oplus (-\delta_{\mathbb{E}}^{(q)}) : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{K} : (x_1, x_2, \dots, x_{p+q}) \mapsto \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=1}^q x_{p+j}^2,$$

gdzie

$$\delta_{\mathbb{E}}^{(p)} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^p x_i^2$$

jest standardową **euklidesową formą kwadratową**. Przestrzeń kwadratową wyposażoną w pierwszą z tych form będziemy oznaczać symbolem  $\mathbb{R}^{p,q}$ , a odnośną grupę ortogonalną – symbolem

$$O_{\mathbb{R}}(p, q) \equiv O(\mathbb{R}^{p,q}).$$

- (2) Niezwyrodniała dwuwymiarowa przestrzeń kwadratowa  $V$  nad ciałem  $\mathbb{K}$ , w której istnieje niezerowy wektor izotropowy  $v \in V$ ,

$$v \neq 0_V \quad \wedge \quad Q(v) = 0_{\mathbb{K}},$$

jest nazywana **płaszczyzną hiperboliczną**. Bazę  $\{v, w\}$  płaszczyzny hiperbolicznej  $V$  spełniającą układ warunków

$$(1.1.7) \quad Q(v) = 0_{\mathbb{K}} = Q(w) \quad \wedge \quad \Phi_Q(v, w) = 1_{\mathbb{K}}$$

nazywamy **parą hiperboliczną**. Łatwo stwierdzamy, że baza taka istnieje w dowolnej płaszczyźnie hiperbolicznej. ✓

Mamy oczywiste



STWIERDZENIE 20. Przyjmijmy zapis Def. 19, 20, 22 i 24. Niechaj  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V, Q)$  będzie przestrzenią kwadratową wymiaru  $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$  nad  $\mathbb{K}$  i niech  $\mathcal{B}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema bazami przestrzeni  $V$ . Wówczas zachodzi tożsamość ( $\boxtimes$  jest mnożeniem macierzowym)

$$[Q]_{\mathcal{B}_2} = [\text{id}_V]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1 T} \boxtimes [Q]_{\mathcal{B}_1} \boxtimes [\text{id}_V]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}.$$

W szczególności więc dowolna macierz ortogonalna  $O \in \text{Mat}(N; \mathbb{K})$ ,  $N \in \mathbb{N}$  spełnia równość

$$O^T \odot O = \mathbf{1}_N,$$

z której wynika, że jest ona macierzą odwracalną.

Ponadto dla dowolnej niezwyrodniałej formy kwadratowej spełniona jest relacja

$$\forall_{\chi \in \mathcal{O}(V, Q)} : \det \chi \in \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\},$$

przy czym podgrupę

$$\text{SO}(V, Q) := \text{Ker } \det \downarrow_{\mathcal{O}(V, Q)}$$

określamy mianem **grupy specjalnej ortogonalnej stowarzyszonej z  $Q$** , a jej elementy – **obrotami (uogólnionymi)**. W szczególności odnośną podgrupę grupy  $\mathcal{O}(N; \mathbb{K})$  nazywamy **grupą specjalną ortogonalną stopnia  $N$  o współczynnikach z  $\mathbb{K}$**  i oznaczamy symbolem

$$\text{SO}(N; \mathbb{K}) \equiv \text{SO}_{\mathbb{K}}(N).$$

■

Struktura przestrzeni kwadratowej na dziedzinie i przeciwdziedzinie odwzorowania  $\mathbb{K}$ -liniowego pozwala wprowadzić przydatną konstrukcję opisywaną w

DEFINICJA 25. Przyjmijmy zapis Def. 24 i niechaj  $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  będzie dowolnym odwzorowaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym między przestrzeniami kwadratowymi  $V_1$  i  $V_2$ . **Odwzorowanie hermitowsko sprzężone** do  $\chi$  to odwzorowanie  $\chi^\dagger \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_2, V_1)$  określone warunkiem

$$\forall_{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2} : \Phi_{Q_1}(\chi^\dagger(v_2), v_1) := \Phi_{Q_2}(v_2, \chi(v_1)).$$

Przyporządkowanie odwzorowaniu  $\mathbb{K}$ -liniowemu odwzorowania hermitowsko sprzężonego do niego nosi miano **sprzężenia hermitowskiego**.

▲

Mamy też wygodne pojęcia pochodne

DEFINICJA 26. Przyjmijmy zapis Def. 18 oraz 24 i niech  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V, Q)$  będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem  $\mathbb{K}$ . Mówimy, że wektor  $w \in V$  jest **( $Q$ -)ortogonalny** (lub **( $Q$ -)prostopadły**) do wektora  $v \in V$ , co zapisujemy symbolem

$$w \perp_Q v,$$

ilekroć spełniony jest warunek

$$\Phi_Q(v, w) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Analogicznie, dla dowolnej podprzestrzeni  $W \subset V$  określamy **przestrzeń ( $Q$ -)ortogonalną** (lub **( $Q$ -)prostopadłą**) do  $W$  jako podprzestrzeń

$$W^{\perp_Q} := \{ v \in V \mid \forall_{w \in W} : v \perp_Q w \}.$$

Idąc dalej, powiemy, że podprzestrzeń  $W_1 \subset V$  jest  $(Q-)$ ortogonalna (lub  $(Q-)$ prostopadła) do podprzestrzeni  $W_2 \subset V$ , co zapiszemy symbolem

$$W_1 \perp_Q W_2,$$

jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2} : w_1 \perp_Q w_2.$$

**Wektor  $(Q-)$ izotropowy** (lub  $(Q-)$ zerowy)  $v \in V$  w przestrzeni kwadratowej  $V$  to taki, który spełnia warunek

$$Q(v) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Wektory, które nie są izotropowe, nazywamy **nieizotropowymi** (lub **anizotropowymi**). Dowolna podprzestrzeń  $W \subset V$  zawierająca wektor  $(Q-)$ izotropowy  $v \in W$  o własności

$$\forall_{w \in W} : \Phi_Q(v, w) = 0_{\mathbb{K}}$$

jest określana mianem **(pod)przestrzeni  $(Q-)$ izotropowej**. I wreszcie podprzestrzeń  $W \subset V$ , na której

$$\Phi_Q|_{W \times W} = 0,$$

nazywamy **(pod)przestrzenią całkowicie  $(Q-)$ izotropową** (lub  $(Q-)$ zerową). Przestrzeń, na której forma kwadratowa jest niezwyrodniała, bywa nazywana **przestrzenią niezwyrodniałą** (lub **nieizotropową** wzgl. **anizotropową**).

**Baza  $(Q-)$ ortogonalna** przestrzeni kwadratowej  $V$  to taka jej baza  $\mathcal{B} := \{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , której elementy spełniają relacje

$$\forall_{\lambda, \mu \in \Lambda} : (\lambda \neq \mu \implies \Phi_Q(v_\lambda, v_\mu) = 0_{\mathbb{K}}).$$

Jeśli dodatkowo

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : Q(v_\lambda) \equiv \Phi_Q(v_\lambda, v_\lambda) = 1_{\mathbb{K}},$$

to bazę taką określamy mianem **bazy ortonormalnej**.

Z wektorami nieizotropowymi,

$$v \in V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\}) \equiv V^\times,$$

stowarzyszamy klasę automorfizmów ortogonalnych zwanych **odbiciami elementarnymi** (lub inaczej **transformacjami Householdera**) – są to odbicia  $Q$ -ortogonalne w hiperpłaszczyznach  $\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$  będących  $Q$ -ortogonalnymi dopełnieniami powłok tychże wektorów, wyrażają się przeto formułami

$$(1.1.8) \quad P_v : V \curvearrowright : w \mapsto w - \frac{2\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \triangleright v.$$

▲

Związek między symetrycznymi formami dwuliniowymi a formami kwadratowymi, zasygnalizowany już w samej definicji tych ostatnich, ustala<sup>9</sup>

**STWIERDZENIE 21.** *Przyjmijmy zapis Def. 9 oraz Przykł. 6 (1) i niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{K}$ . Jeśli  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ , to istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między formami kwadratowymi i symetrycznymi formami dwuliniowymi na  $V$ .*

<sup>9</sup>W przypadku  $\text{char } \mathbb{K} = 2$  także można określić relację między formami kwadratowymi a symetrycznymi formami dwuliniowymi, patrz: Ref. [Bou07b, § 3, n° 4, Prop. 2]. Odpowiedniość ta nie jest jednak wzajemnie jednoznaczna.

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 162]. □

O patologicznej naturze przypadku  $\text{char } \mathbb{K} = 2$  zaświadcza następująca elementarna obserwacja: dla *każdej* formy kwadratowej  $Q$  na przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  forma dwuliniowa stowarzyszona z  $Q$  jest alternująca,

$$\forall v \in V : \Phi_Q(v, v) = 0_{\mathbb{K}},$$

a zatem skośnie symetryczna. Oczywiście nie oznacza to jeszcze, że (będąc zarazem formą symetryczną) jest ona koniecznie zerowa.

Absolutnie podstawowe znaczenie praktyczne dla wszelkich rozważań strukturalnych dotyczących przestrzeni kwadratowych ma poniższe

**STWIERDZENIE 22** (Twierdzenie Lagrange'a o diagonalizacji formy kwadratowej). *W notacji Def. 9 oraz Przykł. 6 (1) każda forma kwadratowa na przestrzeni wektorowej nad ciałem  $\mathbb{K}$  o charakterystyce  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  ma **bazę diagonalizującą**, tj. taką, względem której macierz tej formy jest diagonalna.*

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 163]. □

Jako proste, a przydatne zastosowanie Twierdzenia Lagrange'a podamy

**STWIERDZENIE 23.** *Dowolne dwie niezwyrodniałe przestrzenie kwadratowe nad  $\mathbb{C}$  tego samego (skończonego) wymiaru są izometrycznie izomorficzne.*

■

Dowód: W świetle Tw. 22 forma kwadratowa na dowolnej zespolonej przestrzeni kwadratowej ma bazę diagonalizującą. Działając na każdy z jej elementów pierwiastkiem odnośnego elementu naprzekątniowego macierzy formy kwadratowej względem tejże bazy diagonalizującej (co jest dobrze określoną odwracalną operacją  $\mathbb{C}$ -liniową wobec niezwyrodnienia formy kwadratowej i domkniętości algebraicznej ciała  $\mathbb{C}$ ) otrzymujemy bazę ortonormalną. □

Zachodzi także

**STWIERDZENIE 24.** *Przyjmijmy zapis Def. 26, przy czym zakładamy, że przestrzeń wektorowa  $V$  jest niezwyrodniała. Niechaj  $W \subset V$  będzie podprzestrzenią, a wówczas  $\dim_{\mathbb{K}} W < \infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\dim_{\mathbb{K}} (V/W^{\perp Q}) < \infty$ . W tej sytuacji zachodzi równość*

$$\dim_{\mathbb{K}} (V/W^{\perp Q}) = \dim_{\mathbb{K}} W,$$

czyli też

$$(1.1.9) \quad \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W^{\perp Q},$$

a nadto

$$(W^{\perp Q})^{\perp Q} = W.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 128]. □

Wreszcie na koniec sformułujemy stwierdzenie ustalające prostą relację między formą kwadratową na przestrzeni wektorowej i dowolnym (niezerowym) wyznacznikiem na tej ostatniej, do którego będziemy się odwoływać w trakcie badań nad anatomią algebr Clifforda.

**STWIERDZENIE 25.** *Przyjmijmy zapis Def. 20 oraz 24 i niechaj  $V$  będzie przestrzenią (kwadratową) wymiaru  $\dim_{\mathbb{K}} V = N < \infty$ . Dowolny wyznacznik  $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$  określa jednoznacznie skalar  $\lambda_{\Delta} \in \mathbb{K}$  spełniający – dla dowolnych  $v_i, w_i \in V$ ,  $i \in \overline{1, N}$  – tożsamości*

$$\det_{(N)}(\Phi_Q(v_i, w_j))_{i,j \in \overline{1, N}} = \lambda_{\Delta} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \dots, w_N).$$

■

Dowód: Przy ustalonych (dowolnie) wektorach  $w_i$ ,  $i \in \overline{1, N}$  odwzorowanie

$$\delta(w_1, w_2, \dots, w_N) : V^{\times N} \longrightarrow \mathbb{K} : (v_1, v_2, \dots, v_N) \longmapsto \det_{(N)}(\Phi_Q(v_i, w_j))_{i,j \in \overline{1, N}}$$

jest jawnie  $N$ -liniowe i alternujące, przeto

$$\delta(w_1, w_2, \dots, w_N) \in \bigwedge^N V^*,$$

co wobec oczywistej równości

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^N V^* = \binom{N}{N} = 1$$

implikuje dla ustalonego (dowolnie) wyznacznika  $\Delta \in \bigwedge^N V^*$  istnienie skalaru  $\lambda_{\Delta}(w_1, w_2, \dots, w_N)$  spełniającego relację

$$\delta(w_1, w_2, \dots, w_N) = \lambda_{\Delta}(w_1, w_2, \dots, w_N) \triangleright \Delta.$$

Symetryzacja powyższej obserwacji prowadzi wprost do tezy dowodzonego stwierdzenia. □

## Uniwersalność i internalizacja

Po przywołaniu elementarnych aspektów „anatomii” podstawowych struktur algebraicznych, ze szczególnym uwzględnieniem specyfiki modułów nad pierścieniem i – w tej liczbie – przestrzeni wektorowych nad ciałem, przejdziemy obecnie do dyskusji rozmaitych naturalnych operacji na modułach takich jak produkt, suma prosta oraz iloczyn tensorowy. Jako miarę naturalności przedstawianych konstrukcji, pozwalającą uniknąć konieczności uzasadniania rozważań nad nimi *a posteriori*, w odwołaniu do konkretnych sytuacji o znaczeniu matematycznym lub fizycznym, w których występują i odgrywają znaczącą rolę, przyjmujemy ich uniwersalność – definicję tego konstruktu, przykrojoną do (algebraicznych) ram niniejszego kursu, podajemy poniżej. Gwoli uczynienia rzeczonyj definicji możliwie zwięzłą i przejrzystą, wprowadzimy obecnie pojęcie, którego rola w dalszej części kursu okaże się wykraczać poza trywialne porządkowanie języka – w istocie, żywimy nadzieję, podpartą doświadczeniem osobistym, że rolą tą będzie z czasem uporządkowanie myślenia (w szczególności rewizja dotychczas stosowanych schematów) o strukturach matematycznych i fizycznych *sensu largo*, a wszystko to w ramach nadrzędnego paradygmatu teorii kategorii, o której więcej w Cz. 8, patrz także: App. A dla lepszego zrozumienia tego, w jakim sensie teoria kategorii stanowi naturalne uogólnienie teorii grup.

DEFINICJA 27. **Kategorię  $\mathcal{C}$**  tworzą następujące klasy<sup>1</sup>:

- **klasa obiektów**  $\text{Obj } \mathcal{C}$ ,
- **klasa morfizmów**  $\text{Mor } \mathcal{C}$ , której elementy zwiemy **morfizmami**, przy czym dla dowolnych  $A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}$  klasę morfizmów z  $A$  do  $B$  oznaczamy symbolem  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,

na których określone są następujące odwzorowania:

- **początek morfizmu**  $s : \text{Mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{Obj } \mathcal{C}$  i **koniec morfizmu**  $t : \text{Mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{Obj } \mathcal{C}$ , przy czym

$$\forall_{A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)} : (s, t)(f) = (A, B),$$

- **identyczność**  $\text{id} : \text{Obj } \mathcal{C} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C} : A \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ ,
- **złożenie morfizmów**

$$\circ_{\mathcal{C}} : \text{Mor } \mathcal{C}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{C} \equiv \{ (f, g) \in \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2} \mid s(f) = t(g) \} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C}$$

$$: (f, g) \mapsto f \circ_{\mathcal{C}} g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(s(g), t(f))$$

<sup>1</sup>**Klasa** to wszystkie obiekty (np. zbiory) u wspólniające ustaloną cechę definiującą (np. ”bycie zbiorem”). Pojęcie to stanowi takie uogólnienie pojęcia zbioru, które pozwala mówić o mnogości obiektów określonego typu bez popadania w antynomie, jak to ma miejsce choćby w przypadku próby opisanego mnogości wszystkich zbiorów przy użyciu pojęcia zbioru (więc także obiektu definiowanej tym sposobem mnogości).

spełniające warunki:

$$\forall A, B \in \text{Obj } \mathcal{C} \quad \forall (f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) : (f \circ_{\mathcal{C}} \text{id}_A = f \quad \wedge \quad \text{id}_A \circ_{\mathcal{C}} g = g),$$

$$\forall (f, g, h) \in \text{Mor } \mathcal{C}_{s \times_t} \text{Mor } \mathcal{C}_{s \times_t} \text{Mor } \mathcal{C} : (f \circ_{\mathcal{C}} g) \circ_{\mathcal{C}} h = f \circ_{\mathcal{C}} (g \circ_{\mathcal{C}} h).$$

Ilekoć klasa  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  jest zbiorem dla każdej pary  $A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}$ , kategorię  $\mathcal{C}$  nazywamy **lokalnie małą**. Jeśli natomiast zarówno  $\text{Obj } \mathcal{C}$ , jak i  $\text{Mor } \mathcal{C}$  są zbiorami,  $\mathcal{C}$  określamy mianem **małej kategorii**. Mała kategoria, w której każdy morfizm jest odwracalny, nosi przydomek **grupoidu**. Kategorię, która nie jest mała, nazywamy **wielką**.

**Podkategoria**  $\mathcal{S}$  kategorii  $\mathcal{C}$  jest utworzona przez

- podklasę  $\text{Obj } \mathcal{S}$  klasy obiektów  $\text{Obj } \mathcal{C}$ ;
- podklasę  $\text{Mor } \mathcal{S}$  klasy morfizmów  $\text{Mor } \mathcal{C}$ , przy czym dla dowolnych obiektów  $A, B \in \text{Obj } \mathcal{S}$  klasę morfizmów z  $A$  do  $B$  w  $\text{Mor } \mathcal{S}$  oznaczamy symbolem  $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B)$ ,

które spełniają następujące warunki:

- $\forall A \in \text{Obj } \mathcal{S} : \text{id}_A \in \text{Mor } \mathcal{S}$ ;
- $\forall f \in \text{Mor } \mathcal{S} : s(f), t(f) \in \text{Obj } \mathcal{S}$ ;
- $\forall (f, g) \in \text{Mor } \mathcal{S}_{s \times_t} \text{Mor } \mathcal{S} : f \circ_{\mathcal{C}} g \in \text{Mor } \mathcal{S}$ .

Tym samym  $\mathcal{S}$  jest kategorią. Podkategorię  $\mathcal{S}$  kategorii  $\mathcal{C}$  nazywamy **pełną**, ilekoć dla dowolnych obiektów  $A, B \in \text{Obj } \mathcal{S}$  zachodzi równość

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

W szczególności **podgrupoid** grupoidu  $\mathcal{G}$  to dowolna jego podkategoria sama będąca grupoidem.

**Funktor kowariantny** z kategorii  $\mathcal{C}_1$  w kategorię  $\mathcal{C}_2$  to odwzorowanie o składowych, zwyczajowo oznaczanych tym samym symbolem,

- obiektowej  $F : \text{Obj } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Obj } \mathcal{C}_2$ ,
- morfizmowej  $F : \text{Mor } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C}_2$ ,

które spełniają następujące warunki:

- $s \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ s$  oraz  $t \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ t$ , czyli
- $$\forall A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1 \quad \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B) : F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B)),$$

- $\text{id} \circ F \upharpoonright_{\text{Obj } \mathcal{C}_1} = F \circ \text{id}$ , czyli

$$\forall A \in \text{Obj } \mathcal{C}_1 : F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)},$$

- $\circ_{\mathcal{C}_2} \circ (F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} \times F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1}) = F \circ \circ_{\mathcal{C}_1}$ , czyli

$$\forall (f, g) \in \text{Mor } \mathcal{C}_1 \times \text{Mor } \mathcal{C}_1 : F(f \circ_{\mathcal{C}_1} g) = F(f) \circ_{\mathcal{C}_2} F(g).$$

W kontekście konstrukcji uniwersalnych funktorów  $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$  określamy często mianem **diagramu w kategorii  $\mathcal{C}_2$  modelowanego na kategorii  $\mathcal{C}_1$** . W szczególności **morfizm grupoidów** pomiędzy dwoma grupoidami  $\mathcal{G}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  to funktor kowariantny między odnośnymi kategoriami.

**Funktor kontrawariantny** z kategorii  $\mathcal{C}_1$  w kategorię  $\mathcal{C}_2$  to odwzorowanie o składowych, oznaczanych jak wyżej,

- obiektowej  $F : \text{Obj } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Obj } \mathcal{C}_2$ ,
- morfizmowej  $F : \text{Mor } \mathcal{C}_1 \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C}_2$ ,

które spełniają następujące warunki:

- $s \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ t$  oraz  $t \circ F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} = F \circ s$ , czyli  
 $\forall_{A,B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A,B)} : F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(B), F(A))$ ,
- $\text{id} \circ F \upharpoonright_{\text{Obj } \mathcal{C}_1} = F \circ \text{id}$ , czyli  
 $\forall_{A \in \text{Obj } \mathcal{C}_1} : F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ ,
- $\circ_{\mathcal{C}} \circ \tau \circ (F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1} \times F \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{C}_1}) = F \circ \circ_{\mathcal{C}}$ , gdzie  $\tau$  jest transpozycją, czyli  
 $\forall_{(f,g) \in \text{Mor } \mathcal{C}_1 \times \text{Mor } \mathcal{C}_1} : F(f \circ_{\mathcal{C}_1} g) = F(g) \circ_{\mathcal{C}_2} F(f)$ .

Funktor  $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  nazywamy

- **istotnie surjektywnym** (lub **gęstym**) jeśli każdy obiekt kategorii  $\mathcal{C}_2$  jest izomorficzny z pewnym obiektem w obrazie funktora  $F$ , tj. jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}_2} \exists_{A \in \text{Obj } \mathcal{C}_1} \exists_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(X, F(A))} : ( f(X) = F(A) )$$

$$\wedge \exists_{f^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), X)} : ( f^{-1} \circ_{\mathcal{C}_2} f = \text{id}_X \quad \wedge \quad f \circ_{\mathcal{C}_2} f^{-1} = \text{id}_{F(A)} ) );$$

- **pełnym**, jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{A,B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B))} \exists_{g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A,B)} : f = F(g)$$

(w przypadku funktora kowariantnego) albo warunek

$$\forall_{A,B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1} \forall_{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(A), F(B))} \exists_{g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(B,A)} : f = F(g)$$

(w przypadku funktora kontrawariantnego);

- **wiernym**, jeśli spełniony jest warunek

$$\forall_{A,B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1} \forall_{f,g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A,B)} : ( F(f) = F(g) \iff f = g );$$

- **w pełni wiernym**, jeśli jest pełny i wierny.

**Superpozycja funktorów** to zwykła superpozycja ich składowych: obiektowej i morfizmowej, którą oznaczamy standardowym symbolem  $\circ$ , tj. dla pary funktorów  $F_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \mathcal{C}_{\alpha+1}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  między kategoriami  $\mathcal{C}_\beta$ ,  $\beta \in \{1, 2, 3\}$  zapisujemy

$$F_2 \circ F_1 : \mathcal{C}_1 \xrightarrow{F_1} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{F_2} \mathcal{C}_3.$$

**Transformacja naturalna** między funktorami kowariantnymi  $F_1, F_2 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  to rodzina morfizmów  $\eta : \text{Obj } \mathcal{C}_1 \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C}_2 : A \mapsto \eta_A$  o własności wyrażonej przez diagramy przemienne

$$(1.2.1) \quad \forall_{\substack{A,B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1 \\ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A,B)}} : \quad \begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{F_1(f)} & F_1(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ F_2(A) & \xrightarrow{F_2(f)} & F_2(B) \end{array} .$$

Transformację naturalną będziemy (najczęściej) zapisywać symbolicznie w postaci

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_2 \\ & \Downarrow \eta & \\ & \curvearrowleft & \\ & F_2 & \end{array}$$

Jeśli wszystkie morfizmy tworzące rodzinę  $\eta$  są izomorfizmami, transformację naturalną określamy mianem **izomorfizmu naturalnego**. Jedyną różnicą w definicji transformacji naturalnej w przypadku funktorów kontrawariantnych polega na tym, że rodzina morfizmów w kategorii-przeciwdziedzinie indeksowanych przez morfizmy z kategorii-dziedziny spełnia warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$(1.2.2) \quad \forall_{\substack{A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}_1 \\ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B)}} : \quad \begin{array}{ccc} F_1(A) & \xleftarrow{F_1(f)} & F_1(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ F_2(A) & \xleftarrow{F_2(f)} & F_2(B) \end{array} .$$

**Równoważność kategorii  $\mathcal{C}_1$  i  $\mathcal{C}_2$**  to para funktorów

$$F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2, \quad G : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$$

wraz z parą izomorfizmów naturalnych

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{G \circ F} \\ \cong \parallel \eta \\ \downarrow \\ \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}_1}} \end{array} & \mathcal{C}_1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{F \circ G} \\ \cong \parallel \tilde{\eta} \\ \downarrow \\ \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}_2}} \end{array} & \mathcal{C}_2 \end{array} .$$

Kategorie, dla których istnieje równoważność, określamy mianem (**wzajem**) **równoważnych**.

Kategorię, której obiektami są funktory  $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$  między dwiema ustalonymi kategoriami, a morfizmami – transformacje naturalne między nimi, oznaczamy symbolami

$$\mathcal{C}_2^{\mathcal{C}_1} \equiv [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$$

i nazywamy **kategorią funktorów z  $\mathcal{C}_1$  do  $\mathcal{C}_2$**  lub – we wspomnianym wcześniej kontekście – **kategorią diagramów w  $\mathcal{C}_2$  modelowanych na  $\mathcal{C}_1$** .

Dowolna skończona rodzina kategorii  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in \overline{1, N}}$  określa **kategorię produktową**  $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_N$ , której klasa obiektów jest iloczynem klas (czyli klasą  $N$ -tek obiektów)  $\text{Obj}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_N) = \text{Obj } \mathcal{C}_1 \times \text{Obj } \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \text{Obj } \mathcal{C}_N$ , a klasa morfizmów jest iloczynem klas (czyli klasą  $N$ -tek morfizmów)  $\text{Hom}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_N) = \text{Hom } \mathcal{C}_1 \times \text{Hom } \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \text{Hom } \mathcal{C}_N$ , przy czym składanie morfizmów jest zdefiniowane wzorem

$$(g_1, g_2, \dots, g_N) \circ (f_1, f_2, \dots, f_N) := (g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2, \dots, g_N \circ f_N),$$

słusznym dla dowolnych  $A_i, B_i, C_i \in \text{Obj } \mathcal{C}_i$  i  $(f_i, g_i) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_i}(A_i, B_i) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}_i}(B_i, C_i)$ , gdzie  $i \in \overline{1, N}$ .

▲

**UWAGA 1.** Funktory kowariantne (wzgl. kontrawariantne) między dwiema ustalonymi (dowolnie) kategoriami tworzą kategorię, której morfizmami są transformacje naturalne. Fundamentalna i zarazem naturalna rola tej kategorii jest eksponowana przez Lemat Yonedy, będący kategoryfikacją Twierdzenia Cayleya, o czym więcej można przeczytać w App. A.



PRZYKŁAD(Y) 15. (Kategorie)

- (1) Zbiory wraz z odwzorowaniami między nimi (dla których złożeniem jest superpozycja odwzorowań) tworzą wielką kategorię **Set**.
- (2) Struktury algebraiczne określonego typu tworzą kategorie wraz z odpowiednimi homomorfizmami jako morfizmami. Mamy więc kategorie **Grp** (grupy), **AbGrp** (grup przemiennych), **Ring** (pierścieni), **AbRing** (pierścieni przemiennych), **Field** (ciał), **Mod<sub>R</sub>** (lewych modułów nad pierścieniem  $R$ ), **Mod<sub>R<sup>opp</sup></sub>** (prawych modułów nad pierścieniem  $R$ ), **Mod<sub>(R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub><sup>opp</sup>)}</sub>** ( $(R_1, R_2^{\text{opp}})$ -bimodułów nad parą pierścieni  $(R_1, R_2)$ ), **Vect<sub>K</sub>** (przestrzeni wektorowych nad ciałem  $\mathbb{K}$ ), **Vect<sub>K</sub><sup>(<∞)</sup>** (skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem  $\mathbb{K}$ ), **□Vect<sub>K</sub>** (przestrzeni kwadratowych nad ciałem  $\mathbb{K}$ ), **Alg<sub>R</sub>** (algebr nad pierścieniem przemiennym  $R$ ), **uAlg<sub>R</sub>** (unitalnych algebr nad pierścieniem przemiennym  $R$ ), **AssAlg<sub>R</sub>** (algebr przemiennych nad pierścieniem przemiennym  $R$ ) *etc.*
- (3) Graf skierowany kanonicznie określa małą kategorię, której obiektami są wierzchołki grafu, morfizmami zaś – ścieżki w grafie (ich konkatenacja jest złożeniem morfizmów).
- (4) Grupa kanonicznie określa małą kategorię o jednoelementowym zbiorze obiektów (dowolny singleton) i zbiorze morfizmów tożsamym z grupą (w szczególności wszystkie morfizmy są odwracalne), patrz: Dodatek A.
- (5) Dowolny zbiór  $S$  określa następujące trzy (małe) kategorie:
  - kategorię  $S$  (oznaczaną z oczywistych powodów tym samym symbolem co zbiór) o zbiorze obiektów  $S$  i zbiorach morfizmów (jedynych niepustych)  $\text{Hom}_S(x, x) = \{x \rightarrow x\}$ ,  $x \in S$  – kategorię tę nazwiemy **kategorią zbioru  $S$** ;
  - kategorię  $\hat{S}$  o zbiorze obiektów  $\text{Obj } \hat{S} := S \cup \{\bullet\}$ , w którym singleton  $\{\bullet\}$  jest jedynym obiektem inicjalnym, oraz o jednoelementowych zbiorach morfizmów (jedynych niepustych)  $\text{Hom}_{\hat{S}}(\bullet, s) = \{\bullet \rightarrow s\}$ ,  $s \in S$  i  $\text{Hom}_{\hat{S}}(x, x) = \{x \rightarrow x\}$ ,  $x \in S \cup \{\bullet\}$  – kategorię tę nazwiemy **rozpięciem  $S$** ;
  - kategorię  $\check{S}$  o zbiorze obiektów  $\text{Obj } \check{S} := S \cup \{\bullet\}$ , w którym singleton  $\{\bullet\}$  jest jedynym obiektem terminalnym, oraz o jednoelementowych zbiorach morfizmów (jedynych niepustych)  $\text{Hom}_{\check{S}}(s, \bullet) = \{s \rightarrow \bullet\}$ ,  $s \in S$  i  $\text{Hom}_{\check{S}}(x, x) = \{x \rightarrow x\}$ ,  $x \in S \cup \{\bullet\}$  – kategorię tę nazwiemy **korozpięciem  $S$** .

Powyżej morfizmy są dowolnymi singletonami, które dla przejrzystości oznaczyliśmy symbolami ich początku i końca. Obie kategorie występują jako modele diagramów używanych w konstrukcjach uniwersalnych.

Kategorię  $\mathcal{C}^S$  funktorów z kategorii zbioru  $S$  w (dowolnie ustaloną) kategorię  $\mathcal{C}$  określamy mianem **kategorii ciągów (uogólnionych) w  $\mathcal{C}$  indeksowanych przez  $S$** . Kategorię  $\mathcal{C}$  zanurzamy w  $\mathcal{C}^\Lambda$  przy użyciu funktora kowariantnego (ciągi stałe)  $\Delta_{\mathcal{C}; \Lambda} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\Lambda$  o składowych: obiektowej

$$\Delta_{\mathcal{C}; \Lambda} : \text{Obj } \mathcal{C} \rightarrow \text{Obj } \mathcal{C}^\Lambda : X \mapsto (\Lambda \rightarrow \text{Obj } \mathcal{C} : \lambda \mapsto X)$$

i morfizmowej

$$\Delta_{\mathcal{C};\Lambda} : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda : \xi \longmapsto ( \Lambda \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{C} : \lambda \longmapsto \xi ).$$

✓

PRZYKŁAD(Y) 16. (Funktory)

- (1) **Funktor identycznościowy**  $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \circlearrowleft$  o składowej obiektowej  $\text{id}_{\mathcal{C}} : \text{Obj } \mathcal{C} \circlearrowleft : A \longmapsto A$  i morfizmowej  $\text{id}_{\mathcal{C}} : \text{Mor } \mathcal{C} \circlearrowleft : f \longmapsto f$ .
- (2) **Funktor stały**  $X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ , zwany też **stałą**, określony przez obiekt  $X \in \text{Obj } \mathcal{D}$ , o składowej obiektowej  $X : \text{Obj } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Obj } \mathcal{D} : A \longmapsto X$  i morfizmowej  $X : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{D} : f \longmapsto \text{id}_X$ .
- (3) Reprezentacja  $R : G \longrightarrow \text{GL}(V; \mathbb{K})$  grupy  $G \in \text{Obj } \mathbf{Grp}$  na przestrzeni wektorowej  $V \in \text{Obj } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  określa functor kowariantny w rozumieniu Przykł. 15 (3), patrz: App. A.
- (4) Dualność modułów nad pierścieniem przemennym  $R$  określa (endo)funktor kontrawariantny  $* : \mathbf{Mod}_R \circlearrowleft$  o składowej obiektowej  $* : \text{Obj } \mathbf{Mod}_R \circlearrowleft : G \longmapsto G^*$  i morfizmowej  $* : \text{Mor } \mathbf{Mod}_R \circlearrowleft : \chi \longmapsto \chi^*$ , gdzie dla dowolnego  $\chi \in \text{Hom}_R(G_1, G_2)$  jest  $\chi^* : G_2^* \longrightarrow G_1^* : \varphi \longmapsto \varphi \circ \chi$ .
- (5) Konstrukcja zbioru potęgowej określa (endo)funktor kowariantny  $2^* : \mathbf{Set} \circlearrowleft$ , o składowej obiektowej  $2^* : \text{Obj } \mathbf{Set} \circlearrowleft : X \longmapsto 2^X$  i morfizmowej  $2^* : \text{Mor } \mathbf{Set} \circlearrowleft : ( X \xrightarrow{f} Y ) \longmapsto ( 2^X \ni O \longmapsto f(O) \in 2^Y )$ .

✓

PRZYKŁAD(Y) 17. (Transformacje naturalne)

- (1) Rodzina izomorfizmów grup  $\text{Inv.} : \text{Obj } \mathbf{Grp} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Grp} : G \longmapsto \text{Inv}_G$ , z których każdy traktujemy jako odwzorowanie z (odnośnej) grupy  $G$  w grupę do niej przeciwną,  $G^{\text{opp}}$ , określa izomorfizm naturalny między funktorem identycznościowym na kategorii  $\mathbf{Grp}$  a funktorem „brania przeciwności”, który dowolnej grupie przyporządkowuje grupę do niej przeciwną i każdemu homomorfizmowi grup – *tenże* homomorfizm.
- (2) Rodzina monomorfizmów przestrzeni wektorowych (nad ustalonym ciałem  $\mathbb{K}$ )  $\text{ev.} : \text{Obj } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} : V \longmapsto \text{ev}_V^V$ , z których każdy przyporządkowuje (odnośnej) przestrzeni wektorowej  $V$  odwzorowanie ( $\mathbb{K}$ -liniowe) ewaluacji  $\text{ev}_V^V : V \longrightarrow V^{**} : v \longmapsto \text{ev}_v^V$  określone wzorem  $\text{ev}_v^V : V^* \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \varphi(v)$ , określa transformację naturalną między funktorem identycznościowym na kategorii  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  a funktorem bidualizacji, który dowolnej przestrzeni przyporządkowuje bidualną do niej i każdemu odwzorowaniu  $\mathbb{K}$ -liniowemu – odwzorowanie bidualne.

✓

Mamy proste a istotne

**STWIERDZENIE 26.** *Warunkiem koniecznym i wystarczającym równoważności dwóch kategorii (w rozumieniu Def. 27) jest istnienie pomiędzy nimi funktora istotnie surjektywnego i w pełni wiernego.*

■

*Dowód:* Oczywisty. □

Do precyzyjnego sformułowania pojęcia uniwersalności będziemy jeszcze potrzebować

DEFINICJA 28. Przyjmijmy zapis Def. 27. Obiekt  $T$  kategorii  $\mathcal{C}$  nazywamy **końcowym** (albo **terminalnym**), jeżeli dla każdego  $X \in \text{Obj } \mathcal{C}$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ . Analogicznie, obiekt  $I$  kategorii  $\mathcal{C}$  nazywamy **początkowym** (albo **inicjalnym**), jeżeli dla każdego  $X \in \text{Obj } \mathcal{C}$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$ . Obiekt kategorii będący zarazem końcowym i początkowym nosi miano **zerowego**. ▲

PRZYKŁAD(Y) 18. (Obiekty końcowe i początkowe)

- (1) W kategorii **Set** z Przykł. 15 (1) obiektem końcowym jest (dowolny) singleton, początkowym zaś (jedynym) – zbiór pusty. Nie ma w niej obiektów zerowych.
- (2) W kategoriach **Grp**, **AbGrp** i pochodnych **Mod<sub>R</sub>**, **Vect<sub>K</sub>** z Przykł. 15 (2) obiektem zerowym jest (dowolna) struktura trywialna.
- (3) W kategorii **AbRing** z Przykł. 15 (2) obiektem końcowym jest pierścień trywialny z Przykł. 3 (1), początkowym zaś – pierścień  $\mathbb{Z}$  z Przykł. 3 (2).
- (4) Kategoria **Field** nie zawiera obiektów końcowych ani początkowych. ✓

O wyjątkowości obiektów terminalnych i inicjalnych przesądza

TWIERDZENIE 1.2.1 (O jednoznaczności obiektów terminalnych i inicjalnych). *Przyjmijmy notację Def. 28. Niechaj  $T_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwoma obiektami terminalnymi w kategorii  $\mathcal{C}$  i niech  $I_\beta$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  będą dwoma obiektami inicjalnymi w tejże kategorii. Istnieją jednoznacznie określone izomorfizmy (w kategorii  $\mathcal{C}$ )*

$$\tau_{1,2} : T_1 \xrightarrow{\cong} T_2, \quad \iota_{1,2} : I_1 \xrightarrow{\cong} I_2.$$

■

*Dowód:* Rozważmy parę  $T_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  obiektów terminalnych w  $\mathcal{C}$ . Terminalność  $T_1$  implikuje istnienie dokładnie jednego morfizmu  $\tau_{2,1} : T_2 \rightarrow T_1$ , a terminalność  $T_2$  – dokładnie jednego morfizmu  $\tau_{1,2} : T_1 \rightarrow T_2$ . Ich złożenie  $\tau_{2,1} \circ \tau_{1,2}$  jest endomorfizmem  $T_1$ , ale endomorfizmem takim jest też  $\text{id}_{T_1}$ , co wobec terminalności  $T_1$  oznacza, że koniecznie

$$\tau_{2,1} \circ \tau_{1,2} = \text{id}_{T_1}.$$

Podobnie dowodzimy równości

$$\tau_{1,2} \circ \tau_{2,1} = \text{id}_{T_2},$$

która w połączeniu z poprzednią przesądza o izomorficznym charakterze  $\tau_{1,2}$ . W przypadku obiektów inicjalnych  $I_\beta$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  rozumowanie przebiega w pełni analogicznie. □

Możemy już obecnie zwięźle wysłowić

DEFINICJA 29. Przyjmijmy zapis Def. 28. Niechaj  $\mathcal{C}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  będą kategoriami i niech  $F_\beta : \mathcal{C}_\beta \rightarrow \mathcal{C}_3$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  będą funktorami kowariantnymi,  $X$  zaś – (dowolnym) obiektem kategorii  $\mathcal{C}_1$ . Wreszcie też niech  $P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi)$  będzie pewnym zdaniem logicznym określającym własność  $\varphi \in \text{Mor } \mathcal{C}_3$  w odwołaniu do struktury  $(X; F_1, F_2)$  oraz  $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}_2$ , dla którego jest dobrze określona kategoria  $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$  o klasie obiektów

$$\text{Obj } \mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}] := \left\{ (Y, \varphi) \in \text{Obj } \mathcal{C}_2 \times \text{Mor } \mathcal{C}_3 \mid \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_3}(F_2(Y), F_1(X)) \right. \\ \left. \wedge P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi) \right\}$$

i zbiorach morfizmów<sup>2</sup>

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]}\left((Y_1, \varphi_1), (Y_2, \varphi_2)\right) := \left\{ \chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(Y_1, Y_2) \mid \varphi_2 \circ F_2(\chi) = \varphi_1 \right\},$$

ze złożeniem dziedziczonym z  $\mathcal{C}_2$ , lub kategoria  $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$  o klasie obiektów

$$\text{Obj } \mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}] := \left\{ (Y, \varphi) \in \text{Obj } \mathcal{C}_2 \times \text{Mor } \mathcal{C}_3 \mid \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_3}(F_1(X), F_2(Y)) \right. \\ \left. \wedge P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi) \right\}$$

i zbiorach morfizmów

$$\text{Hom}_{\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]}\left((Y_1, \varphi_1), (Y_2, \varphi_2)\right) := \left\{ \chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(Y_1, Y_2) \mid F_2(\chi) \circ \varphi_1 = \varphi_2 \right\},$$

ze złożeniem dziedziczonym z  $\mathcal{C}_2$ . Jak łatwo widać,  $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$  jest podkategorią kategorii  $\mathcal{T}_{F_1(X)}\mathcal{C}_3^{\{\mathbf{i}\}} \subset \mathcal{C}_3^{\{\mathbf{i}\}}$  diagramów w  $\mathcal{C}_3$  modelowanych na korozpięciu singletonu  $\{\mathbf{1}\}$ , o obrazie  $\bullet$  ustalonym w postaci  $F_1(X)$  (z transformacjami naturalnymi  $\eta$ , o składowej  $\eta_\bullet = \text{id}_{F_1(X)}$ ), a  $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$  jest podkategorią kategorii  $\mathcal{I}^{F_1(X)}\mathcal{C}_3^{\{\mathbf{i}\}} \subset \mathcal{C}_3^{\{\mathbf{i}\}}$  diagramów w  $\mathcal{C}_3$  modelowanych na rozpięciu singletonu  $\{\mathbf{1}\}$ , o identycznie ustalonym obrazie  $\bullet$  (i z identycznie ograniczonymi transformacjami naturalnymi) – patrz: Przykł. ?? W obu przypadkach „wolne zmienne” bierzemy z obrazu kategorii  $\mathcal{C}_2$  względem funktora  $F_2$ , a nadto – wiążemy je warunkiem  $P_{X;F_1,F_2}$ .

**Struktura końcowa** (lub **terminalna**) dla  $P_{X;F_1,F_2}$  to obiekt końcowy  $(T, \tau)$  w kategorii  $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$ . Definiującą własność tego obiektu, zwaną **własnością końcową** (lub **terminalną**), opisuje diagram przemienny

$$(1.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & F_2(Y) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{opr}_1} & (Y, \varphi) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & F_2(\Psi) & & \Psi \\ & \swarrow \varphi & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F_1} & F_1(X) & \xleftarrow{\tau} & F_2(T) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{opr}_1} & (T, \tau) \\ \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_3 & & \mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}] & & \end{array},$$

w którym  $(Y, \varphi)$  jest dowolnym obiektem w kategorii  $\mathcal{T}[P_{X;F_1,F_2}]$ , a przerywana cięciwa strzałki symbolizuje „istnienie i jedyność” odnośnego morfizmu.

<sup>2</sup>Obecność identyczności (na dowolnym obiekcie  $\mathcal{C}_2$ ) w klasie morfizmów, jak również możliwość składania morfizmów są zagwarantowane przez funktorialność  $F_2$ .

**Struktura początkowa** (lub **inicjalna**) dla  $P_{X;F_1,F_2}$  to obiekt początkowy  $(I, \iota)$  w kategorii  $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$ . Definiującą własność tego obiektu, zwaną **własnością początkową** (lub **inicjalną**), opisuje diagram przemienny

$$(1.2.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & & F_2(Y) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{pr}_1} & (Y, \varphi) \\ & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & |_{F_2(\Phi)} & & |_{\Phi} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & |_{F_2(\iota)} & & |_{\iota} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ X & \xrightarrow{F_1} & F_1(X) & \xrightarrow{\iota} & F_2(I) & \xleftarrow{F_2 \circ \text{pr}_1} & (I, \iota) \\ \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_3 & & \mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}] & & \end{array} ,$$

w którym  $(Y, \varphi)$  jest dowolnym obiektem w kategorii  $\mathcal{I}[P_{X;F_1,F_2}]$ .

Struktury terminalne i inicjalne noszą wspólne miano **struktur uniwersalnych**. ▲

Sens uniwersalności łatwo wysłowić w języku potocznym: oto dowolne odwzorowanie transportujące strukturę rodzaju  $\mathcal{C}_3$  z  $F_1(X)$  (wzgl. do  $F_1(X)$ ), a przy tym spełniające warunek  $P_{X;F_1,F_2}(Y, \varphi)$ , jest przeprowadzane, za pośrednictwem  $F_2$ -obrazu jedyne homomorfizmu indukowanego, przez  $F_2$ -obraz (obiektowej składowej) struktury inicjalnej (wzgl. terminalnej). Na pytanie o istnienie struktur uniwersalnych nie ma uniwersalnej odpowiedzi – tej trzeba każdorazowo poszukiwać w interesującym nas kontekście (np. algebraicznym). Można natomiast bardzo konkretnie skwantyfikować swobodę ich wyboru (będącą miarą ich jednoznaczności), co czyni poniższe

**TWIERDZENIE 1.2.2** (O jednoznaczności struktur uniwersalnych). *Przyjmijmy notację Def. 29. Niechaj  $(T_\alpha, \tau_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema strukturami terminalnymi dla  $P_{X;F_1,F_2}$  i niech  $(I_\beta, \iota_\beta)$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  będą dwiema strukturami inicjalnymi dla  $P_{X;F_1,F_2}$ . Istnieją jednoznacznie określone izomorfizmy (w kategorii  $\mathcal{C}_2$ )*

$$\tau_{1,2} : T_1 \xrightarrow{\cong} T_2, \quad \iota_{1,2} : I_1 \xrightarrow{\cong} I_2.$$

■

Dowód: Natychmiastowa konsekwencja Def. 29 i Tw. 1.2.1. □

Praktyczny sens udowodnionego twierdzenia jest oczywisty: każde dwie struktury uniwersalne możemy utożsamić, i to w jednoznaczny sposób, za pośrednictwem stosownego izomorfizmu  $\tau_{1,2}$  (wzgl.  $\iota_{1,2}$ ).

## 1. Produkt i koprodukt

Dotychczasowa nasza dyskusja daje nam do ręki narzędzia formalne konstrukcji użytecznych i powszechnych w modelowaniu fizykalnym struktur algebraicznych, pozwalając nam zarazem precyzyjnie nazwać i zrozumieć ich wyjątkowość pośród miriad bytów formalnych. Ich wykorzystanie zaczniemy od przerzucenia pomostu pomiędzy konstrukcjami znanymi z elementarnej algebry liniowej a uniwersum algebry wyższej. Na tej drodze spotkamy obiekty obecne w opisie klasycznej

geometrii różniczkowej oraz klasycznych układów fizycznych, jak choćby – w lokalnym modelowaniu przestrzeni totalnych wiązek włóknistych i powiązań Ehresmana na wiązках stycznych nad nimi, jak również w modelowaniu przestrzeni stanów (klasycznych) złożonych układów fizycznych przy użyciu przestrzeni stanów podukładów, ale też znajdujące zastosowanie w modelowaniu zjawisk kwantowych, gdzie opisują – m.in. – rozkład przestrzeni stanów kwantowych układu na sektory nadwyboru (np. w kontekście kwantowania ekwiwariantnego względem działania grupy symetrii zjawisk).

DEFINICJA 30. Przyjmijmy zapis Def. 18, 27 i 29 oraz Przykł. 15 (5) i ustalmy zbiór  $\Lambda$  oraz kategorię  $\mathcal{C}$ , z którymi stowarzyszamy kategorię  $\mathcal{C}^\Lambda$  ciągów uogólnionych w  $\mathcal{C}$  indeksowanych przez  $\Lambda$ , zawierającą funktoriałny obraz  $\mathcal{C}$  w postaci ciągów stałych.

**Produkt rodziny**  $X \in \text{Obj } \mathcal{C}^\Lambda$  to struktura terminalna

$$\left( \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

dla warunku tautologicznego  $P_{X, \text{id}_{\mathcal{C}^\Lambda}, \Delta_{\mathcal{C}; \Lambda}} \equiv 1$  na  $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda$ . Innymi słowy, produkt rodziny  $X$  to obiekt terminalny w podkategorii  $\mathcal{T}_X \mathcal{C}^\Lambda \subset \mathcal{C}^\Lambda$  kategorii  $\mathcal{C}^\Lambda$  diagramów w  $\mathcal{C}$  modelowanych na rozpięciu  $\Lambda$  utworzonej przez funktory (tj. diagramy)  $F : \hat{\Lambda} \rightarrow \mathcal{C}$  o składowej obiektowej  $F \upharpoonright_\Lambda = X$  oraz transformacje naturalne  $\eta$  między nimi o składowych  $\eta_\lambda = \text{id}_{X_\lambda}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Morfizm  $\pi_\lambda$  określamy przy tym mianem **rzutu kanonicznego na (składową)  $X_\lambda$** . Kategorię, w której istnieją produkty, określamy mianem **kategorii z produktami**. Przy tym ilekroć  $|\Lambda| < \infty$ , będziemy wymiennie używać symboli  $\prod$  i  $\times$ .

**Koprodukt rodziny**  $X \in \text{Obj } \mathcal{C}^\Lambda$  to struktura inicjalna

$$\left( \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \{j_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

dla tautologicznego warunku  $P_{X, \text{id}_{\mathcal{C}^\Lambda}, \Delta_{\mathcal{C}; \Lambda}} \equiv 1$  na  $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda$ . Innymi słowy, koprodukt rodziny  $X$  to obiekt inicjalny w podkategorii  $\mathcal{I}_X \mathcal{C}^\Lambda \subset \mathcal{C}^\Lambda$  kategorii  $\mathcal{C}^\Lambda$  diagramów w  $\mathcal{C}$  modelowanych na rozpięciu  $\Lambda$  utworzonej przez funktory (tj. diagramy)  $F : \check{\Lambda} \rightarrow \mathcal{C}$  o składowej obiektowej  $F \upharpoonright_\Lambda = X$  oraz transformacje naturalne  $\eta$  między nimi o składowych  $\eta_\lambda = \text{id}_{X_\lambda}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Morfizm  $j_\lambda$  określamy przy tym mianem **włożenia kanonicznego (składowej)  $X_\lambda$** . Kategorię, w której istnieją koprodukty, określamy mianem **kategorii z koproduktami**.

Koprodukt w kategoriach  $\mathcal{C} \in \{\mathbf{AbGrp}, \mathbf{AbRing}, \mathbf{Mod}_R, \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}\}$  i  $\mathbf{Alg}_R$  (dla pierścienia  $R$  i ciała  $\mathbb{K}$ ) jest najczęściej określamy mianem **sumy prostej** i oznaczany symbolem  $\coprod \equiv \oplus$ .

▲

Wprost z definicji wynika naturalne rozszerzenie konstrukcji produktu i koproduktu na klasy morfizmów kategorii  $\mathcal{C}$  – obserwację tę precyzujemy poniżej.

STWIERDZENIE 27. *Przyjmijmy zapis Def. 30 i niechaj*

$$\left( \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^\alpha, \{\pi_\lambda^\alpha\}_{\lambda \in \Lambda} \right), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

będą dwoma produktami odnośnych rodzin  $X^\alpha$ . Dla dowolnej rodziny morfizmów  $\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X^1, X^2)$  istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1, \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2\right),$$

który czyni poniższy diagram przemiennym

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1 & \xrightarrow{\pi_\rho^1} & X_\rho^1 \\ \downarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda & & \downarrow \chi_\rho \\ \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2 & \xrightarrow{\pi_\rho^2} & X_\rho^2 \end{array}$$

Morfizm ten określamy mianem **produktu rodziny morfizmów**  $\chi \in \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda$ .

Jeśli ponadto dany jest trzeci produkt

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^3, \{\pi_\lambda^3\}_{\lambda \in \Lambda}\right)$$

oraz rodzina morfizmów  $\tilde{\chi} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X^2, X^3)$ , to dla zdefiniowanego przez nią produktu morfizmów  $\prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda$  oraz dla  $\prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda$  zachodzi tożsamość

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda\right) \circ \left(\prod_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu\right) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (\tilde{\chi}_\lambda \circ \chi_\lambda).$$

■

Dowód: Teza jest prostą konsekwencją terminalnej natury produktu  $(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^2, \{\pi_\lambda^2\}_{\lambda \in \Lambda})$ , oto bowiem mamy do czynienia z rodziną morfizmów

$$\chi_\rho \circ \pi_\rho^1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1, X_\rho^2\right).$$

Słuszność reguły superpozycji produktów morfizmów staje się oczywista, kiedy złożyć odnośne diagramy przemienne w jeden:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1 & \xrightarrow{\pi_\rho^1} & X_\rho^1 \\ \downarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda & & \downarrow \chi_\rho \\ \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2 & \xrightarrow{\pi_\nu^2} & X_\rho^2 \\ \downarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda & & \downarrow \tilde{\chi}_\rho \\ \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^3 & \xrightarrow{\pi_\nu^3} & X_\rho^2 \end{array}$$

stwierdzając tym sposobem, że superpozycja morfizmów  $(\prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda) \circ (\prod_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu)$  spełnia warunki definiujące morfizm  $\prod_{\lambda \in \Lambda} (\tilde{\chi}_\lambda \circ \chi_\lambda)$ , więc też w świetle jedności tego ostatniego jest z nim tożsamą. □

Ostatnie stwierdzenie naturalnie uzupełnia

STWIERDZENIE 28. *Przyjmijmy zapis Def. 30 i niechaj*

$$\left( \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^\alpha, \{j_\lambda^\alpha\}_{\lambda \in \Lambda} \right), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

będą dwoma koproduktami odnośnych rodzin  $X^\alpha$ . Dla dowolnej rodziny morfizmów  $\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X^1, X^2)$  istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\coprod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1, \coprod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2\right),$$

który czyni poniższy diagram przemiennym

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\mu \in \Lambda} X_\mu^1 & \xleftarrow{j_\rho^1} & X_\rho^1 \\ \prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \downarrow & & \downarrow \chi_\rho \\ \prod_{\nu \in \Lambda} X_\nu^2 & \xleftarrow{j_\rho^2} & X_\rho^2 \end{array}$$

Morfizm ten określamy mianem **koproduktu rodziny morfizmów**  $\chi \in \text{Mor } \mathcal{C}^\Lambda$ .  
Jeśli ponadto dany jest trzeci koprodukt

$$\left( \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^3, \{j_\lambda^3\}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

oraz rodzina morfizmów  $\tilde{\chi} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^\Lambda}(X^2, X^3)$ , to dla zdefiniowanego przez nią koproduktu morfizmów  $\prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda$  oraz dla  $\prod_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda$  zachodzi tożsamość

$$\left( \prod_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}_\lambda \right) \circ \left( \prod_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu \right) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (\tilde{\chi}_\lambda \circ \chi_\lambda).$$

■

*Dowód:* W pełni analogiczny do poprzedniego. □

Ilustracji wprowadzonych dotychczas pojęć i konstrukcji abstrakcyjnych dostarcza poniższy przykład, którego dokładne zrozumienie w części początkowej dotyczącej produktu stanowi podstawę dalszych naszych rozważań poświęconych modułom.

PRZYKŁAD(Y) 19. Rozważmy strukturę algebraiczną rodzaju trywialnego (tj. „pustego”), której nośnikiem są zbiory bez jakichkolwiek wyróżnionych operacji wieloargumentowych i dla której homomorfizmami są dowolne odwzorowania między zbiorami. W tym szczególnym przypadku produktem zbiorów z rodziny indeksowanej  $S \in \text{Obj } \mathbf{Set}^\Lambda$  jest **produkt kartezjański** [KM76, Rozdz. IV § 6]

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda := \left\{ f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda : f(\lambda) \in S_\lambda \right\}$$

wraz z rodziną  $\{\varpi_\lambda := \text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  rzutów kanonicznych na składowe  $S_\lambda$ ,

$$\text{pr}_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \longrightarrow S_\mu : f \longmapsto f(\mu).$$



Należy zwrócić uwagę, że w przypadku skończonego zbioru indeksów  $\Lambda \equiv \overline{1, n}$  produkt kartezjański sprowadza się do standardowego iloczynu kartezjańskiego<sup>3</sup> i zapisuje w postaci

$$\times_{k=1}^n S_k = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall_{k \in \overline{1, n}} : x_k \in S_k \},$$

przy czym

$$\text{pr}_l : \times_{k=1}^n S_k \longrightarrow S_l : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto x_l.$$

Dla dowolnej rodziny odwzorowań

$$\{f_\lambda : X \longrightarrow S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

znajdujemy jedyne odwzorowanie

$$\Phi : X \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$$

o własności (1.2.3), a mianowicie

$$x \longmapsto \Phi(x), \quad \Phi(x)(\lambda) := f_\lambda(x).$$

Koproduktem jest tutaj natomiast **suma rozłączna**<sup>4</sup>

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda := \{ (x, \lambda) \mid x \in S_\lambda \wedge \lambda \in \Lambda \}$$

wraz z iniekcjami (włączeniami) kanonicznymi

$$j_\mu : S_\mu \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda : x \longmapsto (x, \mu).$$

Z dowolną rodziną odwzorowań

$$\{g_\lambda : S_\lambda \longrightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$$

stowarzyszymy jedyne odwzorowanie

$$\Psi : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \longrightarrow Y$$

o własności (1.2.4), a mianowicie

$$(x, \lambda) \longmapsto \Psi(x, \lambda) := g_\lambda(x).$$

✓

Zwieńczeniem obecnej dyskusji jest szczegółowe *wyprowadzenie* postaci produktu i koproduktu w kategorii modułów nad pierścieniem przemiennym  $R$ .

DEFINICJA 31. Przyjmijmy zapis Def. 15 i 30 oraz Przykł. 19. Niechaj  $G \in \text{Obj Mod}_R^\Lambda$  będzie rodziną modułów nad pierścieniem  $R$ . **Produkt modułów z rodziny  $G$**  to para

$$(\mathcal{M}^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}), \quad \mathcal{M}^\square := \left( \left( \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \phi_2^\square, \phi_1^\square, \phi_0^\square \right), \ell^\square \right),$$

w której  $\phi_n^\square$ ,  $n \in \{0, 1, 2\}$  to *kanonicznie indukowane* operacje grupowe,  $\ell^\square$  zaś to *kanonicznie indukowane* działanie  $R$  na produkcie kartezjańskim  $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ , które czynią z  $(\mathcal{M}^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$  produkt rodziny  $G$  w rozumieniu Def. 30.

▲

<sup>3</sup>Por. uwagi pod definicją w traktacie Kuratowskiego i Mostowskiego, jak również Konw. 1.

<sup>4</sup>*N.B.* Ilekroć  $x \in S_\lambda \cap S_\mu$ ,  $\lambda \neq \mu$ , wówczas  $(x, \lambda) \neq (x, \mu)$ .

Poświęćmy obecnie trochę czasu na bezpośrednie uzasadnienie i wyjaśnienie powyższej definicji w odwołaniu do wcześniejszej definicji produktu jako morfizmu terminalnego. Oto więc rozważamy zbiór  $G^\Gamma := \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$  z rzutami kanonicznymi  $\text{pr}_\lambda : G^\Gamma \rightarrow G_\lambda$ . Dodawania grupowe<sup>5</sup>

$$+_\lambda := \phi_2^{(\lambda)} : G_\lambda \times G_\lambda \rightarrow G_\lambda$$

zadają – dla dowolnego indeksu  $\lambda \in \Lambda$  – odwzorowania

$$\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) : G^\Gamma \times G^\Gamma \rightarrow G_\lambda,$$

co wobec terminalności pary  $(G^\Gamma, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ , w której  $G^\Gamma$  traktowane jest jako struktura trywialna (czyli obiekt **Set**), oznacza istnienie jedyne odwzorowania (*a priori* bez dodatkowych własności względem operacji grupowych i działań określonych dla poszczególnych składowych rodziny)

$$\phi_2^\Gamma : G^\Gamma \times G^\Gamma \rightarrow G^\Gamma$$

o własności

$$(1.2.5) \quad \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\Gamma = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda).$$

Zauważmy, że jeśli tylko  $\phi_2^\Gamma$  jest poprawnie określonym dodawaniem na  $G^\Gamma$  a rzuty  $\text{pr}_\lambda$  są homomorfizmami grup transportującymi owo dodawanie w dodawanie w poszczególnych składowych  $G_\lambda$ , czego mozolnie dowodzimy poniżej, to tożsamość (1.2.5) identyfikuje operację  $\phi_2^\Gamma$  jako „dodawanie po współrzędnych”. Łatwo przy tym stwierdzamy, że homomorficzność rzutów wynika bezpośrednio z założenia, że  $\phi_2^\Gamma =: +_\Gamma$  jest pożądaną operacją grupową, oto bowiem (1.2.5) implikuje równość

$$\text{pr}_\lambda(g +_\Gamma h) = \text{pr}_\lambda(g) +_\lambda \text{pr}_\lambda(h),$$

słuszną dla dowolnych dwóch elementów  $g, h \in G^\Gamma$  a oznaczającą właśnie, że  $\text{pr}_\lambda$  są homomorfizmami grup. Wystarczy zatem sprawdzić definiujące własności dodawania grupowego w odniesieniu do odwzorowania  $\phi_2^\Gamma$ . W pierwszej kolejności zbadamy jego łączność. Biorąc dowolne  $g, h, k \in G^\Gamma$ , obliczamy – wykorzystując po drodze (przy przejściu z linii 2. do linii 3.) łączność operacji  $\phi_2^{(\lambda)}$  –

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\Gamma (\phi_2^\Gamma (g, h), k) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) (\phi_2^\Gamma (g, h), k) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)} (\text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\Gamma (g, h), \text{pr}_\lambda (k)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} \left( \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) (g, h), \text{pr}_\lambda (k) \right) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)} \left( \phi_2^{(\lambda)} (\text{pr}_\lambda (g), \text{pr}_\lambda (h)), \text{pr}_\lambda (k) \right) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} \left( \text{pr}_\lambda (g), \phi_2^{(\lambda)} (\text{pr}_\lambda (h), \text{pr}_\lambda (k)) \right) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)} \left( \text{pr}_\lambda (g), \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) (h, k) \right) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} (\text{pr}_\lambda (g), \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\Gamma (h, k)) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) (g, \phi_2^\Gamma (h, k)) \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Opisywana konstrukcja produktu po opuszczeniu działań składowych  $\ell^{(\lambda)}$  stosuje się także do grup nieprzemiennej.

$$= \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, \phi_2^\square(h, k)) .$$

Tym sposobem otrzymujemy dwa odwzorowania

$$G^\square \times G^\square \times G^\square \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square})} \\ \xrightarrow{\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square)} \end{array} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda ,$$

których obrazy pokrywają się, dając odwzorowanie  $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{id}_{G_\lambda} \times \phi_2^{(\lambda)}) \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$ . Raz jeszcze przywołując terminalność pary  $(G^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ , wnioskujemy, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie

$$\alpha^\square : G^\square \times G^\square \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

przez nie indukowane, które spełnia tożsamość

$$\text{pr}_\lambda \circ \alpha^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{id}_{G_\lambda} \times \phi_2^{(\lambda)}) \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) ,$$

a ponieważ zarówno  $\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square})$ , jak i  $\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square)$  spełniają ten warunek, przeto koniecznie

$$\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square}) = \alpha^\square = \phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square) ,$$

co dowodzi łączności  $\phi_2^\square$ .

Analogicznie wykazujemy przemienność  $\phi_2^\square$ , korzystając z przemienności  $\phi_2^{(\lambda)}$ . Oto bowiem, dla dowolnych  $g, h \in G^\square$ ,

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ (\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square}(g, h)) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(h, g) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(h), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(h)) \equiv \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(g, h) \\ &= \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, h) , \end{aligned}$$

skąd równość odwzorowań

$$G^\square \times G^\square \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square}} \\ \xrightarrow{\phi_2^\square} \end{array} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda ,$$

tożsamy z  $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$ , czyli wobec jednoznaczności określenia indukowanego przezeń odwzorowania

$$\beta^\square : G^\square \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \beta^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$$

mamy pożądaną identyczność

$$\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square} = \beta^\square = \phi_2^\square .$$

Następnie rozważamy elementy neutralne w każdej z grup składowych,

$$\phi_0^{(\lambda)} : \{\bullet\} \longrightarrow G_\lambda : \bullet \longmapsto e_\lambda ,$$

i zapominając jak uprzednio o strukturze algebraicznej na rozważanych zbiorach, stowarzyszymy z nimi jedyne odwzorowanie

$$\phi_0^\square : \{\bullet\} \longrightarrow G^\square : \bullet \longmapsto e^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square = \phi_0^{(\lambda)} .$$

W ten sposób wyróżniamy element  $e^\square$  zbioru  $G^\square$ , o sugestywnej postaci uogólnionego ciągu (o indeksach z  $\Lambda$ ) elementów neutralnych z grup składowych. Jego własności względem dodawania  $\phi_2^\square$  sprawdzamy w bezpośrednim rachunku. Biorąc dowolny element  $g \in G^\square$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(e^\square, g) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(e^\square, g) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square(\bullet), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\phi_0^{(\lambda)}(\bullet), \text{pr}_\lambda(g)) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(e_\lambda, \text{pr}_\lambda(g)) = \text{pr}_\lambda(g) \\ &\equiv \text{pr}_\lambda \circ \text{pr}_2(e^\square, g), \end{aligned}$$

stąd zaś równość odwzorowań

$$\{\bullet\} \times G^\square \xrightarrow[\text{pr}_2]{\phi_2^\square \circ (\phi_0^\square \times \text{id}_{G^\square})} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

pokrywających się z  $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\phi_0^{(\lambda)} \times \text{pr}_\lambda)$ . Znowu więc znajdujemy jedyne odwzorowanie

$$\varepsilon^\square : \{\bullet\} \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

spełniające warunek

$$\text{pr}_\lambda \circ \varepsilon^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\phi_0^{(\lambda)} \times \text{pr}_\lambda),$$

a zatem

$$\phi_2^\square \circ (\phi_0^\square \times \text{id}_{G^\square}) = \varepsilon^\square = \text{pr}_2.$$

Podobnie dowodzimy tożsamości

$$\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_0^\square) = \text{pr}_1,$$

co w sumie pokazuje dowodnie, że  $e^\square$  jest elementem neutralnym dodawania  $\phi_2^\square$ .

Bez trudu rekonstruujemy też operację brania przeciwności w  $G^\square$ , biorąc za punkt wyjścia odnośne operacje w składowych

$$\phi_1^{(\lambda)} : G_\lambda \circlearrowleft.$$

Rozumując jak wcześniej, tworzymy rodzinę odwzorowań

$$\phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda : G^\square \longrightarrow G_\lambda,$$

z którymi możemy związać jedyne odwzorowanie

$$\phi_1^\square : G^\square \circlearrowleft$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \phi_1^\square = \phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda,$$

która identyfikuje  $\phi_1^\square$  jako „branie przeciwności po współrzędnych”. Trzeba jeszcze tylko upewnić się, że odwzorowanie to nadaje monoidowi przemiennemu  $(G^\square, \phi_2^\square, \phi_0^\square)$  strukturę grupy przemiennej. Z rachunku

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(\phi_1^\square(g), g) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(\phi_1^\square(g), g) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda \circ \phi_1^\square(g), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(g)) = e^{(\lambda)} = \phi_0^{(\lambda)}(\bullet) = \text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square(\bullet), \end{aligned}$$

wykonanego dla dowolnego  $g \in G^\Gamma$  a wskazującego na równość odwzorowań

$$\{\bullet\} \times G^\Gamma \xrightarrow[\phi_0^\Gamma \circ \text{pr}_1]{\phi_2^\Gamma \circ (\phi_1^\Gamma, \text{id}_{G^\Gamma}) \circ \text{pr}_2} G^\Gamma \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

identycznych z  $\phi_0^{(\lambda)} \circ \text{pr}_1$ , wywodziśmy wniosek o istnieniu jedynego odwzorowania

$$\mu^\Gamma : \{\bullet\} \times G^\Gamma \longrightarrow G^\Gamma$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \mu^\Gamma = \phi_0^{(\lambda)} \circ \text{pr}_1.$$

Ostatecznie więc stwierdzamy słuszność tożsamości

$$\phi_2^\Gamma \circ (\phi_1^\Gamma, \text{id}_{G^\Gamma}) \circ \text{pr}_2 = \mu^\Gamma = \phi_0^\Gamma \circ \text{pr}_1.$$

Analogiczne wnioskowanie prowadzi do jej symetrycznego odpowiednika

$$\phi_2^\Gamma \circ (\text{id}_{G^\Gamma}, \phi_1^\Gamma) \circ \text{pr}_2 = \mu^\Gamma = \phi_0^\Gamma \circ \text{pr}_1,$$

co potwierdza identyfikację  $\phi_1^\Gamma$  jako operacji brania przeciwności.

Na koniec wreszcie indukujemy na zrekonstruowanej powyżej grupie przemiennej strukturę modułu nad pierścieniem  $R$  ze struktur składowych. W tym celu z każdego z działań

$$\ell^{(\lambda)} : R \times G_\lambda \longrightarrow G_\lambda$$

budujemy odwzorowanie

$$\ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda) : R \times G^\Gamma \longrightarrow G_\lambda,$$

co daje nam jedyne odwzorowanie

$$\ell^\Gamma : R \times G^\Gamma \longrightarrow G^\Gamma$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \ell^\Gamma = \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda).$$

Z tej ostatniej odczytujemy definicję  $\ell^\Gamma$  jako „działania po współrzędnych”. W żmudnym, lecz poza tym absolutnie trywialnym rachunku przekonujemy się, że tak zdefiniowane odwzorowanie spełnia aksjomaty działania, i tym samym zamykamy kanoniczną konstrukcję modułu na produkcie kartezjańskim  $G^\Gamma$ .

O ile konstrukcja produktu modułów postępuje automatycznie po dokonaniu narzucającego się wyboru nośnika  $G^\Gamma$ , o tyle konstrukcja koproduktu, który będziemy w dalszej części kursu nazywać sumą prostą modułów, wymaga pewnej dozy inwencji oraz rozlicznych sprawdzeń (jednoznaczności konstrukcji). Zaznaczamy zawnazu, że poniższa konstrukcja stosuje się wyłącznie do grup przemiennej, co będziemy podkreślać pisząc  $e_\lambda$  w notacji addytywnej jako  $0_\lambda$ .

**DEFINICJA 32.** Przyjmijmy zapis Def. 30 i 31. **Suma prosta modułów z rodziny  $G$ .** to para

$$(\mathcal{M}^\sqcup, \{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}), \quad \mathcal{M}^\oplus := \left( \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \phi_2^\Gamma, \phi_1^\Gamma, \phi_0^\Gamma \right), \ell^\Gamma \right),$$

w której  $\mathcal{M}^\oplus$  jest podmodułem produktu modułów  $\mathcal{M}^\Gamma$  z rodziny  $G$  o nośniku

$$(1.2.6) \quad \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda := \{ g \in G^\Gamma \mid |\{ \lambda \in \Lambda \mid \text{pr}_\lambda(g) \neq 0_\lambda \}| < \infty \}$$

(czyli  $\text{pr}_\lambda(g)$  jest elementem neutralnym dla prawie wszystkich indeksów) i w której  $J_\lambda : G_\lambda \longrightarrow G^\Gamma$  są injeccjami kanonicznymi spełniającymi warunki

$$(1.2.7) \quad \forall_{\lambda, \mu \in \Lambda} \forall_{g_\mu \in G_\mu} : \text{pr}_\lambda \circ J_\mu(g_\mu) := \begin{cases} g_\mu & \text{dla } \lambda = \mu \\ \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases} .$$

▲

Pokażemy najpierw, że odwzorowania  $J_\lambda$  są homomorfizmami oraz że mają cechę uniwersalności. Na początku ustalmy (dowolnie) indeks  $\mu \in \Lambda$  i obliczmy – dla dowolnych  $g_\mu, h_\mu \in G_\mu$  –

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\Gamma \circ (J_\mu \times J_\mu)(g_\mu, h_\mu) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) \circ (J_\mu \times J_\mu)(g_\mu, h_\mu) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} \circ ((\text{pr}_\lambda \circ J_\mu) \times (\text{pr}_\lambda \circ J_\mu))(g_\mu, h_\mu) \\ &= \begin{cases} \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ \phi_2^{(\lambda)}(\mathbf{0}_\lambda, \mathbf{0}_\lambda) = \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases} \\ &= \text{pr}_\lambda \circ J_\mu \circ \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu), \end{aligned}$$

dowodząc tym samym równości dwóch rodzin odwzorowań

$$G_\mu \times G_\mu \xrightarrow[\text{pr}_\lambda \circ J_\mu \circ \phi_2^{(\mu)}]{\phi_2^\Gamma \circ (J_\mu \times J_\mu)} G^\Gamma \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda$$

identycznych z  $\psi_\lambda : (g_\mu, h_\mu) \longmapsto \begin{cases} \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ \mathbf{0}_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$ . W konsekwencji terminalności pary  $(G^\Gamma, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$  równość ta implikuje istnienie jedynej rodziny odwzorowań

$$\alpha_\mu : G_\mu \times G_\mu \longrightarrow G^\Gamma, \quad \mu \in \Lambda$$

o własności

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \text{pr}_\lambda \circ \alpha_\mu = \psi_\lambda .$$

Na tej podstawie wnioskujemy o równości

$$\phi_2^\Gamma \circ (J_\mu \times J_\mu) = J_\mu \circ \phi_2^{(\mu)},$$

która wyraża homomorficzny charakter  $J_\mu$ . Dowód uniwersalności  $J_\lambda$  wymaga, iż-byśmy z dowolną rodziną homomorfizmów grup (przemiennych)

$$\chi_\lambda : G_\lambda \longrightarrow Y, \quad \lambda \in \Lambda$$

określona dla dowolnej grupy przemiennej  $Y$  potrafili stowarzyszyć odwzorowanie

$$H : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \longrightarrow Y$$

spełniające relacje

$$(1.2.8) \quad \forall_{\lambda \in \Lambda} : H \circ J_\lambda = \chi_\lambda$$

oraz udowodnić, że odwzorowanie o tej własności jest dane jednoznacznie. Postulujemy, dla dowolnego  $g \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ,

$$H(g) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g) .$$

Zauważmy, że suma w powyższej definicji jest skończona, por. (1.2.6), zatem definicja ma sens. Sprawdzamy też bez trudu relację (1.2.8), wybrawszy dowolnie  $g_\lambda \in G_\lambda$ ,

$$\begin{aligned} H \circ J_\lambda(g_\lambda) &= \sum_{\mu \in \Lambda} \chi_\mu \circ \text{pr}_\mu \circ J_\lambda(g_\lambda) \\ &\equiv \chi_\lambda \circ \text{pr}_\lambda \circ J_\lambda(g_\lambda) +_Y \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \chi_\mu \circ \text{pr}_\mu \circ J_\lambda(g_\lambda) \\ &= \chi_\lambda(g_\lambda) +_Y \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \chi_\mu(\mathbf{0}_\mu) = \chi_\lambda(g_\lambda). \end{aligned}$$

Dowodzimy następnie jedyności  $H$ . Niechaj  $\tilde{H} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow Y$  będzie dowolnym innym takim odwzorowaniem, a wtedy różnica odwzorowań

$$H - \tilde{H} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow Y : g \mapsto H(g) +_Y P_Y \circ \tilde{H}(g),$$

będąca homomorfizmem grup przemiennych (przypomnijmy, że rzuty kanoniczne są homomorfizmami grup przemiennych), spełnia tożsamości

$$\begin{aligned} (H - \tilde{H}) \circ J_\lambda(g_\lambda) &= H \circ J_\lambda(g_\lambda) +_Y P_Y(\tilde{H} \circ J_\lambda(g_\lambda)) = \chi_\lambda(g_\lambda) +_Y P_Y(\chi_\lambda(g_\lambda)) \\ &= \mathbf{0}_Y. \end{aligned}$$

Możemy stąd wyciągnąć prosty wniosek:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda(G_\lambda) \subset \text{Ker}(H - \tilde{H}).$$

Jednakowoż  $\text{Ker}(H - \tilde{H})$  jest podgrupą  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ , tj. podzbiorem domkniętym ze względu na operację brania skończonych sum jego elementów, każdy zaś element  $g \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$  jest taką właśnie sumą skończoną elementów z różnych  $J_\lambda(G_\lambda)$ . Ażeby się o tym przekonać, rozważmy odwzorowanie

$$\iota^\oplus : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow Y : g \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g),$$

które jest dobrze określone z tych samych powodów co  $H$  i które wobec homomorficzności rzutów kanonicznych spełnia tożsamości

$$\text{pr}_\lambda \circ \iota^\oplus(g) \equiv \text{pr}_\lambda \circ \sum_{\mu \in \Lambda} J_\mu \circ \text{pr}_\mu(g) = \sum_{\mu \in \Lambda} (\text{pr}_\lambda \circ J_\mu)(\text{pr}_\mu(g)) = \text{pr}_\lambda(g).$$

Te ostatnie – jak w poprzednio dyskutowanych przypadkach (tj. w konsekwencji terminalności produktu kartezjańskiego) – prowadzą do równości

$$(1.2.9) \quad \iota^\oplus = \text{id}_{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda},$$

zadającej rzeczony rozkład  $g$  na skończoną sumę

$$(1.2.10) \quad g = \sum_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g).$$

Wracając do zasadniczego wywodu, stwierdzamy, że jedynym podzbiorem  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$  zawierającym  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda(G_\lambda)$  i domkniętym względem operacji brania sum skończonych jest cały zbiór  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ,

$$\text{Ker}(H - \tilde{H}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda,$$

czyli też ostatecznie

$$H = \tilde{H}.$$

Należy podkreślić, że nigdzie w dotychczasowej dyskusji koproduktu nie brałiśmy pod uwagę dodatkowej struktury  $R$ -modułu na nośniku grupy przemiennej, możemy przeto podsumować tę jej część stwierdzeniem, że oto czwórka

$$\left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \phi_2^\square, \phi_1^\square, \phi_0^\square \right)$$

stanowi spójną definicję sumy prostej grup przemiennej. Jako że działanie pierścienia  $R$  w jawny sposób zachowuje podgrupę  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \subset G^\square$ , dla naszych celów wystarczy jeszcze tylko upewnić się, że zarówno iniekcje kanoniczne  $j_\lambda$ , jak też jedyny homomorfizm grup  $H$  są odwzorowaniami  $R$ -liniowymi. W tym drugim przypadku własność ta jest bezpośrednim następstwem  $R$ -liniowości rzutów kanonicznych  $\text{pr}_\lambda$  oraz odwzorowań  $\chi^{(\lambda)}$ . W przypadku pierwszym  $R$ -liniowości stwierdzamy na gruncie terminalności produktu kartezjańskiego oraz dowiedzionych własności odwzorowań  $\ell^\square$  i  $\ell^{(\lambda)}$ , stosując sprawdzoną strategię rozważań wcześniejszych. Punktem wyjścia jest obserwacja (wysłowiona dla dowolnych  $\lambda, \mu \in \Lambda$  oraz  $(r, g_\mu) \in R \times G_\mu$ )

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \ell^\square \circ (\text{id}_R \times j_\mu)(r, g_\mu) &= \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda) \circ (\text{id}_R \times j_\mu)(r, g_\mu) \\ &\equiv \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda \circ j_\mu)(r, g_\mu) = (\text{pr}_\lambda \circ j_\mu) \circ \ell^{(\mu)}(r, g_\mu), \end{aligned}$$

wskazująca na równość dwóch rodzin odwzorowań

$$R \times G_\mu \begin{array}{c} \xrightarrow{\ell^\square \circ (\text{id}_R \times j_\mu)} \\ \xrightarrow{j_\mu \circ \ell^{(\mu)}} \end{array} \bigoplus_{\nu \in \Lambda} G_\nu \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G_\lambda,$$

identycznych z  $r_\lambda : (r, g_\mu) \mapsto \begin{cases} \ell^{(\mu)}(r, g_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0_\lambda & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$ . Terminalność pary  $(G^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$  przesądza w tej sytuacji o istnieniu jedynej rodziny odwzorowań

$$\rho_\mu : R \times G_\mu \longrightarrow \bigoplus_{\nu \in \Lambda} G_\nu \subset G^\square$$

o własności

$$\forall \lambda \in \Lambda : \text{pr}_\lambda \circ \rho_\mu = r_\lambda.$$

Stąd ostatecznie wyprowadzamy pożądaną równość

$$j_\lambda \circ \ell^{(\lambda)} = \ell^\square \circ (\text{id}_R \times j_\lambda)$$

wyrażającą  $R$ -liniowość iniekcji kanonicznych.

Warto zwrócić uwagę, że o ile definicja obu rozpatrywanych struktur uniwersalnych: produktu oraz sumy prostej modułów stawia je na pozycjach obiektów wzajem „dualnych” (co odzwierciedla odwrócenie strzałek w odnośnych diagramach przemiennej precyzujących sens uniwersalności), o tyle bezpośrednia konstrukcja w ramach teorii modułów nad pierścieniem uwypukla ich wewnątrzstrukturalne powinowactwo, prowadząc wprost do

**COROLLARIUM 3.** *Produkt i suma prosta skończonej rodziny modułów nad pierścieniem pokrywają się.*

■



Rzeczony powinowactwo niejednokrotnie pozwala uzyskać bezpośredni wgląd w relacje wiążące naturalne struktury liniowe – jako przykład prześledzimy równoważny opis sumy algebraicznej modułów w terminach ich sumy prostej.

**STWIERDZENIE 29.** *Przyjmijmy zapis Def. 2 (3) oraz 32 i niechaj  $H_1, H_2 \subset G$  będą dwoma podmodułami modułu  $G$  nad pierścieniem  $R$ , włożonymi weń kanonicznie przez odwzorowania  $J_{H_\alpha} : H_\alpha \rightarrow G$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Zdefiniujmy odwzorowanie (jawnie  $R$ -liniowe)*

$$\Delta_G : G \longrightarrow G \oplus G : g \longmapsto (g, g).$$

*Prawdziwą jest równoważność*

$$G \oplus G = \Delta_G(G) +_{\oplus} J_{H_1}(H_1) \oplus J_{H_2}(H_2) \iff G = H_1 +_G H_2.$$

■

Dowód:

$\Rightarrow$  Wobec przynależności  $(g, 0_G) \in G \oplus G$  istnieją  $\tilde{g} \in G$  oraz  $h_\alpha \in H_\alpha$  spełniające tożsamość

$$(g, 0_G) = (\tilde{g}, \tilde{g}) +_{\oplus} (h_1, h_2) = (\tilde{g} +_G h_1, \tilde{g} +_G h_2),$$

z której wyprowadzamy pożądaną równość

$$g = \tilde{g} +_G h_1 = P_G(h_2) +_G h_1,$$

oto bowiem daje nam ona układ inkluzji

$$G \subset H_1 +_G H_2 \subset G,$$

z którego wynika pierwsza część tezy dowodzonego stwierdzenia.

$\Leftarrow$  Równość  $G = H_1 +_G H_2$  oznacza dla dowolnych elementów  $g_1, g_2 \in G$  istnienie elementów  $h_{1,\alpha}, h_{2,\alpha} \in H_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  spełniających warunki

$$g_1 = h_{1,1} +_G h_{1,2}, \quad g_2 = h_{2,1} +_G h_{2,2}.$$

Wobec powyższego możemy zapisać równość

$$(g_1, g_2) = (h_{1,2} +_G h_{2,1}, h_{1,2} +_G h_{2,1}) +_{\oplus} (h_{1,1} +_G P_G(h_{2,1}), h_{2,2} +_G P_G(h_{1,2})),$$

która z racji dowolności  $g_1$  i  $g_2$  implikuje relację

$$G \oplus G \subset \Delta_G(G) +_{\oplus} J_{H_1}(H_1) \oplus J_{H_2}(H_2).$$

Ta w połączeniu z oczywistą relacją odwrotną,

$$\Delta_G(G) +_{\oplus} J_{H_1}(H_1) \oplus J_{H_2}(H_2) \subset G \oplus G,$$

odtwarza drugą część tezy.

□

**NOTACJA 3.** W przypadku skończonej rodziny  $\{G_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  modułów nad pierścieniem  $R$  będziemy czasem stosować zapis

$$\bigoplus_{k \in \overline{1, n}} G_k \equiv G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n.$$

\*                      \*                      \*

Warunki definiujące wymienione powyżej struktury uniwersalne dla rodziny modułów nad pierścieniem poddają się użytecznej parafrazie, z której nieraz przyjdzie nam korzystać w dalszej części naszych rozważań. Oto więc mamy

STWIERDZENIE 30. *Przyjmijmy zapis Def. 15, 31 oraz 32 i niechaj  $G$  będzie dowolnym  $R$ -modułem lewostronnym. Homomorfizmy*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(J, G) &: \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, G\right) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G_\lambda, G) : \chi \mapsto \chi \circ J, \\ \chi \circ J &: \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G_\lambda, G) : \lambda \mapsto \chi \circ J_\lambda \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(G, \text{pr}) &: \text{Hom}_R\left(G, \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda\right) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G, G_\lambda) : \chi \mapsto \text{pr} \circ \chi, \\ \text{pr} \circ \chi &: \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_R(G, G_\lambda) : \lambda \mapsto \text{pr}_\lambda \circ \chi, \end{aligned}$$

indukowane – odpowiednio – przez rzuty kanoniczne na moduły składowe i ich włożenia kanoniczne, są izomorfizmami grup przemiennej. Określamy je mianem **izomorfizmów kanonicznych**. ■

*Dowód:* O istnieniu homomorfizmów odwrotnych do wypisanych przesądzaają definicje odnośnych struktur uniwersalnych. I tak, np., rodzinie  $\{\chi^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$  odwzorowań  $R$ -liniowych  $\chi^{(\lambda)} : G_\lambda \rightarrow G$  przypisane jest jedyne odwzorowanie  $R$ -liniowe  $\chi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow G$  o własności  $\chi \circ J_\lambda = \chi^{(\lambda)}$ , któremu homomorfizm  $\text{Hom}_R(J, G)$  przyporządkowuje na powrót wyjściową rodzinę odwzorowań. □

W sytuacjach fizycznie istotnych częstokroć możemy ograniczyć uwagę do modułów mających rozkład na sumy proste swoich podmodułów. Punktem wyjścia do dalszej dyskusji jest tutaj

COROLLARIUM 4. *Przyjmijmy zapis Stw. 30 i niechaj  $\{G_{A\lambda_A}\}_{\lambda_A \in \Lambda_A}$ ,  $A \in \{1, 2\}$  będą dwiema rodzinami  $R$ -modułów o sumach prostych, odpowiednio,  $G_{A\oplus} := \bigoplus_{\lambda_A \in \Lambda_A} G_{A\lambda_A}$ . Odwzorowanie*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &: \text{Hom}_R(G_{1\oplus}, G_{2\oplus}) \longrightarrow \prod_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \text{Hom}_R(G_{1\lambda_1}, G_{2\lambda_2}) \\ &: \chi \mapsto \text{pr} \circ \chi \circ J, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pr} \circ \chi \circ J &: \Lambda_2 \times \Lambda_1 \longrightarrow \bigcup_{(\lambda_2, \lambda_1) \in \Lambda_2 \times \Lambda_1} \text{Hom}_R(G_{1\lambda_1}, G_{2\lambda_2}) \\ &: (\lambda_2, \lambda_1) \mapsto \text{pr}_{\lambda_2} \circ \chi \circ J_{\lambda_1} \end{aligned}$$

jest monomorfizmem grup przemiennej. Ilekroć zbiór indeksów  $\Lambda_2$  jest skończony,  $\mathcal{M}$  jest izomorfizmem. ■

*Dowód:* Wprost z konstrukcji sumy prostej modułów wynika, że  $G_{2\oplus} \subset \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2}$ , a zatem każde odwzorowanie  $R$ -liniowe  $\chi : G \rightarrow G_{2\oplus}$  jest zarazem elementem  $\text{Hom}_R(G, \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2})$ . Przy tym zawieranie przechodzi w równość dla skończonego zbioru indeksów. Teza jest więc następstwem Stw. 30. □

## ĆWICZENIA 1.

Tytułem pożytecznego ćwiczenia warto zastanowić się nad dowodami poniższych (s)twierdzeń (dowody te można znaleźć w notatkach wykładowych [Sus13]).

⋈

**STWIERDZENIE 31.** *Przyjmijmy zapis Def. 32. Niechaj  $H \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$  i niech  $\chi_\lambda \in \text{Mor } \mathbf{Mod}_R^\Delta$  będzie rodziną odwzorowań  $R$ -liniowych  $\chi_\lambda : G_\lambda \rightarrow H$ , indukującą jedyne odwzorowanie  $R$ -liniowe  $\chi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow H$  o własności*

$$\forall \lambda \in \Lambda : \chi \circ j_\lambda = \chi_\lambda.$$

*Na to by  $\chi$  był izomorfizmem  $R$ -modułów, potrzeba i wystarcza, iżby istniała rodzina  $\psi \in \text{Mor } \mathbf{Mod}_R^\Delta$  odwzorowań  $R$ -liniowych  $\psi_\lambda : H \rightarrow G_\lambda$  o następujących własnościach:*

$$(DS1) \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda : \psi_\lambda \circ \chi_\mu = \begin{cases} \text{id}_{G_\lambda} & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0 & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases};$$

(DS2)

$$\forall h \in H : \left( |\{ \lambda \in \Lambda \mid \psi_\lambda(h) \neq 0_\lambda \}| < \infty \quad \wedge \quad h = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \circ \psi_\lambda(h) \right).$$

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 84].

□

Zajmiemy się teraz ważnym przypadkiem szczególnym, kiedy to sumę prostą tworzą podmoduły modułu danego.

**DEFINICJA 33.** *Przyjmijmy zapis Def. 15 i 32. Niechaj  $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$  i niech  $G_\lambda \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R^\Delta$  będzie rodziną jego podmodułów. Mówimy, że  $G$  jest sumą prostą wszystkich modułów z tej rodziny, jeśli jedyne odwzorowanie  $j_\oplus : \bigoplus_{\mu \in \Lambda} G_\mu \rightarrow G$  spełniające tożsamości*

$$j_\oplus \circ j_\lambda = j_{G_\lambda},$$

w których  $j_{G_\lambda} \in \text{Hom}_R(G_\lambda, G)$  są włożeniami standardowymi z Przykł. 12 (4), jest izomorfizmem modułów, lub też – co na jedno wychodzi – jeśli dowolny element  $g \in G$  ma jednoznaczny rozkład w postaci

$$g = \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda, \quad g_\lambda \in G_\lambda,$$

zadawany przez rodzinę  $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  o nośniku skończonym (w rozumieniu Def. 18). Sumę prostą opisanego typu określamy mianem **wewnętrznej sumy prostej podmodułów**, natomiast niezerowe elementy  $g_\lambda$  rozkładu  $g$  to **składowe z podmodułu  $G_\lambda$** . Będziemy tu (najczęściej) stosować zapis uproszczony

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda,$$

w którym kanoniczny izomorfizm między modułami po obu stronach znaku równości został opuszczony.

▲

Wygodnym jest mieć do dyspozycji kilka równoważnych praktycznych definicji wewnętrznej sumy prostej. Dostarcza ich poniższe

STWIERDZENIE 32. *Przyjmijmy zapis Def. 18 oraz 33 i oznaczmy przez*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda := \left\{ \sum_{\mu \in \Lambda} g_\mu \mid \{g_\mu\}_{\mu \in \Lambda} \in \mathcal{B}_0(G; \Lambda) \wedge \forall_{\mu \in \Lambda} : g_\mu \in G_\mu \right\}$$

sumę algebraiczną podmodułów z rodziny  $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R^\Lambda$ . Poniższe zdania są równoważne

- (i)  $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ .
- (ii)  $\forall_{\mu \in \Lambda} : G_\mu \cap \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} G_\lambda = \{0_G\}$ .
- (iii)  $\forall_{\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{B}_0(G; \Lambda)} : \left( \left( \forall_{\lambda \in \Lambda} : g_\lambda \in G_\lambda \wedge \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda = 0_G \right) \implies \forall_{\lambda \in \Lambda} : g_\lambda = 0_G \right)$ .

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 85]. □

Warto prześledzić konsekwencje rozkładu modułu na sumę prostą rodziny jego podmodułów w kontekście Stw. 31. Tytułem przygotowania do tej dyskusji rozważymy

DEFINICJA 34. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz 18 i niechaj  $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$ . **Rzut** (lub **operator rzutu**) to **idempotentny** endomorfizm  $\pi$  modułu  $G$ , tj. taki, który spełnia tożsamość (w  $\text{End}_R(G)$ )

$$\pi \circ \pi = \pi.$$

Rodzinę  $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \text{End}_R(G)$  określamy mianem **rodziny rzutów komplementarnych** (lub **dopełniających**<sup>6</sup>), jeśli spełnione są warunki

$$\forall_{\lambda, \mu \in \Lambda} : (\lambda \neq \mu \implies \pi_\lambda \circ \pi_\mu = 0).$$

▲

Możemy już teraz sformułować nader istotne

STWIERDZENIE 33. *Przyjmijmy zapis Def. 33 i 34. Jeśli moduł  $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$  jest sumą prostą rodziny  $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R^\Lambda$  swoich podmodułów, to wówczas rzuty kanoniczne  $\text{pr}_\mu : G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \rightarrow G_\mu$ ,  $\mu \in \Lambda$  wraz z iniekcjami kanonicznymi  $J_\mu : G_\mu \rightarrow G$  indukują rodzinę rzutów komplementarnych*

$$\pi_\mu := J_\mu \circ \text{pr}_\mu : G \circlearrowleft : \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda \mapsto g_\mu +_G \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} 0_G \equiv g_\mu$$

o własności

$$\forall_{g \in G} : g = \sum_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda(g),$$

którą będziemy też zapisywać w postaci<sup>7</sup>

$$(1.2.11) \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda = \text{id}_G.$$

<sup>6</sup>Bourbaki używa w odniesieniu do odwzorowań  $\pi_\lambda$  określenia „rzuty ortogonalne”, my jednak rezerwujemy to określenie dla pewnego typu rzutów komplementarnych w przestrzeni z iloczynem skalarnym.

<sup>7</sup>Należy podkreślić, że w przypadku nieskończonej rodziny modułów zapis ten jest umowny, oto bowiem suma w nim występująca jest nieskończona. Skończoną jest natomiast każda z sum w równości poprzedniej.

I odwrotnie, każda rodzina  $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \text{End}_R(G)$  rzutów komplementarnych o własności (1.2.11) zadaje rozkład  $G$  na sumę prostą

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda(G).$$

Rodzinę rzutów komplementarnych o własności będziemy nazywać **zupelną**.

W przypadku zupełnej pary rzutów komplementarnych powyższy rozkład przyjmuje postać

$$G = \text{Im } P_1 \oplus \text{Im } P_2 \equiv \text{Ker } P_1 \oplus \text{Ker } P_2.$$

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 88 i 89]. □

Dotychczasowe nasze rozważania w naturalny sposób prowadzą do pytania o istnienie rozkładu modułu na sumę prostą zadawanego przez dowolny jego podmoduł. Jak się okaże, twierdząca odpowiedź na to pytanie jest kolejnym wyróżnikiem strukturalnym przestrzeni wektorowych pośród modułów ogólnych. Zanim jednak przekonamy się o tym, wprowadźmy niezbędne pojęcia.

DEFINICJA 35. Przyjmijmy zapis Def. 15 i 33. **Dopełnienie proste** podmodułu  $H_1 \subset G$  modułu  $G$  nad pierścieniem  $R$  to podmoduł  $H_2 \subset G$  o własności

$$G = H_1 \oplus H_2,$$

rozumianej w sensie Def. 33. Podmoduł  $H_1 \subset G$  posiadający dopełnienie proste w  $G$  nazywamy **składnikiem prostym**  $G$ .

▲

Użytecznym uzupełnieniem opisu modułów rozszczepiających się na sumę prostą swych podmodułów jest poniższe oczywiste

STWIERDZENIE 34. Przyjmijmy zapis Def. 15, 18 i 33. Niechaj  $\mathcal{B}_\lambda \subset G_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$  będą bazami podmodułów  $G_\lambda \subset G$   $R$ -modułu  $G$ . Jeśli moduł ten ma rozkład na sumę prostą

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

w rozumieniu Def. 33, to wówczas zbiór

$$\mathcal{B} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda$$

jest jego bazą.<sup>8</sup> W szczególności więc rząd modułu (nad pierścieniem o cesze IBN) będącego sumą prostą podmodułów jest sumą rządów tychże podmodułów.

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 91]. □

W przypadku przestrzeni wektorowych wywodzimy zeń kolejny istotny wyróżnik (pod)przestrzeni wektorowych.

COROLLARIUM 5. Każda podprzestrzeń przestrzeni wektorowej ma dopełnienie proste.

<sup>8</sup>W analogiczny sposób tworzymy (jako sumy teoriomnogościowe odnośnych podzbiorów składników prostych po zbiorze indeksów) podzbiory generujące oraz liniowo niezależne w  $G$ .

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Cor. 13]. □

Okazuje się, że konstrukcja sumy prostej podnosi się – co szczególnie istotne z punktu widzenia naszych przyszłych rozważań – do kategorii przestrzeni kwadratowych, ma zatem sens poniższa

DEFINICJA 36. Przyjmijmy zapis Def. 24 oraz 32 i niechaj  $((V_\lambda, +_\lambda, P_\lambda, \bullet \mapsto 0_\lambda), \ell_\lambda, Q_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$  będą przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ . **Suma prosta przestrzeni kwadratowych**  $V_\lambda$  to przestrzeń kwadratowa

$$(((\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda, +_\square, P_\square, \bullet \mapsto 0_\square), \ell_\square), \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda),$$

przy czym **suma prosta form kwadratowych**  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$  jest określona wzorem

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \longrightarrow \mathbb{K} : v \longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(v).$$

▲

Mamy też użyteczną

DEFINICJA 37. Przyjmijmy zapis Def. 26 oraz 32. Niechaj  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V, Q)$  będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem  $\mathbb{K}$  i niech  $W_1, W_2 \subset V$  będą dowolnymi jej podprzestrzeniami wzajemnie dopełniającymi, tj. zadającymi rozkład tejże na sumę prostą

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

Sumę tę nazwiemy **sumą ( $Q$ -)ortogonalną** i zapiszemy w postaci

$$V = W_1 \perp_Q W_2,$$

jeśli  $W_1$  i  $W_2$  są wzajemnie ( $Q$ -)ortogonalne, tj.

$$W_1 \perp_Q W_2.$$

▲

Mamy fundamentalne

STWIERDZENIE 35. *Każda skończenie wymiarowa niezwyrodniała podprzestrzeń przestrzeni kwadratowej ma ortogonalne dopełnienie proste (w rozumieniu Def. 35 i 37).*

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 156]. □

Powyższa definicja pozwala nam także wygodnie doprecyzować tezę Stw. 22 w przypadku  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Istotnie, procedura Lagrange’a, stanowiąca treść konstruktywnego dowodu tego stwierdzenia, jest wprawdzie niezawodna i w każdych okolicznościach prowadzi do diagonalizacji formy kwadratowej, bywa jednak mozolna. Tymczasem poniższe ogólne twierdzenie daje nam jakościowy wgląd w strukturę przestrzeni kwadratowej, który w praktycznych zastosowaniach wystarcza do wyciągnięcia daleko idących wniosków.

**TWIERDZENIE 1.2.3** (Sylwestera prawo bezwładności). *Przyjmijmy zapis Def. 22 i 24. Niechaj  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  i niech  $\left(\left((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V\right), Q\right)$  będzie przestrzenią kwadratową wymiaru  $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$  nad  $\mathbb{K}$ . Wówczas  $V$  rozkłada się na sumę ortogonalną*

$$V = V_0 \oplus_Q V_+ \oplus_Q V_-$$

podprzestrzeni  $V_0 \subset V$  oraz niezwyrodniałych  $V_{\pm} \subset V$  określonych przez warunki

$$Q|_{V_0} = 0, \quad Q|_{V_+} \geq 0, \quad Q|_{V_-} \leq 0.$$

Co więcej, istnieje baza ortogonalna  $\mathcal{B} := \{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$  przestrzeni  $V$  o tej własności, że macierz  $\Phi_Q$  względem  $\mathcal{B}$  ma postać

$$[\Phi_Q]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\underbrace{1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, \dots, 1_{\mathbb{K}}}_{s_+ \text{ razy}}, \underbrace{-1_{\mathbb{K}}, -1_{\mathbb{K}}, \dots, -1_{\mathbb{K}}}_{s_- \text{ razy}}, \underbrace{0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}}_{N-(s_++s_-) \text{ razy}}).$$

Przy tym wymiary  $\mathbb{K}$ -liniowe  $s_{\pm} := \dim_{\mathbb{K}} V_{\pm}$  nie zależą od wyboru rozkładu opisanego powyżej, a nadto spełniają tożsamości

$$s_{\pm} := \max_{\substack{W \subset V \\ \pm \Phi_Q|_{W \times W} \geq 0 \text{ niezwyrodniała}}} \{ \dim_{\mathbb{K}} W \}, \quad s_+ + s_- = \text{rk } \Phi_Q.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Tw. 9.3].

□

Powyższe rozważania prowadzą do

**DEFINICJA 38.** Przyjmijmy zapis Tw. 1.2.3. Parę liczb  $(s_+, s_-) \in \mathbb{N}^{\times 2}$  nazywamy **sygnaturą formy kwadratowej**  $Q$  i zapisujemy jako

$$\text{sign}(Q) := (s_+, s_-).$$

▲

Konstruktywny dowód Stw. 22 zamieszczony w Ref. [Sus13] zawiera szczegółowy opis niezawodnej procedury (Lagrange'a), która w każdych okolicznościach prowadzi do diagonalizacji formy kwadratowej i pozwala ustalić jej sygnaturę. Wygodny alternatywny algorytm konstrukcji bazy ortogonalnej i zarazem prosty przepis na sygnaturę, znajdujący zastosowanie w szczególnych okolicznościach algebraicznych, zawiera poniższe

**STWIERDZENIE 36** (Sylwestera–Jacobiego wyznacznikowy wzór na sygnaturę). *Przyjmijmy zapis Def. 20 i 38. Niechaj  $\left(\left((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V\right), Q\right)$  będzie przestrzenią kwadratową skończonego wymiaru  $\dim_{\mathbb{K}} V =: N < \infty$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  o charakterystyce  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  i niech  $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}} \subset V$  będzie dowolną bazą  $V$  o tej własności, że dla dowolnego  $n \in \overline{1, N}$  podprzestrzeń  $V_n := \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}$  jest niezwyrodniała względem  $Q$ , tj. wyznacznik odnośnej macierzy*

$$G(n) : \overline{1, n} \times \overline{1, n} \longrightarrow \mathbb{K} : (i, j) \longmapsto \Phi_Q(v_i, v_j),$$

jest odwracalny w  $\mathbb{K}$ ,

$$\forall_{n \in \overline{1, N}} : \det_{(n)} G(n) \neq 0_{\mathbb{K}}.$$

Wówczas wektory

$$e_n := \sum_{j=1}^n \left( \left( \overline{G(n)}^n \right)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \overline{G(n)}^n \right)_j \triangleright_V v_j, \quad n \in \overline{1, N},$$

zapisane przy użyciu wyrażen skalarnych:  $\widehat{G(1)}_1^1 := 1_{\mathbb{K}}$  oraz

$$\widehat{G(n)}_j^i := (-1)^{i+j} \det_{(n-1)}(G(n)_{\neq i}^{\neq j}), \quad i, j \in \overline{1, n},$$

w których  $G(n)_{\neq i}^{\neq j} \in \mathbb{K}(n-1)$  jest macierzą otrzymaną z  $G(n)$  przez usunięcie  $G(n)^j_{\bullet}$  ( $j$ -tego wiersza) i  $G(n)_{\bullet i}$  ( $i$ -tej kolumny), tworzą bazę  $V$  diagonalizującą  $Q$  w rozumieniu Stw. 22, a przy tym

$$\forall_{n \in \overline{1, N}} : Q(e_n) = 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \left( \widehat{G(n)}_n^n \right)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \widehat{G(n+1)}_{n+1}^{n+1},$$

gdzie  $\widehat{G(N+1)}_{N+1}^{N+1} := \det_{(N)}(G(N))$ . W szczególności więc

$$\text{sign}(Q) = (p, q),$$

gdzie  $p$  jest liczbą dodatnich,  $q$  zaś – ujemnych wyrazów ciągu

$$\left( \widehat{G(n)}_n^n \right)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \widehat{G(n+1)}_{n+1}^{n+1}, \quad n \in \overline{1, N}.$$

Forma  $Q$  nad ciałem  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  jest zatem dodatnio określona, gdy

$$\forall_{n \in \overline{2, N+1}} : \widehat{G(n)}_n^n > 0$$

i ujemnie określona, gdy

$$\forall_{n \in \overline{2, N+1}} : (-1)^n \cdot_{\mathbb{R}} \widehat{G(n)}_n^n < 0.$$

■

Dowód: Patrz: [Sus13, Stw. 164].

□

UWAGA 2. Algorytm konstrukcji bazy  $Q$ -ortogonalna opisany w treści ostatniego stwierdzenia nosi miano **ortogonalizacji Grama–Schmidta** i znajduje szerokie zastosowanie praktyczne.

▮

Wprowadzone tu pojęcie sygnatury pozwala nam dopracować treść Stw. 25 w fizycznie istotnym przypadku niezwyrodniałej przestrzeni kwadratowej nad ciałem  $\mathbb{R}$ .

**STWIERDZENIE 37.** *Przyjmijmy zapis Def. 38 i Stw. 25. Na dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej (wymiaru  $\dim_{\mathbb{R}} V = N$ ) wyposażonej w formę kwadratową  $Q$  o sygnaturze  $(p, q)$  istnieje **wyznacznik unormowany**  $\Delta \in \wedge^{\bullet} V^*$ , tj. taki, który spełnia warunek*

$$\lambda_{\Delta} = (-1)^q.$$

■

Dowód: Wybierzmy w  $V$  bazę (pseudo)ortogonalną  $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$  i rozważmy stowarzyszony z nią wyznacznik  $\Delta_{\mathcal{E}}$ . Obliczamy bezpośrednio

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \cdot \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E})^2 = \det_{(N)} \left( \Phi_Q(e_i, e_j) \right)_{i, j \in \overline{1, N}} \\ &\equiv \det_{(N)} \left( \underbrace{\text{diag}(1, 1, \dots, 1)}_{p \text{ razy}}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q \text{ razy}} \right) = (-1)^q. \end{aligned}$$

□



Wreszcie na zakończenie tej części naszych rozważań wysłowimy nader brzemienne w konsekwencje stwierdzenie określające relację strukturalną między izotropowymi i hiperbolicznymi podprzestrzeniami dowolnej niezwyrodniałej przestrzeni kwadratowej.

**STWIERDZENIE 38** (O rozszerzeniu hiperbolicznym przestrzeni izotropowej). *Przyjmijmy zapis Def. 26 oraz 37 i Przykł. 14 (2), przy czym zakładamy, że  $(V, Q)$  jest niezwyrodniałą przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{K}$  o charakterystyce  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ . Niechaj  $W \subset V$  będzie podprzestrzenią  $V$ . Oznaczmy  $\Phi_W := \Phi_Q \upharpoonright W \times W$  i  $W_0 := \text{Ker } \Phi_W$  i załóżmy, że wymiar  $W_0$  jest skończony,  $\dim_{\mathbb{K}} W_0 =: K < \infty$ . Wybierzmy bazę  $\{w_i\}_{i \in \overline{1, K}}$  w  $W_0$  i niech  $D$  będzie dopełnieniem  $Q$ -ortogonalnym  $W_0$  w  $W$ ,*

$$W = W_0 \oplus_Q D.$$

*Wówczas istnieją wektory  $\{v_i\}_{i \in \overline{1, K}} \subset D^{\perp_Q} \subset V$  o tej własności, że dla każdego indeksu  $i \in \overline{1, K}$  układ  $\{v_i, w_i\}$  jest parą hiperboliczną rozpinającą płaszczyznę hiperboliczną  $H_i := \langle v_i, w_i \rangle_{\mathbb{K}}$ . Pary te zadają rozkład ortogonalny podprzestrzeni*

$$\widetilde{W} := \langle v_1, v_2, \dots, v_K, w_1, w_2, \dots, w_K \rangle_{\mathbb{K}} +_V D \subset V$$

*dany wzorem*

$$\widetilde{W} = H_1 \oplus_Q H_2 \oplus_Q \dots \oplus_Q H_K \oplus_Q D.$$

■

*Dowód:* Patrz: [Sus13, Stw. 166].

□

Oczywistą konsekwencją powyższego jest

**COROLLARIUM 6.** *Przyjmijmy zapis Def. 26, przy czym zakładamy, że  $V$  jest skończone wymiarową niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową nad ciałem  $\mathbb{K}$  o charakterystyce  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ ,  $W \subset V$  zaś – jej podprzestrzenią  $Q$ -zerową. Wówczas*

$$\dim_{\mathbb{K}} W \leq E\left(\frac{n}{2}\right).$$

*Podprzestrzeń, której wymiar wysyca powyższą nierówność, określamy mianem **maksymalnej podprzestrzeni  $Q$ -zerowej**.*

■

Mamy także wygodne

**STWIERDZENIE 39.** *Przyjmijmy zapis Cor. 6 i Przykł. 14 (2), przy czym zakładamy, że  $(V, Q)$  jest (skończone wymiarową) **przestrzenią hiperboliczną**, tj. sumą  $(Q)$ -ortogonalną skończonej liczby płaszczyzn hiperbolicznych. Niechaj  $W \subset V$  będzie dowolną maksymalną podprzestrzenią  $Q$ -zerową. Każda izometria  $\chi \in \text{O}(V, Q)$  o własności*

$$\chi \upharpoonright_W = \text{id}_W$$

*jest obrotem,*

$$\chi \in \text{SO}(V, Q).$$

■

*Dowód:* Utożsamimy podprzestrzeń  $W$  z treści Stw. 38 z maksymalną podprzestrzenią  $Q$ -zerową, o której mowa w treści twierdzenia dowodzonego, stwierdzamy istnienie (maksymalnie)  $Q$ -zerowego dopełnienia *prostego*  $\Delta \subset V$  tejże podprzestrzeni,

$$W \oplus \Delta = V,$$

rozpiętego na wektorach  $v_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ,  $2n \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$  dopełniających elementy (dowolnej) bazy  $\{w_i\}_{i \in \overline{1, n}}$  do odnośnych par hiperbolicznych  $\{w_i, v_i\}$ . Wprost na mocy założenia zachodzi przy tym

$$\forall_{i \in \overline{1, n}} : \chi(w_i) = w_i,$$

a zatem także – dla dowolnych  $(w, x) \in W \times \Delta$  –

$$\begin{aligned} \Phi_Q(w, \chi(x) - x) &= \Phi_Q(w, \chi(x)) - \Phi_Q(w, x) \equiv \Phi_Q(\chi(w), \chi(x)) - \Phi_Q(w, x) \\ &= \Phi_Q(w, x) - \Phi_Q(w, x) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

skąd wniosek:

$$\forall_{x \in \Delta} : \chi(x) - x \in W^{\perp_Q}.$$

$Q$ -zerowość  $W$  implikuje inkluzję

$$W \subseteq W^{\perp_Q},$$

która w konsekwencji Równ. (1.1.9) (znajdującego tu zastosowanie wobec niezwyrodnienia  $V$ ) i maksymalności  $W$ , pociągających za sobą równość

$$\dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q} = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} W = 2n - n = n \equiv \dim_{\mathbb{K}} W,$$

sprowadza się do tożsamość

$$W = W^{\perp_Q}.$$

Możemy zatem przepisać wcześniejszy wniosek w postaci

$$\forall_{x \in \Delta} : \chi(x) - x \in W,$$

otrzymując tym sposobem w szczególności relacje

$$\forall_{i \in \overline{1, n}} \exists_{\mu_i^1, \mu_i^2, \dots, \mu_i^n \in \mathbb{K}} : \chi(v_i) = v_i + \sum_{j=1}^n \mu_i^j v_j,$$

które przesądzają o górnotrójkątnej postaci macierzy endomorfizmu  $\chi$  względem bazy  $\mathcal{B} := \{w_1, w_2, \dots, w_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$$[\chi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & (\mu_i^j)_{i \in \overline{1, n}}^{j \in \overline{1, n}} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}.$$

Licząc wyznacznik  $\chi$  w tej właśnie bazie, otrzymujemy pożądaną wartość

$$\det \chi = \det_{(2n)} [\chi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}.$$

□

Konsekwencją dużo mniej oczywistą, a fundamentalną dla teorii przestrzeni kwadratowych, jest<sup>9</sup>

<sup>9</sup>W swojej wersji pierwotnej, sformułowanej i udowodnionej dla  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , twierdzenie to pochodzi od E.J. Cartana [Car38a, Car38b]. Jego wersję ogólną oraz także dowód podał następnie J.A. Dieudonné w monografii [Die55]. Dowód przedstawiony w niniejszym skrypcie pochodzi zasadniczo od E. Artina [Art61].

**TWIERDZENIE 1.2.4** (Cartana–Dieudonnégo). *Przyjmijmy zapis Def. 22 i 26 oraz Przykł. 6 (1), zakładając dodatkowo, że przestrzeń kwadratowa  $(V, Q)$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  o charakterystyce  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  jest skończonego wymiaru,  $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ , i jest niezwyrodniała. Wówczas*

$$\forall \chi \in \text{O}(V, Q) \quad \exists_{n \in \overline{0, N}} \exists_{v_1, v_2, \dots, v_n \in V^\times} : \chi = P_{v_1} \circ P_{v_2} \circ \dots \circ P_{v_n},$$

przy czym

$$\chi \in \text{SO}(V, Q) \quad \iff \quad n \in 2\mathbb{N}.$$

■

*Dowód:* Zauważmy na wstępie, że dowolne odbicie elementarne  $P_v$  przyjmuje względem rozkładu  $Q$ -ortogonalnego

$$V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$$

postać

$$P_v = (-\text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}}) \oplus_Q \text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}},$$

zatem spełnia warunek

$$\det P_v = -\mathbf{1}_{\mathbb{K}}.$$

Przy założeniu słuszności pierwszej części tezy dowodzonego twierdzenia obserwacja ta implikuje natychmiast drugą jej część.

Dowód części pierwszej przeprowadzimy metodą indukcji silnej względem  $N$ , zauważając natychmiast oczywistość tezy w przypadku  $N = 1$  – istotnie, jeśli  $V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$ , to mamy koniecznie  $\chi(v) = \lambda \triangleright v$  dla pewnego  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ , a przy tym  $\mathbf{0}_{\mathbb{K}} \neq Q(v) = Q \circ \chi(v) = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)$  implikuje  $\lambda \in \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\}$ , więc albo  $\chi = \text{id}_V \in \text{SO}(V, Q)$ , albo  $\chi = P_v \in \text{O}(V, Q) \setminus \text{SO}(V, Q)$ . Poczyniwszy założenie indukcyjne o słuszności dowodzonej tezy dla  $N \in \overline{1, N_0 - 1}$ ,  $N_0 > 1$ , rozbijemy następnie dowód jej słuszności dla  $N = N_0$  na składowe odpowiadające wykluczającym się nawzajem ewentualnościom:

- (i)  $\exists_{v \in V^\times} : \chi(v) = v$ ;
- (ii)  $\forall_{v \in V^\times} : \chi(v) - v \neq 0_V \quad \wedge \quad \exists_{w \in V^\times} : \chi(w) - w \in V^\times$ ;
- (iii)  $\forall_{v \in V^\times} : \chi(v) - v \in Q^{-1}(\{0_V\}) \setminus \{0_V\}$ .

W przypadku (i) przywołujemy tezę Stw. 35 (na co pozwala nieizotropowość  $v$ ) i dokonujemy rozkładu

$$(1.2.12) \quad V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q},$$

odnotowując przy tym rozkład rozważanego endomorfizmu

$$\chi = \text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \chi \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}}.$$

Wobec równości

$$\dim_{\mathbb{K}} \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q} = N_0 - 1$$

założenie indukcyjne pozwala nam rozłożyć  $\chi \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}}$  na co najwyżej  $N_0 - 1$  odbić elementarnych  $P_x^{(N_0-1)}$  w hiperpłaszczyznach  $Q \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}} \equiv Q_{\perp v}$ -ortogonalnych do wyróżnionych wektorów nieizotropowych  $x \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$ . Odbicie  $P_x^{(N_0-1)}$  przyjmuje względem odnośnego rozkładu

$$\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q} = \langle x \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_{Q_{\perp v}} \langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_{Q_{\perp v}}},$$

postać blokowo-diagonalną

$$\mathbf{P}_x^{(N_0-1)} = (-\text{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}}) \oplus \text{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q_1 v}},$$

a jego trywialne rozszerzenie do całej przestrzeni  $V$  zapisuje się względem rozkładu (1.2.12) jako

$$\text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \mathbf{P}_x^{(N_0-1)} \equiv \text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus (-\text{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}}) \oplus \text{id}_{\langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q_1 v}},$$

czyli sprowadza się do odbicia elementarnego w hiperpłaszczyźnie

$$\langle x \rangle^{\perp Q} = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle x \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q_1 v},$$

tj. spełnia tożsamość

$$\text{id}_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \mathbf{P}_x^{(N_0-1)} \equiv \mathbf{P}_x.$$

To rozumowanie przekonuje, że w przypadku (i) izometria  $\chi$  rozkłada się na co najwyżej  $N_0 - 1 < N_0$  odbić elementarnych.

W przypadku (ii) nieizotropowość  $\chi(w) - w$  pozwala rozpatrzeć odbicie elementarne  $\mathbf{P}_{\chi(w)-w}$ , które spełnia tożsamość

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\chi(w)-w}(w) &= w - \frac{2\Phi_Q(w, \chi(w)-w)}{Q(\chi(w)-w)} \triangleright (\chi(w) - w) \\ &= w - \frac{2(\Phi_Q(w, \chi(w)) - Q(w))}{2Q(w) - 2\Phi_Q(w, \chi(w))} \triangleright (\chi(w) - w) = \chi(w). \end{aligned}$$

Na jej podstawie stwierdzamy, że izometria  $\chi_w := \mathbf{P}_{\chi(w)-w} \circ \chi$  zachowuje nieizotropowy wektor  $w$ , co w świetle poprzedniej części naszego dowodu oznacza, że  $\chi_w$  jest superpozycją co najwyżej  $N_0 - 1$  odbić elementarnych. Co za tym idzie, wyjściowa izometria  $\chi$  jest superpozycją co najwyżej  $N_0 - 1 + 1 = N_0$  odbić elementarnych, zgodnie z tezą indukcyjną.

W przypadku (iii) przekonujemy się, że  $N_0 = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  oraz że  $\chi \in \text{SO}(V, Q)$ , co pozwala przeprowadzić następujące proste rozumowanie. Nieizotropowość wektora  $v \in V^\times$  (wybranego dowolnie, a wybór taki istnieje z racji niezwyrodnienia  $V$  i założenia dotyczącego charakterystyki  $\mathbb{K}$ ) oznacza, że przynajmniej jeden z wektorów  $\chi(v) \pm v$  jest nieizotropowy, gdyż

$$Q(\chi(v) + v) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} = Q(\chi(v) - v)$$

$$\iff Q(v) + \Phi_Q(v, \chi(v)) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} = Q(v) - \Phi_Q(v, \chi(v)) \implies Q(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}.$$

W rozważanym przypadku (iii) oznacza to niechybnie  $\chi(v) +_V v \in V^\times$  przy jednoczesnym  $\chi(v) \neq v$ , ponieważ zaś

$$\mathbf{P}_{\chi(v)+_V v}(v) = v - \frac{2\Phi_Q(v, \chi(v)+_V v)}{Q(\chi(v)+_V v)} \triangleright (\chi(v) +_V v) = -\chi(v),$$

przeto  $\tilde{\chi}_v := \mathbf{P}_v \circ \mathbf{P}_{\chi(v)+_V v} \circ \chi$  zachowuje wektor nieizotropowy  $v$ . Rozumując jak poprzednio, stwierdzamy, że  $\tilde{\chi}_v$  jest superpozycją co najwyżej  $N_0 - 1$  odbić elementarnych, przy czym jeśli przyjąć, że – jak pokażemy lada chwila –  $N_0$  jest liczbą parzystą, a  $\chi$  jest obrotem, to mamy do czynienia z sytuacją, w której *obrót*  $\tilde{\chi}_v$  rozkłada się na co najwyżej  $N_0 - 1 \in 2\mathbb{N} + 1$  odbić (elementarnych), czyli koniecznie w rozkładzie tym jest co najwyżej  $N_0 - 2 \in 2\mathbb{N}$  czynników, to zaś – koniec końców – prowadzi do wniosku, że  $\chi$  jest superpozycją co najwyżej  $N_0 - 2 + 2 = N_0$  odbić elementarnych, w zgodzie z tezą indukcyjną. Pozostaje przeto dowieść, że endomorfizm ten przy spełnionych warunkach z punktu (iii) jest w istocie obrotem w parzystowymiarowej (niezwyrodniałej) przestrzeni kwadratowej. Jasno widać,

że  $N_0 \neq 1$ , oto bowiem w przypadku  $N_0 = 1$  jest – jak pokazaliśmy wcześniej –  $\chi(v) = -v$ , więc też  $\chi(v) - v = -2_{\mathbb{K}} \triangleright v \in V^\times$ , przeciwnie do założenia (iii). Gdyby natomiast było  $N_0 = 2$ , to wówczas mielibyśmy  $\chi(v) \notin \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$ , gdyż w przeciwnym przypadku byłoby albo  $\chi(v) = v$ , niezgodnie z założeniem (iii), albo  $\chi(v) = -v$ , a wtedy  $\chi(v) - v = -2_{\mathbb{K}} \triangleright v \in V^\times$ , również w sprzeczności z założeniem (iii). Skoro jednak  $\chi(v) \notin \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$ , to  $\{v, \chi(v)\}$  jest bazą  $V$ , w której wprost na mocy założenia (iii) znika gramian

$$\begin{aligned} \det_{(2)} \begin{pmatrix} \Phi_Q(v, v) & \Phi_Q(v, \chi(v)) \\ \Phi_Q(v, \chi(v)) & \Phi_Q(\chi(v), \chi(v)) \end{pmatrix} &= \det_{(2)} \begin{pmatrix} Q(v) & \Phi_Q(v, \chi(v)) \\ \Phi_Q(v, \chi(v)) & Q(v) \end{pmatrix} \\ &= Q(v)^2 - \Phi_Q(v, \chi(v))^2 = 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} Q(\chi(v) - v) \cdot_{\mathbb{K}} 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} Q(\chi(v) + v) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

co oznacza, że  $V$  jest zwyrodniała, wbrew założeniu. Ostatecznie więc  $N_0 \geq 3$ . Rozważmy następnie izotropowy wektor  $w \in V$ . W świetle Stw. 38 istnieje niepuste (wszak  $\dim_{\mathbb{K}} V > 2$ ) dopełnienie  $Q$ -ortogonalne płaszczyzny hiperbolicznej zawierającej  $w$ , czyli też – wektor nieizotropowy  $v \in V^\times$  (wszak  $Q$  jest niezwyrodniała) o własności  $\Phi_Q(v, w) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$ . Dla dowolnego  $\varepsilon \in \mathbb{K}^\times$  otrzymujemy wtedy wektor nieizotropowy  $w +_V \varepsilon \triangleright v \in V$ ,

$$\begin{aligned} Q(w +_V \varepsilon \triangleright v) &\equiv \Phi_Q(w +_V \varepsilon \triangleright v, w +_V \varepsilon \triangleright v) \\ &= Q(w) + \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) + 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v, w) \\ &= \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

a zatem także – wprost na mocy (iii) – niezerowy wektor izotropowy  $\chi(w +_V \varepsilon \triangleright v) - (w +_V \varepsilon \triangleright v)$ , przy czym warunek izotropowości tego ostatniego daje nam – w połączeniu z warunkiem izotropowości  $\chi(v) - v$  – tożsamość

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_{\mathbb{K}} &= Q(\chi(w +_V \varepsilon \triangleright v) - (w +_V \varepsilon \triangleright v)) \equiv Q(\chi(w) - w +_V \varepsilon \triangleright (\chi(v) - v)) \\ &= Q(\chi(w) - w) +_{\mathbb{K}} \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(\chi(v) - v) +_{\mathbb{K}} 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(\chi(w) - w, \chi(v) - v) \\ &= Q(\chi(w) - w) +_{\mathbb{K}} 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(\chi(w) - w, \chi(v) - v). \end{aligned}$$

Dodając do siebie obie strony powyższej równości dla  $\varepsilon = -\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$  i  $\varepsilon = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ , otrzymujemy równość

$$Q(\chi(w) - w) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}},$$

słuszną dla dowolnego izotropowego wektora  $w$ . W konkluzji możemy zapisać, w rozpatrywanym tu przypadku (iii),

$$V_1 := \text{Im}(\chi - \text{id}_V) \subset \text{Ker } Q.$$

Zauważmy przy tym, że

$$(1.2.13) \quad \forall_{x, y \in V_1} : \Phi_Q(x, y) = 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} (Q(x +_V y) - Q(x) - Q(y)) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$$

(wszak  $V_1$  jest podgrupą), więc  $V_1$  jest podprzestrzenią  $Q$ -zerową. Wybierzmy  $x \in V$  oraz  $y \in V_1^{\perp Q}$ , a wtedy – w świetle powyższego –

$$\begin{aligned} \Phi_Q(x, \chi(y) - y) &= \Phi_Q(\chi(x), \chi(y) - y) - \Phi_Q(\chi(x) - x, \chi(y) - y) \\ &= \Phi_Q(\chi(x), \chi(y) - y) = \Phi_Q(x, y) - \Phi_Q(\chi(x), y) \end{aligned}$$

$$= -\Phi_Q(\chi(x) - x, y) = \mathbf{0}_K,$$

czyli – wobec dowolności  $x$  i niezwyrodnienia  $Q$  –

$$\forall_{y \in V_1^{\perp Q}} : \chi(y) - y = 0_V,$$

czyli

$$(1.2.14) \quad \chi \upharpoonright_{V_1^{\perp Q}} = \text{id}_{V_1^{\perp Q}}.$$

Przywołując raz jeszcze warunek (iii), konkludujemy, że

$$V_1^{\perp Q} \subset Q^{-1}(\{\mathbf{0}_K\}),$$

a że  $V_1^{\perp Q} \subset V$  jest podgrupą, przeto jest też automatycznie podprzestrzenią  $Q$ -zerową (por. (1.2.13)), a zatem

$$V_1^{\perp Q} \subseteq (V_1^{\perp Q})^{\perp Q}.$$

Ostatecznie otrzymujemy ciąg inkluzji

$$V_1 \subseteq V_1^{\perp Q} \subseteq (V_1^{\perp Q})^{\perp Q} = V_1,$$

w którym ostatnia równość wynika wprost ze Stw. 24. Z powyższego wynika już wprost równość

$$V_1 = V_1^{\perp Q},$$

a z niej – na mocy Równ. (1.1.9) – parzystość  $N_0 \equiv \dim_K V$ . Obecność w niej podprzestrzeni  $Q$ -zerowej  $W$  wymiaru  $\dim_K W = \frac{N_0}{2}$ , czyli maksymalnego, przesądza – w świetle Stw. 38 – o hiperboliczności  $V$  i tym samym pozwala nam odnieść tezę Stw. 39 do izometrii  $\chi$  o własności (1.2.14), tj. ograniczającej się trywialnie do maksymalnej podprzestrzeni  $Q$ -zerowej  $V_1^{\perp Q} = V_1$ . Tym sposobem wnioskujemy, że  $\chi$  jest w istocie obrotem, co kończy dowód.  $\square$

## 2. Iloczyn tensorowy

W następnej odsłonie analizy fizykalnie istotnych struktur uniwersalnych natrafiamy na obiekt stanowiący strukturalnie kluczową, wręcz współdefiniującą składową opisu zjawisk kwantowych, w szczególności – jako narzędzie konstrukcji przestrzeni stanów kwantowych złożonego układu fizycznego z przestrzeni stanów podukładów. Tytułem przygotowania gruntu pod definicję zasadniczą wprowadzimy najpierw

**DEFINICJA 39.** Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz 31 i ustalmy  $R \in \text{Obj } \mathbf{Ring}$ . Niechaj  $G_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$ ,  $G_2 \in \mathbf{Mod}_R$  oraz  $H \in \text{Obj } \mathbf{AbGrp}$  i niech  $\varphi : G_1 \times G_2 \rightarrow H$  będzie **dwu- $Z$ -liniowe** (czyli dwu-addytywne), tj.

$$\forall_{g_1, g_2 \in G_1} \forall_{g_3 \in G_2} : \varphi(g_1 +_1 g_2, g_3) = \varphi(g_1, g_3) +_H \varphi(g_2, g_3),$$

$$\forall_{h_1 \in G_1} \forall_{h_2, h_3 \in G_2} : \varphi(h_1, h_2 +_2 h_3) = \varphi(h_1, h_2) +_H \varphi(h_1, h_3).$$

Odwzorowanie  $\varphi$  nazywamy **śród- $R$ -liniowym**, jeśli spełnia dodatkowy warunek **śród- $R$ -jednorodności**

$$\forall_{(r, g_1, g_2) \in R \times G_1 \times G_2} : \varphi(g_1 \triangleleft r, g_2) = \varphi(g_1, r \triangleright g_2).$$

Odwzorowania śród- $R$ -liniowe dla ustalonej pary  $(G_1, G_2)$  tworzą kategorię  ${}^{G_1}L^{G_2}$ , której obiektami są pary  $(H, \varphi)$  złożone z  $H \in \text{Obj } \mathbf{AbGrp}$  i odwzorowania śród- $R$ -liniowego  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(G_1 \times G_2, H)$ , morfizmami zaś – dla ustalonych obiektów

$(H_\alpha, \varphi_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , utworzonych przez  $H_\alpha \in \text{Obj } \mathbf{AbGrp}$  i odwzorowania śród- $R$ -liniowe  $\varphi_\alpha : G_1 \times G_2 \rightarrow H_\alpha$  – odwzorowania

$$\text{Hom}_{G_1 L G_2}((H_1, \varphi_1), (H_2, \varphi_2)) = \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(H_1, H_2) \mid \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1 \}.$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 20. Fundamentalnym przykładem odwzorowania śród- $R$ -liniowego jest mnożenie w pierścieniu  $R$ , przy czym  $R$  traktujemy tutaj jako kanoniczny lewy  $({}_R R)$  i prawy  $(R_R)$   $R$ -moduł z Przykł. 11 (2).

✓

Możemy już teraz wysłowić

DEFINICJA 40. Przyjmijmy zapis Def. 29 i 39. **Iloczyn tensorowy nad  $R$**  prawego  $R$ -modułu  $G_1$  i lewego  $R$ -modułu  $G_2$  to struktura inicjalna

$$((G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R), \otimes_R)$$

dla warunku

$P_{(G_1, G_2); F_1, F_2}(H, \varphi) \equiv \text{„}\varphi : G_1 \times G_2 \rightarrow H \text{ jest odwzorowaniem śród-}R\text{-liniowym”}$ , w którego zapisie  $F_1 : \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}} \times \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Set}$  jest funktorem przyporządkowującym parze modułów (wzgl. odwzorowań  $R$ -liniowych) iloczyn kartezjański ich nośników (wzgl. tychże odwzorowań), a  $F_2 : \mathbf{AbGrp} \rightarrow \mathbf{Set}$  jest funktorem zapominania przyporządkowującym grupie przemiennej (wzgl. homomorfizmowi między takimi grupami) jej nośnik (wzgl. to samo odwzorowanie traktowane jako odwzorowanie między zbiorami).

▲

UWAGA 3. Dokonajmy elementarnej egzegezy powyższej definicji, aby uniknąć onieśmiałającego uczucia wysokościowego *vertigo*. Oto więc iloczyn tensorowy  $R$ -modułów  $G_1$  i  $G_2$  to – w istocie – para  $(G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R)$  złożona z grupy przemiennej  $G_1 \otimes_R G_2$  oraz odwzorowania śród- $R$ -liniowego  $\otimes_R : G_1 \times G_2 \rightarrow G_1 \otimes_R G_2$ , zwanego **kanonicznym odwzorowaniem śród- $R$ -liniowym**, o tej własności, że dla każdej grupy przemiennej  $H$  i każdego odwzorowania śród- $R$ -liniowego  $\varphi : G_1 \times G_2 \rightarrow H$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup przemiennych  $\tilde{\varphi} : G_1 \otimes_R G_2 \rightarrow H$ , który czyni przemiennym diagram

$$(1.2.15) \quad \begin{array}{ccccc} & & H & \xleftarrow{F_2} & (H, \varphi) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & | \tilde{\varphi} & & | \tilde{\varphi} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & | \tilde{\varphi} & & | \tilde{\varphi} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ (G_1, G_2) & \xrightarrow{F_1} & G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\otimes_R} & G_1 \otimes_R G_2 & \xleftarrow{F_2} & (G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R) \end{array},$$

czyli – mówiąc po ludzku – spełnia tożsamość

$$(1.2.16) \quad \forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2) = \varphi(g_1, g_2),$$

gdzie wprowadziliśmy standardowe oznaczenie

$$(1.2.17) \quad \otimes_R(g_1, g_2) \equiv g_1 \otimes_R g_2.$$

Mamy wielce uspokajające

**TWIERDZENIE 1.2.5.** *Przyjmijmy zapis Def. 40. Dla dowolnego pierścienia  $R$  i dowolnych  $G_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$ ,  $G_2 \in \mathbf{Mod}_R$  iloczyn tensorowy  $((G_1 \otimes_R G_2, \otimes_R), \otimes_R)$  istnieje i jest określony jednoznacznie z dokładnością do jedyngo izomorfizmu grup przemiennech.*

■

*Dowód:* Wprost z definicji iloczynu tensorowego jako morfizmu uniwersalnego wynika – w świetle Tw. 1.2.2 – druga część dowodzonego twierdzenia. Pozostaje zatem wykazać jego istnienie, co czynimy w sposób bezpośredni (konstruktywny). Utwórzmy wolny  $\mathbb{Z}$ -moduł  $\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$  (czyli grupę przemienną) nad *zbiorem*<sup>10</sup>  $G_1 \times G_2$  według definicji zawartej w Przykł. 11 (3). Moduł ten zawiera  $\mathbb{Z}$ -podmoduł

$$\begin{aligned} T := & \{ (g_1 +_1 g_2, g_3) - (g_1, g_3) - (g_2, g_3) \}_{g_1, g_2 \in G_1, g_3 \in G_2} \\ & \cup \{ (h_1, h_2 +_2 h_3) - (h_1, h_2) - (h_1, h_3) \}_{h_1 \in G_1, h_2, h_3 \in G_2} \\ & \cup \{ (k_1 \triangleleft_1 r, k_2) - (k_1, r \triangleright_2 k_2) \}_{k_1 \in G_1, k_2 \in G_2, r \in R} \Big|_{\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

który wobec przemienności grupy  $\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$  definiuje  $\mathbb{Z}$ -moduł ilorazowy (czyli grupę ilorazową). Postulujemy

$$(1.2.18) \quad G_1 \otimes_R G_2 := \langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}} / T,$$

a ponieważ zbiór  $G_1 \times G_2$  zanurza się kanonicznie w  $\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$  (jako *zbiór*) wedle schematu

$$(1.2.19) \quad \tilde{\mathcal{J}}_{G_1 \times G_2} : G_1 \times G_2 \rightarrow \langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}} : (g_1, g_2) \mapsto \delta_{(g_1, g_2)},$$

wykorzystującego bazę z Przykł. 13 (6), przeto możemy też zdefiniować

$$\otimes_R := \pi_{\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}} / T} \circ \tilde{\mathcal{J}}_{G_1 \times G_2} : G_1 \times G_2 \rightarrow G_1 \otimes_R G_2$$

$$(1.2.20) \quad : (g_1, g_2) \mapsto \delta_{(g_1, g_2)} + T,$$

używając rzutu kanonicznego *modulo*  $T$  określonego jak w Przykł. 2 (6).

Zacznijmy od sprawdzenia śród- $R$ -liniowości zdefiniowanego powyżej odwzorowania  $\otimes_R$ , licząc dla dowolnych  $g_1, g_2 \in G_1$ ,  $g_3, g_4 \in G_2$  i  $r \in R$ , co następuje:

$$\begin{aligned} (g_1 +_1 g_2) \otimes_R g_3 & \equiv \delta_{(g_1 +_1 g_2, g_3)} + T \\ & = \delta_{(g_1, g_3)} + \delta_{(g_2, g_3)} + (\delta_{(g_1 +_1 g_2, g_3)} - \delta_{(g_1, g_3)} - \delta_{(g_2, g_3)}) + T \\ & \equiv \delta_{(g_1, g_3)} + \delta_{(g_2, g_3)} + T = (\delta_{(g_1, g_3)} + T) + (\delta_{(g_2, g_3)} + T) \\ & \equiv g_1 \otimes_R g_3 + g_2 \otimes_R g_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 \otimes_R (g_3 +_2 g_4) & \equiv \delta_{(g_1, g_3 +_2 g_4)} + T \\ & = \delta_{(g_1, g_3)} + \delta_{(g_1, g_4)} + (\delta_{(g_1, g_3 +_2 g_4)} - \delta_{(g_1, g_3)} - \delta_{(g_1, g_4)}) + T \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Podkreślimy: *nie* chodzi tutaj o grupę przemienną  $G_1 \times G_2$ , lecz o „goły” zbiór.



$$\begin{aligned}
& \equiv \delta_{(g_1, g_3)} + \delta_{(g_1, g_4)} + T = (\delta_{(g_1, g_3)} + T) + (\delta_{(g_1, g_4)} + T) \\
& \equiv g_1 \otimes_R g_3 + g_1 \otimes_R g_4, \\
g_1 \triangleleft_1 r \otimes_R g_2 & \equiv \delta_{(g_1 \triangleleft_1 r, g_2)} + T = \delta_{(g_1, r \triangleright_2 g_2)} + (\delta_{(g_1 \triangleleft_1 r, g_2)} - \delta_{(g_1, r \triangleright_2 g_2)}) + T \\
& = \delta_{(g_1, r \triangleright_2 g_2)} + T \equiv g_1 \otimes_R r \triangleright_2 g_2.
\end{aligned}$$

W następnej kolejności wykażemy istnienie i jednoznaczność odwzorowania  $\tilde{\varphi}$ , o którym mowa w Uwadze 3. W tym celu przypomnijmy, za Przykł. 13 (6), że układ  $\{\delta_{(g_1, g_2)}\}_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2}$  jest bazą modułu  $\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ , odwzorowanie  $\pi_{(G_1 \times G_2)_{\mathbb{Z}}/T}$  zaś jest epimorfizmem, zatem definiująca tożsamość (1.2.16) ustala obraz względem odwzorowania  $\tilde{\varphi}$  układu generującego dziedzinę tego odwzorowania. Jest zatem jasne, że istnieje co najwyżej jedno  $\mathbb{Z}$ -liniowe rozszerzenie tak zadanego (na układzie generującym) odwzorowania. Rozszerzenie to przyjmuje następującą postać: wobec surjektywności rzutu kanonicznego *modulo*  $T$  każdy element  $\tau \in G_1 \otimes_R G_2$  możemy przedstawić w formie  $\tau = \nu + T$  dla pewnej funkcji  $\nu \in \mathbb{Z}^{G_1 \times G_2}$  (o ograniczonym nośniku), skoro zaś układ  $\{\delta_{(g_1, g_2)}\}_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2}$  jest bazą  $\langle G_1 \times G_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ , to możemy rozłożyć  $\nu = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} n_{(g_1, g_2)} \triangleright \delta_{(g_1, g_2)}$ , przy czym – jak łatwo widać –  $n_{(g_1, g_2)} \equiv \nu(g_1, g_2)$ , ostatecznie więc najbardziej ogólna postać elementu modułu  $G_1 \otimes_R G_2$  to

$$\begin{aligned}
\tau & = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright \delta_{(g_1, g_2)} + T \\
& = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (\delta_{(g_1, g_2)} + T) + T \\
& \equiv \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) + T \\
(1.2.21) \quad & \equiv \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \tilde{\nu}(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2)
\end{aligned}$$

(gdzie w ostatnim kroku dokonaliśmy banalnego przesunięcia  $\nu \mapsto \nu + \delta_{(0_{(1)}, 0_{(2)})} =: \tilde{\nu}$ ), a ponieważ  $\tilde{\varphi}$  jest z założenia homomorfizmem grup przemiennej, przeto (na mocy Tw. 14)

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \tilde{\nu}(g_1, g_2) \triangleright_H \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2),$$

co daje antycypowany jednoznaczny wynik ostateczny

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \tilde{\nu}(g_1, g_2) \triangleright_H \varphi(g_1, g_2).$$

Innymi słowy, określenie postaci przyjmowanej przez  $\tilde{\varphi}$  na układzie generującym  $G_1 \otimes_R G_2$  złożonym z tensorów prostych, w sposób zdeterminowany przez samą definicję obiektu inicjalnego, jednoznacznie podpowiada postać (jedynej) rozszerzenia  $\mathbb{Z}$ -liniowego tego odwzorowania do całego modułu tensorowego.  $\square$

Mając na względzie przyszłą wygodę dowodzenia, podamy obecnie równoważną definicję iloczynu tensorowego modułów uwzględniającą powyższe rozumowanie, a to w formie

STWIERDZENIE 40. Przyjmijmy zapis Def. 40 i Przykł. 11 (3). Niechaj  $(T, \tau) \in \text{Obj}^{G_1 L_2^G}$ . Poniższe zdania logiczne są równoważne.

- (i)  $(T, \tau)$  jest iloczynem tensorowym modułów  $G_1$  i  $G_2$  nad  $R$ .
- (ii) Grupa  $T$  jest generowana (nad  $\mathbb{Z}$ ) przez elementy postaci  $\tau(g_1, g_2)$ ,  $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ , tj.

$$(1.2.22) \quad T = \langle \tau(G_1 \times G_2) \rangle_{\mathbb{Z}},$$

a ponadto dla każdej pary  $(H, \varphi) \in \text{Obj}^{G_1 L^{G_2}}$  jest określone odwzorowanie  $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{G_1 L^{G_2}}((T, \tau), (H, \varphi))$ , tj. takie, które czyni przemiennym diagram

$$(1.2.23) \quad \begin{array}{ccc} & & H \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \tilde{\varphi} \\ G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\tau} & T \end{array} .$$

■

Dowód:

- (i)⇒(ii) Prawdziwość zdania (i) implikuje istnienie (jedyne) odwzorowania  $\tilde{\varphi}$  wprost na mocy uniwersalności iloczynu tensorowego. Niechaj

$$T_{\tau} := \langle \tau(G_1 \times G_2) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

będzie podgrupą generowaną przez elementy  $\tau(g_1, g_2)$ ,  $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ , kanonicznie zanurzoną w  $T$  przez  $j_{T_{\tau}} : T_{\tau} \rightarrow T$  jak w Przykł. 2 (3), a wtedy  $\tau$  kanonicznie określa obiekt  $(T_{\tau}, \underline{\tau}) \in \text{Obj}^{G_1 L^{G_2}}$  o własności

$$j_{T_{\tau}} \circ \underline{\tau} = \tau.$$

Inicjalność  $\tau$  gwarantuje istnienie homomorfizmu grup przemiennych  $\tilde{\tau} : T \rightarrow T_{\tau}$  o własności

$$\tilde{\tau} \circ \tau = \underline{\tau},$$

a zatem zachodzi tożsamość

$$j_{T_{\tau}} \circ \tilde{\tau} \circ \tau = j_{T_{\tau}} \circ \underline{\tau} = \tau \equiv \text{id}_T \circ \tau,$$

która wobec tejże inicjalności  $\tau$  daje nam równość

$$j_{T_{\tau}} \circ \tilde{\tau} = \text{id}_T,$$

implikującą postulowaną surjektywność zanurzenia kanonicznego,

$$\text{Im } j_{T_{\tau}} = T.$$

- (ii)⇒(i) Niechaj  $\tilde{\varphi}_1 : T \rightarrow H$  i  $\tilde{\varphi}_2 : T \rightarrow H$  będą dwoma homomorfizmami grup przemiennych domykającymi Diag. (1.2.23),

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tau = \varphi = \tilde{\varphi}_2 \circ \tau,$$

skąd wniosek:

$$\tilde{\varphi}_1 \upharpoonright_{\tau(G_1 \times G_2)} = \tilde{\varphi}_2 \upharpoonright_{\tau(G_1 \times G_2)}.$$

Równość (1.2.22) przesądza o pożądanej równości obu homomorfizmów (wobec ich  $\mathbb{Z}$ -liniowości),

$$\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2.$$

□

## ĆWICZENIA 2.

- (1) Udowodnij  $\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : g_1 \otimes_R 0_2 = 0(\equiv T) = 0_1 \otimes_R g_2$ .  
 (2) Oblicz  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dla  $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  wzajem pierwszych.

⤴

W następnej kolejności zajmiemy się omówieniem operacji tensorowania odwzorowań liniowych. Nasza dyskusja będzie zarazem stanowić pierwszą demonstrację siły pojęcia morfizmu uniwersalnego. Zaczniemy, jak (niemal) zawsze od

DEFINICJA 41. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz 40 i niechaj  $G_1, H_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$  i  $G_2, H_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$ . **Iloczyn tensorowy nad  $R$  odwzorowań  $R$ -liniowych**  $\chi_1 \in \text{Hom}_{R^{\text{opp}}}(G_1, H_1)$  i  $\chi_2 \in \text{Hom}_R(G_2, H_2)$  to (jedyne) homomorfizm grup przemiennej

$$\chi_1 \otimes \chi_2 : G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow H_1 \otimes_R H_2$$

o własności

$$\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : (\chi_1 \otimes \chi_2)(g_1 \otimes_R g_2) = \chi_1(g_1) \otimes_R \chi_2(g_2).$$

▲

STWIERDZENIE 41. Dla dowolnego pierścienia  $R$  i dowolnych  $G_1, H_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$ ,  $G_2, H_2 \in \mathbf{Mod}_R$  oraz  $(\chi_1, \chi_2) \in \text{Hom}_{R^{\text{opp}}}(G_1, H_1) \times \text{Hom}_R(G_2, H_2)$  homomorfizm grup przemiennej  $\chi_1 \otimes \chi_2$  jest dobrze określony.

■

Dowód: Rozważmy odwzorowanie

$$\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H_1 \otimes_R H_2 : (g_1, g_2) \longmapsto \chi_1(g_1) \otimes_R \chi_2(g_2).$$

Jest ono jawnie śród- $R$ -liniowe, zatem w świetle uniwersalności iloczynu tensorowego nad  $R$  określa ono jednoznacznie odwzorowanie  $\chi_1 \otimes \chi_2 := \tilde{\varphi}$ , o którym mowa w dowodzonym stwierdzeniu. □

UWAGA 4. Przyjęty zapis iloczynu odwzorowań liniowych może być mylący, sugeruje bowiem, jakoby  $\chi_1 \otimes \chi_2$  było iloczynem tensorowym odwzorowań  $\chi_1$  i  $\chi_2$  traktowanych jako elementy  $\mathbb{Z}$ -modułów (tj. grup przemiennej)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, H_1)$  i  $\text{Hom}_R(G_2, H_2)$ , odpowiednio, tymczasem skonstruowane poniżej odwzorowanie  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, H_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$  nie jest w ogólności ani surjektywne, ani injektywne.

⌋

STWIERDZENIE 42. Przyjmijmy zapis Def. 41. Istnieje kanoniczny homomorfizm  $\mathbb{Z}$ -modułów

$$\iota : \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$$

o własności

$$\iota(\chi_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \chi_2) = \chi_1 \otimes \chi_2.$$

■

Dowód: Odwzorowanie

$$\begin{aligned} \varphi & : \quad \text{Hom}_R(G_1, H_1) \times \text{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2) \\ & : \quad (\chi_1, \chi_2) \longmapsto \chi_1 \otimes \chi_2 \end{aligned}$$

jest jawnie  $\mathbb{Z}$ -dwuliniowe, więc też automatycznie  $\mathbb{Z}$ -liniowe, a zatem określa jednoznacznie odwzorowanie  $\iota := \tilde{\varphi}$ , o którym mowa w dowodzonym stwierdzeniu.  $\square$

Mamy przydatne

STWIERDZENIE 43. *Przyjmijmy zapis Def. 41. Dla dowolnych  $G_1, H_1, K_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$  i  $G_2, H_2, K_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$  oraz  $\chi_1 \in \text{Hom}_{R^{\text{opp}}}(G_1, H_1)$ ,  $\chi_2 \in \text{Hom}_R(G_2, H_2)$  i  $\psi_1 \in \text{Hom}_R(H_1, K_1)$ ,  $\psi_2 \in \text{Hom}_R(H_2, K_2)$  zachodzi tożsamość*

$$(1.2.24) \quad (\psi_1 \otimes \psi_2) \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) = (\psi_1 \circ \chi_1) \otimes (\psi_2 \circ \chi_2).$$

W szczególności ilekroć  $\chi_1$  i  $\chi_2$  są odwracalne, otrzymujemy

$$(\chi_1 \otimes \chi_2)^{-1} = \chi_1^{-1} \otimes \chi_2^{-1}.$$

Podobnie, surjektywność  $\chi_1$  i  $\chi_2$  implikuje surjektywność  $\chi_1 \otimes \chi_2$  wobec tożsamości

$$\text{Im}(\chi_1 \otimes \chi_2) = \text{Im} \chi_1 \otimes_R \text{Im} \chi_2.$$

Wreszcie też kiedy  $R = \mathbb{K}$  jest ciałem, tak że wszystkie  $R$ -moduły  $G_\alpha, H_\alpha, K_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  są przestrzeniami  $\mathbb{K}$ -liniowymi, injektywność  $\chi_1$  i  $\chi_2$  pociąga za sobą injektywność  $\chi_1 \otimes \chi_2$ .  $\blacksquare$

Dowód: Wobec Równ. (1.2.21) oraz  $\mathbb{Z}$ -liniowości  $\otimes_R$  wystarczy sprawdzić dowodzoną tożsamość (1.2.24) na generatorach  $g_1 \otimes_R g_2$ ,  $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$  grupy przemiennej  $G_1 \otimes_R G_2$ , co jest rzeczą prostą.

Jedyna nietrywialna konstatacja – ta dotycząca przypadku  $R = \mathbb{K}$  – jest natychmiastową konsekwencją Cor. 5 oraz istnienia  $\mathbb{K}$ -liniowych retrakcji  $\rho_\alpha$  dla  $\chi_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  w postaci  $\rho_\alpha : H_\alpha = \text{Im} \chi_\alpha \oplus D_\alpha \twoheadrightarrow \text{Im} \chi_\alpha \twoheadrightarrow G_\alpha$ . Na podstawie udowodnionej wcześniej tożsamości (1.2.24) iloczyn tensorowy tych retrakcji spełnia warunek

$$(\rho_1 \otimes \rho_2) \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) = (\rho_1 \circ \chi_1) \otimes (\rho_2 \circ \chi_2) = \text{id}_{G_1} \otimes \text{id}_{G_2} = \text{id}_{G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2},$$

który przesądza o injektywności  $\chi_1 \otimes \chi_2$ .  $\square$

W podsumowaniu dotychczasowej dyskusji możemy wypowiedzieć zwięźle

TWIERDZENIE 1.2.6. *Przyjmijmy zapis Def. 27 oraz 41. Iloczyn tensorowy określa functor kowariantny  $\otimes_R : \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}} \times \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{AbGrp}$  o składowej obiektowej  $(G_1, G_2) \longmapsto G_1 \otimes_R G_2$  i składowej morfizmowej  $(\chi_1, \chi_2) \longmapsto \chi_1 \otimes \chi_2$ .*  $\blacksquare$

Dowód: Wynika wprost z Def. 41 oraz Stw. 43.  $\square$

Uniwersalna natura iloczynu tensorowego dostarcza nam potężnego narzędzia analizy jego własności strukturalnych, z których kilka opiszemy poniżej.

TWIERDZENIE 1.2.7 (O przemienności iloczynu tensorowego). *Przyjmijmy zapis Def. 40 i niechaj  $G_1^{(\text{opp})}$  (wzgl.  $G_2^{(\text{opp})}$ ) oznacza lewy (wzgl. prawy)  $R^{\text{opp}}$ -moduł o nośniku  $G_1$  (wzgl.  $G_2$ ) i strukturze indukowanej z tej na  $G_1$  (wzgl.  $G_2$ )*

w sposób opisany w (dowodzie) Stw. 3. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup przemiennych

$$\sigma_{G_1, G_2} : G_1 \otimes_R G_2 \xrightarrow{\cong} G_2^{(\text{opp})} \otimes_{R^{\text{opp}}} G_1^{(\text{opp})}$$

o własności

$$\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \sigma_{G_1, G_2}(g_1 \otimes_R g_2) = g_2 \otimes_{R^{\text{opp}}} g_1.$$

■

Dowód: Wprost na mocy definicji  $G_\alpha^{(\text{opp})}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  odwzorowanie

$$\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_2^{(\text{opp})} \otimes_{R^{\text{opp}}} G_1^{(\text{opp})} : (g_1, g_2) \longmapsto g_2 \otimes_{R^{\text{opp}}} g_1$$

jest śród- $R^{(\text{opp})}$ -liniowe, istnieje zatem jedyne odwzorowanie  $\mathbb{Z}$ -liniowe

$$\sigma_{G_1, G_2} : G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow G_2^{(\text{opp})} \otimes_{R^{\text{opp}}} G_1^{(\text{opp})}$$

o własności wskazanej w tezie dowodzonego twierdzenia. Analogicznie dowodzimy istnienia jedyne odwzorowania  $\mathbb{Z}$ -liniowego

$$\tau_{G_1, G_2} : G_2^{(\text{opp})} \otimes_{R^{\text{opp}}} G_1^{(\text{opp})} \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2$$

o własności

$$\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \tau_{G_1, G_2}(g_2 \otimes_{R^{\text{opp}}} g_1) = g_1 \otimes_R g_2.$$

Otrzymujemy więc równości, trywialnie spełnione na generatorach, a więc i ogólnie,

$$\sigma_{G_1, G_2} \circ \tau_{G_1, G_2} = \text{id}_{G_2^{(\text{opp})} \otimes_{R^{\text{opp}}} G_1^{(\text{opp})}},$$

$$\tau_{G_1, G_2} \circ \sigma_{G_1, G_2} = \text{id}_{G_1 \otimes_R G_2}.$$

□

Celem zbadania zagadnienia łączności operacji tensorowania modułów uogólnimy najpierw nasze dotychczasowe rozważania w sposób opisany w

**STWIERDZENIE 44.** *Przyjmijmy zapis Def. 40 oraz 41 i niechaj  $G_1, H_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{(R_2, R_1^{\text{opp}})}$ ,  $G_2, H_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_1}$ ,  $G_3, H_3 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_1^{\text{opp}}}$ ,  $G_4, H_4 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})}$ . Wówczas*

- (i)  $G_1 \otimes_{R_1} G_2$  jest lewym  $R_2$ -modułem z działaniem określonym na generatorach:

$$\forall_{(r, g_1, g_2) \in R_2 \times G_1 \otimes_{R_1} G_2} : r \triangleright_{\otimes} (g_1 \otimes_{R_1} g_2) := (r \triangleright_{(1)} g_1) \otimes_{R_1} g_2.$$

- (ii)  $\forall_{(\chi_1, \chi_2) \in \text{Hom}_{(R_2, R_1)}(G_1, H_1) \times \text{Hom}_{R_1}(G_2, H_2)} : \chi_1 \otimes \chi_2 \in \text{Hom}_{R_2}(G_1 \otimes_{R_1} G_2, H_1 \otimes_{R_1} H_2)$ .

- (iii)  $G_3 \otimes_{R_1} G_4$  jest prawym  $R_2$ -modułem z działaniem określonym na generatorach:

$$\forall_{(g_3, g_4, r) \in G_3 \otimes_{R_1} G_4 \times R_2} : (g_3 \otimes_{R_1} g_4) \triangleleft_{\otimes} r := g_3 \otimes_{R_1} (g_4 \triangleleft_{(4)} r).$$

- (iv)  $\forall_{(\psi_1, \psi_2) \in \text{Hom}_{R_1}(G_3, H_3) \times \text{Hom}_{(R_1, R_2)}(G_4, H_4)} : \psi_1 \otimes \psi_2 \in \text{Hom}_{R_2}(G_3 \otimes_{R_1} G_4, H_3 \otimes_{R_1} H_4)$ .

■

Dowód: Przedstawimy jedynie dowód punktów (i) i (ii) tezy, dowód pozostałych punktów przebiega w pełni analogicznie.

Ad (i) Określmy dla dowolnego  $r \in R_2$  odwzorowanie

$$\varphi_r : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} G_2 : (g_1, g_2) \longmapsto (r \triangleright_{(1)} g_1) \otimes_{R_1} g_2.$$

Jest ono jawnie śród- $R_1$ -liniowe, więc też indukuje jedyne odwzorowanie  $\mathbb{Z}$ -liniowe

$$\ell_r^\otimes := \widetilde{\varphi_r} : G_1 \otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} G_2$$

o pożądanej własności

$$\ell_r^\otimes(g_1 \otimes_{R_1} g_2) = (r \triangleright_{(1)} g_1) \otimes_{R_1} g_2.$$

Bez trudu sprawdzamy, że to ostatnie zadaje strukturę lewego  $R_2$ -modułu na swej dziedzinie, według schematu

$$\begin{aligned} \ell^\otimes & : R_2 \times G_1 \otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} G_2 \\ & : \left( r, \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_{R_1} g_2) \right) \\ & \longmapsto \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright \ell_r^\otimes(g_1 \otimes_{R_1} g_2). \end{aligned}$$

Ad (ii) Trywialne sprawdzenie na generatorach. □

Możemy już teraz wysłowić

**TWIERDZENIE 1.2.8** (O łączności iloczynu tensorowego). *Przyjmijmy zapis Def. 27 oraz 40 i niechaj  $G_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}}$ ,  $G_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})}$ ,  $G_3 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_2}$ . Istnieje kanoniczny izomorfizm naturalny*

$$\begin{array}{ccc} & \otimes_{R_2} \circ (\otimes_{R_1} \times \text{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}) & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})} \times \mathbf{Mod}_{R_2} & \begin{array}{c} \Downarrow \alpha_{\cdot, \cdot, \cdot} \\ \Downarrow \end{array} & \mathbf{AbGrp} \\ & \curvearrowleft & \\ & \otimes_{R_2} \circ (\otimes_{R_1} \times \text{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}) & \end{array}$$

między funktorami kowariantnymi

$$\begin{aligned} \otimes_{R_2} \circ (\otimes_{R_1} \times \text{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_2}}) & : \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})} \times \mathbf{Mod}_{R_2} \longrightarrow \mathbf{AbGrp} \\ & : (G_1, G_2, G_3) \longmapsto (G_1 \otimes_{R_1} G_2) \otimes_{R_2} G_3 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \otimes_{R_1} \circ (\text{Id}_{\mathbf{Mod}_{R_1}} \times \otimes_{R_2}) & : \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})} \times \mathbf{Mod}_{R_2} \longrightarrow \mathbf{AbGrp} \\ & : (G_1, G_2, G_3) \longmapsto G_1 \otimes_{R_1} (G_2 \otimes_{R_2} G_3), \end{aligned}$$

o własności

$$\forall_{(g_1, g_2, g_3) \in G_1 \times G_2 \times G_3} : \alpha_{G_1, G_2, G_3}((g_1 \otimes_{R_1} g_2) \otimes_{R_2} g_3) = g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3).$$

■

Dowód: Ustalenie postaci postulowanego izomorfizmu na generatorach gwarantuje – jak uprzednio – jego jednoznaczność. Pozostaje dowieść jego istnienia, co uczynimy w sposób konstruktywny. Zdefiniujemy, dla dowolnego  $g_3 \in G_3$ , odwzorowanie (jawnie)  $R_1$ -liniowe

$$h_{g_3} : G_2 \longrightarrow G_2 \otimes_{R_2} G_3 : g_2 \longmapsto g_2 \otimes_{R_2} g_3$$

i rozważmy indukowane przezeń odwzorowanie  $\mathbb{Z}$ -liniowe

$$\widehat{h}_{g_3} := \text{id}_{G_1} \otimes h_{g_3} : G_1 \otimes_{R_1} G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} (G_2 \otimes_{R_2} G_3).$$

To ostatnie zadaje odwzorowanie

$$\widehat{h} : G_1 \otimes_{R_1} G_2 \times G_3 \longrightarrow G_1 \otimes_{R_1} (G_2 \otimes_{R_2} G_3),$$

które na generatorach określamy jako

$$\widehat{h}(g_1 \otimes_{R_1} g_2, g_3) := \widehat{h}_{g_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2).$$

Odwzorowanie to jest  $\mathbb{Z}$ -liniowe w pierwszym argumencie wprost na mocy  $\mathbb{Z}$ -liniowości  $\widehat{h}_{g_3}$ , a nadto –  $\mathbb{Z}$ -liniowe w drugim argumencie wobec tożsamości (zapisanej dla dowolnych  $g_1 \otimes_{R_1} g_2 \in G_1 \otimes_{R_1} G_2$  i  $g_3, h_3 \in G_3$ )

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{g_3+(3)h_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2) &\equiv g_1 \otimes_{R_1} h_{g_3+(3)h_3}(g_2) = g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} (g_3 + (3)h_3)) \\ &= g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3 + \otimes g_2 \otimes_{R_2} h_3) \\ &= g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} g_3) + \otimes g_1 \otimes_{R_1} (g_2 \otimes_{R_2} h_3) \\ &\equiv \widehat{h}_{g_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2) + \otimes \widehat{h}_{h_3}(g_1 \otimes_{R_1} g_2). \end{aligned}$$

Także na generatorach sprawdzamy jego śród- $R_2$ -jednorodność, z której wynika istnienie jedynego odwzorowania  $\mathbb{Z}$ -liniowego  $\alpha$  o pożądanej własności. Dowód istnienia odwrotności  $\alpha$  przebiega w pełni analogicznie. I wreszcie naturalność opisanej tu rodziny izomorfizmów jest oczywistą konsekwencją ich definicji.  $\square$

UWAGA 5. Zagadnienie uniwersalne dla odwzorowań śród- $R$ -liniowych ma swoje naturalne uogólnienie na przypadek  $n$ -liniowy dla  $n > 2$ , które w przypadku  $n = 3$  prowadzi do definicji grupy przemiennej  $G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3$ , zwanej potrójnym iloczynem tensorowym. Łatwo wykazać istnienie kanonicznego izomorfizmu grup przemiennych

$$(G_1 \otimes_{R_1} G_2) \otimes_{R_2} G_3 \cong G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3.$$

Uogólnienie tej obserwacji formalizujemy w poniższej definicji, pozostawiając Czytelnikowi dowód jej sensowności (tj. istnienia przedmiotu tejże) jako proste, a pożyteczne ćwiczenie.

$\overline{\wedge}$

DEFINICJA 42. Przyjmijmy zapis Def. 29 oraz 39 i dla ustalonego  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  niechaj  $G_1 \in \text{Obj} \mathbf{Mod}_{R_1^{\text{opp}}}$ ,  $G_n \in \text{Obj} \mathbf{Mod}_{R_{n-1}}$  oraz  $G_k \in \text{Obj} \mathbf{Mod}_{(R_{k-1}, R_k)}$ ,  $k \in \overline{2, n-1}$ . Niech też  ${}^{G_1}L {}^{G_2}L {}^{G_3} \dots {}^{G_{n-1}}L {}^{G_n}$  będzie kategorią, której obiektami są pary  $(H, \varphi)$  złożone z  $H \in \text{Obj} \mathbf{AbGrp}$  i odwzorowania  $\varphi : G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \longrightarrow H$   $n$ -addytywnego i śród- $R_l$ -jednorodnego dla każdej pary  $(G_l, G_{l+1})$ ,  $l \in \overline{1, n-1}$  i której morfizmami – dla ustalonych obiektów  $(H_\alpha, \varphi_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , utworzonych

przez  $H_\alpha \in \text{Obj } \mathbf{AbGrp}$  i odwzorowania  $\varphi_\alpha : G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H_\alpha$  – są odwzorowania

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{G_1 L G_2 L G_3 \dots L G_{n-1} L G_n}((H_1, \varphi_1), (H_2, \varphi_2)) \\ &= \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathbf{AbGrp}}(H_1, H_2) \mid \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1 \}. \end{aligned}$$

$n$ -krotny iloczyn tensorowy nad  $(R_1, R_2, \dots, R_{n-1})$  rodziny modułów  $\{G_i\}_{i \in \overline{1, n}}$  to struktura inicjalna

$$((G_1 \otimes_{R_1} G_2 \otimes_{R_2} G_3 \otimes_{R_3} \cdots \otimes_{R_{n-1}} G_n, \otimes_R), \otimes^n)$$

dla warunku

$$P_{(G_1, G_2, \dots, G_n); F_1, F_2}(H, \varphi) \equiv \text{„}\varphi : G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H \text{ jest}$$

odwzorowaniem śród- $R_l$ -liniowym dla  $l \in \overline{1, n-1}$ ”,

w którego zapisie  $F_1 : \mathbf{Mod}_{R_1}^{\text{opp}} \times \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2)} \times \mathbf{Mod}_{(R_2, R_3)} \times \cdots \times \mathbf{Mod}_{(R_{n-1}, R_n)} \times \mathbf{Mod}_{R_n} \longrightarrow \mathbf{Set}$  jest funktorem przyporządkowującym  $n$ -tce (bi)modułów (wzgl. stosownych odwzorowań liniowych) iloczynu kartezjańskiego ich nośników (wzgl. tychże odwzorowań), a  $F_2 : \mathbf{AbGrp} \longrightarrow \mathbf{Set}$  jest funktorem zapominania jak w Def. 40. ▲

Istnienie kanonicznej struktury  $(R, R)$ -bimodułu na  $R$ , określonej przez lewo- i prawostronne mnożenie przez elementy  $R$ , pozwala nam w przypadku dowolnego  $G_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$  traktować  $G_1 \otimes_R R$  jako  $R$ -moduł prawostronny, a w przypadku dowolnego  $G_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$  –  $R \otimes_R G_2$  jako  $R$ -moduł lewostronny. Obserwacja ta nadaje sens

STWIERDZENIE 45. *Przyjmijmy zapis Def. 40 oraz Równ. (1.2.21). Odwzorowanie*

$${}_{G_1}\xi : G_1 \longrightarrow G_1 \otimes_R R : g \longmapsto g \otimes_R \mathbf{1}_R$$

jest izomorfizmem  $R$ -modułów prawostronnych, o odwrotności zadanej przez odwzorowanie

$$\begin{aligned} {}_{G_1}\kappa & : G_1 \otimes_R R \longrightarrow G_1 \\ & : \sum_{(g,r) \in G_1 \times R} \nu(g,r) \triangleright (g \otimes_R r) \longmapsto \sum_{(g,r) \in G_1 \times R} \nu(g,r) \triangleright (g \triangleleft r). \end{aligned}$$

Podobnie odwzorowanie

$$\xi_{G_2} : G_2 \longrightarrow R \otimes_R G_2 : g \longmapsto \mathbf{1}_R \otimes_R g$$

jest izomorfizmem  $R$ -modułów lewostronnych, o odwrotności zadanej przez odwzorowanie

$$\begin{aligned} \kappa_{G_2} & : R \otimes_R G_2 \longrightarrow G_2 \\ & : \sum_{(r,g) \in R \times G_2} \nu(r,g) \triangleright (r \otimes_R g) \longmapsto \sum_{(r,g) \in R \times G_2} \nu(r,g) \triangleright (r \triangleright g). \end{aligned}$$

■



*Dowód:* Dowodzimy pierwszej części tezy, dowód drugiej części jest w pełni analogiczny. Łatwo sprawdzamy, że jawnie  $\mathbb{Z}$ -dwuliniowe (wprost z definicji działania) odwzorowanie

$$\wp : G_1 \times R \longrightarrow G_1 : (g, r) \longmapsto g \triangleleft r$$

jest śród- $R$ -jednorodne,

$$\forall_{(g,r,s) \in G_1 \times R \times R} : \wp((g \triangleleft r), s) \equiv (g \triangleleft r) \triangleleft s = g \triangleleft (r \cdot_R s) \equiv g \triangleleft (r \triangleright s) \equiv \wp(g, r \triangleright s),$$

to zaś implikuje istnienie (jedyne) odwzorowania  $\mathbb{Z}$ -liniowego  ${}_{G_1}\kappa \equiv \tilde{\wp}$  jak w tezie dowodzonego stwierdzenia. Tożsamości  ${}_{G_1}\kappa \circ {}_{G_1}\xi = \text{id}_{G_1}$  oraz  ${}_{G_1}\xi \circ {}_{G_1}\kappa = \text{id}_{G_1 \otimes_R R}$  sprawdzamy bezpośrednio na generatorach (tensorach prostych).  $\square$

Na zakończenie niniejszej wstępnej analizy konsekwencji uniwersalności iloczynu tensorowego zastanowimy się nad istotnym – z punktu widzenia przyszłych naszych rozważań – zagadnieniem tensorowania modułów ilorazowych. Oto więc mamy

**TWIERDZENIE 1.2.9.** *Przyjmijmy zapis Def. 40 oraz Przykł. 11 (14) i niechaj  $H_\alpha \subset G_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą podmodułami – odpowiednio, prawym (dla  $\alpha = 1$ ) i lewym (dla  $\alpha = 2$ ) – odnośnych  $R$ -modułów  $G_\alpha$ . Oznaczmy*

$$T(H_1, H_2) := H_1 \otimes_R G_2 + G_1 \otimes_R H_2.$$

Istnieje kanoniczny izomorfizm grup przemiennych

$$\iota_{H_1, H_2} : G_1/H_1 \otimes_R G_2/H_2 \xrightarrow{\cong} (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2).$$

Izomorfizm ten spełnia warunek

$$\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \iota_{H_1, H_2}((g_1 +_1 H_1) \otimes_R (g_2 +_2 H_2)) = g_1 \otimes_R g_2 +_{\otimes} T(H_1, H_2). \quad \blacksquare$$

*Dowód:* W dowodzie wykorzystamy równoważną charakteryzację iloczynu tensorowego podaną w Stw. 40. Zaczniemy od zdefiniowania odwzorowania śród- $R$ -liniowego

$$\begin{aligned} \hat{\tau} & : G_1 \times G_2 \longrightarrow (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2) \\ & : (g_1, g_2) \longmapsto \pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)}(g_1 \otimes_R g_2) \end{aligned}$$

w terminach rzutu kanonicznego

$$\pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)} : G_1 \otimes_R G_2 \twoheadrightarrow (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)$$

z Przykł. 12 (5). Wobec oczywistych tożsamości

$$\forall_{(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2} \forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \hat{\tau}(h_1, g_2) = 0_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)} = \hat{\tau}(g_1, h_2)$$

stwierdzamy istnienie odwzorowania śród- $R$ -liniowego

$$\begin{aligned} \tau & : G_1/H_1 \times G_2/H_2 \longrightarrow (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2) \\ & : (g_1 +_1 H_1, g_2 +_2 H_2) \longmapsto \hat{\tau}(g_1, g_2). \end{aligned}$$

Pokażemy, że  $((G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2), \tau)$  jest iloczynem tensorowym modułów ilorazowych  $G_1/H_1$  i  $G_2/H_2$  nad  $R$ . W tym celu zauważmy najpierw równość

$$\text{Im } \tau = \text{Im } \hat{\tau} \equiv \text{Im}(\pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)} \circ \otimes_R),$$

z której w świetle tożsamości

$$\langle \text{Im } \otimes_R \rangle_{\mathbb{Z}} = G_1 \otimes_R G_2$$

oraz surjektywności  $\pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)}$  wynika pożądana teza

$$\langle \text{Im } \tau \rangle_{\mathbb{Z}} = (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2).$$

Niechaj teraz

$$\underline{\varphi} : G_1/H_1 \times G_2/H_2 \longrightarrow H$$

będzie dowolnym odwzorowaniem śród- $R$ -liniowym. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\varphi : G_1 \times G_2 \longrightarrow H : (g_1, g_2) \longmapsto \underline{\varphi}(g_1 +_1 H_1, g_2 +_2 H_2),$$

które jest jawnie śród- $R$ -liniowe i jako takie indukuje (jedyne) homomorfizm grup przemiennej

$$\tilde{\varphi} : G_1 \otimes_R G_2 \longrightarrow H$$

o własności

$$\tilde{\varphi} \circ \otimes_R = \varphi.$$

Jako że prawdziwe są tożsamości

$$\forall_{(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2} \quad \forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \begin{cases} \tilde{\varphi}(h_1 \otimes_R g_2) \equiv \underline{\varphi}(H_1, g_2 +_2 H_2) = 0_H \\ \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R h_2) \equiv \underline{\varphi}(g_1 +_1 H_1, H_2) = 0_H \end{cases},$$

przeto

$$T(H_1, H_2) \subset \ker \tilde{\varphi},$$

a zatem – na mocy Tw. 1.1.1 – istnieje homomorfizm grup przemiennej

$$[\tilde{\varphi}] : (G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2) \longrightarrow H$$

o własności

$$[\tilde{\varphi}] \circ \pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)} = \tilde{\varphi}.$$

Homomorfizm ten spełnia – dla dowolnej pary  $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$  – warunek

$$\begin{aligned} [\tilde{\varphi}] \circ \tau(g_1 +_1 H_1, g_2 +_2 H_2) &\equiv [\tilde{\varphi}] \circ \hat{\tau}(g_1, g_2) \\ &\equiv [\tilde{\varphi}] \circ \pi_{(G_1 \otimes_R G_2)/T(H_1, H_2)}(g_1 \otimes_R g_2) \\ &= \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2) \equiv \varphi(g_1, g_2) \equiv \underline{\varphi}(g_1 +_1 H_1, g_2 +_2 H_2), \end{aligned}$$

czyli także tożsamość

$$[\tilde{\varphi}] \circ \tau = \underline{\varphi},$$

równoznaczną – w świetle Tw. 1.2.2 – z istnieniem jedynego izomorfizmu grup przemiennej  $\iota_{H_1, H_2}$ . Przywołując rozumowanie przeprowadzone w dowodzie tegoż twierdzenia, konstatujemy, iż izomorfizm ten spełnia tożsamość

$$\iota_{H_1, H_2} \circ \otimes_R = \tau,$$

co pokazuje słuszność drugiej części tezy dowodzonego stwierdzenia.  $\square$

Jako proste corollarium powyższego otrzymujemy

STWIERDZENIE 46. *Przyjmijmy zapis Def. 41 oraz Przykł. 1 (6), przy czym załóżmy, że  $R = \mathbb{K}$  jest ciałem, a wszystkie  $R$ -moduły  $G_\alpha, H_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  są przestrzeniami  $\mathbb{K}$ -liniowymi. Zachodzi tożsamość*

$$\ker(\chi_1 \otimes \chi_2) := \ker \chi_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2 + G_1 \otimes_{\mathbb{K}} \ker \chi_2.$$

■

*Dowód:* Przywoławszy tezę Tw. 1.2.9 (i przyjąwszy jego notację), stwierdzamy istnienie kanonicznego  $\mathbb{K}$ -liniowego izomorfizmu

$$\iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2} : G_1/\ker \chi_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2/\ker \chi_2 \xrightarrow{\cong} (G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2)$$

o własności

$$\iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2}(\pi_{G_1/\ker \chi_1}(g_1) \otimes_{\mathbb{K}} \pi_{G_2/\ker \chi_2}(g_2)) = \pi_{(G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2)}(g_1 \otimes_{\mathbb{K}} g_2).$$

Rozważmy następnie indukowane – w duchu Tw. 1.1.5 –  $\mathbb{K}$ -liniowe monomorfizmy

$$\widetilde{\chi}_\alpha : G_\alpha/\ker \chi_\alpha \rightarrow H_\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

spełniające relacje

$$\widetilde{\chi}_\alpha \circ \pi_{G_\alpha/\ker \chi_\alpha} = \chi_\alpha.$$

W świetle Stw. 43 określają one  $\mathbb{K}$ -liniowy monomorfizm

$$\widetilde{\chi}_1 \otimes \widetilde{\chi}_2 : G_1/\ker \chi_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2/\ker \chi_2 \rightarrow H_1 \otimes_{\mathbb{K}} H_2,$$

możemy zatem zdefiniować monomorfizm

$$\chi := (\widetilde{\chi}_1 \otimes \widetilde{\chi}_2) \circ \iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2}^{-1} : (G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2) \rightarrow H_1 \otimes_{\mathbb{K}} H_2,$$

który spełnia – dla dowolnych  $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$  – tożsamość

$$\begin{aligned} & \chi \circ \pi_{(G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2)}(g_1 \otimes_{\mathbb{K}} g_2) \\ &= \chi \circ \iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2}(\pi_{G_1/\ker \chi_1}(g_1) \otimes_{\mathbb{K}} \pi_{G_2/\ker \chi_2}(g_2)) \\ &\equiv (\widetilde{\chi}_1 \otimes \widetilde{\chi}_2) \circ \iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2}^{-1} \circ \iota_{\ker \chi_1, \ker \chi_2}(\pi_{G_1/\ker \chi_1}(g_1) \otimes_{\mathbb{K}} \pi_{G_2/\ker \chi_2}(g_2)) \\ &= (\widetilde{\chi}_1 \circ \pi_{G_1/\ker \chi_1} \otimes \widetilde{\chi}_2 \circ \pi_{G_2/\ker \chi_2})(g_1 \otimes_{\mathbb{K}} g_2) \\ &= (\chi_1 \otimes \chi_2)(g_1 \otimes_{\mathbb{K}} g_2). \end{aligned}$$

Tę ostatnią możemy przepisać w formie niezależnej od (dowolnych) argumentów:

$$\chi \circ \pi_{(G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2)} = \chi_1 \otimes \chi_2.$$

Wobec iniektywności  $\chi$  wnioskujemy, że

$$\ker(\chi_1 \otimes \chi_2) = \ker \pi_{(G_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_2)/T(\ker \chi_1, \ker \chi_2)} = T(\ker \chi_1, \ker \chi_2),$$

co należało okazać. □

Możemy już teraz przystąpić do dyskusji mniej elementarnych własności iloczynu tensorowego, w szczególności zaś – ustalić relację tejże struktury uniwersalnej z innymi poznanymi wcześniej strukturami uniwersalnymi w kategorii liniowej, a mianowicie: produktem i sumą prostą. Zaczniemy od elementarnego

STWIERDZENIE 47. *Przyjmijmy zapis Def. 31 i 40, ustalmy zbiory (indeksów)  $\Lambda_1, \Lambda_2$  i niechaj  $G_1, \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}^{\Lambda_1}$  oraz  $G_2, \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R^{\Lambda_2}$ . Odwzorowanie*

$$\begin{aligned} \tau &: \prod_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \times \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2} \longrightarrow \prod_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2} \\ &: (g^{(1)}, g^{(2)}) \longmapsto (g^{(1)} \circ \text{pr}_1) \otimes_R (g^{(2)} \circ \text{pr}_2), \end{aligned}$$

w którego zapisie  $\text{pr}_\alpha : \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \Lambda_\alpha, \alpha \in \{1, 2\}$  są rzutami kanonicznymi, indukuje kanoniczny homomorfizm grup przemiennych

$$\tilde{\tau} : \prod_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \otimes_R \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2} \longrightarrow \prod_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2}$$

o własności

$$\forall_{(g^{(1)}, g^{(2)}) \in G_{1, \times G_2}} : \tilde{\tau}(g^{(1)} \otimes_R g^{(2)}) = (g^{(1)} \circ \text{pr}_1) \otimes_R (g^{(2)} \circ \text{pr}_2).$$

■

*Dowód:* Odwzorowanie  $\tau$  jest jawnie  $\mathbb{Z}$ -dwuliniowe i wśród- $R$ -jednorodnie, zatem teza dowodzonego stwierdzenia wynika wprost z Tw. 1.2.5.  $\square$

W ogólności nie możemy orzekać o własnościach  $\tilde{\tau}$  bez poczynienia dodatkowych założeń odnośnie do struktury rodzin modułów pojawiających się w jego definicji (znane są przykłady odwzorowań nieinjektywnych i niesurjektywnych). Na większą precyzję wypowiedzi pozwala ograniczenie rozważań do podmodułów modułów produktowych danych przez sumy proste. Oto więc znajdujemy ważne

TWIERDZENIE 1.2.10. *Przyjmijmy zapis Stw. 47. Kanoniczny homomorfizm grup przemiennych  $\tilde{\tau}$  ogranicza się do iloczynu podmodułów  $\bigoplus_{\lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha} G_{\alpha\lambda_\alpha} \subset \prod_{\lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha} G_{\alpha\lambda_\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}$ , tj. zadaje kanoniczny homomorfizm grup przemiennych*

$$\tilde{\tau} : \bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2},$$

przy czym sumy proste tensorowane w dziedzinie  $\tilde{\tau}$  to sumy proste  $R$ -modułów, gdy tymczasem przeciwdziedzina jest sumą prostą  $\mathbb{Z}$ -modułów. Homomorfizm ten jest izomorfizmem grup przemiennych.

■

*Dowód:* Wobec tożsamości z Ćwic. 2 (1)  $\tilde{\tau}$ -obraz iloczynu tensorowego skończonych kombinacji  $R$ -liniowych elementów  $\bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1}$  i – odpowiednio –  $\bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2}$  jest skończoną kombinacją  $\mathbb{Z}$ -liniową tensorów prostych z  $G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2}$ , więc – w istocie –

$$\tilde{\tau}\left(\bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2}\right) \subset \bigoplus_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2}.$$

W świetle Stw. 47 pozostaje zatem znaleźć odwzorowanie  $\mathbb{Z}$ -liniowe

$$h : \bigoplus_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2}$$

spełniające tożsamości

$$h \circ \tilde{\tau} = \text{id}_{\bigoplus_{\lambda_1 \in \Lambda_1} G_{1\lambda_1} \otimes_R \bigoplus_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{2\lambda_2}}, \quad \tilde{\tau} \circ h = \text{id}_{\bigoplus_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2}}.$$

Przywołując definicję sumy prostej jako struktury inicjalnej, stwierdzamy przy tym, że istnienie i jednoznaczność poszukiwanego odwzorowania wynika wprost z istnienia stosownej rodziny homomorfizmów grup przemiennej

$$\begin{aligned} \chi_{\cdot, \cdot} &: \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{AbGrp} \\ &: (\lambda_1, \lambda_2) \longmapsto \chi_{\lambda_1, \lambda_2} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2}, \bigoplus_{\mu_1 \in \Lambda_1} G_{1\mu_1} \otimes_R \bigoplus_{\mu_2 \in \Lambda_2} G_{2\mu_2}\right), \end{aligned}$$

której elementy możemy wybrać w postaci

$$(1.2.25) \quad \chi_{\lambda_1, \lambda_2} := J_{\lambda_1} \otimes J_{\lambda_2},$$

gdzie zastosowaliśmy notację Def. 32 oraz 41. Homomorfizmy te indukują poszukiwane odwzorowanie spełniające relację

$$h \circ J_{\lambda_1, \lambda_2} = \chi_{\lambda_1, \lambda_2},$$

wyrażoną w terminach włożeń kanonicznych

$$J_{\lambda_1, \lambda_2} : G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{(\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\mu_1} \otimes_R G_{2\mu_2}.$$

Oznaczmy symbolicznie

$$J_{\lambda_\alpha} : G_{\alpha\lambda_\alpha} \longrightarrow \bigoplus_{\mu_\alpha \in \Lambda_\alpha} G_{\alpha\mu_\alpha} : g_{\lambda_\alpha} \longmapsto \delta_{\lambda_\alpha}^{\mathbb{Z}} \triangleright g_{\lambda_\alpha}, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

oraz

$$\begin{aligned} J_{\lambda_1, \lambda_2} &: G_{1\lambda_1} \otimes_R G_{2\lambda_2} \longrightarrow \bigoplus_{(\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{1\mu_1} \otimes_R G_{2\mu_2} \\ &: \sum_{(g_1, g_2) \in G_{1\lambda_1} \times G_{2\lambda_2}} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \\ &\longmapsto \sum_{(g_1, g_2) \in G_{1\lambda_1} \times G_{2\lambda_2}} \delta_{(\lambda_1, \lambda_2), (\cdot, \cdot)}^{\mathbb{Z}} \cdot \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \end{aligned}$$

i przywołajmy Równ. (1.2.10). Możemy już teraz wprost sprawdzić – z wykorzystaniem definiującej własności (1.2.25), jak również  $\mathbb{Z}$ -liniowości iloczynu tensorowego – pożądane tożsamości (na tensorach prostych z  $\bigoplus_{\mu_1 \in \Lambda_1} G_{1\mu_1} \otimes_R \bigoplus_{\mu_2 \in \Lambda_2} G_{2\mu_2}$ , dla dowolnych  $r \in \mathcal{R}_0(R; \Lambda_1)$  i  $s \in \mathcal{R}_0(R; \Lambda_2)$ )

$$\begin{aligned} &h \circ \tilde{\tau}(g \triangleleft_{(1)} r \otimes_R s \triangleright_{(2)} g) = h(g \triangleleft_{(1)} r \circ \text{pr}_1 \otimes_R s \triangleright_{(2)} g \circ \text{pr}_2) \\ \equiv &\sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} h \circ J_{\lambda_1, \lambda_2} \circ \text{pr}_{\lambda_1, \lambda_2}(g \triangleleft_{(1)} r \circ \text{pr}_1 \otimes_R s \triangleright_{(2)} g \circ \text{pr}_2) \\ &= \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} (J_{\lambda_1} \otimes J_{\lambda_2})(g_{\lambda_1} \triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1} \otimes_R s_{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}) \\ &= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} J_{\lambda_1}(g_{\lambda_1} \triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1}) \otimes_R J_{\lambda_2}(s_{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}) \\ &= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} J_{\lambda_1}(g_{\lambda_1} \triangleleft_{(1)} r_{\lambda_1}) \otimes_R \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} J_{\lambda_2}(s_{\lambda_2} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}) \\ &= \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} J_{\lambda_1} \circ \text{pr}_{\lambda_1}(g \triangleleft_{(1)} r) \otimes_R \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} J_{\lambda_2} \circ \text{pr}_{\lambda_2}(s \triangleright_{(2)} g) \\ &= g \triangleleft_{(1)} r \otimes_R s \triangleright_{(2)} g. \end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy – dla dowolnej rodziny  $N_{(\cdot, \cdot)} \in \mathcal{R}_0(\mathbb{Z}; \Lambda_1 \times \Lambda_2)$  –

$$\begin{aligned}
& \tilde{\tau} \circ h(N_{(\cdot, \cdot)} \cdot \nu(g^{(1)} \circ \text{pr}_1, g^{(2)} \circ \text{pr}_2) \triangleright (g^{(1)} \circ \text{pr}_1 \otimes_R g^{(2)} \circ \text{pr}_2)) \\
&= \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} \tilde{\tau} \circ h \circ J_{\lambda_1, \lambda_2} \circ \text{pr}_{\lambda_1, \lambda_2} (N_{(\cdot, \cdot)} \cdot \nu(g^{(1)} \circ \text{pr}_1, g^{(2)} \circ \text{pr}_2) \\
&\quad \triangleright (g^{(1)} \circ \text{pr}_1 \otimes_R g^{(2)} \circ \text{pr}_2)) \\
&= \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} \tilde{\tau} \circ (J_{\lambda_1} \otimes J_{\lambda_2})(N_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cdot \nu(g_{\lambda_1}^{(1)}, g_{\lambda_2}^{(2)}) \triangleright (g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R g_{\lambda_2}^{(2)})) \\
&\quad \equiv \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} \tilde{\tau}(N_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cdot \nu(g_{\lambda_1}^{(1)}, g_{\lambda_2}^{(2)}) \triangleright (J_{\lambda_1}(g_{\lambda_1}^{(1)}) \otimes_R J_{\lambda_2}(g_{\lambda_2}^{(2)}))) \\
&= \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} \tilde{\tau}(N_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cdot \nu(g_{\lambda_1}^{(1)}, g_{\lambda_2}^{(2)}) \triangleright (\delta_{\lambda_1, 1}^{\mathbb{Z}} \triangleright g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R \delta_{\lambda_2, 2}^{\mathbb{Z}} \triangleright g_{\lambda_2}^{(2)})) \\
&= \tilde{\tau}\left(\sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} N_{(\lambda_1, \lambda_2)} \cdot \nu(g_{\lambda_1}^{(1)}, g_{\lambda_2}^{(2)}) \triangleright (\delta_{\lambda_1, 1}^{\mathbb{Z}} \triangleright g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R \delta_{\lambda_2, 2}^{\mathbb{Z}} \triangleright g_{\lambda_2}^{(2)})\right) \\
&\quad = \tilde{\tau}(N_{(\cdot, \cdot)} \cdot \nu(g^{(1)}, g^{(2)}) \triangleright (g^{(1)} \otimes_R g^{(2)})) \\
&= N_{(\text{pr}_1, \text{pr}_2)} \cdot \nu(g^{(1)} \circ \text{pr}_1, g^{(2)} \circ \text{pr}_2) \triangleright (g^{(1)} \circ \text{pr}_1 \otimes_R g^{(2)} \circ \text{pr}_2) \\
&\quad \equiv N_{(\cdot, \cdot)} \cdot \nu(g^{(1)} \circ \text{pr}_1, g^{(2)} \circ \text{pr}_2) \triangleright (g^{(1)} \circ \text{pr}_1 \otimes_R g^{(2)} \circ \text{pr}_2).
\end{aligned}$$

□

Prostą konsekwencją powyższego twierdzenia jest

**STWIERDZENIE 48.** *Przyjmijmy zapis Def. 40 i niechaj  $((V_\alpha, +_\alpha, \mathbf{P}_\alpha, \bullet \mapsto 0_\alpha), \ell_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ . Ich iloczyn tensorowy  $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2$  spełnia warunek*

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 \cdot \dim_{\mathbb{K}} V_2.$$

■

Dowód: Pochodna Tw. 1.2.10 i Stw. 34. □

Istotnie pogłębiwszy wgląd w relację między iloczynem tensorowym i sumą prostą, tudzież produktem modułów uzyskujemy w przypadku modułów wolnych, do której teraz przechodzimy. Tytułem wprowadzenia sformułujemy

**STWIERDZENIE 49.** *Przyjmijmy zapis Def. 18, 32 i 40. Niechaj  $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$  będzie  $R$ -modułem wolnym o bazie  $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , indeksowanej przez pewien zbiór  $\Lambda$ , i niech  $H \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}$ . Wówczas*

$$\forall_{\tau \in H \otimes_R G} \exists!_{h \in \mathcal{R}_0(H; \Lambda)} : \tau = \sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda \otimes_R g_\lambda$$

*i istnieje (niekanoniczny) izomorfizm grup przemiennej*

$$H \otimes_R G \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H.$$

■

*Dowód:* Wybór bazy w  $R$ -module  $G$  jest równoznaczny ze wskazaniem izomorfizmu  $R$ -modułów

$$G \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \langle g_\lambda \rangle_R,$$

co w świetle Tw. 1.2.10 (a przy domyślnym zastosowaniu Stw. 43) pozwala zapisać

$$H \otimes_R G \cong H \otimes_R \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \langle g_\lambda \rangle_R \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (H \otimes_R \langle g_\lambda \rangle_R).$$

Liniowa niezależność (nad  $R$ ) każdego z elementów bazy  $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  oznacza dalej, że odwzorowanie

$$\iota_\lambda : R \longrightarrow \langle g_\lambda \rangle_R : r \longmapsto r \triangleright g_\lambda$$

jest izomorfizmem  $R$ -modułów, którego istnienie daje nam, po uwzględnieniu tezy Stw. 45, pożądaną izomorfizm grup przemiennej

$$H \otimes_R G \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (H \otimes_R \langle g_\lambda \rangle_R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (H \otimes_R R) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H.$$

Powyższe rozumowanie pozwala nam bez trudu przeprowadzić dowód pierwszej części stwierdzenia. Istotnie, rozważmy dowolny tensor

$$\sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \otimes_R g) \in H \otimes_R G,$$

określony przez rodzinę  $\nu \in \mathcal{R}_0(\mathbb{Z}; H \times G)$ . Uwzględniwszy skończoność tej ostatniej, jak również skończoność rodziny  $r \cdot (g) \in \mathcal{R}_0(R; \Lambda)$  wyznaczającej jednoznaczny rozkład elementu  $g \in G$  w bazie  $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , w połączeniu z tożsamością z Ćwicz. 2 (1), wreszcie też wykorzystawszy śród- $R$ -liniowość  $\otimes_R$ , stwierdzamy

$$\begin{aligned} \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \otimes_R g) &= \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright \left( h \otimes_R \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda(g) \triangleright_G g_\lambda \right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \otimes_R r_\lambda(g) \triangleright_G g_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \triangleleft_H r_\lambda(g) \otimes_R g_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \triangleleft_H r_\lambda(g)) \right) \otimes_R g_\lambda, \end{aligned}$$

co jest poszukiwanym rozkładem,

$$h_\lambda := \sum_{(h,g) \in H \times G} \nu(h,g) \triangleright (h \triangleleft_H r_\lambda(g)) \in H.$$

Jego jednoznaczność wynika wprost z równoważności

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda \otimes_R g_\lambda = \mathbf{0}_{H \otimes_R G} \iff \forall_{\lambda \in \Lambda} : h_\lambda = \mathbf{0}_H,$$

której nietrywialną składową  $\implies$  otrzymujemy ewaluując odwzorowanie  $\mathbb{Z}$ -liniowe  $\text{id}_H \otimes \iota_\mu^{-1} \circ \text{pr}_\mu$  na obu stronach równości z lewej strony dla każdego indeksu  $\mu \in \Lambda$  z osobna.  $\square$

Rozumowanie jak to przedstawione powyżej prowadzi nas wprost do

STWIERDZENIE 50. *Przyjmijmy zapis Def. 18 i 40. Jeśli oba moduły  $G_1$  i  $G_2$  są wolne, przy czym odnośne bazy to  $\{g_{\lambda_1}^{(1)}\}_{\lambda_1 \in \Lambda_1}$  i  $\{g_{\lambda_2}^{(2)}\}_{\lambda_2 \in \Lambda_2}$ , to w zapisie dowolnego elementu*

$$\sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R h_{\lambda_1}^{(2)} \equiv \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} h_{\lambda_2}^{(1)} \otimes_R g_{\lambda_2}^{(2)}$$

w terminach elementów  $h_{\lambda_1}^{(2)} \in G_2$  i  $h_{\lambda_2}^{(1)} \in G_1$ , o rozkładach

$$h_{\lambda_1}^{(2)} = \sum_{\lambda_2 \in \Lambda_2} h_{\lambda_1, \lambda_2}^{(2)} \triangleright_{(2)} g_{\lambda_2}^{(2)}, \quad h_{\lambda_2}^{(1)} = \sum_{\lambda_1 \in \Lambda_1} g_{\lambda_1}^{(1)} \triangleleft_{(1)} h_{\lambda_2, \lambda_1}^{(1)},$$

o którym orzeka Stw. 49, są spełnione tożsamości

$$\forall_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2 \times \Lambda_2} : h_{\lambda_1, \lambda_2}^{(2)} = h_{\lambda_2, \lambda_1}^{(1)}.$$

■

Dowód: Wystarczy wykorzystać jednoznaczność rozkładu, o którym mówi Stw. 49 (w wersji stosownie zszytowanej). □

UWAGA 6. Należy podkreślić, że mimo swe strukturalne powinowactwo do stwierdzeń orzekających o jednoznaczności rozkładu elementu modułu w bazie, powyższe stwierdzenie nie pozwala nam traktować układu  $\{g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R g_{\lambda_2}^{(2)}\}_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2 \times \Lambda_2}$  jako bazy, oto bowiem grupa przemienna  $G_1 \otimes_R G_2$  nie jest w ogólności  $R$ -modułem.

□

Znaczenie założenia o istnieniu (skończonej) bazy eksponuje

STWIERDZENIE 51. *Przyjmijmy zapis Def. 18, 31 oraz 40 i niechaj  $H. \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R^{\text{opp}}}^{\Lambda}$ . Jeśli  $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$  jest  $R$ -modułem wolnym, to wówczas kanoniczny homomorfizm grup przemiennych*

$$\tilde{\tau} : \prod_{\lambda \in \Lambda} H_{\lambda} \otimes_R G \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} (H_{\lambda} \otimes_R G),$$

o którym mówi Stw. 47, jest monomorfizmem. Jeżeli ponadto moduł  $G$  jest skończenie generowany, to homomorfizm ten jest izomorfizmem.

■

Dowód: Niechaj  $\{g_{\mu}\}_{\mu \in \tilde{\Lambda}}$  będzie bazą  $G$ , a wtedy dowolny element  $t = \prod_{\lambda \in \Lambda} H_{\lambda} \otimes_R G$  można – w świetle Stw. 49 – zapisać jednoznacznie jako

$$t = \sum_{\mu \in \tilde{\Lambda}} h_{\mu}^{\mu} \otimes_R g_{\mu}, \quad h_{\mu}^{\mu} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} H_{\lambda},$$

zatem jego obrazem względem odwzorowania kanonicznego  $\tilde{\tau}$  jest element grupy  $\prod_{\lambda \in \Lambda} (H_{\lambda} \otimes_R G)$  postaci

$$\tilde{\tau}(t) : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (H_{\lambda} \otimes_R G) : \lambda \longmapsto \sum_{\mu \in \tilde{\Lambda}} h_{\lambda}^{\mu} \otimes_R g_{\mu} \in H_{\lambda} \otimes_R G.$$

Ten ostatni jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \sum_{\mu \in \tilde{\Lambda}} h_{\lambda}^{\mu} \otimes_R g_{\mu} = 0_{H_{\lambda} \otimes_R G},$$

to zaś – wobec jednoznaczności rozkładu orzeczonej w Stw. 49 – jest równoważne stwierdzeniu

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} \forall_{\mu \in \tilde{\Lambda}} : h_{\lambda}^{\mu} = 0_{H_{\lambda}},$$



co pokazuje injektywność odwzorowania  $\tilde{\tau}$  w rozpatrywanym przypadku.

Jeśli ponadto  $N := |\tilde{\Lambda}| < \infty$ , to na podstawie Tw. 1.2.10 oraz Stw. 45 (i wcześniejszych naszych rozważań, w tym Stw. 43) otrzymujemy z jednej strony

$$\begin{aligned} \iota_1 : \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \otimes_R G &\cong \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \otimes_R \bigoplus_{n=1}^N \langle g_n \rangle_R \cong \bigoplus_{n=1}^N \left( \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \otimes_R \langle g_n \rangle_R \right) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \left( \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \otimes_R R \right) \cong \bigoplus_{n=1}^N \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \cong \prod_{n=1}^N \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \\ &\equiv \prod_{(n,\lambda) \in \overline{1, N \times \Lambda}} H_\lambda, \end{aligned}$$

z drugiej zaś

$$\begin{aligned} \iota_2 : \prod_{\lambda \in \Lambda} (H_\lambda \otimes_R G) &\cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \left( H_\lambda \otimes_R \bigoplus_{n=1}^N \langle g_n \rangle_R \right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \bigoplus_{n=1}^N (H_\lambda \otimes_R \langle g_n \rangle_R) \\ &\cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \bigoplus_{n=1}^N (H_\lambda \otimes_R R) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} \bigoplus_{n=1}^N H_\lambda \equiv \prod_{\lambda \in \Lambda} \prod_{n=1}^N H_\lambda \\ &\equiv \prod_{(n,\lambda) \in \overline{1, N \times \Lambda}} H_\lambda. \end{aligned}$$

W powyższych rozważaniach wykorzystaliśmy oczywiste izomorfizmy

$$\prod_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \prod_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2} \cong \prod_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2},$$

które dowolnemu odwzorowaniu

$$\gamma_\cdot : \Lambda_1 \longrightarrow \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \mathbf{Map}(\Lambda_2, \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2})$$

o własności

$$\forall \lambda_1 \in \Lambda_1 : \gamma_{\lambda_1} : \Lambda_2 \longrightarrow \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2} : \lambda_2 \mapsto \gamma_{\lambda_1}(\lambda_2) \in G_{\lambda_1, \lambda_2}$$

przyporządkowują odwzorowanie

$$g_\cdot^\gamma : \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2} : (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \gamma_{\lambda_1}(\lambda_2),$$

i odwrotnie – z każdym odwzorowaniem

$$g_\cdot : \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2} : (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto g_{\lambda_1, \lambda_2} \in G_{\lambda_1, \lambda_2}$$

stowarzyszą odwzorowanie

$$\gamma_\cdot^{g_\cdot} : \Lambda_1 \longrightarrow \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_1} \mathbf{Map}(\Lambda_2, \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2})$$

o wartościach danych przez odwzorowania

$$\gamma_{\lambda_1}^{g_\cdot} : \Lambda_2 \longrightarrow \bigcup_{\lambda_2 \in \Lambda_2} G_{\lambda_1, \lambda_2} : \lambda_2 \mapsto g_{\lambda_1, \lambda_2}.$$

Endomorfizm złożony  $\iota_2 \circ \tilde{\tau} \circ \iota_1^{-1}$  grupy przemiennej  $\prod_{(n,\lambda) \in \overline{1, N \times \Lambda}} H_\lambda$  jest injektywny wprost z konstrukcji, ale też bez trudu stwierdzamy, że jest to endomorfizm identycznościowy, co przesądza o bijektywnym charakterze  $\tilde{\tau}$ .  $\square$

Na zakończenie dyskusji własności iloczynu tensorowego modułów nad *dowolnym* pierścieniem zatrzymamy się jeszcze nad wynikiem, który doprowadzi nas do wygodnej (i często wykorzystywanej w fizyce, w tym np. w mechanice kwantowej) reprezentacji odwzorowań  $R$ -liniowych.

**TWIERDZENIE 1.2.11.** *Przyjmijmy zapis Def. 16, 40 oraz 41 i niechaj  $G_1 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_1}$ ,  $G_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{(R_1, R_2^{\text{opp}})}$ ,  $G_3 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_{R_2}$ . Istnieje kanoniczny homomorfizm grup przemiennej*

$$\varepsilon : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 \longrightarrow \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3),$$

który na tensorach prostych przyjmuje postać

$$\forall (\chi, g_3, g_1) \in \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \times G_3 \times G_1 : \varepsilon(\chi \otimes_{R_2} g_3)(g_1) = \chi(g_1) \otimes_{R_2} g_3.$$

Jeśli moduł  $G_3$  jest wolny, to homomorfizm ten jest monomorfizmem. Jeżeli zaś moduł  $G_1$  lub moduł  $G_3$  jest wolny i skończenie generowany, to homomorfizm ten jest izomorfizmem, co implikuje – w szczególności – istnienie, w tym przypadku i dla  $R_1 = R_2 =: R$ , kanonicznego izomorfizmu

$$(1.2.26) \quad G_1^* \otimes_R G_3 \cong \text{Hom}_R(G_1, G_3),$$

w tym także – dla  $G_1 = G_3 =: G$  –

$$(1.2.27) \quad \theta_G \equiv \varepsilon : G^* \otimes_R G \xrightarrow{\cong} \text{End}_R(G, G).$$

■

*Dowód:* Zauważmy przede wszystkim, że teza dowodzonego twierdzenia ma sens formalny w świetle Stw. 44. Z kolei istnienie homomorfizmu  $\varepsilon$  jest konsekwencją oczywistej śród- $R_2$ -liniowości odwzorowania

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \times G_3 &\longrightarrow \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) \\ &: (\chi, g_3) \longmapsto \chi(\cdot) \otimes_{R_2} g_3. \end{aligned}$$

Dowód zaczniemy od rozważenia przypadku, kiedy  $G_3$  ma bazę  $\{g_\lambda^{(3)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ . W świetle Stw. 49 dowolny tensor z dziedziny  $\varepsilon$  możemy wówczas przedstawić w postaci (danej jednoznacznie)

$$\tau = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^\lambda \otimes_{R_2} g_\lambda^{(3)}, \quad \chi^\lambda \in \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2).$$

Niech  $\varepsilon(\tau) = 0$ , albo równoważnie

$$\forall_{g_1 \in G_1} : 0_{G_2 \otimes_{R_2} G_3} = \varepsilon(\tau)(g_1) \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^\lambda(g_1) \otimes_{R_2} g_\lambda^{(3)}.$$

Przywoławszy tezę Stw. 49 raz jeszcze, konstatujemy, iż  $0_{G_2 \otimes_{R_2} G_3}$  ma jednoznaczny rozkład wypisanej postaci, więc koniecznie

$$\forall_{g_1 \in G_1} \forall_{\lambda \in \Lambda} : \chi^\lambda(g_1) = 0_{(2)},$$

a stąd

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \chi^\lambda = 0.$$

Stwierdzamy zatem na koniec, że  $\tau = 0$ , co dowodzi iniektywności  $\varepsilon$  w rozpatrywanym przypadku.

Niech teraz dodatkowo  $N := |\Lambda| < \infty$ . Na mocy Tw. 1.2.10 oraz Stw. 45 (i wcześniejszych naszych rozważań, w tym Stw. 43) wnioskujemy o istnieniu (niekanonicznych) izomorfizmów grup przemiennejch:

$$\begin{aligned} \iota_1 : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 &\cong \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} \bigoplus_{n=1}^N R_2 \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N (\text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} R_2) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \iota_2 : \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) &\cong \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} \bigoplus_{n=1}^N R_2) \\ &\cong \text{Hom}_{R_1}(G_1, \bigoplus_{n=1}^N (G_2 \otimes_{R_2} R_2)) \\ &\cong \text{Hom}_{R_1}(G_1, \bigoplus_{n=1}^N G_2) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2), \end{aligned}$$

przy czym w ostatnim przejściu wykorzystaliśmy Cor. 4. Obłożywszy iniektywny homomorfizm  $\varepsilon$  z obu stron stosownymi izomorfizmami, otrzymujemy nowy monomorfizm:  $\iota_2 \circ \varepsilon \circ \iota_1^{-1}$ , którego strukturę możemy bez trudu zanalizować wobec tożsamości jego dziedziny i przeciwdziedziny. Tym sposobem bez trudu przekonujemy się, że w obrazie rzeczzonego złożenia monomorfizm  $\varepsilon$  jawi się odwzorowaniem identycznościowym (w przyjętej notacji  $\iota_2 \circ \varepsilon \circ \iota_1^{-1}$  przeprowadza na siebie wektor odwzorowań  $R_1$ -liniowych  $(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^N)$ , gdzie przyjęliśmy dla ustalenia uwagi, że  $\Lambda \equiv \overline{1, N}$ ), przeto i sam  $\varepsilon$  jest nieodzownie izomorfizmem.

Zajmiemy się wreszcie przypadkiem, kiedy to  $G_1$  jest modulem o skończonej bazie  $\{g_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1, N}}$ . Dowolny element  $\chi \in \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3)$  jest teraz jednoznacznie określony przez wynik ewaluacji na owej bazie – niech to będzie (w notacji Równ. (1.2.21))

$$(1.2.28) \quad \chi(g_k^{(1)}) = \sum_{(g,h) \in G_2 \times G_3} \nu_k(g, h) \triangleright (g \otimes_{R_2} h), \quad k \in \overline{1, N}.$$

Zdefiniujemy odwzorowania  $\chi_{(k,g)} \in \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2)$  indeksowane elementami zbioru  $\overline{1, N} \times G_2 \ni (k, g)$  i będące jedynymi  $R_1$ -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\forall_{l \in \overline{1, N}} : \chi_{(k,g)}(g_l^{(1)}) := \delta_{l,k}^Z \triangleright g.$$

Oznaczmy ponadto, dla dowolnego *ustalonego* rozkładu tensora  $\chi(g_k^{(1)})$  (pamiętajmy, że tensory proste w ogólności nie stanowią układu bazowego, a jedynie układ generujący)

$$\forall_{(k,g,h) \in \overline{1, N} \times G_2 \times G_3} : \nu(\chi_{(k,g)}, h) := \nu_k(g, h).$$

Bez trudu przekonujemy się, że obrazem tensora

$$(1.2.29) \quad \gamma(\chi) := \sum_{(k,g,h) \in \overline{1, N} \times G_2 \times G_3} \nu(\chi_{(k,g)}, h) \triangleright (\chi_{(k,g)} \otimes_{R_2} h)$$

(suma w jego definicji jest skończona w konsekwencji skończoności  $N$  oraz nośnika  $\nu_k$ ) względem homomorfizmu  $\varepsilon$  jest homomorfizm  $\chi$  określony w Równ. (1.2.28), oto bowiem

$$\begin{aligned} \varepsilon(\gamma(\chi))(g_k^{(1)}) &:= \sum_{(l,g,h) \in \overline{1,N} \times G_2 \times G_3} \nu(\chi(l,g), h) \triangleright (\chi(l,g)(g_k^{(1)}) \otimes_{R_2} h) \\ &= \sum_{(l,g,h) \in \overline{1,N} \times G_2 \times G_3} \nu(\chi(l,g), h) \triangleright (\delta_{l,k}^Z \triangleright g \otimes_{R_2} h) \\ &= \sum_{(g,h) \in G_2 \times G_3} \nu(\chi(k,g), h) \triangleright (g \otimes_{R_2} h) \equiv \chi(g_k^{(1)}). \end{aligned}$$

Jest przeto  $\varepsilon$  epimorfizmem, a ponieważ istnieją (niekanoniczne) izomorfizmy:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 &\cong \text{Hom}_{R_1}\left(\bigoplus_{n=1}^N R_1, G_2\right) \otimes_{R_2} G_3 \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \text{Hom}_{R_1}(R_1, G_2) \otimes_{R_2} G_3 \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N G_2 \otimes_{R_2} G_3 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{R_1}(G_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) &\cong \text{Hom}_{R_1}\left(\bigoplus_{n=1}^N R_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3\right) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N \text{Hom}_{R_1}(R_1, G_2 \otimes_{R_2} G_3) \\ &\cong \bigoplus_{n=1}^N G_2 \otimes_{R_2} G_3, \end{aligned}$$

więc też nieodzownie  $\varepsilon$  ma trywialne jądro, czyli jest izomorfizmem.  $\square$

**UWAGA 7.** W szczególnym przypadku  $R_1 = R_2 =: R$ , a dla  $G_2 = R$  i  $G_1$  wolnego odwrotność kanonicznego izomorfizmu  $R$ -modułów z tezy powyższego twierdzenia daje się wypisać wprost w zwartej postaci

$$\varepsilon^{-1} : \text{Hom}_R(G_1, G_3) \xrightarrow{\cong} G_1^* \otimes_R G_3 : \chi \mapsto \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(1)} \otimes_R \chi(g_k^{(1)})$$

przy użyciu bazy  $\{\gamma_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1,N}}$  modułu  $G_1^*$  dwoistej wzgl.  $\{g_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1,N}}$ , por.: Równ. (1.2.29). Jeśli ponadto  $G_1 = G_3 \equiv G$ , to izomorfizm  $\theta_G$  dostarcza nam powszechnie spotykanej reprezentacji endomorfizmu identycznościowego (w konwencji  $\gamma_k^{(1)} \equiv e_k^*$ ,  $g_k^{(1)} \equiv e_k$ )

$$\theta_G^{-1}(\text{id}_G) = \sum_{k=1}^N e_k^* \otimes_R e_k.$$

$\bar{\lambda}$

Powyższe rozważania prowadzą wprost do jakże użytecznej

**DEFINICJA 43.** Przyjmijmy zapis Tw. 1.2.11, zakładając w szczególności, że pierścień  $R$  jest przemienny,  $R$ -moduł  $G$  zaś – wolny i skończenie generowany. Wówczas kanoniczny homomorfizm  $R$ -modułów

$$\tau : G^* \otimes_R G \longrightarrow R$$

o własności

$$\forall_{(\varphi, g) \in G^* \times G} : \tau(\varphi \otimes_R g) = \varphi(g)$$

określa **kanoniczną formę  $R$ -liniową**

$$\mathrm{tr}_G := \tau \circ \theta_G^{-1} : \mathrm{End}_R(G) \longrightarrow R$$

zwaną **śladem endomorfizmu po module  $G$** . ▲

Ilekoć pierścień bazy jest przemienny, w *naturalny* sposób pojawia się dodatkowa struktura algebraiczna na grupie przemiennej  $G_1 \otimes_R G_2$  z Def. 40. Ażeby uwypuklić znaczenie przemienności  $R$ , prześledźmy następujące rozumowanie, którego celem jest wyindukowanie na rzeczony grupie struktury  $R$ -modułu przy użyciu istniejących działań  $R$  na czynnikach iloczynu tensorowego. Oczywisty kandydat do roli  $R$ -działania (lewostronnego) to odwzorowanie

$$\begin{aligned} \ell^{\otimes} & : R \times (G_1 \otimes_R G_2) \longrightarrow G_1 \otimes_R G_2 \\ & : \left( r, \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \right) \\ & \longmapsto \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r \triangleright_{(2)} g_2). \end{aligned}$$

(1.2.30)

Na pierwszy rzut oka odwzorowanie to ma pożądaną własność (wypisaną dla dowolnych  $r_1, r_2 \in R$ )

$$\begin{aligned} & \ell_{r_1}^{\otimes} \circ \ell_{r_2}^{\otimes} \left( \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \right) \\ & = \ell_{r_1}^{\otimes} \left( \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r_2 \triangleright_{(2)} g_2) \right) \\ & = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r_1 \triangleright_{(2)} (r_2 \triangleright_{(2)} g_2)) \\ & = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R (r_1 \cdot r_2) \triangleright_{(2)} g_2) \\ & \equiv \ell_{r_1 \cdot r_2}^{\otimes} \left( \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \right). \end{aligned}$$

Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę śród- $R$ -jednorodność  $\otimes_R$ , to natrafimy na kłopot, oto bowiem otrzymujemy tożsamość

$$\begin{aligned} & \ell_{r_1}^{\otimes} \circ \ell_{r_2}^{\otimes} \left( \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \right) \\ & = \ell_{r_1}^{\otimes} \left( \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R r_2 \triangleright_{(2)} g_2) \right) \\ & = \ell_{r_1}^{\otimes} \left( \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \triangleleft_{(1)} r_2 \otimes_R g_2) \right) \\ & = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \triangleleft_{(1)} r_2 \otimes_R r_1 \triangleright_{(2)} g_2) \\ & = \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright ((g_1 \triangleleft_{(1)} r_2) \triangleleft_{(1)} r_1 \otimes_R g_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \triangleleft_{(1)} (r_2 \cdot_R r_1) \otimes_R g_2) \\
&= \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R (r_2 \cdot_R r_1) \triangleright_{(2)} g_2) \\
&\equiv \ell_{r_2 \cdot_R r_1}^{\otimes} \left( \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \nu(g_1, g_2) \triangleright (g_1 \otimes_R g_2) \right),
\end{aligned}$$

która wymaga, dla uniknięcia sprzeczności z tą uzyskaną poprzednio, iżby

$$\forall_{r_1, r_2 \in R} : r_1 \cdot_R r_2 = r_2 \cdot_R r_1,$$

tj., iżby  $R$  był przemienny. Przyjmując to za punkt wyjścia do dalszych rozważań, wprowadzamy

**DEFINICJA 44.** Przyjmijmy zapis Def. 40, przy czym niechaj  $R$  będzie pierścieniem przemiennym. Struktura  $R$ -modułu na  $G_1 \otimes_R G_2$  jest zadawana przez odwzorowanie (działanie) (1.2.30). Analogicznie definiujemy strukturę  $R$ -modułu na  $n$ -krotnym iloczynnie tensorowym rodzinie modułów  $\{G_A\}_{A \in \overline{1, n}}$  z Def. 42 przy  $R_l := R$ ,  $l \in \overline{1, n-1}$ . ▲

Zacznijmy od natychmiastowego corollarium do Stw. 50.

**STWIERDZENIE 52.** *Przyjmijmy zapis Def. 44 i Stw. 50. Jeśli oba moduły  $G_1$  i  $G_2$  są wolne, przy czym odnośne bazy to  $\{g_{\lambda_1}^{(1)}\}_{\lambda_1 \in \Lambda_1}$  i  $\{g_{\lambda_2}^{(2)}\}_{\lambda_2 \in \Lambda_2}$ , to także  $R$ -moduł  $G_1 \otimes_R G_2$  jest wolny, a rodzina  $\{g_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_R g_{\lambda_2}^{(2)}\}_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2}$  jest jego bazą.* ■

Dowód: Oczywisty. □

Mamy też dość oczywiste

**STWIERDZENIE 53.** *Przyjmijmy zapis Def. 44 (w szczególności  $R$  jest pierścieniem przemiennym) i niechaj  $G \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$ . Istnieje kanoniczny izomorfizm  $R$ -modułów*

$$\text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, G) \cong L_R(G_1, G_2; G),$$

gdzie  $R$ -moduł po prawej stronie to moduł odwzorowań  $R$ -dwuliniowych z  $G_1 \times G_2$  do  $G$ . ■

Dowód: Odwzorowanie  $R$ -dwuliniowe  $\varphi \in L_R(G_1, G_2; G)$  to takie odwzorowanie  $\mathbb{Z}$ -dwuliniowe (czyli dwu-addytywne), które spełnia warunek

$$\forall_{(r, g_1, g_2) \in R \times G_1 \times G_2} : \varphi(r \triangleright_{(1)} g_1, g_2) = r \triangleright \varphi(g_1, g_2) = \varphi(g_1, r \triangleright_{(2)} g_2).$$

Jest ono zatem w szczególności śród- $R$ -liniowe, czyli jest mu jednoznacznie przypisany homomorfizm grup przemiennych  $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1 \otimes_R G_2, G)$  o własności

$$\forall_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} : \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2) = \varphi(g_1, g_2).$$

Warunek

$$\varphi(r \triangleright_{(1)} g_1, g_2) = r \triangleright \varphi(g_1, g_2)$$

implikuje dodatkową własność rzeczonego homomorfizmu:

$$\forall_{(r, g_1, g_2) \in R \times G_1 \times G_2} : \tilde{\varphi}(r \triangleright_{(1)} g_1 \otimes_R g_2) = r \triangleright \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2),$$

która w świetle definicji działania  $R$  na  $G_1 \otimes_R G_2$  pozwala nam zapisać

$$\forall_{(r, g_1, g_2) \in R \times G_1 \times G_2} : \tilde{\varphi}(r \triangleright_{\otimes} (g_1 \otimes_R g_2)) = r \triangleright \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2).$$

Powyższa własność rozszerza się na cały moduł tensorowy  $G_1 \otimes_R G_2$  ze zbioru jego generatorów, co oznacza przynależność  $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, G)$ . Jest oczywistym, że tak określona odpowiedniość między elementami obu modułów odwzorowań jest wzajemnie bijektywna i strukturalna. W szczególności dowolne odwzorowanie  $\chi \in \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, G)$  zadaje odwzorowanie  $R$ -dwuliniowe

$$\underline{\chi} : G_1 \times G_2 \longrightarrow G : (g_1, g_2) \longmapsto \chi(g_1 \otimes_R g_2).$$

□

Zachodzi też przydatne

**STWIERDZENIE 54.** *Przyjmijmy zapis Def. 16, 41 i 44 (w szczególności  $R$  jest pierścieniem przemiennym). Istnieje kanoniczny homomorfizm  $R$ -modułów*

$$\iota : \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \longrightarrow \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$$

o własności

$$\iota(\chi_1 \otimes_R \chi_2) = \chi_1 \otimes \chi_2.$$

Ilekoć moduły w którejś z par  $(G_1, H_1), (G_2, H_2)$  lub  $(G_1, G_2)$  są wolne i skończenie generowane, homomorfizm ten jest izomorfizmem. W szczególności więc dla  $H_1 = R = H_2$  stwierdzamy, że jeżeli jeden z modułów  $G_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  jest wolny i skończenie generowany, istnieje kanoniczny izomorfizm  $R$ -modułów

$$(1.2.31) \quad (G_1 \otimes_R G_2)^* \cong G_1^* \otimes_R G_2^*.$$

■

*Dowód:* Dowód pierwszej części stwierdzenia stanowi prostą wariację na temat (dowodu) Stw. 42. Przejdziemy więc od razu do dowodu części drugiej, przy czym wobec symetrii (jakościowej niezmienniczości) zagadnienia względem transpozycji indeksów  $(1, 2) \mapsto (2, 1)$  wystarczy rozpatrzyć niezależnie przypadek, w którym moduły pary  $(G_1, H_1)$  są wolne i skończenie generowane, oraz ten, w którym moduły pary  $(G_1, G_2)$  mają tę cechę. Zaczniemy od tego pierwszego. Niechaj  $\{g_k^{(1)}\}_{k \in \overline{1, M_1}}$  będzie bazą  $R$ -modułu  $G_1$ , a  $\{h_l^{(1)}\}_{l \in \overline{1, N_1}}$  bazą  $R$ -modułu  $H_1$ . Wówczas bazą  $R$ -modułu  $\text{Hom}_R(G_1, H_1)$  jest – w świetle Tw. 1.2.11 (patrz: Równ. (1.2.26)) – rodzina odwzorowań  $R$ -liniowych

$$\tau_{k,l}^{(1)} := \varepsilon(g_k^{(1)*} \otimes_R h_l^{(1)}), \quad (k, l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}.$$

Na mocy Stw. 49 dowolny tensor  $\tau \in \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2)$  można zatem przedstawić (jednoznacznie) w postaci

$$\tau = \sum_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} \tau_{k,l}^{(1)} \otimes_R \chi^{k,l}, \quad \chi^{k,l} \in \text{Hom}_R(G_2, H_2),$$

warunek  $\iota(\tau) = 0$  jest więc równoważny układowi tożsamości

$$\begin{aligned} \forall_{m \in \overline{1, M_1}} \forall_{g \in G_2} : 0_{H_1 \otimes_R H_2} &= \sum_{(k,l) \in \overline{1, M_1} \times \overline{1, N_1}} \tau_{k,l}^{(1)}(g_m^{(1)}) \otimes_R \chi^{k,l}(g) \\ &= \sum_{l \in \overline{1, N_1}} h_l^{(1)} \otimes_R \chi^{m,l}(g), \end{aligned}$$

z których na podstawie tegoż Stw. 49 odczytujemy warunki

$$\forall_{(m,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} \forall_{g \in G_2} : \chi^{m,l}(g) = 0_{H_2}.$$

Z nich wyciągamy wniosek

$$\forall_{(m,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} : \chi^{m,l} = 0,$$

a dalej

$$\tau = 0,$$

co dowodzi injektywności  $\iota$  w rozważanym przypadku. Na obecnym etapie wystarczy upewnić się o istnieniu stosownego (niekanonicznego) izomorfizmu między dziedziną i przeciwdziedziną  $\iota$ , aby móc zanalizować bezpośrednio ten monomorfizm, podobnie jak w dowodzie Tw. 1.2.11. Czynimy to w rachunku wykorzystującym Tw. 1.2.10 oraz Stw. 45 (i wcześniejsze nasze rozważania, w tym Stw. 43), jak również [Sus13, Cor. 14] – oto więc z jednej strony

$$\begin{aligned} \iota_1 : & \quad \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ & \cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} R, \bigoplus_{l=1}^{N_1} R\right) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ & \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} \text{Hom}_R(R, R) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ & \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} R \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) \\ & \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} (R \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2)) \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} \text{Hom}_R(G_2, H_2), \end{aligned}$$

a z drugiej

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2) & \cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} R \otimes_R G_2, \bigoplus_{l=1}^{N_1} R \otimes_R H_2\right) \\ & \cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} (R \otimes_R G_2), \bigoplus_{l=1}^{N_1} (R \otimes_R H_2)\right) \\ & \cong \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{k=1}^{M_1} G_2, \bigoplus_{l=1}^{N_1} H_2\right) \\ & \cong \bigoplus_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}} \text{Hom}_R(G_2, H_2). \end{aligned}$$

Jak łatwo widać, monomorfizm  $\iota_2 \circ \iota \circ \iota_1^{-1}$  jest odwzorowaniem identycznościowym (w przyjętej notacji przeprowadza na siebie macierz odwzorowań  $R$ -liniowych  $(\chi^{k,l})_{(k,l) \in \overline{1, M_1 \times 1, N_1}}$ ), więc też  $\iota$  jest izomorfizmem. Zauważmy, że dowiedziona część tezy twierdzenia uzasadnia (w połączeniu z Tw. 1.2.7) Równ. (1.2.31).

Na koniec zajmijmy się przypadkiem, kiedy to moduły  $G_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  są wolne i skończenie generowane. Wybierzmy w  $G_1$  bazę jak w poprzedniej części dowodu, a w  $G_2$  bazę  $\{g_l^{(2)}\}_{l \in \overline{1, N_2}}$ . Pokażemy najpierw, że homomorfizm  $\iota$  jest surjektywny. W tym celu rozważmy odwzorowanie  $R$ -liniowe  $\chi \in \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2)$ ,



które na bazie  $\{g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)}\}_{(k,l) \in \overline{1, N_1} \times \overline{1, N_2}}$  dziedziny przyjmuje postać

$$(1.2.32) \quad \chi(g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)}) = \sum_{(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2} r_{kl}(h_1, h_2) \triangleright_{\otimes} (h_1 \otimes_R h_2)$$

dla pewnych  $r_{kl}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{R}_0(R; H_1 \times H_2)$ . Postępując analogicznie jak w dowodzie Tw. 1.2.11, zdefiniujemy odwzorowania  $\chi_{(k, h_\alpha)} \in \text{Hom}_R(G_\alpha, H_\alpha)$  indeksowane elementami zbioru  $\overline{1, N_\alpha} \times H_\alpha \ni (k, h_\alpha)$  i będące jedynymi  $R$ -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\forall_{l \in \overline{1, N_\alpha}} : \chi_{(k, h_\alpha)}(g_l^{(A)}) := \delta_{l, k}^Z \triangleright h_\alpha.$$

Ustalwszy dowolnie rozkład tensora  $\chi(g_k^{(1)} \otimes_R g_l^{(2)})$ , wprowadźmy oznaczenia

$$\forall_{(k, l, h_1, h_2) \in \overline{1, N_1} \times \overline{1, N_2} \times H_1 \times H_2} : r(\chi_{(k, h_1)}, \chi_{(l, h_2)}) := r_{kl}(h_1, h_2).$$

Łatwo widać, że obrazem tensora

$$\gamma(\chi) := \sum_{(k, l, h_1, h_2) \in \overline{1, N_1} \times \overline{1, N_2} \times H_1 \times H_2} r(\chi_{(k, h_1)}, \chi_{(l, h_2)}) \triangleright_{\otimes} (\chi_{(k, h_1)} \otimes_R \chi_{(l, h_2)})$$

(suma w jego definicji jest skończona w konsekwencji skończoności  $N_A$  oraz nośnika  $r_{kl}(\cdot, \cdot)$ ) względem homomorfizmu  $\iota$  jest homomorfizm  $\chi$  określony w Równ. (1.2.32). Konstatujemy więc, że  $\iota$  jest epimorfizmem, a ponieważ na mocy Równ. (1.2.31) i Tw. 1.2.8 oraz innych przywoływanych wcześniej (s)twierdzeń (w tym Tw. 1.2.7) istnieje (kanoniczny) izomorfizm

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(G_1, H_1) \otimes_R \text{Hom}_R(G_2, H_2) &\cong (G_1^* \otimes_R H_1) \otimes_R (G_2^* \otimes_R H_2) \\ &\cong (G_1^* \otimes_R G_2^*) \otimes_R (H_1 \otimes_R H_2) \\ &\cong (G_1 \otimes_R G_2)^* \otimes_R (H_1 \otimes_R H_2) \\ &\cong \text{Hom}_R(G_1 \otimes_R G_2, H_1 \otimes_R H_2), \end{aligned}$$

przeło z całą pewnością  $\iota$  jest izomorfizmem. □

I wreszcie na zakończenie części naszej dyskusji poświęconej strukturze modułów tensorowych nad pierścieniem przemiennym opiszemy – tytułem ilustracji zastosowań konstrukcji iloczynu tensorowego modułów – kanoniczną relację między modułami nad pierścieniami liczbowymi o szczególnym znaczeniu w modelowaniu zjawisk, tj.  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  i  $\mathbb{H}$ .

**DEFINICJA 45.** Przyjmijmy zapis Def. 41 i 44 oraz Przykł. 6 (2) i 31 (4). Wyposaźmy pierścienie  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}$  oraz  $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^{\times 4}$  w naturalną strukturę przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych, opisaną w Przykł. 11 (10). **Kompleksyfikacja** rzeczywistej przestrzeni wektorowej to functor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

o składowej obiektowej

$$(1.2.33) \quad \begin{aligned} &\text{Obj } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \\ &: ((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V) \longmapsto ((V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, +_{\otimes}, P_{\otimes}, \bullet \mapsto 0_{\otimes}), \ell_V^{\mathbb{C}}), \end{aligned}$$

przyporządkowującej przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej  $V$  iloczyn tensorowy tej ostatniej z przestrzenią  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{\times 2}$  nad  $\mathbb{R}$  wyposażony w działanie

$$\ell_V^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

określone na tensorach prostych formułą

$$\ell_V^{\mathbb{C}}(\tilde{z}, v \otimes_{\mathbb{R}} z) := v \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{z} \cdot_{\mathbb{C}} z),$$

oraz o składowej morfizmowej

$$(1.2.34) \quad \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} : \chi \longmapsto \chi \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}.$$

**Kompleksyfikacja** rzeczywistej przestrzeni kwadratowej to functor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}} : \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$$

stanowiący rozszerzenie funktora określonego na kategorii przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych, tj. taki, który przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej będącej nośnikiem struktury kwadratowej przyporządkowuje jej kompleksyfikację w rozumieniu Równ. (1.2.33), a izometrii między przestrzeniami – jej kompleksyfikację w rozumieniu Równ. (1.2.34), przy czym istotą rozszerzenia jest odwzorowanie formy kwadratowej  $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$  w formę kwadratową  $Q^{\mathbb{C}} : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  zadaną na tensorach prostych wzorem

$$\forall_{(v,z) \in V \times \mathbb{C}} : Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) := J_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \cdot z^2.$$

**Kwaternionifikacja** rzeczywistej przestrzeni wektorowej to functor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{H}} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}$$

o składowej obiektowej

$$\text{Obj } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}$$

(1.2.35)

$$: ((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V) \longmapsto ((V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}, +_{\otimes}, P_{\otimes}, \bullet \longmapsto 0_{\otimes}), \wp_V^{\mathbb{H}}),$$

przyporządkowującej przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej  $V$  iloczyn tensorowy tej ostatniej z przestrzenią  $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^{\times 4}$  nad  $\mathbb{R}$  wyposażony w (prawostronne) działanie

$$\wp_V^{\mathbb{H}} : (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \times \mathbb{H} \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$$

określone na tensorach prostych formułą

$$\wp_V^{\mathbb{H}}(v \otimes_{\mathbb{R}} q, \tilde{q}) := v \otimes_{\mathbb{R}} (q \cdot_{\mathbb{H}} \tilde{q}),$$

oraz o składowej morfizmowej

$$(1.2.36) \quad \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}} : \chi \longmapsto \chi \otimes \text{id}_{\mathbb{H}}.$$

Jako że kwaterniony są pierścieniem z dzieleniem, (prawe<sup>11</sup>) moduły nad tym pierścieniem (nieodzwrotnie wolne) określa się mianem **kwaternionowych przestrzeni wektorowych**. ▲

Na marginesie powyższych rozważań warto wspomnieć o istnieniu wygodnej alternatywy dla standardowej definicji zespolonej oraz kwaternionowej przestrzeni wektorowej, którą opisuje

<sup>11</sup>Wybór ten jest kwestią konwencji – w tej przyjętej przez nas odwzorowaniach  $\mathbb{H}$ -liniowymi przestrzeniami modelowymi  $\mathbb{H}^{\times n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  stają się macierze o współczynnikach kwaternionowych obliczające się na wektorach w standardowy sposób, tj. z lewej strony.

STWIERDZENIE 55. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz Przykł. 6 (2) i 31 (4). Niechaj  $(V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V)$  będzie grupą przemienną. Poniższe dwa zdania są wzajem równoważne:

- (C1) na  $V$  określone jest działanie  $\mathbb{C}$ , które czyni z  $V$  przestrzeń wektorową nad  $\mathbb{C}$ ;  
 (C2) na  $V$  określone jest działanie  $\mathbb{R}$ , które czyni z  $V$  przestrzeń wektorową nad  $\mathbb{R}$ , przy czym istnieje endomorfizm  $I \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  o własności

$$(1.2.37) \quad I \circ I = -\text{id}_V,$$

zwany **strukturą zespoloną** na  $V$ .

To samo dotyczy poniższych dwóch zdań:

- (H1) na  $V$  określone jest działanie  $\mathbb{H}$ , które czyni z  $V$  kwaternionową przestrzeń wektorową;  
 (H2) na  $V$  określone jest działanie  $\mathbb{R}$ , które czyni z  $V$  przestrzeń wektorową nad  $\mathbb{R}$ , przy czym istnieje trójka endomorfizmów  $I, J, K \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  o własnościach

$$(1.2.38) \quad I \circ I = J \circ J = K \circ K = -\text{id}_V, \quad I \circ J = K,$$

zwanych **strukturą kwaternionową** na  $V$ , które przesądzają o tym, że endomorfizmy  $I, J, K$  spełniają algebrę (2.1.3).

■

Dowód: Przeprowadzimy dowód równoważności orzeczeń dotyczących struktury  $\mathbb{C}$ -liniowej. Dowód równoważności orzeczeń dotyczących struktury  $\mathbb{H}$ -liniowej jest w pełni analogiczny i stanowi elementarne ćwiczenie, które pozostawiamy do wykonania Czytelnikowi.

- (C1) $\Rightarrow$ (C2) Działanie  $\ell : \mathbb{C} \times V \longrightarrow V$  indukuje działanie  $\ell^{\mathbb{R}} := \ell_{j_{\mathbb{R}(\cdot)}} : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ , a nadto wyróżnia endomorfizm  $I := \ell_{(0,1)} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  o pożądanej własności. Istotnie,

$$\forall_{(r,v) \in \mathbb{R} \times V} : I \circ \ell_r^{\mathbb{R}}(v) \equiv \ell_{(0,1)} \circ \ell_{(r,0)}(v) = \ell_{(0,r)}(v) = \ell_{(r,0)} \circ \ell_{(0,1)}(v) \equiv \ell_r^{\mathbb{R}} \circ I(v),$$

$$I \circ I \equiv \ell_{(0,1)} \circ \ell_{(0,1)} = \ell_{(0,1)^2} = \ell_{-(1,0)} = -\text{id}_V.$$

- (C1) $\Leftarrow$ (C2) Działanie  $\ell : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$  wraz z wyróżnionym endomorfizmem  $I \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  o własności (1.2.37) pozwalają zdefiniować odwzorowanie

$$\ell^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times V \longrightarrow V : ((x, y), v) \mapsto \ell_x(v) +_V I \circ \ell_y(v),$$

którego rozdzielność względem  $+_V$  i  $+_{\mathbb{C}}$  jest oczywista i które ponadto spełnia – dla dowolnych  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), v) \in \mathbb{C}^{\times 2} \times V$  – warunek

$$\begin{aligned} \ell_{(x_1, y_1) \circ_{\mathbb{C}} (x_2, y_2)}^{\mathbb{C}}(v) &= \ell_{(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)}^{\mathbb{C}}(v) = \ell_{x_1 x_2 - y_1 y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_1 y_2 + x_2 y_1}(v) \\ &= \ell_{x_1 x_2}(v) +_V P_V \circ \ell_{y_1 y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_1 y_2}(v) +_V I \circ \ell_{x_2 y_1}(v) \\ &= \ell_{x_1} \circ \ell_{x_2}(v) +_V (I \circ \ell_{y_1}) \circ (I \circ \ell_{y_2})(v) +_V \ell_{x_1} \circ (I \circ \ell_{y_2})(v) \\ &\quad +_V (I \circ \ell_{y_1}) \circ \ell_{x_2}(v) \equiv \ell_{(x_1, y_1)}^{\mathbb{C}} \circ \ell_{(x_2, y_2)}^{\mathbb{C}}(v). \end{aligned}$$

□

Powyższa alternatywa okazuje się być przydatną m.in. w dyskusji uprzywilejowanej (w istocie wyjątkowej) pozycji, jaką pośród hilbertowskich realizacji algebr zdań (logicznych) reprezentujących – w duchu teorii Pirona – wyniki doświadczeń elementarnych zajmują zespolone przestrzenie wektorowe. Znajdziemy dla niej także nieco bardziej elementarne zastosowanie w kontekście teorii reprezentacji algebr Clifforda.

W konkretnych sytuacjach (w szczególności w kontekście teorii reprezentacji algebr własnie) wygodną bywa logika odmienna, w której punktem wyjścia do dalszych rozważań algebraicznych jest istnienie struktury zespolonej, a przedmiotem poszukiwań staje się struktura rzeczywista wzgl. kwaternionowa.

DEFINICJA 46. Przyjmijmy zapis Def. 15 i niechaj  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V)$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{C}$ . Odwzorowanie  $\varepsilon : V \curvearrowright$  określamy mianem **struktury rzeczywistej**, jeśli spełnione są następujące warunki:

(SR1)  $\varepsilon$  jest **odwzorowaniem anty- $\mathbb{C}$ -liniowym**, tj.

$$\forall (\lambda, v) \in \mathbb{C} \times V : \varepsilon(\lambda \triangleright v) = \bar{\lambda} \triangleright \varepsilon(v);$$

(SR2)  $\varepsilon^2 = \text{id}_V$ .

Podobnie, odwzorowanie  $J : V \curvearrowright$  określamy mianem **struktury kwaternionowej**, jeśli spełnione są następujące warunki:

(SK1)  $J$  jest odwzorowaniem anty- $\mathbb{C}$ -liniowym;

(SK2)  $J^2 = -\text{id}_V$ .

▲

Formalne podobieństwo obu par warunków maskuje istotną różnicę ich znaczeń, o ile bowiem pierwszy układ w istocie określa operację sprzężenia zespolonego i pozwala wyodrębnić podprzestrzeń, której kompleksyfikacja odtwarza  $V$ , o tyle drugi układ pozwala określić działanie pierścienia  $\mathbb{H}$ . Obserwację tę precyzuje

STWIERDZENIE 56. *Przyjmijmy zapis Def. 45 oraz 46 i niechaj  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V)$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{C}$ . Poniższe dwa zdania są wzajem równoważne:*

(R1) *na  $V$  jest określona struktura rzeczywista  $\varepsilon$ ;*

(R2) *w  $V$  istnieje podprzestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa  $V_+$  (będąca podzbiorem względem struktury  $\mathbb{C}$ -liniowej) o własnościach*

$$V = V_+ +_V (0, 1) \triangleright V_+ \quad \wedge \quad V_+ \cap (0, 1) \triangleright V_+ = \{0_V\},$$

*z których wynika istnienie kanonicznego izomorfizmu przestrzeni  $\mathbb{C}$ -liniowych*

$$V_+^{\mathbb{C}} \cong V.$$

*To samo dotyczy poniższych dwóch zdań:*

(K1) *na  $V$  jest określona struktura kwaternionowa  $J$ ;*

(K2) *na  $V$  określone jest działanie  $\mathbb{H}$ , które czyni z  $V$  kwaternionową przestrzeń wektorową.*

■

Dowód:

(R1) $\Rightarrow$ (R2) Niechaj  $\varepsilon$  będzie strukturą rzeczywistą na  $V$ , a wtedy  $\text{Sp}(\varepsilon) \subset \{-1, 1\}$ . Zdefiniujmy odwzorowania

$$P_{\pm} := \frac{1}{2} \triangleright (\text{id}_V \pm \varepsilon)$$

i oznaczmy symbolem  $V_{\pm}$  zbiór wszystkich wektorów własnych  $\varepsilon$  odpowiadających wartości własnej  $\pm 1$ . Oba zbiory są niepuste, oto bowiem dla dowolnego wektora  $v \in V$  zachodzi  $v_{\pm} := P_{\pm}(v) \in V_{\pm}$ . Ponadto każdy wektor  $v \in V$  możemy zapisać w postaci  $v \equiv P_+(v) +_V P_-(v)$ , zatem  $V = V_+ +_V V_-$ , przy czym – rzecz jasna –  $v = \varepsilon(v) = -v$  jest równoznaczne z  $v = 0_V$ , więc  $V_+ \cap V_- = \{0_V\}$ . Anty- $\mathbb{C}$ -liniowość  $\varepsilon$  prowadzi do tożsamości  $\varepsilon((0, 1) \triangleright v) = \overline{(0, 1)} \triangleright \varepsilon(v) = -(0, 1) \triangleright \varepsilon(v)$ , która implikuje relacje  $(0, 1) \triangleright V_+ \subset V_-$  oraz  $(0, 1) \triangleright V_- \subset V_+$ , z tych zaś wynika tożsamość zbiorów  $V_- = (0, 1) \triangleright V_+$ . Mamy też oczywistą inkluzję  $\forall r \in \mathbb{R} : r \triangleright V_{\pm} \subset V_{\pm}$ . Możemy teraz wypisać izomorfizm

$$\iota : V_+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} V$$

w jawnej i jawnie  $\mathbb{C}$ -liniowej postaci (na tensorach prostych):

$$\iota(v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (x, y)) := (x, y) \triangleright v_+.$$

Jego odwrotnością jest odwzorowanie

$$\iota^{-1} : V \xrightarrow{\cong} V_+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : v \longmapsto P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) +_V (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1).$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} \iota^{-1} \circ \iota(v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (x, y)) &= \frac{1}{2} \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (x, -y) \triangleright \varepsilon(v_+)) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V \frac{1}{2} (0, -1) \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (-x, y) \triangleright \varepsilon(v_+)) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= \frac{1}{2} \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (x, -y) \triangleright v_+) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V \frac{1}{2} (0, -1) \triangleright ((x, y) \triangleright v_+ +_V (-x, y) \triangleright v_+) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= (x, 0) \triangleright v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) +_V (y, 0) \triangleright v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) = v_+ \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) \end{aligned}$$

oraz

$$\iota \circ \iota^{-1}(v) = (1, 0) \triangleright P_+(v) +_V (0, 1) \triangleright ((0, -1) \triangleright P_-(v)) = (P_+ + P_-)(v) = v.$$

Bez trudu przekonujemy się także o  $\mathbb{C}$ -liniowości  $\iota^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \iota^{-1}((x, y) \triangleright v) &= \frac{1}{2} \triangleright ((x, y) \triangleright v +_V (x, -y) \triangleright \varepsilon(v)) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V \frac{1}{2} (0, -1) \triangleright ((x, y) \triangleright v +_V (-x, y) \triangleright \varepsilon(v)) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= (x, 0) \triangleright P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) +_V (-y, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ &\quad +_V (x, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) +_V (y, 0) \triangleright P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) +_V (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (-y, x) \\ &= P_+(v) \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) \cdot_{\mathbb{C}} (1, 0) +_V (0, -1) \triangleright P_-(v) \otimes_{\mathbb{R}} (x, y) \cdot_{\mathbb{C}} (0, 1) \end{aligned}$$

$$\equiv (x, y) \triangleright \iota^{-1}(v).$$

□

### 3. Produkt włóknisty i koprodukt kowłóknisty

Wybór omówionych dotychczas struktur uniwersalnych był podyktowany wolą oswojenia konstrukcji uniwersalnej w odwołaniu do pojęć dobrze znanych z podstawowego kursu algebry liniowej. Te dość szczególne struktury odgrywają, rzecz jasna, nader istotną rolę w (lokalnym) modelowaniu zjawisk, lecz ich analiza – w nawiązaniu do znanych konstrukcji geometrycznych najprostszych modeli fizycznych – stanowi ledwie pierwszą poszlakę wskazującą na powszechność i przydatność struktur uniwersalnych w matematycznym modelowaniu zjawisk. W dalszej części kursu poznamy zarówno te spośród nich (jak np. algebry Clifforda), które korzystają z dodatkowej, umotywowanej fizycznie i stosownie okiełznanej na kursie algebry liniowej, struktury w wyjściowej kategorii  $\mathcal{C}_1$  (w notacji Def. 29), wzgl. odwołują się wprost (jak np. algebra tensorowa) do konstrukcji uniwersalnych przedstawionych w poprzednich rozdziałach, jak i – nieco później – te, których definicje są z jednej strony strukturalnie dużo surowsze, ale też – ze strony drugiej – ich fizycznie istotne inkarnacje są mniej oczywiste i stają się dostępne dopiero z pewnego wyższego poziomu wyrafinowania formalnego, nie tylko porządkując starą wiedzę, ale też otwierając drogę do twórczych uogólnień na nowe konteksty poznawcze (jak np. kategoryfikacja symetrii oraz pozariemannowska geometria T-foldów). Tytułem przygotowania gruntu pod przyszłą dyskusję tych ostatnich poprzez stworzenie stosownego algebraicznego pola skojarzeniowego przedstawimy poniżej zwięźle kilka z nich. Zaczniemy od wprowadzenia pojęć pomocniczych

DEFINICJA 47. Przyjmijmy zapis Def. 27 oraz Przykł. 15 (5) i ustalmy (dowolnie) kategorię  $\mathcal{C}$ . **Powłoką w  $\mathcal{C}$**  nazywamy dowolny diagram  $\hat{F} : \{1, 2\} \rightarrow \mathcal{C}$  w  $\mathcal{C}$  modelowany na rozpięciu  $\{1, 2\}$  zbioru dwuelementowego  $\{1, 2\}$ , reprezentowany przez diagram (w sensie graficznym) postaci

$$\begin{array}{ccc} & \hat{F}(\bullet) & \\ \hat{F}(\bullet \rightarrow 1) \swarrow & & \searrow \hat{F}(\bullet \rightarrow 2) \\ \hat{F}(1) & & \hat{F}(2) \end{array} \quad \equiv \quad \text{sp}(\hat{F}(\bullet), (\hat{F}(\bullet \rightarrow 1), \hat{F}(\bullet \rightarrow 2))).$$

**Kopowłoką w  $\mathcal{C}$**  nazywamy dowolny diagram  $\check{F} : \{1, 2\} \rightarrow \mathcal{C}$  w  $\mathcal{C}$  modelowany na korozpięciu zbioru dwuelementowego  $\{1, 2\}$ , reprezentowany przez diagram (w sensie graficznym) postaci

$$\begin{array}{ccc} \check{F}(1) & & \check{F}(2) \\ \check{F}(1 \rightarrow \bullet) \searrow & & \swarrow \check{F}(2 \rightarrow \bullet) \\ & \check{F}(\bullet) & \end{array} \quad \equiv \quad \text{cosp}((\check{F}(1 \rightarrow \bullet), \check{F}(2 \rightarrow \bullet)), \check{F}(\bullet)).$$

Z dowolną powłoką  $\hat{F}$  w  $\mathcal{C}$  stwarzamy podkategorię  $\text{Toit}(\hat{F}) \subset \mathcal{C}^{\{1, 2\}}$  w kategorii diagramów w  $\mathcal{C}$  modelowanych na korozpięciu  $\{1, 2\}$  zbioru  $\{1, 2\}$

utworzoną przez kopowłoki  $\check{R} : \{1, 2\} \rightarrow \mathcal{C}$  postaci

$$\begin{array}{ccc} \check{R}(1) \equiv \hat{F}(1) & & \check{R}(2) \equiv \hat{F}(2) \\ & \searrow \check{R}(1 \rightarrow \bullet) \quad \swarrow \check{R}(2 \rightarrow \bullet) & \\ & \check{R}(\bullet) & \end{array},$$

które uzupełniają  $\hat{F}$  do diagramów przemiennych

$$\begin{array}{ccc} & \hat{F}(\bullet) & \\ \hat{F}(\bullet \rightarrow 1) \swarrow & & \searrow \hat{F}(\bullet \rightarrow 2) \\ \check{R}(1) \equiv \hat{F}(1) & & \check{R}(2) \equiv \hat{F}(2) \\ \check{R}(1 \rightarrow \bullet) \searrow & & \swarrow \check{R}(2 \rightarrow \bullet) \\ & \check{R}(\bullet) & \end{array}$$

$$\equiv \text{cosp}((\check{R}(1 \rightarrow \bullet), \check{R}(2 \rightarrow \bullet)), \check{R}(\bullet)) \circ_{(\hat{F}(1), \hat{F}(2))} \text{sp}(\hat{F}(\bullet), (\hat{F}(\bullet \rightarrow 1), \hat{F}(\bullet \rightarrow 2))),$$

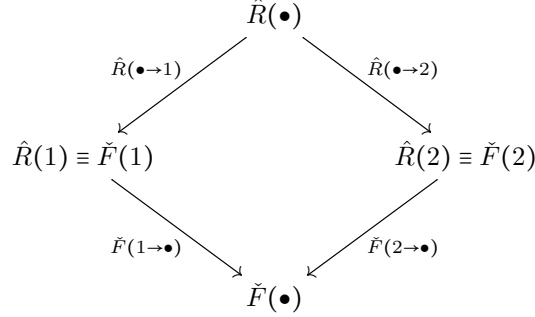
wraz z transformacjami naturalnymi  $\check{\eta} : \check{R}_1 \Longrightarrow \check{R}_2$  między nimi o własności  $\check{\eta}_\alpha = \text{id}_{\hat{F}(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , naturalnie utożsamialnymi z morfizmami  $\check{\eta}_\bullet$  w  $\mathcal{C}$ , które czynią przemiennymi poniższe diagramy

$$\begin{array}{ccc} & \check{R}_1(\bullet) & \\ \check{R}_1(1 \rightarrow \bullet) \swarrow & & \swarrow \check{R}_1(2 \rightarrow \bullet) \\ \hat{F}(1) & & \hat{F}(2) \\ \check{R}_2(1 \rightarrow \bullet) \searrow & \check{\eta}_\bullet & \swarrow \check{R}_2(2 \rightarrow \bullet) \\ & \check{R}_2(\bullet) & \end{array}.$$

Analogicznie, z dowolną kopowłoką  $\check{F}$  w  $\mathcal{C}$  stowarzyszymy podkategorię  $\text{Plaf}(\check{F}) \subset \mathcal{C}^{\{1, 2\}}$  w kategorii diagramów w  $\mathcal{C}$  modelowanych na rozpięciu  $\{1, 2\}$  zbioru  $\{1, 2\}$  utworzoną przez powłoki  $\hat{R} : \{1, 2\} \rightarrow \mathcal{C}$  postaci

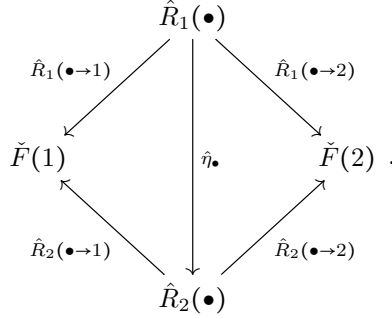
$$\begin{array}{ccc} & \hat{R}(\bullet) & \\ \hat{R}(\bullet \rightarrow 1) \swarrow & & \searrow \hat{R}(\bullet \rightarrow 2) \\ \hat{R}(1) = \check{F}(1) & & \hat{R}(2) = \check{F}(2) \end{array},$$

które uzupełniają  $\hat{F}$  do diagramów przemiennych



$$\equiv \text{cosp}((\check{F}(1 \rightarrow \bullet), \check{F}(2 \rightarrow \bullet)), \check{F}(\bullet)) \circ_{(\check{F}(1), \check{F}(2))} \text{sp}(\hat{R}(\bullet), (\hat{R}(\bullet \rightarrow 1), \hat{R}(\bullet \rightarrow 2))),$$

wraz z transformacjami naturalnymi  $\hat{\eta}_\bullet : \hat{R}_1 \implies \hat{R}_2$  między nimi o własności  $\hat{\eta}_\alpha = \text{id}_{\check{F}(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , naturalnie utożsamialnymi z morfizmami  $\hat{\eta}_\bullet$  w  $\mathcal{C}$ , które czynią przemiennymi poniższe diagramy



▲

Możemy już teraz sformułować

**DEFINICJA 48.** Przyjmijmy zapis Def. 29 i 47. **Produkt włóknisty obiektów**  $(X_1, X_2) \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times 2}$  **nad obiektem**  $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$  to struktura terminalna

$$(X_1 \times_Y X_2, (\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2)), \quad \widehat{\xi}_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \times_Y X_2, X_\alpha), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

dla warunku

$$\begin{aligned}
 & P_{(X_1, X_2); \text{id}_{\mathcal{C}^{\times 2}}, \Delta_{\mathcal{C}, \{1, 2\}}}(Z, (\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2)) \\
 &= \text{„powłoka } \text{sp}(Z, (\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2)) \text{ domyka kopowłokę } \text{cosp}((\check{v}_1, \check{v}_2), Y) \\
 & \text{do diagramu przemiennego } \text{cosp}((\check{v}_1, \check{v}_2), Y) \circ_{(X_1, X_2)} \text{sp}(Z, (\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2))\text{”}
 \end{aligned}$$

na  $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$ . Innymi słowy, produkt włóknisty jest obiektem terminalnym w kategorii  $\text{Plaf}(\check{F}) \subset \mathcal{C}^{\{1, 2\}}$  dla kopowłoki  $\check{F} : \{1, 2\} \longrightarrow \mathcal{C}$  spełniającej warunki  $\check{F}(\alpha) = X_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Kategorię, w której istnieją produkty włókniste obiektów, określamy mianem **kategorii z produktami włóknistymi**.

**Koproduct kowłóknisty obiektów**  $(X_1, X_2) \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times 2}$  **względem obiektu**  $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$  to struktura inicjalna

$$(X_1 \sqcup_Y X_2, (\check{\xi}_1, \check{\xi}_2)), \quad \check{\xi}_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\alpha, X_1 \sqcup_Y X_2), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

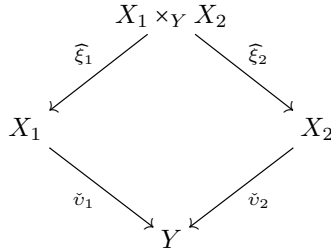


dla warunku

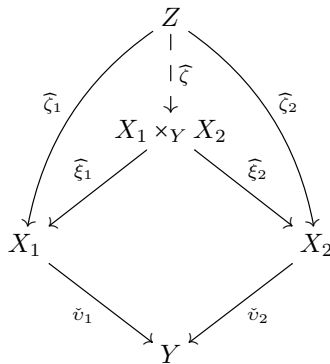
$$\begin{aligned}
& P_{(X_1, X_2); \text{id}_{\mathcal{C}^{\times 2}}, \Delta_{\mathcal{C}, \{1, 2\}}}(Z, (\check{\zeta}_1, \check{\zeta}_2)) \\
&= \text{„kopowłoka } \text{cosp}((\check{\zeta}_1, \check{\zeta}_2), Z) \text{ domyka powłokę } \text{sp}(Y, (\check{v}_1, \check{v}_2)) \\
&\quad \text{do diagramu przemiennego } \text{cosp}((\check{\zeta}_1, \check{\zeta}_2), Z) \circ_{(X_1, X_2)} \text{sp}(Y, (\check{v}_1, \check{v}_2))\text{”}
\end{aligned}$$

na  $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$ . Innymi słowy, koprodukt kowłóknisty jest obiektem inicjalnym w kategorii  $\text{Toit}(\hat{F}) \subset \mathcal{C}^{\{1, 2\}}$  dla kopowłoki  $\hat{F} : \{1, 2\} \rightarrow \mathcal{C}$  spełniającej warunki  $\hat{F}(\alpha) = X_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Kategorię, w której istnieją koprodukty kowłókniste obiektów, określamy mianem **kategorii z koproduktami kowłóknistymi**. ▲

UWAGA 8. Rozłożymy powyższą definicję na czynniki pierwsze. Oto więc produkt włóknisty  $(X_1, X_2) \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times 2}$  nad  $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$  to w istocie trójka  $(X_1 \times_Y X_2, (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2))$  złożona z obiektu  $X_1 \times_Y X_2 \in \text{Obj } \mathcal{C}$  oraz pary morfizmów  $\hat{\xi}_\alpha : X_1 \times_Y X_2 \rightarrow X_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  w  $\mathcal{C}$  o własności wyrażonej przez diagram przemienny

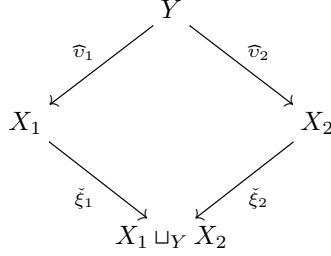


i taka, że dla każdej innej trójki  $(Z, (\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2))$  tego typu istnieje dokładnie jeden morfizm  $\hat{\zeta} : Z \rightarrow X_1 \times_Y X_2$ , który czyni poniższy diagram przemiennym:

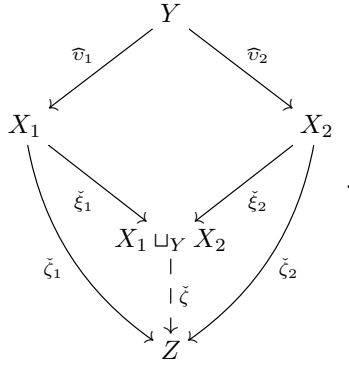


Analogicznie, koprodukt kowłóknisty  $(X_1, X_2) \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times 2}$  względem  $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$  to trójka  $(X_1 \sqcup_Y X_2, (\check{\xi}_1, \check{\xi}_2))$  złożona z obiektu  $X_1 \sqcup_Y X_2 \in \text{Obj } \mathcal{C}$  oraz pary morfizmów  $\check{\xi}_\alpha : X_\alpha \rightarrow X_1 \sqcup_Y X_2$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  w  $\mathcal{C}$  o własności wyrażonej przez

diagram przemienny



i taka, że dla każdej innej trójki  $(Z, (\check{\zeta}_1, \check{\zeta}_2))$  tego typu istnieje dokładnie jeden morfizm  $\check{\zeta} : X_1 \sqcup_Y X_2 \rightarrow Z$ , który czyni poniższy diagram przemiennym:



$\overline{\wedge}$

Naturalnym uogólnieniem przedstawionych konstrukcji jest

DEFINICJA 49. Przyjmijmy zapis Def. 47 oraz 29 i ustalmy (dowolnie)  $N \in \mathbb{N}^*$ .  $N$ -lokatny produkt włóknisty obiektów  $(X_1, X_2, \dots, X_N) \equiv X_{(N)} \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times N}$  nad obiektem  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}) \equiv Y_{(N-1)} \in \text{Obj } \mathcal{C}^{\times N-1}$  to kolekcja

$$(X_{12\dots N}^{\times}, \widehat{\xi}_{(N)}) \equiv (X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} \cdots \times_{Y_{N-1}} X_N, (\widehat{\xi}_1, \widehat{\xi}_2, \dots, \widehat{\xi}_N)) \in \text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Hom } \mathcal{C}^{\times N},$$

$$\widehat{\xi}_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{12\dots N}^{\times}, X_i), \quad i \in \overline{1, N},$$

którą tworzą struktury terminalne

$$(X_{12\dots N}^{\times}, (\widehat{\xi}_j, \widehat{\xi}_{j+1})), \quad j \in \overline{1, N-1}$$

dla warunków

$$P_{X_{(N)}; \text{id}_{\mathcal{C}^{\times 2}}, \Delta_{\mathcal{C}, \{j, j+1\}}}(Z, (\widehat{\zeta}_j, \widehat{\zeta}_{j+1}))$$

$$= \text{„powłoka } \text{sp}(Z, (\widehat{\zeta}_j, \widehat{\zeta}_{j+1})) \text{ domyka kopowłokę } \text{cosp}((\widehat{v}_{j,2}, \widehat{v}_{j+1,1}), Y_j) \text{ do diagramu przemiennego } \text{cosp}((\widehat{v}_{j,2}, \widehat{v}_{j+1,1}), Y_j) \circ_{X_{(N)}} \text{sp}(Z, (\widehat{\zeta}_j, \widehat{\zeta}_{j+1}))\text{”}$$

na  $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$ .

$N$ -krotny koprodukt kowłóknisty obiektów  $X_{(N)}$  względem obiektu  $Y_{(N-1)}$  to kolekcja

$$(X_{12\dots N}^{\sqcup}, \check{\xi}_{(N)}) \equiv (X_1 \sqcup_{Y_1} X_2 \sqcup_{Y_2} \cdots \sqcup_{Y_{N-1}} X_N, (\check{\xi}_1, \check{\xi}_2, \dots, \check{\xi}_N)) \in \text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Hom } \mathcal{C}^{\times N},$$

$$\check{\xi}_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_{12\dots N}^{\sqcup}), \quad i \in \overline{1, N},$$

którą tworzą struktury inicjalne

$$(X_{12\dots N}^{\sqcup}, (\check{\xi}_j, \check{\xi}_{j+1})), \quad j \in \overline{1, N-1}$$

dla warunków

$$\begin{aligned} & P_{X_{12\dots N}^{\sqcup}; \text{id}_{\mathcal{C} \times 2}, \Delta_{\mathcal{C}, \{j, j+1\}}}(Z, (\check{\zeta}_j, \check{\zeta}_{j+1})) \\ &= \text{„kopowłoka } \text{cosp}((\check{\zeta}_j, \check{\zeta}_{j+1}), Z) \text{ domyka powłokę } \text{sp}(Y_j, (\widehat{v}_{j,2}, \widehat{v}_{j+1,1})) \\ & \text{ do diagramu przemienneo } \text{cosp}((\check{\zeta}_j, \check{\zeta}_{j+1}), Z) \circ_{X_{12\dots N}^{\sqcup}} \text{sp}(Y_j, (\widehat{v}_{j,2}, \widehat{v}_{j+1,1})) \text{”} \end{aligned}$$

na  $\text{Obj } \mathcal{C} \times \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$ .

▲

Na pierwszy rzut oka zdefiniowane powyżej struktury wyglądają onieśmielająco i ezoterycznie. Ażeby rozproszyć to powierzchowne wrażenie, jeszcze zanim przejdziemy do ich wykorzystania w kontekście dalszych naszych rozważań, zilustrujemy poniżej – trochę awansem względem logiki i zawartości merytorycznej wykładu – oba pojęcia na przykładach doskonale znanych, a przy tym pożytecznych konstrukcji teoriomnogościowych i geometrycznych, które pozwalają nam stwierdzić – w formie parafrazy eksklamacji Pana Jourdain’a z komedii Jana Chrzciciela Poquelin’a (zw. Molière’em) pt. „Le Bourgeois gentilhomme” –

*il y a plusieurs années que l'on dit de la prose sans que l'on en sut rien!*

A oto i

PRZYKŁAD(Y) 21.

(1) **Produkt włóknisty zbiorów**  $(X_1, X_2)$  **nad zbiorem**  $Y$  określony przez parę odwzorowań  $v_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ , czyli zbiór

$$X_1 \times_Y X_2 = \{ (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid v_1(x_1) = v_2(x_2) \} \cong X_{1v_1 \times v_2} X_2,$$

wraz z parą ograniczeń rzutów kanonicznych

$$\widehat{\zeta}_\alpha \equiv \text{pr}_\alpha \upharpoonright_{X_1 \times_Y X_2} : X_1 \times_Y X_2 \rightarrow X_\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

jest produktem włóknistym w kategorii **Set**. Istotnie, rozważmy dowolny zbiór  $Z$ , na którym są określone odwzorowania  $\widehat{\zeta}_\alpha : Z \rightarrow X_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o własności  $\check{v}_1 \circ \widehat{\zeta}_1 = \check{v}_2 \circ \widehat{\zeta}_2$ . Jako że  $(X_1 \times X_2, \text{pr.})$  jest produktem (czyli strukturą terminalną) w kategorii **Set**, przeto istnieje dokładnie jedno odwzorowanie  $\zeta : Z \rightarrow X_1 \times X_2$  o własności  $\text{pr}_\alpha \circ \zeta = \widehat{\zeta}_\alpha$ , a ponieważ ta ostatnia implikuje równość  $\check{v}_2 \circ \widehat{\zeta}_2 \circ \zeta \equiv \check{v}_2 \circ \text{pr}_2 \circ \zeta = \check{v}_2 \circ \widehat{\zeta}_2 = \check{v}_1 \circ \widehat{\zeta}_1 = \check{v}_1 \circ \text{pr}_1 \circ \zeta \equiv \check{v}_1 \circ \widehat{\zeta}_1 \circ \zeta$ , zatem  $\zeta(Z) \subset X_1 \times_Y X_2$ . W szczególności gdy  $X_2 \subset Y$  jest podzbiorem (kanonicznie) włożonym w  $Y$  przez odwzorowanie  $\check{v}_2$ , to  $\widehat{\zeta}_1$  jest bijekcją  $X_1 \times_Y X_2$  na poziomicy  $\check{v}_1^{-1}(X_1)$ , o odwrotności  $\widehat{\zeta}_1^{-1} : \check{v}_1^{-1}(X_1) \rightarrow X_1 \times_Y X_2 : x_1 \mapsto (x_1, \check{v}_1(x_1))$ . Jeśli także  $X_1 \subset Y$  jest podzbiorem (kanonicznie) włożonym w  $Y$  przez  $\check{v}_1$ , to otrzymujemy tym sposobem bijekcję  $X_1 \times_Y X_2 \cong X_1 \cap X_2$ . Konstrukcja produktu włóknistego zbiorów znajduje swoje uogólnienie i szerokie zastosowanie w geometrii, a w szczególności w teorii wiązek włóknistych oraz geometryzacji wyższych klas kohomologii (pod postacią tzw. cofnięcia struktury).

- (2) **Koprodukt kowłóknisty zbiorów**  $(X_1, X_2)$  **względem zbioru**  $Y$  określony przez parę odwzorowań  $\widehat{v}_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$ , czyli zbiór

$$X_1 \sqcup_Y X_2 = (X_1 \sqcup X_2) / \sim_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$$

klas abstrakcji w sumie rozłącznej  $X_1 \sqcup X_2$  względem **domknięcia równoważnościowego**  $\sim_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$  relacji

$$\mathcal{R}_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)} = \{ ((\widehat{v}_1(y), 1), (\widehat{v}_2(y), 2)) \in (X_1 \sqcup X_2)^{\times 2} \mid y \in Y \}$$

(czyli minimalnej relacji równoważności zawierającej  $\mathcal{R}_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$ ) wraz z parą odwzorowań

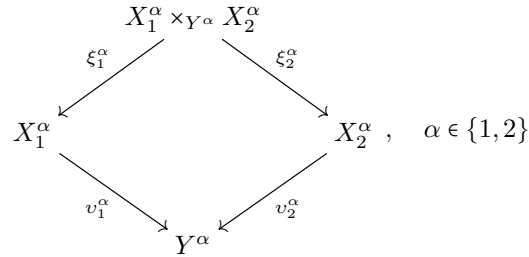
$$\check{\xi}_\alpha \equiv \pi_\sim \circ j_\alpha : X_\alpha \rightarrow X_1 \sqcup_Y X_2, \quad \alpha \in \{1, 2\},$$

będących złożeniami włożeń kanonicznych  $j_\alpha : X_\alpha \rightarrow X_1 \sqcup X_2$  z rzutem kanonicznym  $\pi_\sim : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow (X_1 \sqcup X_2) / \sim_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$ , jest koproduktem kowłóknistym w kategorii **Set**. W rzeczy samej, niech  $Z$  będzie dowolnym zbiorem, dla którego są określone odwzorowania  $\check{\zeta}_\alpha : X_\alpha \rightarrow Z$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o własności  $\check{\zeta}_1 \circ \widehat{v}_1 = \check{\zeta}_2 \circ \widehat{v}_2$ . Jako że  $(X_1 \sqcup X_2, j_\cdot)$  jest koproduktem (czyli strukturą inicjalną) w kategorii **Set**, przeto istnieje dokładnie jedno odwzorowanie  $\check{\zeta} : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow Z$  o własności  $\check{\zeta} \circ j_\alpha = \check{\zeta}_\alpha$ . Pozostaje upewnić się, że odwzorowanie to jest stałe na klasach abstrakcji relacji  $\sim_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$ . W tym celu przyjrzymy się bliżej procedurze domykania  $\mathcal{R}_{(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2)}$ . Pierwszym krokiem jest tutaj dodanie do każdej z par  $((\widehat{v}_1(y), 1), (\widehat{v}_2(y), 2))$  par  $((\widehat{v}_1(y), 1), (\widehat{v}_1(y), 1)), ((\widehat{v}_2(y), 2), (\widehat{v}_2(y), 2))$  oraz  $((\widehat{v}_2(y), 2), (\widehat{v}_1(y), 1))$  (uzwrotnienie i symetryzacja), przy czym oczywiście  $\check{\zeta}$  przyjmuje tę samą wartość na każdej z nich. Ilekroć oba odwzorowania  $\widehat{v}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  są iniektywne, to kończy dyskusję. Jeśli jednak któreś z nich – np.  $\widehat{v}_1$  – jest nieiniektywne i  $\widehat{v}_1(y') = \widehat{v}_1(y)$  dla  $y' \neq y$ , to wówczas musimy jeszcze dodać do powyższych pary  $((\widehat{v}_1(y') = \widehat{v}_1(y), 1), (\widehat{v}_2(y'), 2))$ ,  $((\widehat{v}_2(y'), 2), (\widehat{v}_2(y'), 2))$ ,  $((\widehat{v}_2(y), 2), (\widehat{v}_2(y'), 2))$  oraz  $((\widehat{v}_2(y'), 2), (\widehat{v}_2(y), 2))$ , aby zapewnić przechodność domknięcia. I w tym jednak przypadku stwierdzamy stałość  $\check{\zeta}$  na otrzymanych tym sposobem zbiorach, co ostatecznie doprowadza nas do przekonania, że  $\check{\zeta}$  określa jednoznacznie poszukiwane odwzorowanie  $\zeta$  o własności  $\check{\zeta} = \zeta \circ \pi_\sim$ . W szczególności, gdy  $Y = X_1 \cap X_2$  i  $\widehat{v}_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  są inkluzjami (włączeniami), to  $X_1 \sqcup_Y X_2 \cong X_1 \sqcup X_2$  (kanonicznie). Powyższa konstrukcja koproduktu kowłóknistego w przypadku iniektywnych odwzorowań  $\widehat{v}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  zstępuje do kategorii **Top** przestrzeni topologicznych z Def. 55 (zakładamy wtedy dodatkowo, że wszystkie rozważane odwzorowania są ciągłe, przy czym topologia na produkcie jest topologią ilorazową indukowaną przez topologię sumy rozłącznej na  $X_1 \sqcup X_2$  wzdłuż rzutu  $\pi_\sim$  – patrz: Przykł. 24 (4)), a nawet do kategorii **TopMan** rozmaitości topologicznych z Def. 65 jako tzw. **suma spójna** (zwana też **sklejeniem**) wzdłuż  $Y$ . Odgrywa ona fundamentalną rolę w funktorialnym schemacie kwantowania geometrii zwanym topologiczną kwantową teorią pola, a szerzej – w topologii różniczkowej i teorii homologii.

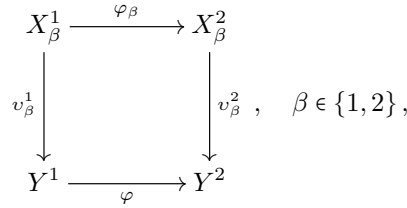
✓

Przedstawione tu operacje na obiektach kategorii są w naturalny sposób dziedziczone przez klasy morfizmów tejże kategorii, o czym zaświadczaają poniższe dwa stwierdzenia:

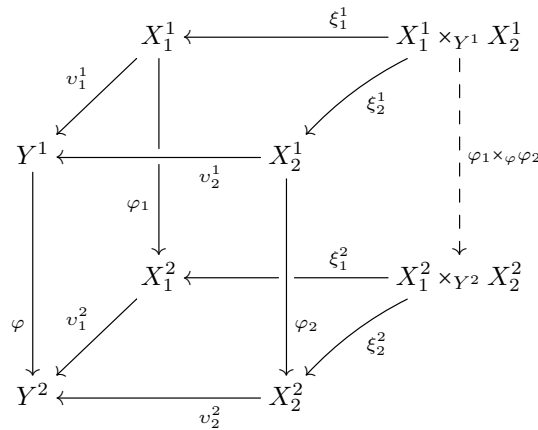
STWIERDZENIE 57. *Przyjmijmy zapis Def. 48 i niechaj*



będą dwoma produktami włóknistymi w  $\mathcal{C}$  nad odnośnymi obiektami  $Y^\alpha$ . Jeżeli istnieją morfizmy  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^1, Y^2)$  oraz  $\varphi_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\beta^1, X_\beta^2)$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  spełniające warunki wyrażone przez diagramy przemienne



to wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm  $\varphi_1 \times_\varphi \varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1^1 \times_{Y^1} X_2^1, X_1^2 \times_{Y^2} X_2^2)$ , który czyni poniższy diagram przemiennym



Morfizm ten określamy mianem **produktu włóknistego morfizmów**  $(\varphi_1, \varphi_2) \in \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$  **nad morfizmem**  $\varphi$ .

Jeśli ponadto dany jest trzeci produkt włóknisty

$$\begin{array}{ccc}
 & X_1^3 \times_{Y^3} X_2^3 & \\
 \xi_1^3 \swarrow & & \searrow \xi_2^3 \\
 X_1^3 & & X_2^3 \\
 v_1^3 \searrow & & \swarrow v_2^3 \\
 & Y^3 &
 \end{array}$$

oraz morfizmy  $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^2, Y^3)$  oraz  $\tilde{\varphi}_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\beta^2, X_\beta^3)$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  spełniające warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc}
 X_\beta^2 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\beta} & X_\beta^3 \\
 v_\beta^2 \downarrow & & \downarrow v_\beta^3 \\
 Y^2 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Y^3
 \end{array}, \quad \beta \in \{1, 2\},$$

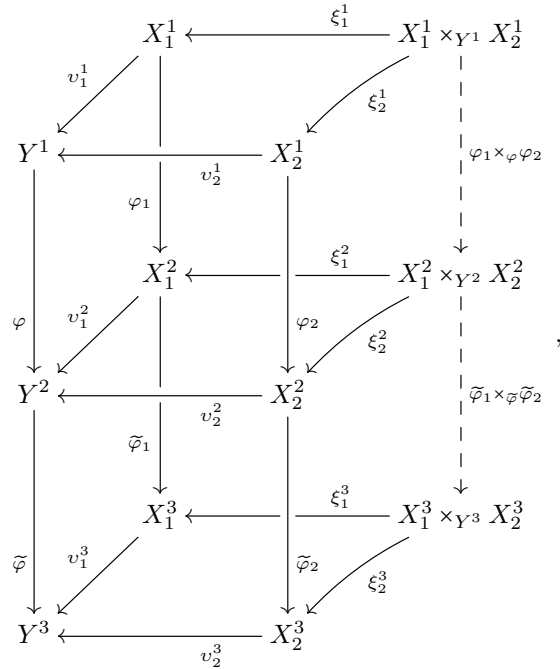
to dla zdefiniowanego przez nie produktu włóknistego morfizmów  $\tilde{\varphi}_1 \times_{\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi}_2$  oraz dla  $\varphi_1 \times_{\varphi} \varphi_2$  zachodzi tożsamość

$$(\tilde{\varphi}_1 \times_{\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi}_2) \circ (\varphi_1 \times_{\varphi} \varphi_2) = (\tilde{\varphi}_1 \circ \varphi_1) \times_{\tilde{\varphi} \circ \varphi} (\tilde{\varphi}_2 \circ \varphi_2).$$

■

*Dowód:* Teza jest prostą konsekwencją terminalnej natury produktu włóknistego  $(\tilde{X}_1 \times_Y \tilde{X}_2, (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2))$ , oto bowiem powłoka  $\text{sp}(X_1 \times_Y X_2, (\varphi_1 \circ \xi_1, \varphi_2 \circ \xi_2))$  domyka kopułokę  $\text{cosp}((\tilde{v}_1, \tilde{v}_2), Y)$  do diagramu przemienne wprost na mocy konstrukcji.

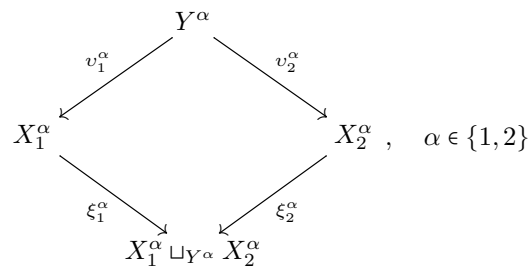
Aby przekonać się o słuszności reguły superpozycji produktów morfizmów, wystarczy złożyć odnośne sześciennie diagramy przemienne w jeden:



a następnie zauważyć, że superpozycja morfizmów zaznaczonych na nim strzałkami o przerywanych promieniach spełnia warunki definiujące morfizm  $(\tilde{\varphi}_1 \circ \varphi_1) \times_{\tilde{\varphi} \circ \varphi} (\tilde{\varphi}_2 \circ \varphi_2)$ , co wobec jedyności tego ostatniego przesądza o prawdziwości reguły superpozycji.  $\square$

oraz dualne w swej treści

STWIERDZENIE 58. *Przyjmijmy zapis Def. 48 i niechaj*



będą dwoma koproduktami kowłóknistymi w  $\mathcal{C}$  względem odnośnych obiektów  $Y^\alpha$ . Jeżeli istnieją morfizmy  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^1, Y^2)$  oraz  $\varphi_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\beta^1, X_\beta^2)$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$

spełniające warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc}
 Y^1 & \xrightarrow{\varphi} & Y^2 \\
 v_\beta^1 \downarrow & & \downarrow v_\beta^2, \quad \beta \in \{1, 2\}, \\
 X_\beta^1 & \xrightarrow{\varphi_\beta} & X_\beta^2
 \end{array}$$

to wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm  $\varphi_1 \sqcup_\varphi \varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1^1 \sqcup_{Y^1} X_2^1, X_1^2 \sqcup_{Y^2} X_2^2)$ , który czyni poniższy diagram przemianym

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1^1 & \xrightarrow{\xi_1} & X_1^1 \sqcup_{Y^1} X_2^1 \\
 & v_1^1 \nearrow & \downarrow & \nearrow \xi_2^1 & \downarrow \varphi_1 \sqcup_\varphi \varphi_2 \\
 Y^1 & \xrightarrow{\varphi_1} & X_2^1 & & \\
 \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_2 & & \\
 Y^2 & \xrightarrow{v_2^2} & X_2^2 & & \\
 & v_1^2 \nearrow & \downarrow & \nearrow \xi_2^2 & \\
 & & X_1^2 & \xrightarrow{\xi_1^2} & X_1^2 \sqcup_{Y^2} X_2^2
 \end{array}$$

Morfizm ten określamy mianem **koproduktu kowłóknistego morfizmów**  $(\varphi_1, \varphi_2) \in \text{Mor } \mathcal{C}^{\times 2}$  **względem morfizmu**  $\varphi$ .

Jeśli ponadto dany jest trzeci koprodukt kowłóknisty

$$\begin{array}{ccc}
 & Y^3 & \\
 v_1^3 \swarrow & & \searrow v_2^3 \\
 X_1^3 & & X_2^3 \\
 \xi_1^3 \searrow & & \swarrow \xi_2^3 \\
 & X_1^3 \sqcup_{Y^3} X_2^3 &
 \end{array}$$

oraz morfizmy  $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^2, Y^3)$  oraz  $\tilde{\varphi}_\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\beta^2, X_\beta^3)$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  spełniające warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc}
 Y^2 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Y^3 \\
 v_\beta^2 \downarrow & & \downarrow v_\beta^3, \quad \beta \in \{1, 2\}, \\
 X_\beta^2 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\beta} & X_\beta^3
 \end{array}$$



to dla zdefiniowanego przez nie koproduktu kowłóknistego morfizmów  $\tilde{\varphi}_1 \sqcup_{\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi}_2$  oraz dla  $\varphi_1 \sqcup_{\varphi} \varphi_2$  zachodzi tożsamość

$$(\tilde{\varphi}_1 \sqcup_{\tilde{\varphi}} \tilde{\varphi}_2) \circ (\varphi_1 \sqcup_{\varphi} \varphi_2) = (\tilde{\varphi}_1 \circ \varphi_1) \sqcup_{\tilde{\varphi} \circ \varphi} (\tilde{\varphi}_2 \circ \varphi_2).$$

■

*Dowód:* Teza jest prostą konsekwencją inicjalnej natury produktu włóknistego  $(X_1 \sqcup_Y X_2, (\xi_1, \xi_2))$ , oto bowiem kopowłoka  $\text{cosp}((\tilde{\xi}_1 \circ \varphi_1, \tilde{\xi}_2 \circ \varphi_2), \tilde{X}_1 \sqcup_{\tilde{\varphi}} \tilde{X}_2)$  domyka powłokę  $\text{sp}(\tilde{Y}, (v_1, v_2))$  do diagramu przemiennego wprost na mocy konstrukcji. Dowód słuszności reguły superpozycji koproduktów morfizmów przebiega analogicznie jak w przypadku produktu. □

Na zakończenie naszej zwięzłej dyskusji struktur: produktu włóknistego i koproduktu włóknistego opiszemy kilka prostych ich własności, z których będziemy korzystać w przyszłości. Oto więc mamy

**TWIERDZENIE 1.2.12** (O przemienności (ko)produktu (ko)włóknistego).

Przyjmijmy zapis Def. 48. Ilekroć produkt włóknisty  $(X_1 \times_Y X_2, (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2))$  jest dobrze określony, jest on jednoznacznie izomorficzny z produktem włóknistym  $(X_2 \times_Y X_1, (\xi_2, \xi_1))$ , przy czym zapisujemy

$$\tau_{X_1, X_2}^{\times} : X_1 \times_{Y_1} X_2 \xrightarrow{\cong} X_2 \times_{Y_1} X_1.$$

Podobnie, ilekroć koprodukt kowłóknisty  $(X_1 \sqcup_Y X_2, (\check{\xi}_1, \check{\xi}_2))$  jest dobrze określony, jest on jednoznacznie izomorficzny z koproduktem kowłóknistym  $(X_2 \sqcup_Y X_1, (\xi_2, \xi_1))$ , przy czym zapisujemy

$$\tau_{X_1, X_2}^{\sqcup} : X_1 \sqcup_{Y_1} X_2 \xrightarrow{\cong} X_2 \sqcup_{Y_1} X_1.$$

■

*Dowód:* Oczywisty. □

**UWAGA 9.** Powyższe należy rozumieć jako stwierdzenie, że produkt włóknisty  $(X_1 \times_Y X_2, (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2))$  jest modelem produktu włóknistego  $(X_2 \times_Y X_1, (\xi_2, \xi_1))$ , a koprodukt kowłóknisty  $(X_1 \sqcup_Y X_2, (\check{\xi}_1, \check{\xi}_2))$  jest modelem koproduktu kowłóknistego  $(X_2 \sqcup_Y X_1, (\xi_2, \xi_1))$ .

⌋

Prawdziwe jest też

**TWIERDZENIE 1.2.13** (O łączności (ko)produktu (ko)włóknistego). Przyjmijmy zapis Def. 49. Ilekroć produkty włókniste:

$$(1.2.39) \quad (X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3, (\tilde{\xi}_1^{(123)}, \tilde{\xi}_2^{(123)}, \tilde{\xi}_3^{(123)}))$$

nad obiektem  $(Y_1, Y_2) \in \text{Obj} \mathcal{C}^{\times 2}$  (domykający kopowłoki  $\text{cosp}((\check{v}_{j,2}, \check{v}_{j+1,1}), Y_j)$ ,  $j \in \{1, 2\}$  do diagramów przemiennych) oraz  $(X_1 \times_{Y_1} X_2, (\tilde{\xi}_1^{(12)}, \tilde{\xi}_2^{(12)}))$  nad  $Y_1$  (domykający kopowłokę  $\text{cosp}((\check{v}_{1,2}, \check{v}_{2,1}), Y_1)$ ), wzgl.  $(X_2 \times_{Y_2} X_3, (\tilde{\xi}_1^{(23)}, \tilde{\xi}_2^{(23)}))$  nad  $Y_2$  (domykający kopowłokę  $\text{cosp}((\check{v}_{2,2}, \check{v}_{3,1}), Y_2)$ ) są dobrze określone, (1.2.39) jest jednoznacznie izomorficzny z produktem włóknistym

$$((X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3, \tilde{\xi}_1^{(12,3)}, \tilde{\xi}_2^{(12,3)})$$

nad  $Y_2$  (domykającym kopowłokę  $\text{cosp}((\check{v}_{2,2} \circ \check{\xi}_2^{(12)}, \check{v}_{3,1}), Y_2)$ ) wzgl. z produktem włóknistym

$$(X_1 \times_{Y_1} (X_2 \times_{Y_2} X_3), \check{\xi}_1^{(1,23)}, \check{\xi}_2^{(1,23)})$$

nad  $Y_1$  (domykającym kopowłokę  $\text{cosp}((\check{v}_{1,2}, \check{v}_{2,1} \circ \check{\xi}_1^{(23)}), Y_1)$ ).

Podobnie, ilekroć koprodukty kowłókniste:

$$(1.2.40) \quad (X_1 \sqcup_{Y_1} X_2 \sqcup_{Y_2} X_3, (\check{\xi}_1^{(123)}, \check{\xi}_2^{(123)}, \check{\xi}_3^{(123)}))$$

względem  $(Y_1, Y_2)$  (domykający powłoki  $\text{sp}(Y_j, (\widehat{v}_{j,2}, \widehat{v}_{j+1,1}))$ ,  $j \in \{1, 2\}$ ) oraz  $(X_1 \sqcup_{Y_1} X_2, (\check{\xi}_1^{(12)}, \check{\xi}_2^{(12)}))$  względem  $Y_1$  (domykający powłokę  $\text{sp}(Y_1, (\widehat{v}_{1,2}, \widehat{v}_{2,1}))$ ), wzgl.  $(X_2 \sqcup_{Y_2} X_3, (\check{\xi}_1^{(23)}, \check{\xi}_2^{(23)}))$  względem  $Y_2$  (domykający powłokę  $\text{sp}(Y_2, (\widehat{v}_{2,2}, \widehat{v}_{3,1}))$ ) są dobrze określone, (1.2.40) jest jednoznacznie izomorficzny z koproduktem kowłóknistym

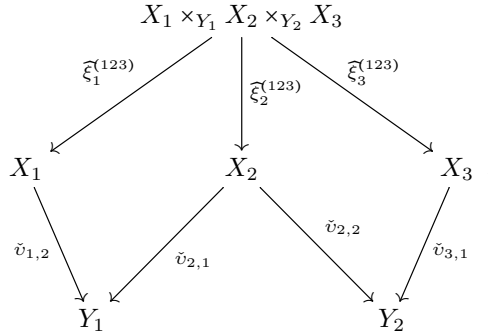
$$((X_1 \sqcup_{Y_1} X_2) \sqcup_{Y_2} X_3, \check{\xi}_1^{(12,3)}, \check{\xi}_2^{(12,3)})$$

względem  $Y_2$  (domykającym powłokę  $\text{sp}((\check{\xi}_2^{(12)} \circ \widehat{v}_{2,2}, \widehat{v}_{3,1}), Y_2)$ ) wzgl. z koproduktem kowłóknistym

$$(X_1 \sqcup_{Y_1} (X_2 \sqcup_{Y_2} X_3), \check{\xi}_1^{(1,23)}, \check{\xi}_2^{(1,23)})$$

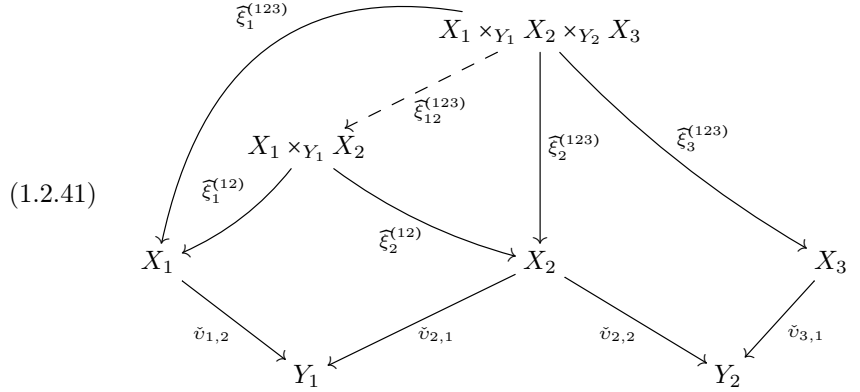
względem  $Y_1$  (domykającym powłokę  $\text{sp}((\widehat{v}_{1,2}, \check{\xi}_1^{(23)} \circ \widehat{v}_{2,1}), Y_1)$ ). ■

Dowód: Teza jest prostą konsekwencją uniwersalności (ko)produktu. Ograniczymy się do szczegółowej rekonstrukcji kanonicznego izomorfizmu  $X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3 \cong (X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3$ , na podstawie której bez trudu można sprawdzić prawdziwość pozostałych punktów tezy. Punktem wyjścia do naszych rozważań jest diagram przemienny dla potrójnego produktu włóknistego



Uwzględniając terminalną naturę produktu  $(X_1 \times_{Y_1} X_2, (\check{\xi}_1^{(12)}, \check{\xi}_2^{(12)}))$  (którego istnienie zakładamy), możemy domknąć w nim do diagramu przemiennego (pod)kopowłokę

$\text{cosp}((\check{v}_{1,2}, \check{v}_{2,1}), Y_1)$ , co daje nam diagram przemienny



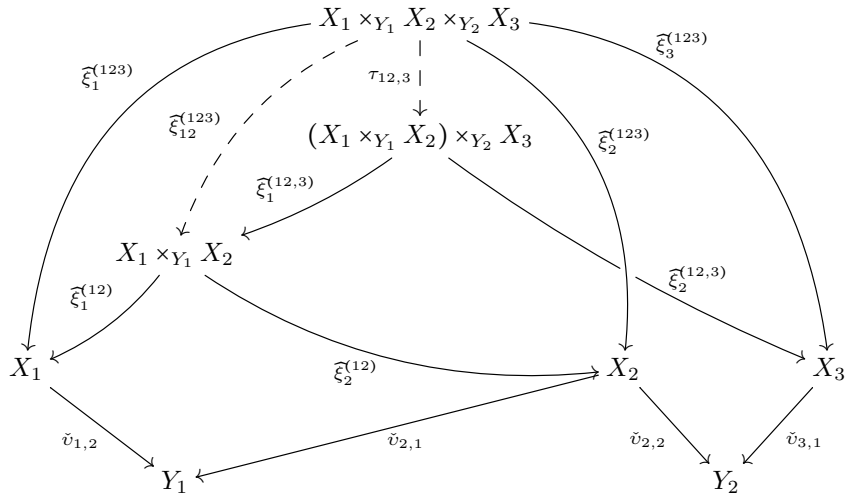
w którym

$$\tilde{\xi}_{12}^{(123)} : X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3 \longrightarrow X_1 \times_{Y_1} X_2$$

jest jedynym morfizmem (w  $\mathcal{C}$ ) spełniającym tożsamości

$$\tilde{\xi}_\alpha^{(12)} \circ \tilde{\xi}_{12}^{(123)} = \tilde{\xi}_\alpha^{(123)}, \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

Wobec terminalności  $((X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3, (\tilde{\xi}_1^{(12,3)}, \tilde{\xi}_2^{(12,3)}))$  wyprowadzamy stąd diagram przemienny



w którym

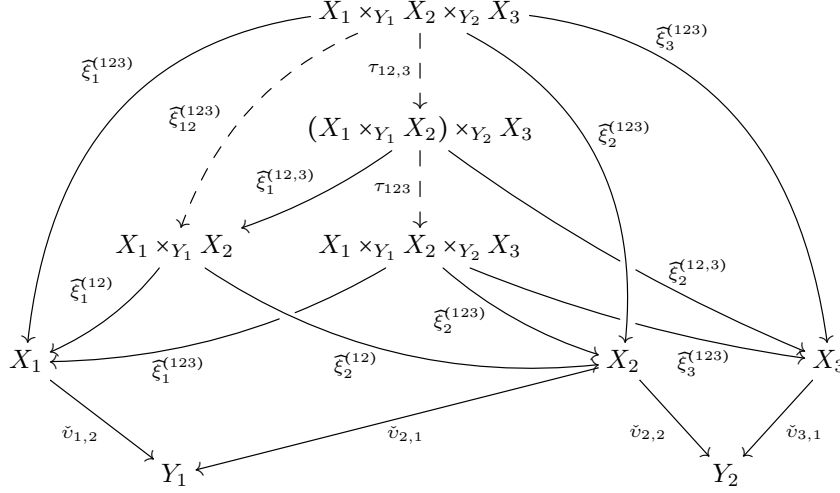
$$\tau_{12,3} : X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3 \longrightarrow (X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3$$

jest jedynym morfizmem spełniającym tożsamości

$$\tilde{\xi}_1^{(12,3)} \circ \tau_{12,3} = \tilde{\xi}_{12}^{(123)}, \quad \tilde{\xi}_2^{(12,3)} \circ \tau_{12,3} = \tilde{\xi}_3^{(123)}.$$

W powyższym diagramie zauważamy nową powłokę  $\text{sp}((X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3, (\tilde{\xi}_1^{(12)} \circ \tilde{\xi}_1^{(12,3)}, \tilde{\xi}_2^{(12)} \circ \tilde{\xi}_2^{(12,3)}, \tilde{\xi}_3^{(123)}))$  domykającą do diagramu przemiennego wyjściową

parę kopowłok  $\text{cosp}((\check{v}_{j,2}, \check{v}_{j+1,1}), Y_j)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , możemy przeto raz jeszcze przywołać terminalność  $(X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3, (\xi_1^{(123)}, \xi_2^{(123)}, \xi_3^{(123)}))$ , aby zapisać diagram przemienny



(1.2.42)

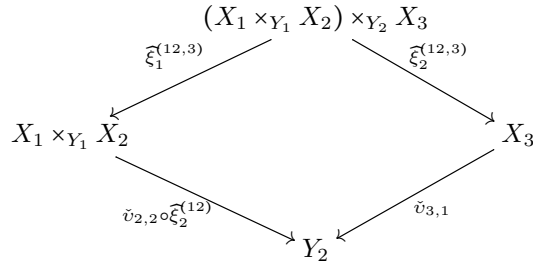
w którym

$$\tau_{123} : (X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3 \longrightarrow X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3$$

jest jedynym morfizmem spełniającym tożsamości

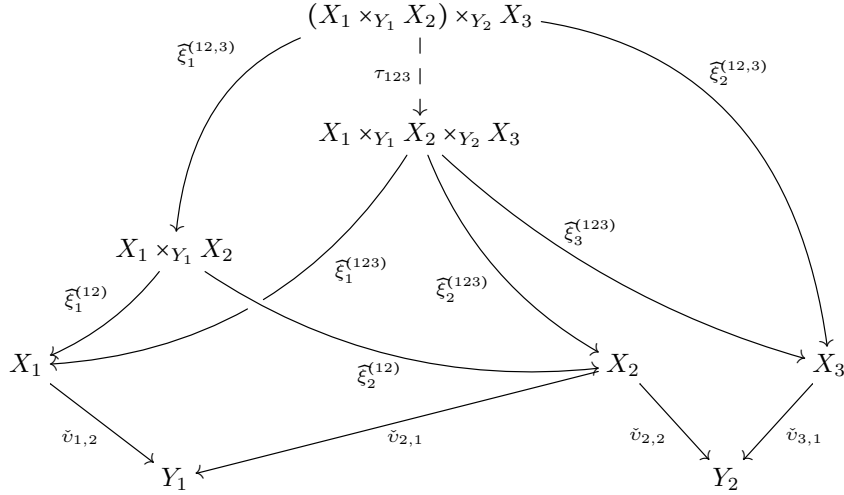
$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_1^{(123)} \circ \tau_{123} &= \widehat{\xi}_1^{(12)} \circ \widehat{\xi}_1^{(12,3)}, & \widehat{\xi}_2^{(123)} \circ \tau_{123} &= \widehat{\xi}_2^{(12)} \circ \widehat{\xi}_1^{(12,3)}, \\ \widehat{\xi}_3^{(123)} \circ \tau_{123} &= \widehat{\xi}_2^{(12,3)}. \end{aligned}$$

W następnym kroku zagnieździmy ostatni diagram w diagramie otrzymanym z diagramu przemiennego dla produktu włóknistego

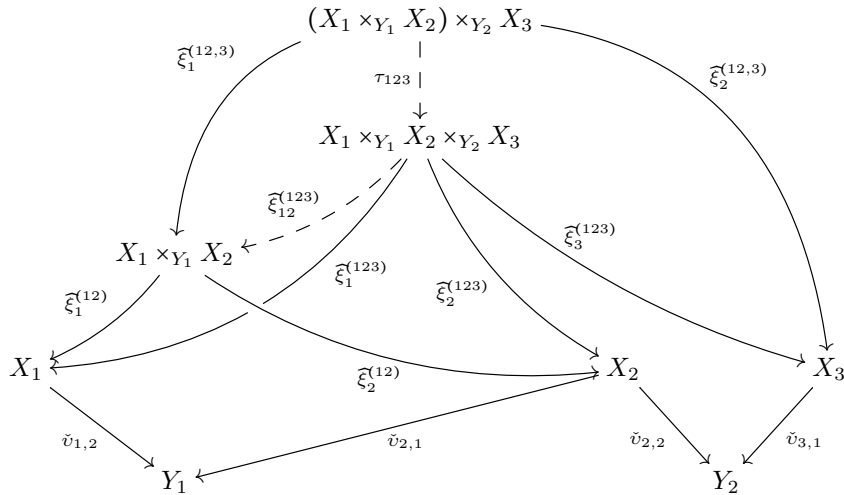


poprzez rozpisanie jego lewej dolnej strzałki z jednoczesnym doklejeniem kopowłoki  $\text{cosp}((\check{v}_{1,2}, \check{v}_{2,1}), Y_1)$ , wchodzącej do diagramu współdefiniującego produkt  $(X_1 \times_{Y_1} X_2, (\xi_1^{(12)}, \xi_2^{(12)}))$ , oraz uwzględnienie terminalności produktu  $(X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3, (\xi_1^{(123)}, \xi_2^{(123)}, \xi_3^{(123)}))$  dla ujawnionej tym sposobem pary kopowłok  $((\check{v}_{j,2}, \check{v}_{j+1,1}), Y_j)$ ,  $j \in \{1, 2\}$  w powyższym diagramie, co w sumie pozwala zapisać (raz jeszcze)

diagram przemienny

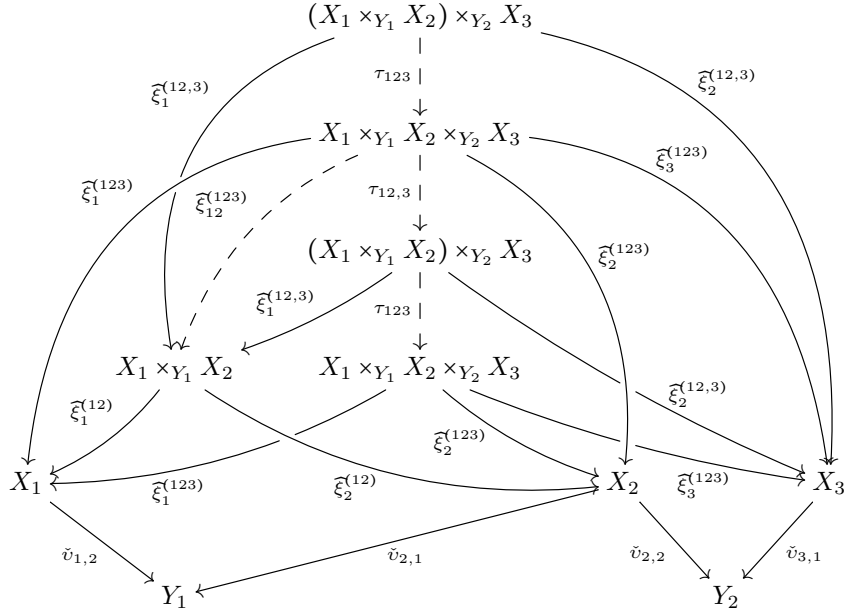


Przywoławszy definicję morfizmu  $\tilde{\xi}_{12}^{(123)}$ , uzupełniamy diagram do postaci



w której pod powłoką  $\text{sp}((X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3, (\tilde{\xi}_1^{(12,3)}, \tau_{123}, \tilde{\xi}_2^{(12,3)}))$  rozpoznajemy diagram (1.2.41), który został przez nas wcześniej poddany wnikliwej analizie. Ostatecznie więc możemy podpiąć diagram (1.2.42) pod wskazaną tu powłokę, co

daje



Na koniec raz jeszcze korzystamy z terminalności obu produktów włóknistych trójki obiektów  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ , aby skonstatować, że spełnione są tożsamości

$$\tau_{123} \circ \tau_{12,3} = \text{id}_{X_1 \times_{Y_1} X_2 \times_{Y_2} X_3}, \quad \tau_{12,3} \circ \tau_{123} = \text{id}_{(X_1 \times_{Y_1} X_2) \times_{Y_2} X_3}.$$

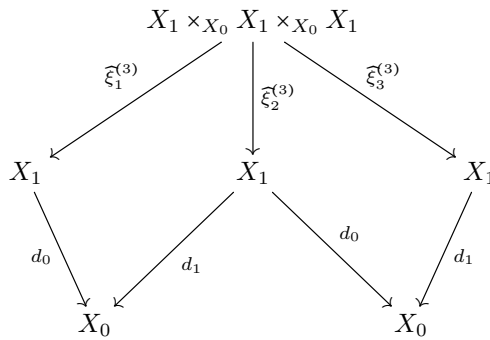
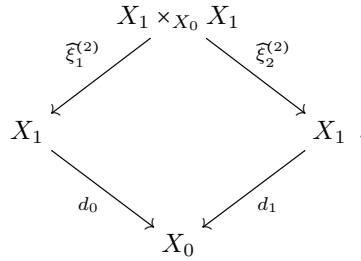
Te pozwalają nam zidentyfikować  $\tau_{12,3}$  jako postulowany izomorfizm produktów włóknistych. Dowód w pozostałych przypadkach przebiega w pełni analogicznie.  $\square$

Możemy już teraz użyć bezpośrednio produktu włóknistego w konstrukcji prowadzącej do naturalnego uogólnienia pojęcia małej kategorii, o szerokich i istotnych (choć nie zawsze uświadamianych) zastosowaniach w geometrii i algebrze inspirowanych fizykalnie. Mamy zatem

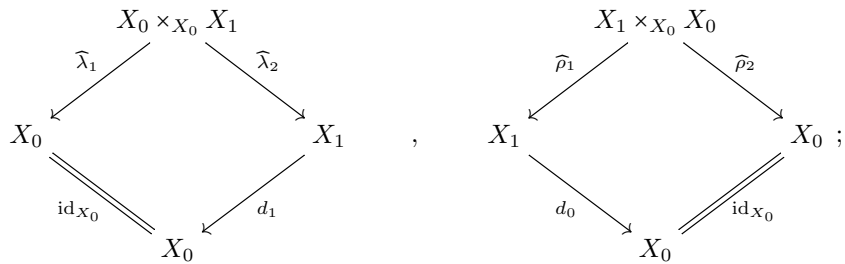
**DEFINICJA 50.** Przyjmijmy zapis Def. 48 oraz Stw. 57 i niechaj  $\mathcal{C}$  będzie kategorią z produktami włóknistymi. **Kategoria wewnętrzna w** (lub **obiekt kategoryalny**)  $\mathcal{C}$  to szóstka  $(X_0, X_1, d_0, d_1, \iota, c)$  złożona z

- obiektu  $X_0 \in \text{Obj } \mathcal{C}$ , zwanego **obiektem obiektów**;
- obiektu  $X_1 \in \text{Obj } \mathcal{C}$ , zwanego **obiektem morfizmów**;
- morfizmów  $d_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_0)$ ,  $\alpha \in \{0, 1\}$ , zwanych – odpowiednio – **morfizmem początku** ( $\alpha = 0$ ) oraz **morfizmem końca** ( $\alpha = 1$ ), dla

których istnieją produkty włókniste



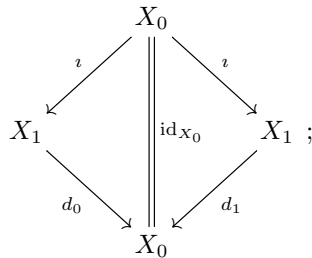
oraz



- morfizmu  $\iota \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, X_1)$ , zwanego **morfizmem identyczności**;
- morfizmu  $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \times_{X_0} X_1, X_1)$ , zwanego **morfizmem złożenia**,

spełniających następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne):

(IC1) (tożsamość początku i końca identyczności)



(IC2) (zachowanie początku i końca przy złożeniu)

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 & \xleftarrow{\xi_1} & X_1 \times_{X_0} X_1 & \xrightarrow{\xi_2} & X_1 \\
 \downarrow d_1 & & \downarrow c & & \downarrow d_0 \\
 X_0 & \xleftarrow{d_1} & X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0
 \end{array} ;$$

(IC3) (neutralność identyczności względem złożenia)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 \times_{X_0} X_1 & & X_1 \\
 & \nearrow \iota \times \text{id}_{X_0} & \downarrow c & \nwarrow \text{id}_{X_1} \times \iota & \\
 X_0 \times_{X_0} X_1 & & & & X_1 \times_{X_0} X_0 \\
 & \searrow \lambda_2 & & \swarrow \rho_1 & \\
 & & X_1 & & 
 \end{array} ;$$

(IC4) (łączność złożenia)

$$\begin{array}{ccc}
 & X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_1 & \\
 \cong \swarrow & & \searrow \cong \\
 (X_1 \times_{X_0} X_1) \times_{X_0} X_1 & & X_1 \times_{X_0} (X_1 \times_{X_0} X_1) \\
 \downarrow c \times \text{id}_{X_0} \quad \text{id}_{X_1} & & \downarrow \text{id}_{X_1} \times \text{id}_{X_0} \quad c \\
 X_1 \times_{X_0} X_1 & & X_1 \times_{X_0} X_1 \\
 \searrow c & & \swarrow c \\
 & X_1 & 
 \end{array} ,$$

przy czym górne strzałki reprezentują izomorfizmy, o których mowa w Tw. 1.2.13.

**Funktor wewnętrzny w  $\mathcal{C}$**  między kategoriami wewnętrznymi  $(X_0^\alpha, X_1^\alpha, d_0^\alpha, d_1^\alpha, \iota^\alpha, c^\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  w  $\mathcal{C}$  to para morfizmów

$$(\Phi_0, \Phi_1) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0^1, X_0^2) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1^1, X_1^2)$$

spełniająca następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne):



(IF1) (transport początku i końca)

$$\begin{array}{ccccc}
 X_0^1 & \xleftarrow{d_0^1} & X_1^1 & \xrightarrow{d_1^1} & X_0^1 \\
 \Phi_0 \downarrow & & \downarrow \Phi_1 & & \downarrow \Phi_0 \\
 X_0^2 & \xleftarrow{d_0^2} & X_1^2 & \xrightarrow{d_1^2} & X_0^2
 \end{array} ;$$

(IF2) (transport identyczności)

$$\begin{array}{ccc}
 X_0^1 & \xrightarrow{\iota^1} & X_1^1 \\
 \Phi_0 \downarrow & & \downarrow \Phi_1 \\
 X_0^2 & \xrightarrow{\iota^2} & X_1^2
 \end{array} ;$$

(IF3) (transport złożenia)

$$\begin{array}{ccc}
 X_1^1 \times_{X_0^1} X_1^1 & \xrightarrow{c^1} & X_1^1 \\
 \Phi_1 \times_{\Phi_0} \Phi_1 \downarrow & & \downarrow \Phi_1 \\
 X_1^2 \times_{X_0^2} X_1^2 & \xrightarrow{c^2} & X_1^2
 \end{array} .$$

Funktor taki zapisujemy jako

$$(\Phi_0, \Phi_1) : (X_0^1, X_1^1, d_0^1, d_1^1, \iota^1, c^1) \longrightarrow (X_0^2, X_1^2, d_0^2, d_1^2, \iota^2, c^2).$$

**Transformacja naturalna wewnętrzna w  $\mathcal{C}$**  między funktorami wewnętrznymi

$$(\Phi_0^\alpha, \Phi_1^\alpha) : (X_0^1, X_1^1, d_0^1, d_1^1, \iota^1, c^1) \longrightarrow (X_0^2, X_1^2, d_0^2, d_1^2, \iota^2, c^2), \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

w  $\mathcal{C}$  między kategoriami wewnętrznymi  $(X_0^\beta, X_1^\beta, d_0^\beta, d_1^\beta, \iota^\beta, c^\beta)$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  w  $\mathcal{C}$  to morfizm

$$\Theta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0^1, X_1^2)$$

spełniająca następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne):

(INT1) (rozpięcie między funktorialnymi obrazami)

$$\begin{array}{ccc}
 & X_0^1 & \\
 \Phi_0^1 \swarrow & \downarrow \Theta & \searrow \Phi_0^2 \\
 X_0^2 & & X_0^2 \\
 \swarrow d_0^2 & & \searrow d_1^2 \\
 & X_1^2 &
 \end{array} ;$$

(INT2) (splatanie funktorów)

$$\begin{array}{ccc}
& X_1^1 \times_{X_1^1} X_1^1 & \\
\text{id}_{X_1^1} \times_{d_0^1} d_1^1 \swarrow & & \searrow d_1^1 \times_{d_1^1} \text{id}_{X_1^1} \\
X_1^1 \times_{X_0^1} X_0^1 & & X_0^1 \times_{X_0^1} X_1^1 \\
\downarrow \Phi_1^2 \times_{\Phi_0^2} \Theta & & \downarrow \Theta \times_{\Phi_0^1} \Phi_1^1 \\
X_1^2 \times_{X_0^2} X_1^2 & & X_1^2 \times_{X_0^2} X_1^2 \\
& \searrow c^2 & \swarrow c^2 \\
& X_1^2 &
\end{array}$$

przy czym wszystkie produkty włókniste w powyższym diagramie poza trywialnym domknięciem  $X_1^1 \times_{X_1^1} X_1^1 \cong X_1^1$  kopowłoki  $\text{cosp}((\text{id}_{X_1^1}, \text{id}_{X_1^1}), X_1^1)$  to te rozważane wcześniej (patrz: definicja kategorii wewnętrznej w  $\mathcal{C}$ ).

Transformację taką zapisujemy jako

$$\begin{array}{ccc}
& (\Phi_0^1, \Phi_1^1) & \\
& \curvearrowright & \\
(X_0^1, X_1^1, d_0^1, d_1^1, v^1, c^1) & \Downarrow \Theta & (X_0^2, X_1^2, d_0^2, d_1^2, v^2, c^2) \\
& \curvearrowleft & \\
& (\Phi_0^2, \Phi_1^2) &
\end{array}$$

▲

UWAGA 10. Należy podkreślić, że w zapisie aksjomatu (INT2) znajduje swoje odzwierciedlenie (w sposób nadający mu sens formalny) poprzedzająca go aksjomatyka transformacji naturalnej wewnętrznej (aksjomat (INT1)) oraz funktora wewnętrznego, oto bowiem – dla przykładu – o istnieniu pojawiającego się na diagramie morfizmu

$$\Theta \times_{\Phi_0^1} \Phi_1^1 : X_0^1 \times_{X_0^1} X_1^1 \longrightarrow X_1^2 \times_{X_0^2} X_1^2$$

przesądza – na gruncie Stw. 57 – przemienność diagramów

$$\begin{array}{ccc}
X_0^1 & \xrightarrow{\varphi_1 \equiv \Theta} & X_1^2 \\
\parallel \text{id}_{X_0^1} \equiv v_1^1 & & \downarrow v_1^2 \equiv d_0^2 \\
X_0^1 & \xrightarrow{\varphi \equiv \Phi_0^1} & X_0^2
\end{array}
, \quad
\begin{array}{ccc}
X_1^1 & \xrightarrow{\varphi_2 \equiv \Phi_1^1} & X_1^2 \\
\downarrow d_1^1 \equiv v_2^1 & & \downarrow v_2^2 \equiv d_1^2 \\
X_0^1 & \xrightarrow{\varphi \equiv \Phi_0^1} & X_0^2
\end{array}$$

▮

PRZYKŁAD(Y) 22.

- (1) Kategoria wewnętrzna w kategorii **Set** to mała kategoria. W tym wypadku definicje funktora wewnętrznego i transformacji naturalnej wewnętrznej odtwarzają standardowe definicje – odpowiednio – funktora (między małymi kategoriami) i transformacji naturalnej.
- (2) Kategoria wewnętrzna w kategorii **Grp** to iloczyn półprosty (zewnątrzny) pary grup.

✓

Niezależnie od swych konkretnych zastosowań, z których nam przyjdzie już wkrótce poznać kilka, elementarna kategoryfikacja intuicyjnie doskonale uchwytynych pojęć zbioru (wzgl. klasy) obiektów i morfizmów, warunku składalności morfizmów, funktorialnego transportu początku i końca morfizmu itd. stanowi doskonale ćwiczenie pogłębiające zrozumienie formalnej struktury i abstrakcyjnego sensu podstawowej aksjomatyki teorii kategorii. Ażeby jeszcze lepiej ośwoić się z zaproponowanym tutaj sposobem myślenia o kategoriach, uzyskując przy okazji wgląd w konstrukcję, z której lada moment będziemy nader często i swobodnie korzystać, dokonamy dalszej specjalizacji powyższej definicji ogólnej: poddamy kategoryfikacji struktury grupy oraz grupoidu.

W pierwszej kolejności przywołujemy (re)definicję grupy jako (małej) kategorii o jednoelementowej klasie obiektów i wszystkich morfizmach odwracalnych (patrz: Przykł. 15 (4) i – przede wszystkim – Dodatek A). O ile kategoryfikacja warunku odwracalności morfizmów wydaje się dość oczywista, o tyle abstrakcja pojęcia singletonu (jako klasy obiektów) wymaga wskazania jakiejś jego cechy opisywalnej w terminach samych tylko morfizmów kategorii **Set**. Cechą taką jest terminalność, wzmiankowana w Przykł. 18 (1).

DEFINICJA 51. Przyjmijmy zapis Def. 27, 28 oraz 27 i niechaj  $\mathcal{C}$  będzie kategorią z produktami. **Grupa wewnętrzna** (lub **obiekt grupowy**) w  $\mathcal{C}$  to piątka  $(\star, \mathcal{G}, \mu, \iota, \varepsilon)$  złożona z

- obiektu terminalnego  $\star \in \text{Obj}\mathcal{C}$ ;
- obiektu  $\mathcal{G} \in \text{Obj}\mathcal{C}$ , zwanego **obiektem obiektów grupy**, dla którego istnieją w  $\mathcal{C}$  produkty

$$(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, \pi_1, \pi_2)$$

oraz

$$(\mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}, \pi_1, \pi_2, \pi_3);$$

- morfizmu  $\mu \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, \mathcal{G})$ , zwanego **morfizmem mnożenia grupy**;
- morfizmu  $\iota \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ , zwanego **morfizmem odwrotności grupy**;
- morfizmu  $\varepsilon \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, \mathcal{G})$ , zwanego **morfizmem jedności grupy**,

spełniających następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne):

(IG1) (łączność działania grupowego)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{\mu \times \text{id}_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G} \times \mathcal{G} \\ \text{id}_{\mathcal{G}} \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G} \end{array} ;$$

(IG2) (neutralność jedności względem mnożenia)

$$\begin{array}{ccccc}
 \star \times \mathcal{G} & \xrightarrow{\varepsilon \times \text{id}_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \xleftarrow{\text{id}_{\mathcal{G}} \times \varepsilon} & \mathcal{G} \times \star \\
 & \searrow \pi_2^L & \downarrow \mu & \swarrow \pi_1^P & \\
 & & \mathcal{G} & & 
 \end{array} ,$$

przy czym  $\pi_2^L$  i  $\pi_1^P$  są rzutami kanonicznymi odnośnych produktów;  
 (IG3) (fundamentalna własność odwrotności)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{G} \times \mathcal{G} & & \\
 & \swarrow \iota \times \text{id}_{\mathcal{G}} & \uparrow \Delta & \searrow \text{id}_{\mathcal{G}} \times \iota & \\
 \mathcal{G} \times \mathcal{G} & & \mathcal{G} & & \mathcal{G} \times \mathcal{G} \\
 & \searrow \mu & \vdots & \swarrow \mu & \\
 & & \star & & \\
 & & \downarrow \varepsilon & & \\
 & & \mathcal{G} & & 
 \end{array} ,$$

przy czym strzałka o przerywanym promieniu symbolizuje jedyny element zbioru  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}, \star)$ , a  $\Delta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}, \mathcal{G} \times \mathcal{G})$  jest (także jedynym, a to z racji terminalności produktu  $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, (\pi_1, \pi_2))$ ) morfizmem czyniącym poniższy diagram przemiennym:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{G} & & \\
 & \swarrow \text{id}_{\mathcal{G}} & \downarrow \Delta & \searrow \text{id}_{\mathcal{G}} & \\
 \mathcal{G} & \xleftarrow{\pi_1} & \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{G}
 \end{array}$$

**Homomorfizm wewnętrzny w  $\mathcal{C}$  między grupami wewnętrznymi**  $(\star_{\alpha}, \mathcal{G}_{\alpha}, \mu_{\alpha}, \iota_{\alpha}, \varepsilon_{\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  w  $\mathcal{C}$  to morfizm

$$\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$$

spełniający następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemiennie)

(IH1) (transport mnożenia)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\mu_1} & \mathcal{G}_1 \\
 \chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\
 \mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\mu_2} & \mathcal{G}_2
 \end{array} ;$$

(IH2) (transport odwrotności)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\iota_1} & \mathcal{G}_1 \\
 \downarrow \chi & & \downarrow \chi \\
 \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\iota_2} & \mathcal{G}_2
 \end{array} ;$$

(IH3) (transport jedności)

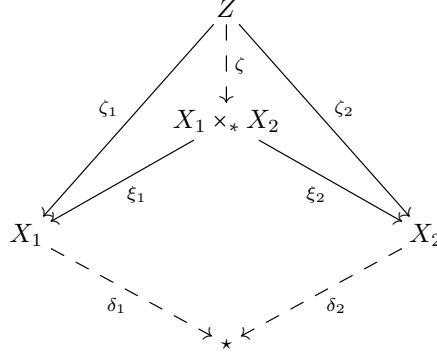
$$\begin{array}{ccc}
 *1 & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \mathcal{G}_1 \\
 \vdots & & \downarrow \chi \\
 *2 & \xrightarrow{\varepsilon_2} & \mathcal{G}_2
 \end{array} .$$



UWAGA 11. Na pierwszy rzut oka ostatnia definicja stanowi odejście od schematu logicznego Def. 50 w zakresie wykraczającym poza konieczność kategoryfikacji dwóch dodatkowych własności grupy, o których była mowa wcześniej. Czy zatem, jeśli potraktujemy grupę jako (małą) kategorię, tak jak to czynimy w Dodatek A, i zastosujemy do niej konstrukcję z Def. 50 uzupełnioną o niezbędną strukturę  $(*, \iota)$  związaną przez naturalny aksjomat (IG3), otrzymamy strukturę odmienną od tej zdefiniowanej powyżej? Okazuje się, że nie, a przekonanie się o tym stanowi proste ćwiczenie pozwalające lepiej zrozumieć sens poczynionych założeń. Pierwsza różnica w stosunku do Def. 50, jaka rzuca się w oczy, to zastąpienie wszystkich występujących w niej produktów włóknistych nad obiektem obiektów  $X_0$  produktami. Ustalmy (dowolnie) obiekty  $X_\alpha \in \text{Obj } \mathcal{C}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i oznaczmy odnośne (jedyne) morfizmy  $\delta_\alpha : X_\alpha \rightarrow *$ , po czym rozważmy obie struktury terminalne: produkt

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 \zeta_1 \swarrow & \downarrow \zeta & \searrow \zeta_2 \\
 & X_1 \times X_2 & \\
 \xi_1 \swarrow & & \searrow \xi_2 \\
 X_1 & & X_2
 \end{array}$$

oraz produkt włóknisty nad obiektem *terminalnym*  $\star$  (we wprowadzonej wcześniej notacji)



Jedynym dodatkowym warunkiem narzucanym na powłoki  $\text{sp}(Z, (\zeta_1, \zeta_2))$  rozpatrywane w tym drugim przypadku (a zatem także na  $\text{sp}(X_1 \times_* X_2, (\xi_1, \xi_2))$ ) jest równość morfizmów

$$\delta_1 \circ \zeta_1 = \delta_2 \circ \zeta_2.$$

Jednakowoż *każde* dwa morfizmy  $\zeta_\alpha : Z \rightarrow X_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  po złożeniu z odnośnymi morfizmami  $\delta_\alpha$  definiują morfizmy z  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \star)$ , a ten ostatni zbiór jest jednoelementowy, przeto nieuchronnie złożenia te są równe. Powyższy warunek dodatkowy nie jest więc w istocie żadnym warunkiem, co pokazuje dowodnie tożsamość obu rozpatrywanych struktur terminalnych. To wyjaśnia możliwość zamiennego ich używania w obu definicjach. Dla tej samej przyczyny stwierdzamy konieczną równość morfizmów początku i końca (jako dwóch morfizmów z jednoelementowego zbioru  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}, \star)$ ),

$$d_0 = d_1 =: \gamma,$$

i przekonujemy się o trywialności aksjomatu (IC1),

$$d_0 \circ \iota \equiv \gamma \circ \varepsilon = \text{id}_\star = \gamma \circ \varepsilon \equiv d_1 \circ \iota \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\star, \star) \equiv \{\text{id}_\star\}.$$

To samo tyczy się aksjomatu (IC2),

$$\begin{aligned} d_0 \circ \xi_2 \equiv \gamma \circ \pi_2 = \gamma \circ \mu \equiv d_0 \circ c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, \star) &\equiv \{\gamma \circ \pi_2\} \\ \equiv \{\gamma \circ \pi_1\} \ni d_1 \circ \xi_1 \equiv \gamma \circ \pi_1 = \gamma \circ \mu \equiv d_1 \circ c. \end{aligned}$$

Ostatnią rzeczą, która wydaje się różnić obie definicje (poza niezbędnym uzupełnieniem definicji ogólnej o strukturę swoistą dla kategorii zadawanej przez grupę), jest brak w Def. 51 założenia o *istnieniu* produktów  $\star \times \mathcal{G} \equiv \star \times_\star \mathcal{G}$  oraz  $\mathcal{G} \times \star \equiv \mathcal{G} \times_\star \star$ . I w tym jednak przypadku przekonujemy się bez trudu, że pominięcie to nie ma żadnego znaczenia, gdyż oba produkty mają (wspólny) model, a jest nim (zgodnie z oczekiwaniami)  $\mathcal{G}$ . Zajmiemy się wykazaniem słuszności tego stwierdzenia w przypadku produktu  $\star \times \mathcal{G} \equiv \star \times_\star \mathcal{G}$ . Analiza przypadku drugiego przebiega w pełni analogicznie. Oto więc musimy dla dowolnego obiektu  $Z$  spełniającego warunek

wyrażany przez diagram przemienny (w którym  $\Gamma$  jest częścią struktury na  $Z$ )

$$(1.2.43) \quad \begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow & & \searrow \Gamma \\ \star & & \mathcal{G} \\ \parallel & & \swarrow \gamma \\ \star & & \star \\ & \text{id}_\star & \end{array}$$

wskazać *jedyny* morfizm  $\pi_Z \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \mathcal{G})$ , który czyni przemiennym diagram

$$(1.2.44) \quad \begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow & \downarrow \pi_Z & \searrow \Gamma \\ \star & \mathcal{G} & \mathcal{G} \\ \swarrow \gamma & \parallel \text{id}_{\mathcal{G}} & \searrow \Gamma \\ \star & & \star \end{array} ,$$

przy czym wybór powłoki dla postulowanego modelu produktu  $\star \times \mathcal{G}$  usprawiedliwia diagram (jawnie) przemienny

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{G} & \\ \swarrow \gamma & \parallel \text{id}_{\mathcal{G}} & \searrow \Gamma \\ \star & & \mathcal{G} \\ \parallel & & \swarrow \gamma \\ \star & & \star \\ & \text{id}_\star & \end{array} .$$

Przemienność prawego skrzydła diagramu (1.2.44) pokazuje dowodnie jedyność

$$\pi_Z = \Gamma ,$$

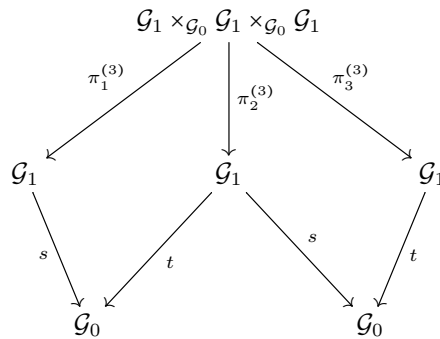
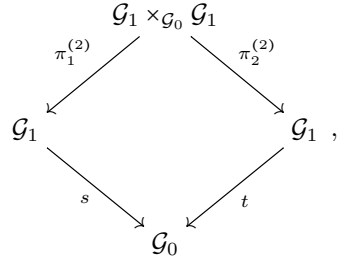
a porównanie skrzydła lewego (z podstawioną taką właśnie postacią  $\pi_Z$ ) z diagramem (1.2.43) definiującym  $\Gamma$ , przekonuje nas ostatecznie o słuszności dowodzonej tezy. Konstatujemy zatem w podsumowaniu, że definicja grupy wewnętrznej (w kategorii z obiektem terminalnym oraz produktami) jest w pełni spójna z wcześniejszą ogólną definicją kategorii wewnętrznej.

$\bar{\lambda}$

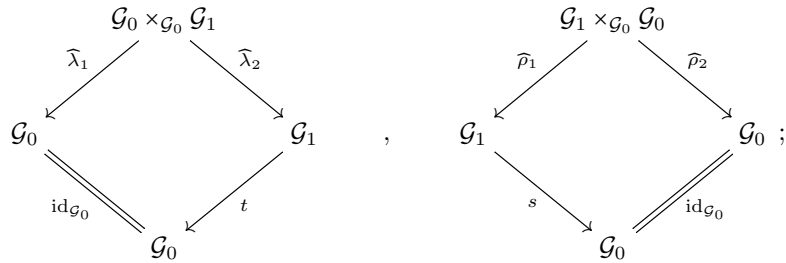
Wreszcie na zakończenie tej części naszych rozważań dokonamy kategoryfikacji pojęcia grupoidu, wprowadzonego w Def. 27. Jak łatwo sobie wyobrazić, jest ona w oczywistym sensie bardziej naturalna od prześlędzonej wcześniej kategoryfikacji pojęcia grupy (klasa obiektów grupoidu jest wprawdzie zbiorem, ale całkowicie dowolnym), a zarazem strukturalnie niezbyt od niej odległa.

DEFINICJA 52. Przyjmijmy zapis Def. 27 oraz Stw. 57 i niechaj  $\mathcal{C}$  będzie kategorią z produktami. **Grupoid wewnętrzny** (lub **obiekt grupoidowy**) w  $\mathcal{C}$  to siódemka  $(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, s, t, \text{Id}, \text{Inv}, \circ)$  złożona z

- obiektu  $\mathcal{G}_0 \in \text{Obj}\mathcal{C}$ , zwanego **obiektem obiektów grupoidu**;
- obiektu  $\mathcal{G}_1 \in \text{Obj}\mathcal{C}$ , zwanego **obiektem morfizmów grupoidu**;
- morfizmów  $s, t \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_0)$ , zwanych – odpowiednio – **morfizmem początku grupoidu** ( $s$ ) oraz **morfizmem końca grupoidu** ( $t$ ), dla których istnieją produkty włókniste



oraz



- morfizmu  $\text{Inv} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1)$ , zwanego **morfizmem odwrotności grupoidu**;
- morfizmu  $\text{Id} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ , zwanego **morfizmem jedności grupoidu**;
- morfizmu  $\circ \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1)$ , zwanego **morfizmem złożenia grupoidu**,

spełniających następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne):



(IGd1) (tożsamość początku i końca idyczności)

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{G}_0 & \\
 \text{Id.} \swarrow & \parallel & \searrow \text{Id.} \\
 \mathcal{G}_1 & \text{id}_{\mathcal{G}_0} & \mathcal{G}_1 ; \\
 s \searrow & & \swarrow t \\
 & \mathcal{G}_0 &
 \end{array}$$

(IGd2) (zamiana początku i końca w obrazie odwrotności)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{G}_0 & \xleftarrow{s} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{t} & \mathcal{G}_0 \\
 \parallel \text{id}_{\mathcal{G}_0} & & \downarrow \text{Inv} & & \parallel \text{id}_{\mathcal{G}_0} \\
 \mathcal{G}_0 & \xleftarrow{t} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{s} & \mathcal{G}_0
 \end{array} ;$$

(IGd3) (zachowanie początku i końca przy złożeniu)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{G}_1 & \xleftarrow{\pi_1^{(2)}} & \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\pi_2^{(2)}} & \mathcal{G}_1 \\
 t \downarrow & & \downarrow \circ & & \downarrow s ; \\
 \mathcal{G}_0 & \xleftarrow{t} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{s} & \mathcal{G}_0
 \end{array}$$

(IGd4) (neutralność idyczności względem złożenia)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{G}_0 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\text{Id.} \times \text{id}_{\mathcal{G}_0} \text{id}_{\mathcal{G}_1}} & \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 & \xleftarrow{\text{id}_{\mathcal{G}_1} \times \text{id}_{\mathcal{G}_0} \text{Id.}} & \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_0 \\
 & \searrow \widehat{\lambda}_2 & \downarrow \circ & \swarrow \widehat{\rho}_1 & \\
 & & \mathcal{G}_1 & &
 \end{array} ;$$

(IGd5) (fundamentalna własność odwrotności)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\widetilde{\Delta}_L} & \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 & \xleftarrow{\widetilde{\Delta}_P} & \mathcal{G}_1 \\
 s \downarrow & & \downarrow \circ & & \downarrow t ; \\
 \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{\text{Id.}} & \mathcal{G}_1 & \xleftarrow{\text{Id.}} & \mathcal{G}_0
 \end{array}$$

przy czym strzałki  $\widetilde{\Delta}_L, \widetilde{\Delta}_P \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1)$  są (jedynymi, w konsekwencji terminalności produktu włóknistego  $(\mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1, (\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}))$ )

morfizmami czyniącymi poniższy diagram przemiennym:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{G}_1 & & \\
 & \swarrow \text{Inv} & \downarrow \tilde{\Delta}_L & \searrow \text{id}_{\mathcal{G}_1} & \\
 \mathcal{G}_1 & \xleftarrow{\pi_1^{(2)}} & \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\pi_2^{(2)}} & \mathcal{G}_1 \\
 & \swarrow \text{id}_{\mathcal{G}_1} & \uparrow \tilde{\Delta}_P & \searrow \text{Inv} & \\
 & & \mathcal{G}_1 & & 
 \end{array}$$

(IGd6) (łączność złożenia)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\circ \times \text{id}_{\mathcal{G}_0} \text{id}_{\mathcal{G}_1}} & \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \\
 \text{id}_{\mathcal{G}_1} \times \text{id}_{\mathcal{G}_0} \circ \downarrow & & \downarrow \circ \\
 \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{G}_1
 \end{array} ;$$

**Homomorfizm wewnętrzny w  $\mathcal{C}$**  między grupoidami wewnętrznymi  $(\mathcal{G}_0^\alpha, \mathcal{G}_1^\alpha, s^\alpha, t^\alpha, \text{Id}^\alpha, \text{Inv}^\alpha, \circ^\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  w  $\mathcal{C}$  to para morfizmów

$$(\chi_0, \chi_1) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}_0^1, \mathcal{G}_0^2) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}_1^1, \mathcal{G}_1^2)$$

spełniająca następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemiennie)

(IHd1) (transport początku i końca)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{G}_0^1 & \xleftarrow{s^1} & \mathcal{G}_1^1 & \xrightarrow{t^1} & \mathcal{G}_0^1 \\
 \chi_0 \downarrow & & \downarrow \chi_1 & & \downarrow \chi_0 \\
 \mathcal{G}_0^2 & \xleftarrow{s^2} & \mathcal{G}_1^2 & \xrightarrow{t^2} & \mathcal{G}_0^2
 \end{array} ;$$

(IHd2) (transport identyczności)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_0^1 & \xrightarrow{\text{Id}^1} & \mathcal{G}_1^1 \\
 \chi_0 \downarrow & & \downarrow \chi_1 \\
 \mathcal{G}_0^2 & \xrightarrow{\text{Id}^2} & \mathcal{G}_1^2
 \end{array} ;$$

(IHd3) (transport odwrotności)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_1^1 & \xrightarrow{\text{Inv}^1} & \mathcal{G}_1^1 \\
 \chi_1 \downarrow & & \downarrow \chi_1 \\
 \mathcal{G}_1^2 & \xrightarrow{\text{Inv}^2} & \mathcal{G}_1^2
 \end{array} ;$$

(IHd4) (transport złożenia)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_1^1 \times_{\mathcal{G}_0^1} \mathcal{G}_1^1 & \xrightarrow{\circ^1} & \mathcal{G}_1^1 \\
 \chi_1 \times_{\chi_0} \chi_1 \downarrow & & \downarrow \chi_1 \\
 \mathcal{G}_1^2 \times_{\mathcal{G}_0^2} \mathcal{G}_1^2 & \xrightarrow{\circ^2} & \mathcal{G}_1^2
 \end{array} .$$

▲

UWAGA 12. Rozumując analogicznie jak w przypadku obiektu grupowego, przekonujemy się, że i tym razem mamy do czynienia z kategorią wewnętrzną.

▬

## Ciągi dokładne

Para homomorfizmów  $(J_H, \pi_{G/H})$  z Przykł. 2 (3) i (6), którą zapiszemy w postaci

$$H \xrightarrow{J_H} G \xrightarrow{\pi_{G/H}} G/H$$

spełnia oczywistą relację

$$\text{Ker } \pi_{G/H} = \text{Im } J_H,$$

wyrażającą utożsamienie pomiędzy dzielnikami normalnymi a jądrami homomorfizmów. Jej naturalną abstrakcją opisuje

DEFINICJA 53. Przyjmijmy zapis Def. 5. Niechaj  $(G_\alpha, \phi_2^{(\alpha)}, \phi_1^{(\alpha)}, \phi_0^{(\alpha)})$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  będzie trójką grup i niech  $\chi_\beta : G_\beta \rightarrow G_{\beta+1}$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  będzie parą homomorfizmów grup. Piątkę

$$G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} G_3$$

nazywamy **ciągami dokładnymi (grup)**, jeżeli

$$\text{Ker } \chi_2 = \text{Im } \chi_1.$$

Ogólniej, rodzina grup i stowarzyszonych homomorfizmów opisana diagramem

$$G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} \dots \xrightarrow{\chi_{n-1}} G_n$$

nosi miano ciągu dokładnego, jeśli

$$\forall_{k \in \overline{1, n-2}} : \text{Ker } \chi_{k+1} = \text{Im } \chi_k.$$

**Krótki ciąg dokładny** to ciąg dokładny szczególnej postaci

$$\mathbf{1} \rightarrow G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} G_3 \rightarrow \mathbf{1},$$

w którym ( $\mathbf{1}$  jest grupą trywialną i) spełniona jest koniunkcja warunków:

- (1)  $\chi_1$  jest monomorfizmem;
- (2)  $\chi_2$  jest epimorfizmem;
- (3)  $\text{Ker } \chi_2 = \text{Im } \chi_1$ .

Trójkę  $(G_2, \chi_1, \chi_2)$  nazywamy wtedy **rozszerzeniem grupy  $G_3$  przez grupę  $G_1$** . Przy tym ilekroć  $\text{Im } \chi_1 \subset \mathcal{Z}(G_2)$ , mówimy o **rozszerzeniu centralnym**<sup>1</sup> (możliwym wtedy tylko, gdy  $G_1$  jest przemienna).

▲

<sup>1</sup>Rozszerzenia centralne grup odgrywają istotną rolę w opisie symetrii kwantowej teorii pola.

PRZYKŁAD(Y) 23. Niechaj  $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$  będzie dowolną grupą,  $H \subset G$  zaś – jej dzielnikiem normalnym. Wówczas diagram

$$(1.3.1) \quad \mathbf{1} \longrightarrow H \xrightarrow{j_H} G \xrightarrow{\pi_{G/H}} G/H \longrightarrow \mathbf{1}$$

zadaje krótki ciąg dokładny. Każdy ciąg dokładny tej postaci będziemy odtąd nazywać **normalnym ciągiem dokładnym**. Ważnym przykładem takiego ciągu jest

$$\mathbf{1} \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{j_{2\pi\mathbb{Z}}} \mathbb{R} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{1},$$

w którym  $2\pi\mathbb{Z}$  i  $\mathbb{R}$  należy rozumieć jako nośniki struktury grupy zadawanej przez dodawanie liczb (rzeczywistych). Wobec oczywistej relacji

$$\text{Ker } e^i = 2\pi\mathbb{Z}$$

wypisanej dla epimorfizmu grup z Przykł. 2 (1), dostajemy – na mocy Tw. 1.1.1 –

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong U(1),$$

co pozwala przepisać powyższy normalny ciąg dokładny w postaci powszechnie spotykanej w literaturze, tj.

$$\mathbf{1} \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow U(1) \longrightarrow \mathbf{1}.$$

✓

Ciągi dokładne odegrają istotną rolę w dyskusji wybranych zagadnień algebry homologicznej w Rozdz. 7. Zanim jednak przejdziemy do opisu wyników bezpośrednio przygotowujących grunt pod tamtą dyskusję, zademonstrujemy przydatność i naturalność ciągów dokładnych w opisie struktury nader powszechnie stosowanej w matematycznym modelowaniu zjawisk (w szczególności w kontekście opisu symetrii układów fizykalnych). Struktura ta stanowi naturalne uogólnienie struktury produktu grup, wyprowadzonej w komentarzach do Def. 31 (patrz: przypis na str. 74). Ażeby zrozumieć właściwie sens owego uogólnienia, przeformułujemy definicję produktu pary grup  $(G_1, G_2)$  przy użyciu stosownego krótkiego ciągu dokładnego, a mianowicie (w notacji Def. 31 i 32):

$$\mathbf{1} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{j_1} G_1 \times G_2 \xrightarrow{\text{pr}_2} G_2 \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku istnieją homomorfizmy grup  $\rho \in \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G_1 \times G_2, G_1)$  oraz  $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G_2, G_1 \times G_2)$  o własnościach

$$\rho \circ j_1 = \text{id}_{G_1}, \quad \text{pr}_2 \circ \sigma = \text{id}_{G_2}.$$

Są nimi odwzorowania

$$\rho \equiv \text{pr}_1 : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 : (g_1, g_2) \longmapsto g_1$$

oraz

$$\sigma \equiv j_2 : G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2 : g_2 \longmapsto (e_1, g_2).$$

Powstaje naturalne pytanie o pojemność strukturalną tego ostatniego warunku w oderwaniu od jego powyższej szczególnej (i dość trywialnej) instancjacji. Droga do precyzyjnej odpowiedzi na to pytanie wiedzie przez poniższą

DEFINICJA 54. Przyjmijmy zapis Def. 5 oraz Przykł. 1 (5) i niechaj  $(G_\alpha, \cdot_\alpha, \text{Inv}_\alpha, \bullet \mapsto e_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą grupami,  $\varphi : G_2 \rightarrow \text{Aut}(G_1)$  zaś – homomorfizmem grup. **Iloczyn półprosty grup  $G_1$  i  $G_2$  prawo-stowarzyszony z automorfizmem  $\varphi$**  to grupa

$$(G_1 \times G_2, m_\varphi \equiv \cdot_\varphi, \text{Inv}_\varphi, \bullet \mapsto (e_1, e_2)),$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} m_\varphi & : (G_1 \times G_2)^{\times 2} \longrightarrow G_1 \times G_2 \\ & : ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \longmapsto (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \end{aligned}$$

i odwrotnością

$$\text{Inv}_\varphi : G_1 \times G_2 \circlearrowleft : (g_1, g_2) \longmapsto (\varphi_{\text{Inv}_2(g_2)} \circ \text{Inv}_1(g_1), \text{Inv}_2(g_2)).$$

Iloczyn kartezjański grup z tak zadaną strukturą grupy oznaczamy symbolem

$$G_1 \rtimes_\varphi G_2.$$

**Iloczyn półprosty grup  $G_1$  i  $G_2$  lewo-stowarzyszony z automorfizmem  $\varphi$**  to grupa

$$(G_2 \times G_1, {}_\varphi m \equiv \varphi \cdot \varphi \cdot \text{Inv}, \bullet \mapsto (e_1, e_2)),$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} {}_\varphi m & : (G_2 \times G_1)^{\times 2} \longrightarrow G_2 \times G_1 \\ & : ((g_2, g_1), (h_2, h_1)) \longmapsto (g_2 \cdot_2 h_2, \varphi_{\text{Inv}_2(h_2)}(g_1) \cdot_1 h_1) \end{aligned}$$

i odwrotnością

$${}_\varphi \text{Inv} : G_2 \times G_1 \circlearrowleft : (g_2, g_1) \longmapsto (\text{Inv}_2(g_2), \varphi_{g_2} \circ \text{Inv}_1(g_1)).$$

Iloczyn kartezjański grup z tak zadaną strukturą grupy oznaczamy symbolem

$$G_2 {}_\varphi \ltimes G_1.$$

▲

UWAGA 13. O tym, że w istocie mamy do czynienia ze strukturą grupową, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku – tutaj tylko dla iloczynu prawo-stowarzyszonego (dla przykładu) – wykorzystującym zarówno homomorficzny charakter  $\varphi$ ,

$$\forall_{g, h \in G_2} : \varphi_{g \cdot_2 h} = \varphi_g \circ \varphi_h,$$

jak i automorficzny charakter obrazu względem tego odwzorowania dowolnego elementu  $g \in G_2$ ,

$$\forall_{(g, h_1, h_2) \in G_2 \times G_1 \times G_1} : \varphi_g(h_1 \cdot_1 h_2) = \varphi_g(h_1) \cdot_1 \varphi_g(h_2).$$

Te warunki pozwalają nam sprawdzić – dla dowolnych  $(g_1, g_2), (h_1, h_2), (k_1, k_2) \in G_1 \times G_2$  – wszystkie aksjomaty grupy, więc łączność mnożenia,

$$\begin{aligned} & ((g_1, g_2) \cdot_\varphi (h_1, h_2)) \cdot_\varphi (k_1, k_2) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \cdot_\varphi (k_1, k_2) \\ & = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1) \cdot_1 \varphi_{g_2 \cdot_2 h_2}(k_1), g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 k_2) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1 \cdot_1 \varphi_{h_2}(k_1)), g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 k_2) \\ & \equiv (g_1, g_2) \cdot_\varphi (h_1 \cdot_1 \varphi_{h_2}(k_1), h_2 \cdot_2 k_2) \equiv (g_1, g_2) \cdot_\varphi ((h_1, h_2) \cdot_\varphi (k_1, k_2)), \end{aligned}$$

neutralność pary  $(e_1, e_2)$ ,

$$(g_1, g_2) \cdot_{\varphi} (e_1, e_2) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(e_1), g_2 \cdot_2 e_2) = (g_1 \cdot_1 e_1, g_2 \cdot_2 e_2) = (g_1, g_2),$$

$$(e_1, e_2) \cdot_{\varphi} (g_1, g_2) = (e_1 \cdot_1 \varphi_{e_2}(g_1), e_2 \cdot_2 g_2) = (e_1 \cdot_1 \text{id}_{G_1}(g_1), e_2 \cdot_2 g_2)$$

$$= (e_1 \cdot_1 g_1, e_2 \cdot_2 g_2) = (g_1, g_2)$$

oraz fundamentalną własność odwrotności,

$$(g_1, g_2) \cdot_{\varphi} (\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}), g_2^{-1}) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}), g_2 \cdot_2 g_2^{-1})$$

$$= (g_1 \cdot_1 \varphi_{e_2}(g_1^{-1}), g_2 \cdot_2 g_2^{-1}) = ((g_1 \cdot_1 \text{id}_{G_1}(g_1^{-1}), g_2 \cdot_2 g_2^{-1}) = (g_1 \cdot_1 g_1^{-1}, g_2 \cdot_2 g_2^{-1})$$

$$= (e_1, e_2),$$

$$(\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}), g_2^{-1}) \cdot_{\varphi} (g_1, g_2) = (\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}) \cdot_1 \varphi_{g_2^{-1}}(g_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2)$$

$$= (\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1} \cdot_1 g_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2) = (\varphi_{g_2^{-1}}(e_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2) = (e_1, e_2).$$

□

Obie formy iloczynu półprostego pozostają w prostej relacji wzajemnej, o czym przekonuje

**STWIERDZENIE 59.** *Przyjmijmy zapis Def. 54. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup między iloczynami półprostymi: prawo- i lewo-stwarzyszonymi danej pary grup (przy ustalonym homomorfizmie  $\varphi$ ), który przybiera postać*

$$\tau_{\varphi} : G_2 \cdot_{\varphi} \times G_1 \xrightarrow{\cong} G_1 \rtimes_{\varphi} G_2 : (g_2, g_1) \mapsto (\varphi_{g_2}(g_1), g_2).$$

■

Dowód: Zapostulowane odwzorowanie jest jawnie odwracalne, oto bowiem odwzorowanie odwrotne do niego to

$$\tau_{\varphi}^{-1} : G_1 \rtimes_{\varphi} G_2 \longrightarrow G_2 \cdot_{\varphi} \times G_1 : (g_1, g_2) \mapsto (g_2, \varphi_{\text{Inv}_2(g_2)}(g_1)).$$

Wystarczy zatem sprawdzić warunek definiujący homomorfizm, co czynimy w bezpośrednim rachunku, dla dowolnych  $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$ ,

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi}(g_2, g_1) \cdot_{\varphi} \tau_{\varphi}(h_2, h_1) &= (\varphi_{g_2}(g_1), g_2) \cdot_{\varphi} (\varphi_{h_2}(h_1), h_2) \\ &= (\varphi_{g_2}(g_1) \cdot_1 \varphi_{g_2} \circ \varphi_{h_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \\ &= (\varphi_{g_2 \cdot_2 h_2}(\varphi_{h_2^{-1}}(g_1) \cdot_1 h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \\ &\equiv \tau_{\varphi}(g_2 \cdot_2 h_2, \varphi_{h_2^{-1}}(g_1) \cdot_1 h_1) \\ &\equiv \tau_{\varphi}((g_2, g_1) \cdot_{\varphi} (h_2, h_1)). \end{aligned}$$

□

Powyższe stwierdzenie pozwala nam skupić się w dalszej części dyskusji na jednej z form, np. na formie prawo-stowarzyszonej, a obserwacje poczynione w odniesieniu do niej przetłumaczą się prosto na obserwacje dotyczące drugiej z form za pośrednictwem znalezionej izomorfizmu. Definicja iloczynu półprostego pozwala sformułować oczekiwane

**TWIERDZENIE 1.3.1.** *Przyjmijmy zapis Def. 53 oraz 54 i niechaj  $(G_\alpha, \cdot_\alpha, \text{Inv}_\alpha, \bullet \mapsto e_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą grupami. Istnienie krótkiego ciągu dokładnego grup*

$$(1.3.2) \quad \mathbf{1} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} G_3 \longrightarrow \mathbf{1},$$

wraz z parą homomorfizmów grup

$$\rho : G_2 \longrightarrow G_1, \quad \sigma : G_3 \longrightarrow G_2$$

o własnościach

$$(1.3.3) \quad \rho \circ \chi_1 = \text{id}_{G_1}$$

i

$$(1.3.4) \quad \chi_2 \circ \sigma = \text{id}_{G_3}$$

jest równoważne istnieniu homomorfizmu grup  $\varphi : G_3 \longrightarrow \text{Aut}(G_1)$  oraz izomorfizmu grup

$$\iota : G_2 \xrightarrow{\cong} G_1 \rtimes_\varphi G_3.$$

Homomorfizm  $\rho$  nazywamy **retrakcją**  $\chi_1$ , a  $\sigma$  – **cięciem**  $\chi_2$ . ■

Dowód: Niechaj będzie dany krótki ciąg dokładny (1.3.2) z retrakcją  $\rho$  i cięciem  $\sigma$ . Wykorzystując warunek (1.3.4), obliczamy – dla dowolnego elementu  $g_2 \in G_2$  –

$$\begin{aligned} \chi_2(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2)) &= \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) \\ &= \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) = \chi_2(g_2 \cdot_2 \text{Inv}_2(g_2)) = \chi_2(e_2) \\ &= e_3, \end{aligned}$$

a stąd wniosek, że

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) \in \text{Ker } \chi_2,$$

czyli też – z racji założonej dokładności ciągu (w  $G_2$ ) –

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) \in \text{Im } \chi_1.$$

W świetle Tw. 1.1.1, a wobec injektywności  $\chi_1$  możemy zatem zdefiniować odwzorowanie

$$\begin{aligned} \iota : G_2 \longrightarrow G_1 \times G_3 : g_2 \longmapsto & (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1}(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2)), \chi_2(g_2)) \\ & \equiv (\xi(g_2), \chi_2(g_2)). \end{aligned}$$

Przekonamy się najpierw, że jest ono postulowanym homomorfizmem grup, przy czym dyskusja tej ewentualności doprowadzi nas wprost do definicji stosownego homomorfizmu  $\varphi$ . Dla dowolnych  $g_2, h_2 \in G_2$  wyznaczamy

$$\iota(g_2 \cdot_2 h_2) = (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1}(g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(h_2^{-1} \cdot_2 g_2^{-1})), \chi_2(g_2 \cdot_2 h_2))$$



$$\begin{aligned}
&= (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1} (g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 (g_2^{-1}) \cdot_2 \text{Ad}_{\sigma \circ \chi_2 (g_2)} (h_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 (h_2^{-1}))), \chi_2 (g_2) \cdot_3 \chi_2 (h_2)) \\
&\equiv (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1} (\chi_1 \circ \xi (g_2) \cdot_2 \text{Ad}_{\sigma \circ \chi_2 (g_2)} \circ \chi_1 \circ \xi (h_2)), \chi_2 (g_2) \cdot_3 \chi_2 (h_2)),
\end{aligned}$$

a ponieważ dla każdych  $(g_1, g_3) \in G_1 \times G_3$  zachodzi

$$\chi_2 (\text{Ad}_{\sigma (g_3)} \circ \chi_1 (g_1)) = \chi_2 \circ \sigma (g_3) \cdot_3 \chi_2 \circ \chi_1 (g_1) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma (g_3^{-1}) = g_3 \cdot_3 e_3 \cdot_3 g_3^{-1} = e_3,$$

przeto możemy przepisać powyższe w sugestywnej postaci

$$\iota (g_2 \cdot_2 h_2) = (\xi (g_2) \cdot_1 (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma \circ \chi_2 (g_2)} \circ \chi_1) \circ \xi (h_2), \chi_2 (g_2) \cdot_3 \chi_2 (h_2)).$$

Zważywszy, że obraz  $G_3$  względem odwzorowania

$$\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma(\cdot)} \circ \chi_1 : G_3 \longrightarrow \text{End}_{\mathbf{Grp}}(G_1) : g_3 \longmapsto \chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma(g_3)} \circ \chi_1$$

w oczywisty sposób zawiera się w podzbiorze  $\text{Aut}(G_1) \subset \text{End}_{\mathbf{Grp}}(G_1)$ , możemy ostatecznie – na podstawie porównania wyniku naszych rachunków z formułą na  $m_\varphi$  w Def. 54 – zapisać

$$\iota (g_2 \cdot_2 h_2) = \iota (g_2) \cdot_{\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma(\cdot)} \circ \chi_1} \iota (h_2).$$

Odwzorowanie  $\iota$  zostało skonstruowane jako homomorfizm grup, na obecnym etapie pozostaje przeto jedynie przekonać się o bijektywnym charakterze  $\iota$ . Po pierwsze więc równość

$$\iota (g_2) = (e_1, e_3)$$

oznacza parę równości

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 (g_2^{-1}) = \chi_1 (e_1) = e_2 \quad \wedge \quad \chi_2 (g_2) = e_3,$$

które możemy przepisać w postaci równoważnej

$$g_2 = \sigma (\chi_2 (g_2)) \quad \wedge \quad \chi_2 (g_2) = e_3,$$

otrzymując tym sposobem równość

$$g_2 = \sigma (e_3) = e_2,$$

przesądającą o iniektywności  $\iota$ . Dla dowolnej pary  $(g_1, g_3) \in G_1 \times G_3$  wybierzmy dowolne  $g_2 \in G_2$  o własności  $\chi_2 (g_2) = g_3$  (co jest możliwe z racji surjektywności  $\chi_2$ ), po czym z jego warstwy  $g_2 \text{Ker } \chi_2 = g_2 \text{Im } \chi_1$  wybierzmy reprezentanta  $g_2 \cdot_2 \chi_1 (h_1)$ ,  $h_1 \in G_1$ , który spełnia dodatkowy warunek

$$g_2 \cdot_2 \chi_1 (h_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 (\chi_1 (h_1^{-1}) \cdot_2 g_2^{-1}) \stackrel{!}{=} \chi_1 (g_1).$$

Ażeby przekonać się o tym, że reprezentant taki istnieje, upraszczamy powyższy warunek – wykorzystując po drodze dokładność ciągu (1.3.2) w  $G_2$  – do postaci

$$g_2 \cdot_2 \chi_1 (h_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 (g_2)^{-1} \stackrel{!}{=} \chi_1 (g_1)$$

albo równoważnej

$$\chi_1 (h_1) \stackrel{!}{=} g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1 (g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 (g_2).$$

Bezpośredni rachunek

$$\begin{aligned}
\chi_2 (g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1 (g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 (g_2)) &= \chi_2 (g_2)^{-1} \cdot_3 \chi_2 \circ \chi_1 (g_1) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma \circ \chi_2 (g_2) \\
&= \chi_2 (g_2)^{-1} \cdot_3 e_3 \cdot_3 \chi_2 (g_2) = e_3,
\end{aligned}$$

w którym raz jeszcze przywołujemy dokładność ciągu (1.3.2) w  $G_2$  oraz warunek definiujący  $\sigma$ , przesądza o istnieniu  $h_1$ , oto bowiem pozwala on stwierdzić, że

$$g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1(g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2) \in \text{Ker } \chi_2 = \text{Im } \chi_1.$$

Znaleziony przez nas element  $\tilde{g}_2 := g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1)$  spełnia koniunkcję warunków

$$\chi_2(\tilde{g}_2) = g_3 \quad \wedge \quad \tilde{g}_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(\tilde{g}_2^{-1}) = \chi_1(g_1),$$

więc też jego obrazem względem  $\iota$  jest

$$\iota(\tilde{g}_2) = (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Im } \chi_1}^{-1} \circ \chi_1(g_1), g_3) = (g_1, g_3).$$

To kończy dowód pierwszej implikacji.

I odwrotnie, niechaj  $\varphi : G_3 \rightarrow \text{Aut}(G_1)$  będzie homomorfizmem grup zadającym strukturę iloczynu półprostego na  $G_1 \rtimes_{\varphi} G_3$  i niech  $\iota : G_2 \xrightarrow{\cong} G_1 \rtimes_{\varphi} G_3$  będzie izomorfizmem grup. Wówczas definiujemy odwzorowania:

$$\chi_1 : G_1 \rightarrow G_2 : g_1 \mapsto \iota^{-1}(g_1, e_3),$$

$$\chi_2 : G_2 \rightarrow G_3 : g_2 \mapsto \text{pr}_2 \circ \iota(g_2),$$

które w oczywisty sposób są homomorfizmami grup. Injektywność  $\chi_1$  wynika wprost z ciągu równoważności

$$\chi_1(g_1) = e_2 \iff (g_1, e_3) = \iota(e_2) = (e_1, e_3) \iff g_1 = e_1,$$

a równość

$$\chi_2(\iota^{-1}(e_1, g_3)) \equiv \text{pr}_2 \circ \iota \circ \iota^{-1}(e_1, g_3) = \text{pr}_2(e_1, g_3) = g_3,$$

słuszna dla dowolnego  $g_3 \in G_3$ , przesądza o surjektywności  $\chi_2$ . Pozostaje wskazać retrakcję  $\rho$  dla  $\chi_1$  oraz cięcie  $\sigma$  dla  $\chi_2$ . Bez trudu przekonujemy się, że homomorfizmy

$$\rho : G_2 \rightarrow G_1 : g_2 \mapsto \text{pr}_1 \circ \iota(g_2)$$

oraz

$$\sigma : G_3 \rightarrow G_2 : g_3 \mapsto \iota^{-1}(e_1, g_3)$$

mają pożądane własności. □

## Rudymenty topologii i geometrii różniczkowej

Naturalna ścieżka ku zastosowaniom metod i wyników algebry wyższej w modelowaniu zjawisk fizycznych prowadzi przez topologię i rachunek nieskończenie małych, tj. rachunek różniczkowy i całkowy, osadzone w kontekście geometrycznym. Ta prosta konstatacja każe nam przywołać w sposób możliwie zwięzły istotne pojęcia i twierdzenia topologii, analizy funkcjonalnej oraz geometrii różniczkowej, z których przyjdzie nam korzystać w naszych rozważaniach.

### 1. Niezbędnik topologiczny

Zacznijemy od przypomnienia podstawowych pojęć z zakresu topologii ogólnej. Punktem wyjścia jest

DEFINICJA 55. Niechaj  $X$  będzie zbiorem. **Topologia na  $X$**  to rodzina  $\mathcal{T}(X) \subset 2^X$  jego podzbiorów spełniających następujące aksjomaty

- (T1)  $X, \emptyset \in \mathcal{T}(X)$ ;
- (T2)  $\forall \mathcal{T} \subset \mathcal{T}(X) : \bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{T}} \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$ ;
- (T3)  $\forall N \in \mathbb{N} \forall \mathcal{O}_n : \overline{1, N} \rightarrow \mathcal{T}(X) : \bigcap_{n=1}^N \mathcal{O}_n \in \mathcal{T}(X)$ .

**Baza topologii** to podzbiór  $\mathcal{B}(X) \subset 2^X$  o własnościach

- (BT1)  $X = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{B}(X)} \mathcal{B}$ ;
- (BT2)  $\forall \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}(X) : (x \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \implies \exists \mathcal{B}_{12} \in \mathcal{B}(X) : x \in \mathcal{B}_{12} \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$ ,

przy czym **topologia generowana** przez  $\mathcal{B}(X)$  jest określona jako przecięcie („element po elemencie”) wszystkich topologii zawierających  $\mathcal{B}(X)$ . **Podbaza topologii** to podzbiór  $\mathcal{G}(X) \subset 2^X$  o tej własności, że

$$\mathcal{B}_{\mathcal{G}}(X) := \left\{ \bigcap_{i \in I} \mathcal{G}_i \mid \mathcal{G}_i \in \mathcal{G}(X) \wedge |I| < \infty \right\}$$

jest bazą topologii. Mając dowolne dwie topologie  $\mathcal{T}_A(X)$ ,  $A \in \{1, 2\}$  na  $X$ , topologię  $\mathcal{T}_1(X)$  nazwiemy **słabszą** od  $\mathcal{T}_2(X)$ , topologię  $\mathcal{T}_2(X)$  zaś – **silniejszą** od  $\mathcal{T}_1(X)$ , jeśli  $\mathcal{T}_1(X) \subset \mathcal{T}_2(X)$ .

Parę  $(X, \mathcal{T}(X))$  złożoną ze zbioru z wyróżnioną na nim topologią nazwiemy **przestrzenią topologiczną**. Zbiory należące do  $\mathcal{T}(X)$  określamy mianem **zbiorów otwartych**. Podzbiór  $\mathcal{C} \subset X$  o własności  $X \setminus \mathcal{C} \in \mathcal{T}(X)$  nazwiemy **domkniętym**. Przecięcie wszystkich zbiorów domkniętych zawierających podzbiór  $Y \subset X$  to **domknięcie**  $Y$ , oznaczane symbolem  $\bar{Y}$  – jest to najmniejszy zbiór domknięty zawierający  $Y$  (istotnie, dopełnienie w  $X$  przecięcia zbiorów jest sumą dopełnień tychże zbiorów).

**Podprzestrzeń topologiczna** przestrzeni  $(X, \mathcal{T}(X))$  to para  $(Y, \mathcal{T}_X(Y))$  złożona z podzbioru  $Y \subset X$  oraz jego topologii  $\mathcal{T}_X(Y) = \{ \mathcal{O} \cap Y \mid \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X) \}$ ,

zwanej **topologią podprzestrzeni** (lub **względna**). Zbiory otwarte i zbiory domknięte w tej topologii noszą miano **względnie otwartych** i – odpowiednio – **względnie domkniętych**.

Odwzorowanie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  z przestrzeni topologicznej  $(X_1, \mathcal{T}(X_1))$  w przestrzeń topologiczną  $(X_2, \mathcal{T}(X_2))$  nazwiemy **ciągłym w punkcie**  $x \in X_1$ , ilekroć przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego zawierającego  $f(x)$  zawiera pewien zbiór otwarty  $\mathcal{U} \ni x$ , czyli

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) : (\mathcal{O} \ni f(x) \implies (\exists \mathcal{U} \in \mathcal{T}(X_1) : x \in \mathcal{U} \wedge f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{O})).$$

**Odwzorowanie ciągłe** to takie, które jest ciągłe w każdym punkcie swej dziedziny, czyli takie, które spełnia warunek

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) : f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_1).$$

Równoważnie odwzorowanie ciągłe charakteryzuje to, że przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego względem niego jest domknięty. Odwracalne odwzorowanie ciągłe o ciągłej odwrotności nazywamy **homeomorfizmem**. Przestrzenie topologiczne wraz z odwzorowaniami ciągłymi między nimi tworzą **kategorię przestrzeni topologicznych**, którą będziemy oznaczać symbolem

**Top**.

Injekttywne odwzorowanie ciągłe  $f : X \rightarrow Y$  będące homeomorfizmem na obraz względem topologii podprzestrzeni na tymże zwie się **zanurzeniem topologicznym**. **Odwzorowanie otwarte** z przestrzeni topologicznej  $(X_1, \mathcal{T}(X_1))$  w przestrzeń topologiczną  $(X_2, \mathcal{T}(X_2))$  to odwzorowanie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  spełniające warunek

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_1) : f(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_2).$$

**Odwzorowanie domknięte** natomiast spełnia warunek

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_1) : X_2 \setminus f(X_1 \setminus \mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_2).$$

**Odwzorowanie ilorazowe** to takie odwzorowanie surjektywne, które spełnia warunek

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) : (\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) \iff f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_1)).$$

▲

Na styku topologii i algebry odnajdujemy

**DEFINICJA 56.** Przyjmijmy zapis Def. 3 i 10. **Topologiczna struktura algebraiczna prosta** to struktura algebraiczna prosta  $\mathcal{S}$  o nośniku  $S$  wyposażonym w topologię, względem której wszystkie operacje  $k_i$ -argumentowe  $\phi_{k_i}$ ,  $i \in \overline{1, N}$  są ciągłe. Podobnie **topologiczna struktura algebraiczna złożona** to struktura algebraiczna złożona o składowych (prostych) będących topologicznymi strukturami algebraicznymi prostymi o topologiach, względem których wszystkie współdefiniujące tę strukturę złożoną odwzorowania  $\phi_i$ ,  $i \in I$  także są ciągłe. W tym sensie mówimy o **grupach topologicznych**, **pierścieniach topologicznych**, **ciałach topologicznych**, czy wreszcie **topologicznych modułach nad pierścieniem (topologicznym)** oraz – w tej liczbie – **topologicznych przestrzeniach wektorowych**.

▲

Elementarną własność podprzestrzeni topologicznych opisuje

**STWIERDZENIE 60.** *Przyjmijmy zapis Def. 55 i niechaj  $(Y, \mathcal{T}_X(Y))$  będzie podprzestrzenią przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$ . Podzbiór  $S \subset Y$  jest domknięty (w topologii podprzestrzeni) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podzbiór domknięty  $C \subset X$  (w topologii  $\mathcal{T}(X)$ ) o własności  $S = C \cap Y$ .*

■

*Dowód:* Domkniętość  $S$  w topologii podprzestrzeni jest równoważna otwartości  $Y \setminus S$  w tejże topologii, czyli istnieniu podzbioru  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$  o własności  $Y \setminus S = \mathcal{O} \cap Y$ , to jednak jest równoważne istnieniu podzbioru domkniętego  $C \subset X$  o własności  $Y \setminus S = (X \setminus C) \cap Y$ , czyli ostatecznie – istnieniu podzbioru domkniętego  $C \subset X$  o własności

$$S \equiv Y \setminus (Y \setminus S) = Y \setminus (X \setminus C) \cup Y \setminus Y = Y \setminus (X \setminus C) = Y \cap C.$$

□

Z kolei pojęcie „zanurzenia topologicznego” przybliża

**STWIERDZENIE 61.** *Przyjmijmy zapis Def. 55. Każde domknięte odwzorowanie ciągłe  $f : X_1 \rightarrow X_2$ , które jest injektywne, jest zanurzeniem topologicznym.*

■

*Dowód:* Wobec injektywności  $f$  odwzorowanie ograniczone  $\tilde{f} : X_1 \rightarrow f(X_2) : x \mapsto f(x)$  jest bijektywne, istnieje zatem jego odwrotność  $\tilde{f}^{-1} : f(X_2) \rightarrow X_1$ , a przy tym ilekroć podzbiór  $\mathcal{O} \subset X_1$  jest domknięty, wówczas jego przeciwobraz  $(\tilde{f}^{-1})^{-1}(\mathcal{O}) = \tilde{f}(\mathcal{O}) \equiv f(\mathcal{O})$  jest domknięty w  $X_2$  wprost na mocy założenia, więc także domknięty w  $f(X_1)$  w topologii podprzestrzeni. To pokazuje, że odwzorowanie  $\tilde{f}^{-1}$  jest ciągłe, przeto  $f$  jest homeomorfizmem na swój obraz. □

W dyskusji obiektów geometrycznych lokalnie modelowanych na strukturach algebraicznych przydatną okaże się także

**DEFINICJA 57.** Przyjmijmy zapis Def. 55. **Otoczeniem punktu**  $x \in X$  przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  nazwiemy dowolny zbiór otwarty  $\mathcal{O}_x \in \mathcal{T}(X)$  zawierający ten punkt,  $\mathcal{O}_x \ni x$ . **Otoczenie podzbioru**  $S \subset X$  to dowolny zbiór otwarty  $\mathcal{O}_S \in \mathcal{T}(X)$  zawierający ten podzbiór,  $\mathcal{O}_S \supset S$ . **Baza otoczeń punktu**  $x$  to podzbiór  $\mathcal{B}_x$  zbioru  $\mathcal{O}_x$  otoczeń  $x$  o własności

$$\forall \mathcal{O}_x \in \mathcal{O}_x \exists \mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}_x : \mathcal{O}_x \supset \mathcal{B}_x.$$

Mówimy, że przestrzeń topologiczna  $(X, \mathcal{T}(X))$  **spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności**, jeśli każdy punkt ma skończoną lub przeliczalnie nieskończoną bazę otoczeń. Ilekroć topologia  $\mathcal{T}(X)$  zbioru  $X$  ma skończoną lub przeliczalnie nieskończoną bazę, orzekamy, że przestrzeń topologiczna  $(X, \mathcal{T}(X))$  **spełnia drugi aksjomat przeliczalności**.

▲

Mamy wygodną redefinicję domknięcia zbioru:

**STWIERDZENIE 62.** *Przyjmijmy zapis Def. 55. Każde otoczenie dowolnego punktu z domknięcia  $\bar{Y}$  podzbioru  $Y$  przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  zawiera punkt należący do  $Y$ . I odwrotnie, dowolny punkt przestrzeni  $X$  o tej własności należy do  $\bar{Y}$ .*

■

Dowód: Istnienie otoczenia  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x \in \bar{Y}$  o pustym przecięciu z  $Y$  oznaczałoby, że zbiór domknięty  $\bar{Y} \cap (X \setminus \mathcal{O}_x)$  będący dopełnieniem w  $X$  sumy mnogościowej  $(X \setminus \bar{Y}) \cup \mathcal{O}_x$  zawiera  $Y$  (gdyż własność tę ma  $\bar{Y}$ ), a przy tym  $\bar{Y} \cap (X \setminus \mathcal{O}_x) \not\subseteq \bar{Y}$  (wszak  $x \in \bar{Y} \setminus (\bar{Y} \cap (X \setminus \mathcal{O}_x))$ ), co przeczy minimalności  $\bar{Y}$ .

Niech teraz  $x \in X$  ma tę własność, że każde jego otoczenie zawiera punkt z  $Y$ . Jeśli  $x$  należał do zbioru otwartego  $X \setminus \bar{Y}$ , to istniałby zbiór domknięty  $\mathcal{C}$  zawierający  $Y$  i taki, że  $x \in X \setminus \mathcal{C}$ , a zatem także  $\mathcal{O}_x \subset X \setminus \mathcal{C}$  dla pewnego otoczenia  $x$ , co prowadziłoby do sprzeczności:  $\mathcal{O}_x \cap Y = \emptyset$ . □

Ustalenie topologii na zbiorze pozwala określić pojęcie zbieżności, o czym mówi

DEFINICJA 58. Przyjmijmy zapis Def. 57. Ciąg  $x. : \mathbb{N} \rightarrow X$  nazwiemy **zbieżnym do**  $x \in X$ , co zapiszemy symbolem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

jeśli każde otoczenie  $\mathcal{O}_x \ni x$  zawiera prawie wszystkie jego wyrazy, tj. jeśli istnieje indeks  $N_{\mathcal{O}_x} \in \mathbb{N}$  o tej własności, że dla każdego  $n \geq N_{\mathcal{O}_x}$  jest  $x_n \in \mathcal{O}_x$ . Punkt  $x$  jest wówczas **granica ciągu**  $x.$  Jeśli natomiast każde otoczenie  $\mathcal{O}_x \ni x$  zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu, to  $x$  nazywamy **punktem skupienia ciągu**. ▲

Relację pomiędzy oboma wprowadzonymi tu pojęciami ustala

STWIERDZENIE 63. *Punkt skupienia dowolnego ciągu punktów w przestrzeni spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności jest granicą pewnego podciągu.* ■

Dowód: Niechaj  $x. : \mathbb{N} \rightarrow X$  będzie ciągiem punktów przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  i niech  $x$  będzie jego punktem skupienia. Wybierzmy dowolną bazę otoczeń  $\{\mathcal{O}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  punktu  $x$  i rozważmy jego otoczenia postaci

$$\mathcal{Q}_N := \bigcap_{n=0}^N \mathcal{O}_n.$$

W świetle definicji punktu skupienia istnieje taki indeks  $n_0 \in \mathbb{N}$ , dla którego  $x_{n_0} \in \mathcal{Q}_0$ , a dalej dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$  określamy rekurencyjnie  $n_{k+1} > n_k$  jako najmniejszy indeks o własności  $x_{n_{k+1}} \in \mathcal{Q}_{k+1}$ . Niechaj teraz  $\mathcal{O}_x$  będzie dowolnym otoczeniem punktu  $x$ , a wówczas  $\mathcal{O}_x \supset \mathcal{O}_n$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ , ponieważ jednak

$$\forall_{k > n} : x_{n_k} \in \mathcal{Q}_k \subset \mathcal{O}_n,$$

przeto stwierdzamy, że  $x$  jest granicą podciągu  $x_{n_k}$ . □

Pojęcie granicy ciągu pozwala wysłowić jeszcze jedną przydatną alternatywną definicję domknięcia zbioru.

STWIERDZENIE 64. *Przyjmijmy zapis Def. 58, zakładając przy tym, że przestrzeń topologiczna  $(X, \mathcal{T}(X))$  spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności. Wówczas dla dowolnego podzbioru  $Y \subset X$  spełniona jest równoważność:*

$$x \in \bar{Y} \iff \exists_{x. : \mathbb{N} \rightarrow Y} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

■

Dowód:

$\implies$  Niechaj  $\{\mathcal{O}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie bazą otoczeń punktu  $x \in \bar{Y}$ . Zdefiniujmy zbiory otwarte

$$\mathcal{Q}_N := \bigcap_{n=0}^N \mathcal{O}_n,$$

z których każdy jest otoczeniem  $x$ , więc też zawiera – w świetle Stw. 62 – punkt  $x_N \in \mathcal{Q}_N \cap Y$ . Ciąg  $\{x_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset Y$  jest jawnie zbieżny do  $x$ .

$\longleftarrow$  Dowolne otoczenie punktu  $x$  zawiera – wprost z konstrukcji – prawie wszystkie wyrazy ciągu  $x$ , z których każdy należy do  $Y$ . Teza wynika zatem bezpośrednio ze Stw. 62. □

Na następnym poziomie uszczegółowienia natrafiamy na

DEFINICJA 59. Przyjmijmy zapis Def. 55. **Pokrycie otwarte** przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  to podzbiór  $\mathcal{O} \equiv \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{T}(X)$  (ideksowany przez pewien zbiór  $\Lambda$ ) o własności

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda = X.$$

Pokrycie otwarte nosi miano **lokalnie skończonego**, jeśli każdy punkt przestrzeni ma otoczenie, które przecina się niepusto tylko ze skończoną liczbą elementów tego pokrycia. **Podpokrycie** pokrycia  $\mathcal{O}$  to dowolny podzbiór  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$  będący pokryciem otwartym  $X$ . **Rozdrobieniem pokrycia**  $\mathcal{O}$  nazwiemy pokrycie otwarte  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  o własności

$$(1.4.1) \quad \forall \alpha \in A \quad \exists \lambda \in \Lambda : \mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{O}_\lambda.$$

Przestrzeń topologiczną nazywamy **zwartą**, jeśli dowolne jej pokrycie otwarte ma podpokrycie skończone. W sytuacji, gdy dowolne pokrycie otwarte ma rozdrobienie lokalnie skończone, mówimy o **przestrzeni parazwartej**. Dowolna zwarta podprzestrzeń topologiczna przestrzeni topologicznej nosi miano **zbioru zwartego**. Podzbiór przestrzeni topologicznej, którego domknięcie jest zbiorem zwartym, nazywamy **zbiorem przwartym**. Przestrzeń topologiczną nazwiemy **lokalnie zwartą** (wzgl. **lokalnie przwartą**), jeśli każdy jej punkt zawiera się w pewnym zbiorze zwartym (wzgl. przwartym) zawierającym pewne otoczenie (otwarte) tego punktu. Wreszcie też przestrzeń topologiczną nazwiemy **ciągowo zwartą**, jeśli każdy ciąg jej elementów zawiera podciąg zbieżny do punktu w tej przestrzeni. Odwzorowanie między dwiema przestrzeniami topologicznymi, względem którego przeciwobrazy zbiorów zwartych są zwarte, zwie się **odwzorowaniem właściwym**. ▲

PRZYKŁAD(Y) 24. (Struktury)

- (1) **Topologia trywialna** na zbiorze  $X$  to  $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, X\}$ .
- (2) **Topologia dyskretna** na zbiorze  $X$  to  $\mathcal{T}(X) \equiv 2^X$ . Zbiór z topologią dyskretną określamy mianem **przestrzeni dyskretniej**.
- (3) **Topologia Hausdorffa** na zbiorze  $X$  to taka, w której każde dwa punkty  $x \neq y \in X$  mają otoczenia wzajem rozłączne. Zbiór z topologią Hausdorffa określamy mianem **przestrzeni Hausdorffa**.

- (4) **Topologia końcowa** (albo **mocna**) na zbiorze  $X$  **indukowana wzdłuż** rodziny odwzorowań  $f_\lambda : Y_\lambda \rightarrow X$ ,  $\lambda \in \Lambda$  **z topologii**  $\mathcal{T}(Y_\lambda)$  na zbiorach  $Y_\lambda$  to

$$f^{-1}(\mathcal{T})(X) = \{ \mathcal{O} \in X \mid \forall \lambda \in \Lambda : f_\lambda^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(Y_\lambda) \}.$$

W szczególności ilekroć mamy do czynienia z pojedynczą przestrzenią topologiczną  $(Y, \mathcal{T}(Y))$  odwzorowaną surjektywnie na  $X$ , odnośną topologię końcową określamy mianem **topologii ilorazowej** na zbiorze  $X$  **indukowanej wzdłuż**  $\pi : Y \rightarrow X$  **z topologii**  $\mathcal{T}(Y)$  na zbiorze  $Y$ , a zbiór  $X$  z topologią ilorazową – mianem **przestrzeni ilorazowej**. Wreszcie też w przypadku sumy rozłącznej

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{ (x, \lambda) \mid x \in X_\lambda, \lambda \in \Lambda \}$$

rodziny zbiorów  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  o odnośnych topologiach  $\mathcal{T}(X_\lambda)$ , indeksowanej przez zbiór (dowolny)  $\Lambda$ , topologię końcową indukowaną wzdłuż kanonicznych zanurzeń

$$\iota_\mu : X_\mu \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : x \mapsto (x, \mu), \quad \mu \in \Lambda$$

zwiemy **topologią sumy rozłącznej**.

- (5) **Topologia początkowa** (albo **słaba**) na zbiorze  $X$  **indukowana wzdłuż** rodziny odwzorowań  $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$  **z topologii**  $\mathcal{T}(Y_\lambda)$  na zbiorach  $Y_\lambda$  to topologia  $f^* \mathcal{T}(X)$  o podbazie

$$\mathcal{B}(X) = \{ f_\lambda^{-1}(\mathcal{O}_\lambda) \mid \mathcal{O}_\lambda \in \mathcal{T}(Y_\lambda), \lambda \in \Lambda \}.$$

Ilekroć mamy do czynienia z odwzorowaniem  $X$  w pojedynczą przestrzeń topologiczną  $(Y, \mathcal{T}(Y))$ , odnośną topologię początkową określamy mianem **topologii cofnięciowej** na zbiorze  $X$  **indukowanej wzdłuż** odwzorowania  $f : X \rightarrow Y$  **z topologii**  $\mathcal{T}(Y)$  na zbiorze  $Y$ . W szczególności w przypadku kanonicznej iniekcji podzbioru w przestrzeń topologiczną odnośna topologia początkowa jest tożsama z topologią podprzestrzeni. Z kolei dla produktu kartezjańskiego  $\times_{n=1}^N X_n$  (skończonej) rodziny zbiorów  $\{X_n\}_{n \in \overline{1, N}}$ ,  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  o odnośnych topologiach  $\mathcal{T}(X_n)$  topologia początkowa indukowana wzdłuż rzutów kanonicznych  $\text{pr}_m : \times_{n=1}^N X_n \rightarrow X_m$ ,  $m \in \overline{1, N}$  to standardowa **topologia produktowa**. Zbiór  $\times_{n=1}^N X_n$  z topologią produktową nazywamy **przestrzenią produktową**. **Topologia zwarto-otwarta** na zbiorze  $C(X_1, X_2)$  odwzorowań ciągłych z przestrzeni Hausdorffa  $(X_1, \mathcal{T}(X_1))$  w przestrzeń Hausdorffa  $(X_2, \mathcal{T}(X_2))$  to topologia  $\mathcal{T}_{\text{co}}(C(X_1, X_2))$  o podbazie

$$\mathcal{B}(C(X_1, X_2)) = \{ \{ f \in C(X_1, X_2) \mid f(\mathcal{K}) \subset \mathcal{O} \} \mid \mathcal{K} \text{ zwarty}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) \}.$$

✓

Mając w ręku konstrukcję topologii produktowej, możemy wysłowić obserwację dotyczącą przydatnej własności (niemal) moltiplikatywności odwzorowań ilorazowych, co czynimy w



STWIERDZENIE 65. *Przyjmijmy zapis Def. 55 i niechaj  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą otwartymi odwzorowaniami ilorazowymi między odnośnymi przestrzeniami topologicznymi  $(X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha))$  oraz  $(Y_\alpha, \mathcal{T}(Y_\alpha))$ . Odwzorowanie produktowe*

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

*jest wówczas odwzorowaniem ilorazowym względem topologii produktowej.*

■

*Dowód:* Surjektywność  $f_1 \times f_2$  jest oczywistą konsekwencją surjektywności obu odwzorowań składowych. Istotnie, dla każdej składowej dowolnego punktu  $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$  znajdujemy punkt w przeciwobrazie  $f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , a wtedy  $(y_1, y_2) = (f_1 \times f_2)(x_1, x_2)$ . Przechodząc do dyskusji podzbiorów otwartych w  $Y_1 \times Y_2$ , stwierdzamy, że warunek  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(Y_1 \times Y_2)$  jest równoważny istnieniu rodzin  $\{\mathcal{O}_i^\alpha\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(Y_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o własności  $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i^1 \times \mathcal{O}_i^2)$ , przy czym otwartość elementów tych rodzin implikuje  $\{f_\alpha^{-1}(\mathcal{O}_i^\alpha)\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(X_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Wówczas jednak przeciwobraz  $(f_1 \times f_2)^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} (f_1^{-1}(\mathcal{O}_i^1) \times f_2^{-1}(\mathcal{O}_i^2))$  jest sumą mnogościową produktów zbiorów otwartych i jako taki jest otwarty w topologii produktowej na  $X_1 \times X_2$ . Dowód implikacji odwrotnej wymaga skorzystania z otwartości odwzorowań składowych. Istotnie, otwartość  $(f_1 \times f_2)^{-1}(\mathcal{O})$  oznacza istnienie rodzin  $\{\mathcal{U}_j^\alpha\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}(X_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o własności  $(f_1 \times f_2)^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{j \in J} (\mathcal{U}_j^1 \times \mathcal{U}_j^2)$ , która pociąga za sobą równość  $\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J} (f_1(\mathcal{U}_j^1) \times f_2(\mathcal{U}_j^2))$ . Otwartość odwzorowań  $f_1$  i  $f_2$  gwarantuje otwartość każdego ze zbiorów  $f_1(\mathcal{U}_j^1)$  i  $f_2(\mathcal{U}_j^2)$ , ta zaś przesądza o przynależności  $\mathcal{O}$  do topologii produktowej  $\mathcal{T}(Y_1 \times Y_2)$ . □

W dalszej części dokonamy przeglądu stwierdzeń dotyczących pojęcia zwartości. Zaczynamy od ustalenia związku między różnymi jej rodzajami.

STWIERDZENIE 66. *Każda zwarta przestrzeń topologiczna spełniająca pierwszy aksjomat przeliczalności jest ciągowo zwarta.*

■

*Dowód:* Niechaj  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  będzie ciągiem punktów w przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności. Załóżmy, że nie istnieje zbieżny podciąg ciągu  $x$ , a zatem – w świetle Stw. 63 – ciąg ten nie posiada punktów skupienia. Oznacza to, że dowolny punkt  $x \in X$  ma otoczenie  $\mathcal{O}_x$  zawierające jedynie skończoną liczbę wyrazów  $x$ . Utworzywszy z takich otoczeń pokrycie otwarte,  $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x$ , możemy następnie – wobec zwartości  $X$  – wybrać z niego podpokrycie skończone  $\{\mathcal{O}_{x_n}\}_{n \in \overline{1, N}}$ , co jednak prowadzi do sprzeczności, oto bowiem każdy z elementów podpokrycia zawiera skończoną liczbę wyrazów  $x$ , co oznacza, że także przestrzeń  $X$  zawiera skończoną ich liczbę. □

W następnej kolejności porządkujemy relacje między pojęciami domkniętości i (para-)zwartości.

STWIERDZENIE 67. *Domknięty podzbiór zwartej przestrzeni topologicznej jest zwarty. Jeśli przestrzeń topologiczna jest przestrzenią Hausdorffa, to także – odwrotnie – dowolny jej zwarty podzbiór jest domknięty. Wreszcie też domknięty podzbiór parazwartej przestrzeni topologicznej jest parazwarty.*

■

Dowód: Niechaj  $(X, \mathcal{T}(X))$  będzie zwartą (wzgl. parazwartą) przestrzenią topologiczną,  $\mathcal{K} \subset X$  zaś – jej domkniętym podzbiorem. Wybierzmy (dowolnie) otwarte pokrycie  $\mathcal{O}$  podzbioru  $\mathcal{K}$ . Zważywszy, że  $X \setminus \mathcal{K}$  jest otwarty,  $\tilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \cup \{X \setminus \mathcal{K}\}$  jest otwartym pokryciem  $X$ , z którego z racji zwartości (wzgl. parazwartości)  $X$  możemy wybrać podpokrycie skończone (wzgl. lokalnie skończone). Usunąwszy z niego – jeśli trzeba –  $X \setminus \mathcal{K}$ , otrzymujemy skończone (wzgl. lokalnie skończone) podpokrycie (pokrycia  $\mathcal{O}$ ) podzbioru  $\mathcal{K}$ , którego istnienie dowodzi zwartości (wzgl. parazwartości)  $\mathcal{K}$ .

Niechaj teraz  $(X, \mathcal{T}(X))$  będzie przestrzenią Hausdorffa,  $\mathcal{K}$  zaś – jej zwartym podzbiorem. Rzecz jasna,  $\mathcal{K}$  z topologią podprzestrzeni jest także przestrzenią Hausdorffa. Wybierzmy (dowolnie) punkt  $x \in X \setminus \mathcal{K}$ . Musimy pokazać, że istnieje otoczenie (w rozumieniu Def. 57)  $\mathcal{O}_x \ni x$  o własności  $\mathcal{O}_x \subset X \setminus \mathcal{K}$ . Z racji hausdorffowskości  $X$  z dowolnym punktem  $y \in \mathcal{K}$  możemy stowarzyszyć parę zbiorów otwartych:  $\mathcal{U}_y \ni x$  oraz  $\mathcal{O}_y \ni y$  o własności  $\mathcal{U}_y \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$ . Zbiór  $\{\mathcal{O}_y \mid y \in \mathcal{K}\}$  jest otwartym pokryciem  $\mathcal{K}$ , z którego wobec zwartości  $\mathcal{K}$  możemy wybrać skończone podpokrycie  $\{\mathcal{O}_{y_i} \mid i \in \overline{1, N}\}$ . Wybierzmy zbiory  $\mathcal{U}_{y_i} \ni x$  dla każdego z punktów  $y_i$  i zdefiniujmy zbiór

$$\mathcal{U} := \bigcap_{i=1}^N \mathcal{U}_{y_i},$$

jawnie otwarty, bo będący przecięciem skończonej rodziny zbiorów otwartych. Jako że  $x \in \mathcal{U}_{y_i}$  dla każdego indeksu  $i \in \overline{1, N}$ , stwierdzamy, że  $x \in \mathcal{U}$ . Wreszcie też  $z \in \mathcal{U}$  implikuje  $z \notin \mathcal{O}_{y_i}$  dla każdego indeksu  $i \in \overline{1, N}$ , przeto  $z \notin \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_{y_i} = \mathcal{K}$ . Zbiór  $\mathcal{U}$  ma zatem wszystkie pożądane własności.  $\square$

Przechodząc do dyskusji funkcji na przestrzeniach (pre)zwartych, znajdujemy nieco mniej elementarną relację

**STWIERDZENIE 68.** *Każde ciągłe odwzorowanie właściwe o dziedzinie spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności oraz lokalnie przewartej przeciwdziedzinie jest domknięte.* ■

Dowód: Niechaj  $f : X_1 \rightarrow X_2$  będzie ciągłym odwzorowaniem właściwym między przestrzeniami topologicznymi  $(X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha))$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i niech  $\mathcal{C} \subset X_1$  będzie zbiorem domkniętym. Wybrawszy dowolny punkt  $y \in f(\mathcal{C})$  w domknięciu  $f(\mathcal{C})$ , wnioskujemy – w odwołaniu do Stw. 64 – o istnieniu ciągu punktów  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f(\mathcal{C})$  zbieżnego do  $y$ ,

$$(1.4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Każdy z tych punktów ma swój przeciwobraz,

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \mathcal{C} : f(x_n) = y_n.$$

Korzystając z lokalnej przewartości  $X_2$ , wybierzmy dowolny przewarty podzbiór  $\mathcal{K} \ni y$ , a wówczas relacja (1.4.2) implikuje istnienie indeksu  $N \in \mathbb{N}$  o własności

$$\forall n > N : y_n \in \mathcal{K} \subset \bar{\mathcal{K}},$$

więc też

$$\forall n > N : x_n \in f^{-1}(\bar{\mathcal{K}}),$$

a ponieważ zbiór  $f^{-1}(\overline{K})$  jest zwarty jako przeciwobraz zbioru zwartego, przeto istnieje – w świetle Stw. 66 – podciąg  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  zbieżny do punktu  $x \in f^{-1}(\overline{K})$ . Jako że  $\mathcal{C} \supset \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  jest domknięty, zachodzi  $x \in \mathcal{C}$ , w takim jednak razie – wobec ciągłości  $f$  –

$$f(x) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y,$$

skąd wniosek, że  $y \in f(\mathcal{C})$  □

Transport struktury przestrzeni zwartej wzdłuż odwzorowań ciągłych, także przydatny w dalszej części wykładu, opisuje

**STWIERDZENIE 69.** *Przyjmijmy zapis Def. 55. Ciągły obraz zwartej przestrzeni topologicznej jest zwarty.* ■

*Dowód:* Niechaj  $(K, \mathcal{T}(K))$  i  $(X, \mathcal{T}(X))$  będą przestrzeniami topologicznymi, przy czym zakładamy, że  $K$  jest zwarta, i niech  $f : K \rightarrow X$  będzie odwzorowaniem ciągłym. Wybierzmy (dowolnie) otwarte pokrycie  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  obrazu  $f(K)$ . Wobec ciągłości  $f$  zbiór  $\{f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  jest otwartym pokryciem  $K$ , z którego możemy wybrać skończone podpokrycie  $\{f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda_0 \subset \Lambda}$ ,  $|\Lambda_0| < \infty$ . Zbiór  $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in S}$  jest wówczas skończonym podpokryciem obrazu i jego istnienie przesądza o zwartości tego ostatniego. □

Wreszcie na koniec przypomnimy pojęcia, które odegrają istotną rolę w przyszłej dyskusji geometrycznych aspektów algebry homologicznej.

**DEFINICJA 60.** Przyjmijmy zapis Def. 55. Przestrzeń topologiczną  $(X, \mathcal{T}(X))$  nazywamy **niespójną**, jeśli istnieją zbiory  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}(X) \setminus \{\emptyset\}$  o własnościach

$$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = X \quad \wedge \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset.$$

Ileokroć zbiory o tych własnościach nie istnieją, przestrzeń  $X$  określamy mianem **spójnej**. Każdy podzbiór  $X$ , który jako podprzestrzeń topologiczna jest spójny, zwie się (**pod**)zbiorem **spójnym**. Określiwszy w  $X$  relację równoważności

$$x \sim y \quad \iff \quad \exists Y \subset X : (Y \text{ spójny} \wedge x, y \in Y),$$

klasy abstrakcji tej relacji (czyli podzbiory spójne maksymalne w sensie relacji  $\subseteq$ ) nazwiemy jej **składowymi spójnymi**. Składowa spójna  $X$  zawierająca punkt  $x \in X$  bywa nazywana **składową spójną punktu  $x$** . **Przestrzeń lokalnie spójna** to taka, której każdy punkt ma bazę otoczeń złożoną ze zbiorów spójnych.

**Ścieżka (ciągła) w  $X$  z punktu  $x \in X$  do punktu  $y \in Y$**  to odwzorowanie ciągle  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  spełniająca warunki  $(\gamma(0), \gamma(1)) = (x, y)$ . Ścieżka zamknięta, tj. taka, która spełnia warunek  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , jest nazywana **pętlą (zaczeponą w  $\gamma(0)$ )**. Zbiór pętli w  $X$  wyposażony w topologię zwarto-otwartą z Przykł. 24 (6) nazywamy **przestrzenią pętli (swobodnych)** i oznaczamy symbolem

$$LX \equiv (C(\mathbb{S}^1, X), \mathcal{T}_{co}(C(\mathbb{S}^1, X))).$$

Istnienie ścieżki łączącej punkty określa na  $X$  relację równoważności

$$x \sim_p y \quad \iff \quad \exists \gamma \in C([0, 1], X) : (\gamma(0) = x \wedge \gamma(1) = y),$$

której klasy abstrakcji nazwiemy jej **składowymi drogowo spójnymi**. Składowa drogowo spójna  $X$  zawierająca punkt  $x \in X$  bywa nazywana **składową drogowo**

**spójną punktu**  $x$ . Przestrzeń topologiczna (niepusta) o jednej składowej drogowo spójnej to **przestrzeń drogowo spójna** (albo **0-spójna**). **Przestrzeń lokalnie drogowo spójna** to taka, której każdy punkt ma bazę otoczeń złożoną ze zbiorów drogowo spójnych.

Dla dowolnych przestrzeni topologicznych  $(X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha))$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i odcinka  $I \equiv [0, 1]$  (wyposażonego w topologię podprzestrzeni indukowaną z  $\mathbb{R}$ ) oraz pary odwzorowań ciągłych  $f_\beta : X_1 \rightarrow X_2$ ,  $\beta \in \{0, 1\}$  odwzorowanie ciągłe

$$H : X_1 \times I \rightarrow X_2$$

spełniające warunki

$$\forall_{x \in X_1} : ( H(x, 0) = f_0(x) \quad \wedge \quad H(x, 1) = f_1(x) )$$

nosi miano **homotopii od**  $f_0$  do  $f_1$ . Dowolne dwa odwzorowania, dla których istnieje odnośna homotopia, nazwiemy **homotopijnymi**. Ilekroć na pewnym (nie-pustym) podzbiórze  $Y_1 \subset X_1$  homotopia  $H$  od  $f_0$  do  $f_1$  oraz powiązane przez nią odwzorowania spełniają warunek

$$\forall_{(y,t) \in Y_1 \times I} : f_0(y) = H(y,t) = f_1(y),$$

mówimy, że odwzorowania  $f_0$  i  $f_1$  są **homotopijne względem**  $Y_1$ . Homotopijność (względem  $Y_1$ ) jest relacją równoważności na zbiorze  $C(X_1, X_2)$  odwzorowań ciągłych z  $X_1$  do  $X_2$ , a jej klasy abstrakcji nazywamy **klasami homotopii (względem  $Y_1$ )**. W szczególności w przypadku  $X_1 = I$  oraz  $Y_1 = \{0, 1\}$  ścieżki homotopijne względem  $Y_1$  nazywamy **drogowo homotopijnymi**. Klasę abstrakcji ścieżki  $\gamma$  względem relacji drogowej homotopii będziemy oznaczać symbolem  $[\gamma]_{\text{ph}}$ . Przestrzeń drogowo spójna  $X$ , w której spełniony jest warunek

$$\forall_{\gamma \in LX} : [\gamma]_{\text{ph}} = [\gamma(0)_*]_{\text{ph}},$$

w którego zapisie  $\gamma(0)_*$  oznacza pętlę stałą  $\gamma(0)_* : [0, 1] \rightarrow \{\gamma(0)\} \subset X$ , nosi miano **przestrzeni jednospójnej** (wzgl. **1-spójnej**). Każdy podzbiór  $X$ , który jako podprzestrzeń topologiczna jest jednospójny, zwie się **(pod)zbiorem jednospójnym** (wzgl. **1-spójnym**).

**Nakrycie (topologiczne)** to trójka  $(\tilde{X}, X, \pi)$  złożona z drogowo spójnej i lokalnie drogowo spójnej przestrzeni topologicznej  $(\tilde{X}, \mathcal{T}(\tilde{X}))$ , zwanej **przestrzenią nakrywającą** (lub **przestrzenią totalną nakrycia**), i przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$ , zwanej **bazą nakrycia**, oraz ciągłej surjekcji  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ , zwanej **rzutem nakrycia**, przy czym każdy punkt  $x \in X$  ma spójne otoczenie  $\mathcal{O}_x$  **równomiernie pokryte** przez  $\pi$ , tj. takie, że każda spójna składowa przeciwobrazu  $\pi^{-1}(\mathcal{O}_x)$ , zwana **gałęzią nakrycia**, jest przez  $\pi$  odwzorowywana homeomorficznie na  $\mathcal{O}_x$ . Przestrzeń dyskretną  $\pi^{-1}(\{x\}) \equiv \tilde{X}_x$  nazywamy **włóknem nakrycia nad  $x$** , a jego moc, lokalnie stałą na bazie (czyli stałą na spójnych składowych bazy), określamy mianem **krotności nakrycia**. Nakrycie o globalnie stałej krotności  $n \in \mathbb{N}$  zwie się **nakryciem  $n$ -krotnym**. Ilekroć przestrzeń nakrywająca jest jednospójna, mówimy o **nakryciu uniwersalnym**. ▲

UWAGA 14. Jest oczywiste, że każda przestrzeń 0-spójna jest zarazem spójna. O tym, że oba pojęcia nie są równoważne, przekonuje analiza **sinusoidy zagęszczonej** (zwanej też **sinusoidą warszawską**), czyli zbioru

$$S := \{ (x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^{\times 2} \mid x \in ]0, \frac{1}{\pi}] \} \cup \{ (0, y) \in \mathbb{R}^{\times 2} \mid y \in [-1, 1] \}$$

wyposażonego w topologię podprzestrzeni indukowaną z  $\mathbb{R}^2$ .

$\bar{\wedge}$

## 2. Fundamentalne struktury i twierdzenia analizy

Dyskusja własności analitycznych (wyższego rzędu) odwzorowań między przestrzeniami topologicznymi lokalnie modelowanymi na (otwartych podzbiorach)  $\mathbb{R}^n$ , a zatem także – w konsekwencji powyższego – analiza strukturalnych relacji między rzeczonymi przestrzeniami (takich jak zanurzenie, nakrycie *etc.*), w szczególności zaś zrozumienie (lokalnych) automorfizmów tychże przestrzeni indukowanych przez gładkie rozkłady wektorów stycznych nad nimi, wymagają elementarnych narzędzi teorii przestrzeni Banacha, które rekapitulujemy zwięźle w niniejszym rozdziale. Zaczynamy od

DEFINICJA 61. Przyjmijmy zapis Def. 15. **Metryka** na zbiorze  $X$  to odwzorowanie

$$d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

o własnościach:

- (MS1)  $\forall_{x,y,z \in X} : d_X(x,z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z)$  („nierówność trójkąta”);
- (MS2)  $\forall_{x,y \in X} : d_X(y,x) = d_X(x,y)$  (symetria);
- (MS3)  $\forall_{x,y \in X} : (d_X(x,y) = 0 \implies y = x)$  (niezwyrodnienie).

Para  $(X, d_X)$  złożona ze zbioru  $X$  wyróżnioną metryką  $d_X$  nosi miano **przestrzeni metrycznej**. Dwie metryki  $d_X^1$  i  $d_X^2$  na zbiorze  $X$  nazwiemy **równoważnymi**, jeśli istnieją stałe  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  o własności

$$\forall_{x,y \in X} : C_1 \cdot d_X^1(x,y) \leq d_X^2(x,y) \leq C_2 \cdot d_X^1(x,y).$$

**Kula otwarta o środku w  $x \in X$  i promieniu  $R \in \mathbb{R}_{>0}$**  to zbiór

$$B_X(x; R) := \{ y \in X \mid d_X(y, x) < R \}.$$

Topologia przestrzeni metrycznej złożona z podzbiorów  $\mathcal{O} \subset X$  spełniających warunek

$$\forall_{x \in \mathcal{O}} \exists_{R \in \mathbb{R}_{>0}} : B_X(x; R) \subset \mathcal{O},$$

a więc mająca za bazę zbiór wszystkich kul otwartych w  $X$ , jest znana jako **topologia metryczna**. **Podzbiór ograniczony**  $\mathcal{B}$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d_X)$  to taki, który spełnia warunek

$$\exists_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \forall_{x,y \in \mathcal{B}} : d_X(x,y) \leq R.$$

Odwzorowanie  $f : S \longrightarrow X$  ze zbioru  $S$  w przestrzeń metryczną  $X$  nazwiemy **ograniczonym**, jeśli jego zbiór wartości  $f(S) \subset X$  jest ograniczony. Pośród odwzorowań między przestrzeniami metrycznymi  $(X_1, d_{X_1})$  i  $(X_2, d_{X_2})$  wyróżniamy **izometrie**, tj. odwzorowania  $f : X_1 \longrightarrow X_2$  o własności

$$\forall_{x,y \in X_1} : d_{X_2}(f(x), f(y)) = d_{X_1}(x,y).$$

Przestrzenie metryczne wraz z izometriami tworzą **kategorię przestrzeni metrycznych**, którą w dalszej części naszych rozważań będziemy oznaczać symbolem Metr. W kategorii tej istnieje struktura produktowa – w szczególności ustaliliśmy

dowolnie  $p \in \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ , **iloczynem kartezjańskim typu  $p$  przestrzeni metrycznych**  $(X_k, d_{X_k})$ ,  $k \in \overline{1, N}$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  będziemy nazywać przestrzeń metryczną

$$\left( \prod_{k=1}^N X_k, d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)} \right)$$

z **metryką produktową typu  $p$**  daną formułą

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)} &: \prod_{k=1}^N X_k \times \prod_{l=1}^N X_l \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &: ((x_1, x_2, \dots, x_N), (y_1, y_2, \dots, y_N)) \longmapsto \left( \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

dla  $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ , wzgl.

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)} &: \prod_{k=1}^N X_k \times \prod_{l=1}^N X_l \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &: ((x_1, x_2, \dots, x_N), (y_1, y_2, \dots, y_N)) \longmapsto \max_{k \in \overline{1, N}} d_{X_k}(x_k, y_k). \end{aligned}$$

**Ciąg Cauchy'ego** w przestrzeni metrycznej to dowolny ciąg  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  o własności

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall m, n > N_\varepsilon : d_X(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Jeśli każdy ciąg Cauchy'ego punktów z  $X$  ma granicę w  $X$  w sensie Def. 58 w topologii metrycznej, tj. istnieje dlań punkt  $x \in X$  o własności

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > N_\varepsilon : d_X(x, x_n) < \varepsilon,$$

to wówczas  $X$  określamy mianem **zupełnej przestrzeni metrycznej**.

**Norma** na grupie przemiennej  $G$  to odwzorowanie

$$\|\cdot\| : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

o własnościach:

- (NG1)  $\forall g, h \in G : \|g + h\| \leq \|g\| + \|h\|$  („nierówność trójkąta”);
- (NG2)  $\forall (n, g) \in \mathbb{Z} \times G : \|ng\| = |n| \cdot \|g\|$  (absolutna  $\mathbb{Z}$ -jednorodność stopnia 1);
- (NG3)  $\forall g \in G : (\|g\| = 0 \implies g = 0_G)$  (niezwyrodnienie).

Grupę z wyróżnioną normą nazywamy **grupą unormowaną** (lub **grupą z normą**). Analogicznie definiujemy **unormowany pierścień przemienny** (lub **pierścień przemienny z normą**) jako taki, którego grupa przemienna (z dodawaniem) jest grupą unormowaną, a do tego spełniony jest aksjomat

$$(NR1) \quad \forall g, h \in G : \|g \cdot_R h\| \leq \|g\| \cdot \|h\|.$$

Plekość pierścienia niesie bogatszą strukturę ciała, mówimy o **ciele unormowanym** (lub **ciele z normą**). Wreszcie też **unormowana przestrzeń wektorowa** (lub **przestrzeń wektorowa z normą**) to przestrzeń liniowa  $V$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  z normą  $\|\cdot\|_{\mathbb{K}}$ , w której grupa przemienna  $V$  jest wyposażona w normę  $\|\cdot\|_V$  o dodatkowej własności

$$(NV1) \quad \forall (\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V : \|\lambda \triangleright v\|_V = \|\lambda\|_{\mathbb{K}} \cdot \|v\|_V.$$

Norma na przestrzeni wektorowej indukuje na niej (jawnie translacyjnie niezmienniczą) metrykę

$$\forall v, w \in V : d_V(v, w) := \|v - w\|_V.$$

Unormowaną przestrzeń wektorową zupełną względem tejże metryki określamy mianem **przestrzeni Banacha**.

**Ograniczony operator liniowy** między przestrzeniami Banacha  $(V_1, \|\cdot\|_1)$  i  $(V_2, \|\cdot\|_2)$  to odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe  $\chi : V_1 \rightarrow V_2$ , dla którego istnieje stała  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  o własności

$$\forall v \in V_1 : \|\chi(v)\|_2 \leq C \cdot \|v\|_1.$$

Przestrzeń  $\mathbb{K}$ -liniową powyższych ograniczonych operatorów liniowych będziemy oznaczać symbolem

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \equiv \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \mid \chi \text{ ograniczony} \},$$

stosując także notację skróconą

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V) \equiv \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V, V).$$

Przestrzeń Banacha wraz z ograniczonymi operatorami liniowymi tworzą **kategorię przestrzeni Banacha** (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ), którą w dalszej części naszych rozważań będziemy oznaczać symbolem  $\text{Ban}_{\mathbb{K}}$ . ▲

**UWAGA 15.** Jedynym nieoczywistym elementem powyższej definicji jest konstrukcja metryk produktowych  $d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)}$ , a ściśle – nierówność trójkąta dla zapostulowanej metryki. Oznaczmy  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  i  $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ . Jej dowód w przypadku  $p = \infty$  jest natychmiastowy:

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)}(x, y) &\equiv \max_{k \in \overline{1, N}} d_{X_k}(x_k, y_k) \leq \max_{k \in \overline{1, N}} (d_{X_k}(x_k, z_k) + d_{X_k}(z_k, y_k)) \\ &\leq \max_{k \in \overline{1, N}} d_{X_k}(x_k, z_k) + \max_{l \in \overline{1, N}} d_{X_l}(z_l, y_l) \\ &\equiv d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)}(x, z) + d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)}(z, y). \end{aligned}$$

Podobnie jest w przypadku  $p = 1$ ,

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)}(x, y) &\equiv \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, y_k) \leq \sum_{k=1}^N (d_{X_k}(x_k, z_k) + d_{X_k}(z_k, y_k)) \\ &= \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, z_k) + \sum_{l=1}^N d_{X_l}(z_l, y_l) \\ &\equiv d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)}(x, z) + d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)}(z, y). \end{aligned}$$

Natomiast przypadek  $p \in ]1, \infty[$  jest nieco bardziej złożony i wymaga wykorzystania układu nierówności, które obecnie przedyskutujemy. Ustaliwszy dowolnie wartość parametru  $\alpha \in ]0, 1[$ , rozważmy funkcję

$$f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \alpha t - t^\alpha.$$

Jako że

$$f'(t) = \alpha(1 - t^{\alpha-1}),$$

przeto funkcja ta maleje ściśle monotonicznie na przedziale  $]0, 1[$ , osiąga minimum globalne w  $t = 1$ , a następnie rośnie ściśle monotonicznie na przedziale  $]1, \infty[$ . To pozwala zapisać nierówność

$$\forall t \in ]0, \infty[ : \alpha t - t^\alpha = f(t) \geq f(1) = \alpha - 1.$$

Przedstawimy  $t \in ]0, \infty[$  w postaci ilorazu  $t = \frac{a}{b}$  liczb dodatnich  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ , otrzymujemy tym sposobem nierówność

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b,$$

która – gdy wyrazić ją w terminach  $p = \frac{1}{\alpha}$  oraz  $q = \frac{1}{1-\alpha}$  – przybiera postać

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Podstawienie  $A := a^{\frac{1}{p}}$  i  $B := b^{\frac{1}{q}}$  prowadzi nas do **nierówności Younga**

$$\forall A, B \in \mathbb{R}_{\geq 0} : AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

(nierówność rozszerza się trywialnie na przypadek  $AB = 0$ , którego nie obejmują nasze dotychczasowe rozważania), słusznej dla liczb  $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$  **hölderowsko sprzężonych**, tj. takich, które spełniają warunek

$$(1.4.3) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

O optymalnej naturze powyższego oszacowania przekonuje rozumowanie analogiczne do powyższego poprowadzone w odniesieniu do równoważności

$$f(t) = f(1) \quad \iff \quad t = 1,$$

które pokazuje, że nierówność jest wysycana (jedyne) przy  $A^p = B^q$ . Połóżmy następnie  $A := \lambda a_i$  oraz  $B := \mu b_i$  dla  $\lambda, \mu, a_i, b_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  oraz  $i \in \overline{1, N}$ , po czym przesumujemy stronami uzyskane tym sposobem nierówności,

$$\lambda \mu \sum_{i=1}^N a_i b_i \leq \frac{\lambda^p \sum_{i=1}^N a_i^p}{p} + \frac{\mu^q \sum_{j=1}^N b_j^q}{q}.$$

Wybór

$$\lambda := \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{-\frac{1}{p}}, \quad \mu := \left( \sum_{i=1}^N b_i^q \right)^{-\frac{1}{q}},$$

poczyniony przy założeniu niezerowości którejś z liczb  $a_i$  oraz którejś z liczb  $b_i$ , odtwarza **nierówność Höldera** (wariant rzeczywisty nieujemny)

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_N), (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \sum_{i=1}^N a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{j=1}^N b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

W szczególnym przypadku  $p = 2 = q$  otrzymujemy **nierówność Schwarza** (wariant rzeczywisty nieujemny)

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_N), (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \left( \sum_{i=1}^N a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^N a_i^2 \cdot \sum_{j=1}^N b_j^2.$$

Na zakończenie naszego wywodu zapiszmy (w dotychczasowych oznaczeniach) zastosujemy otrzymaną wcześniej nierówność Höldera do każdego ze składników prawej strony równości

$$\sum_{i=1}^N (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^N a_i \cdot (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{j=1}^N b_j \cdot (a_j + b_j)^{p-1},$$



otrzymując oszacowanie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (a_i + b_i)^p &\leq \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{j=1}^N (a_j + b_j)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{k=1}^N b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{l=1}^N (a_l + b_l)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^N b_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^N b_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wykorzystuje warunek (1.4.3). Dzieliąc ostatnią nierówność obustronnie przez  $\left( \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{q}}$  i korzystając raz jeszcze z warunku (1.4.3), otrzymujemy na koniec wielce pożądaną **nierówność Minkowskiego** (wariant rzeczywisty nieujemny)

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_N), (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \left( \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^N b_j^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

słuszną dla dowolnego  $p \in ]1, \infty[$ , a także – rzecz jasna – dla  $p = 1$  oraz w granicy (rozumianej jak wcześniej)  $p \rightarrow \infty$ . Na podstawie powyższej nierówności bez trudu dowodzimy, dla dowolnego  $p \in ]1, \infty[$ ,

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)}(x, y) &\equiv \left( \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \sum_{k=1}^N (d_{X_k}(x_k, z_k) + d_{X_k}(z_k, y_k))^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, z_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{l=1}^N d_{X_l}(z_l, y_l)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\equiv d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)}(x, z) + d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)}(z, y). \end{aligned}$$

□

PRZYKŁAD(Y) 25. (Struktury)

(1) Przestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa  $\mathbb{R}^{\times N}$ ,  $N \in \mathbb{N}^{\times}$  wraz z pitagorejską miarą odległości

$$\|y - x\|_N := \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2} \equiv d_{\mathbb{R}^{\times N}}^{(2)},$$

między punktami  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{\times N}$  i  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{\times N}$ , którą będziemy także określać mianem **normy euklidesowej**, jest przestrzenią Banacha. Jest to, rzecz jasna, przestrzeń Hausdorffa. Kulę otwartą w tej przestrzeni o środku w  $x \in \mathbb{R}^{\times N}$  i promieniu  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  będziemy oznaczać symbolem

$$B_{\mathbb{R}^{\times N}}(x; R) \equiv B^N(x; R).$$

Z kolei  **$N$ -kostką** nazwiemy dowolny zbiór postaci

$$(1.4.4) \prod_{i=1}^N [a_i, b_i] \equiv \{ (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{\times N} \mid \forall_{n \in \overline{1, N}} : a_i \leq x_i \leq b_i \},$$

zdefiniowany dla dowolnych  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \overline{1, N}$ . Standardową topologię metryczną na  $\mathbb{R}^{\times N}$  zadawaną przez normę euklidesową będziemy oznaczać symbolem

$$\mathcal{F}_E(\mathbb{R}^{\times N}).$$

(2)

✓

Relacje między wprowadzonymi powyżej produktowymi strukturami metrycznymi porządkuje

**STWIERDZENIE 70.** *Przyjmijmy zapis Def. 61. Metryki produktowe typu  $p \in \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$  są wzajem równoważne.*

■

Dowód: Oznaczmy  $d_k := d_{X_k}(x_k, y_k)$ . Na podstawie ciągu nierówności

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N d_k &\leq N \cdot \max_{k \in \overline{1, N}} d_k \leq N \cdot \left( \sum_{k=1}^N d_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq N \cdot \left( N \cdot \max_{k \in \overline{1, N}} d_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \equiv N^{\frac{p+1}{p}} \cdot \max_{k \in \overline{1, N}} d_k \\ &\leq N^{\frac{p+1}{p}} \cdot \sum_{k=1}^N d_k, \end{aligned}$$

zapisanego dla  $p \in ]1, \infty[$ , wnioskujemy, że

$$d_{\times_{k=1}^N X_k}^{(1)} \leq N \cdot d_{\times_{k=1}^N X_k}^{(\infty)} \leq N \cdot d_{\times_{k=1}^N X_k}^{(p)} \leq N^{\frac{p+1}{p}} \cdot d_{\times_{k=1}^N X_k}^{(\infty)} \leq N^{\frac{p+1}{p}} \cdot d_{\times_{k=1}^N X_k}^{(1)},$$

co przesądza o równoważności wszystkich rozpatrywanych metryk. □

Definicja metryki implikuje oczywiste, acz przydatne

**STWIERDZENIE 71.** *Przyjmijmy zapis Def. 61. W przestrzeni metrycznej  $(X, d_X)$  zachodzi relacja*

$$\forall x, y, z \in X : |d_X(x, y) - d_X(z, y)| \leq d_X(x, z),$$

w szczególności więc w unormowanej przestrzeni wektorowej  $(V, \|\cdot\|_V)$  spełniony jest warunek

$$\forall v, w \in V : \left| \|v\|_V - \|w\|_V \right| \leq \|v - w\|_V.$$

■

Dowód: Bezpośrednia konsekwencja nierówności trójkąta oraz symetrii metryki. □

Obecność struktury metrycznej pozwala wprowadzić wygodną, a w pełni równoważną definicję ciągłości, którą opisuje

**STWIERDZENIE 72.** *Przyjmijmy zapis Def. 61 i niechaj  $(X_\alpha, d_{X_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  jest ciągłe w punkcie  $x_0 \in X_1$  wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(1.4.5) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon, x_0} \forall x \in X_1 : \left( d_{X_1}(x, x_0) < \delta_{\varepsilon, x_0} \implies d_{X_2}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \right).$$

■

*Dowód:* Załóżmy, że  $f$  jest ciągle, a wtedy przeciwobraz  $f^{-1}(B_{X_2}(f(x_0); \varepsilon)) \ni x_0$  kuli otwartej  $B_{X_2}(f(x_0); \varepsilon)$ , czyli zbioru punktów  $y \in X_2$  spełniających warunek  $d_{X_2}(y, f(x_0)) < \varepsilon$ , jest otwarty w  $X_1$ , zatem – wprost z definicji – zawiera pewną kulę  $B_{X_1}(x_0; \delta_{\varepsilon, x_0})$ ,  $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ , czyli zbiór punktów  $x \in X_1$  spełniających warunek  $d_{X_1}(x, x_0) < \delta_{\varepsilon, x_0}$ . I odwrotnie – przyjmijmy, że jest spełniony warunek (1.4.5). Dowolne otoczenie  $\mathcal{O} \subset X_2$  punktu  $f(x_0)$  zawiera pewną kulę  $B_{X_2}(f(x_0); \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ , w której przeciwobrazie względem  $f$  zawiera się kula  $B_{X_1}(x_0; \delta_{\varepsilon, x_0})$  – ta ostatnia jest poszukiwanym otoczeniem  $x_0$ .  $\square$

Powyższe pozwala zrozumieć funkcjonalny sens warunku równoważności metryk na przestrzeni wektorowej, który ukazuje

**STWIERDZENIE 73.** *Odwzorowanie pomiędzy dwiema przestrzeniami metrycznymi ciągle względem topologii metrycznych indukowanych przez parę metryk na jego dziedzinie i przeciwdziedzinie jest ciągle względem topologii metrycznych indukowanych przez każdą inną parę metryk równoważnych.*

■

*Dowód:* Posłużymy się definicją ciągłości ze Stw. 72, zaadaptowaną do kategorii metrycznej. Rozważmy odwzorowanie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  między parą przestrzeni metrycznych  $(X_\alpha, d_{X_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  ciągle w punkcie  $x_0 \in X_1$  w odnośnych topologiach metrycznych, tj. spełniające warunek (1.4.5). Niechaj  $\tilde{d}_{X_\alpha}$  będzie metryką na  $X_\alpha$  równoważną z  $d_{X_\alpha}$ , tj. spełniającą układ warunków

$$\forall_{x_\alpha, y_\alpha \in X_\alpha} : C_{\alpha,1} \cdot d_{X_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha) \leq \tilde{d}_{X_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha) \leq C_{\alpha,2} \cdot d_{X_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha), \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

Wówczas wybierając, dla ustalonego  $\varepsilon > 0$ , ograniczenie postaci  $\tilde{\delta}_{\varepsilon, x_0} := C_{1,1} \cdot \delta_{\frac{\varepsilon}{C_{2,2}}, x_0}$  w

$$\tilde{d}_{X_1}(x, x_0) < \tilde{\delta}_{\varepsilon, x_0},$$

otrzymujemy ograniczenie

$$d_{X_1}(x, x_0) \leq \frac{1}{C_{1,1}} \cdot \tilde{d}_{X_1}(x, x_0) < \frac{1}{C_{1,1}} \cdot \tilde{\delta}_{\varepsilon, x_0} \equiv \delta_{\frac{\varepsilon}{C_{2,2}}, x_0},$$

a stąd

$$\tilde{d}_{X_2}(f(x), f(x_0)) \leq C_{2,2} \cdot d_{X_2}(f(x), f(x_0)) < C_{2,2} \cdot \frac{\varepsilon}{C_{2,2}} = \varepsilon.$$

□

Aksjomatyka struktury metrycznej prowadzi wprost do naturalnego, a przy tym nader przydatnego

**STWIERDZENIE 74.** *Przyjmijmy zapis Def. 61. Metryka  $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  jest odwzorowaniem ciągłym względem topologii w swej dziedzinie  $X \times X$  indukowanej przez metrykę produktową typu  $p \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  oraz topologii na  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  indukowanej przez metrykę euklidesową (na  $\mathbb{R}$ ). W szczególności więc także dowolna norma na grupie przemiennej ma tę własność.*

■

*Dowód:* Wobec równoważności wszystkich metryk typu  $p$  na  $X \times X$ , orzeczonej w Stw. 70, możemy – na gruncie Stw. 73 – ograniczyć nasze rozważania do metryki

$d_{X \times X}^{(1)}$ . Korzystając ze Stw. 71, obliczamy zatem, dla dowolnych  $(x, y), (x_0, y_0) \in X \times X$ ,

$$\begin{aligned} |d_X(x, y) - d_X(x_0, y_0)| &\equiv |d_X(x, y) - d_X(x_0, y) + d_X(x_0, y) - d_X(x_0, y_0)| \\ &\leq |d_X(x, y) - d_X(x_0, y)| + |d_X(x_0, y) - d_X(x_0, y_0)| \\ &\leq d_X(x, x_0) + d_X(y, y_0) \equiv d_{X \times X}^{(1)}((x, y), (x_0, y_0)), \end{aligned}$$

co prowadzi nas do wniosku, że dla uzyskania – dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  – ograniczenia

$$|d_X(x, y) - d_X(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

przesądzającego o ciągłości metryki w punkcie  $(x_0, y_0) \in X \times X$  jej dziedziny, wystarczy narzucić ograniczenie

$$d_{X \times X}^{(1)}((x, y), (x_0, y_0)) < \varepsilon =: \delta_{\varepsilon, (x_0, y_0)}.$$

□

Obecność struktury metrycznej na dziedzinie i przeciwdziedzinie odwzorowania (w szczególności zaś analiza dowodu ostatniego stwierdzenia) pozwala wysubtelnić pojęcie ciągłości, co prowadzi do

**DEFINICJA 62.** Przyjmijmy zapis Def. 61. Odwzorowanie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  między przestrzeniami metrycznymi  $(X_\alpha, d_{X_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nazwiemy **jednostajnie ciągłym**, jeśli spełnia warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in X_1 : (d_{X_1}(x, y) < \delta_\varepsilon \implies d_{X_2}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

▲

Mamy w tym kontekście podstawowe

**STWIERDZENIE 75.** *Odwzorowanie ciągłe o zwartej dziedzinie jest jednostajnie ciągłe.*

■

*Dowód:* Rozważmy odwzorowanie ciągłe  $f : X_1 \rightarrow X_2$  o zwartej dziedzinie  $X_1$ . Ustalmy (dowolnie)  $\varepsilon > 0$ . Ciągłość  $f$  oznacza, że każdy z punktów  $x \in X_1$  należy do przeciwoobrazu  $f^{-1}(B_{X_2}(f(x); \varepsilon))$  otwartej kuli  $B_{X_2}(f(x); \varepsilon)$  wraz z pewnym otoczeniem otwartym, więc też – wraz z pewną kulą otwartą  $B_{X_1}(x; r_{x, \varepsilon})$ . Rodzina kul  $\{B_{X_1}(x; \frac{r_{x, \varepsilon}}{2})\}_{x \in X_1}$  stanowi pokrycie otwarte  $X_1$ , z którego wobec zwartości tej przestrzeni można wybrać podpokrycie skończone  $\mathcal{B} \equiv \{B_{X_1}(x_n; \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2})\}_{n \in \overline{1, N}}$ . Oznaczmy

$$\delta_\varepsilon := \min_{n \in \overline{1, N}} \left\{ \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2} \right\},$$

a wówczas nierówności

$$d_{X_1}(y, x) < \delta_\varepsilon, \quad d_{X_1}(x, x_n) < \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2} < r_{x_n, \varepsilon},$$

z których druga jest spełniona dla pewnego  $n \in \overline{1, N}$  (wszak  $\mathcal{B}$  jest pokryciem  $X_1$ ), implikują relację

$$d_{X_1}(y, x_n) \leq d_{X_1}(y, x) + d_{X_1}(x, x_n) < 2 \cdot \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2} = r_{x_n, \varepsilon},$$

ta zaś oznacza, że  $y$  tak jak  $x$  leży wewnątrz kuli  $B_{X_1}(x; r_{x,\varepsilon})$  i – co za tym idzie – spełnia wielce pożądaną warunek

$$f(y) \in B_{X_2}(f(x); \varepsilon).$$

□

Nader istotnej egzemplifikacji pojęcia przestrzeni Banacha dostarcza

**STWIERDZENIE 76.** *Przyjmijmy zapis Def. 61. Niechaj  $(X, d_X)$  będzie przestrzenią metryczną i niech  $V$  będzie przestrzenią Banacha nad ciałem  $\mathbb{K}$  względem normy  $\|\cdot\|_V$ . Przestrzeń  $C_b(X, V)$  ograniczonych odwzorowań ciągłych na  $X$  o wartościach w  $V$  jest przestrzenią Banacha względem **normy supremum***

$$\|\cdot\|_\infty : C_b(X, V) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : f \longmapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V.$$

■

*Dowód:* Jest oczywistym, że para  $(C_b(X, V), \|\cdot\|_\infty)$  jest przestrzenią unormowaną. W szczególności supremum (normy) sumy jest majoryzowane przez sumę supremów (norm), więc

$$\|f + g\|_\infty \equiv \sup_{x \in X} \|f(x) + g(x)\|_V \leq \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V + \sup_{x \in X} \|g(x)\|_V = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Pozostaje wykazać zupełność  $(C_b(X, V), \|\cdot\|_\infty)$ . W tym celu rozważmy ciąg Cauchy'ego  $f : \mathbb{N} \longrightarrow C_b(X, V) : n \longmapsto f_n$ . W dowolnym punkcie  $x \in X$  definiuje on ciąg  $f(x) : \mathbb{N} \longrightarrow V : n \longmapsto f_n(x)$ , który także jest ciągiem Cauchy'ego, oto bowiem

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_V \leq \sup_{y \in X} \|f_n(y) - f_m(y)\|_V \equiv \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Wobec zupełności  $V$  otrzymujemy zatem odwzorowanie

$$f : X \longrightarrow V : x \longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)).$$

Bez trudu dowodzimy, że odwzorowanie to jest ciągłe. Istotnie, ustalwszy (dowolnie)  $\varepsilon > 0$ , wybierzmy  $N \in \mathbb{N}$  tak, by było

$$\forall m, n \geq N : \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

a wtedy w dowolnym punkcie  $x \in X$  stwierdzamy, że

$$\|f_m(x) - f_n(x)\|_V \leq \sup_{y \in X} \|f_m(y) - f_n(y)\|_V \equiv \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

więc też (wobec ciągłości  $\|\cdot\|_V$ )

$$\|f(x) - f_n(x)\|_V = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m(x) - f_n(x)\|_V < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Korzystając z ciągłości  $f_n$  w (dowolnym) punkcie  $x \in X$ , możemy następnie dobrać  $\delta > 0$  tak, by było

$$\forall y \in X : [ d(x, y) < \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\|_V < \frac{\varepsilon}{3} ],$$

a wtedy, ostatecznie,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_V &\leq \|f(x) - f_n(x)\|_V + \|f_n(x) - f_n(y)\|_V + \|f_n(y) - f(y)\|_V \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

co dowodzi ciągłości  $f$  w  $x \in X$ , czyli też – wobec dowolności  $x$  – ciągłości w całej dziedzinie.

W następnej kolejności pokażemy, że  $f$  jest ograniczone. Wybierzmy  $n > N$  dla  $N \in \mathbb{N}$  jak wyżej, a wtedy

$$\|f - f_n\|_\infty \equiv \sup_{x \in X} \|f(x) - f_n(x)\|_V = \sup_{x \in X} \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{N+m}(x) - f_n(x)\|_V < \sup_{x \in X} \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon = \varepsilon,$$

co pokazuje, że  $f$  jest punktem skupienia ciągu  $f$  w przestrzeni  $C(X, V)$ , a nadto pozwala policzyć – dla  $n$  na tyle dużego, że  $\|f - f_n\|_\infty < 1$  – normę

$$\|f\|_\infty = \|f - f_n + f_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty < \|f_n\|_\infty + 1 < \infty$$

i tym samym zakończyć dowód zupełności  $C_b(X, V)$ .  $\square$

Mamy także przykład pokrewny, a przy tym nie mniej istotny, o którym mówi

**STWIERDZENIE 77.** *Przyjmijmy zapis Def. 61. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ , przy czym zakładamy, że  $V_2$  jest przestrzenią Banacha względem normy  $\|\cdot\|_2$ . Przestrzeń  $\mathbb{K}$ -liniowa  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  jest przestrzenią Banacha względem **normy operatorowej***

$$\|\cdot\|_{\text{op}} : \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \chi \longmapsto \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi(v)\|_2}{\|v\|_1} \equiv \sup_{v \in \|\cdot\|_1^{-1}(\{1\})} \|\chi(v)\|_2.$$

*Odwzorowanie prawostronnie stowarzyszone z (jawnie dwu- $\mathbb{K}$ -liniowym odwzorowaniem) **odwzorowaniem ewaluacji***

$$\text{ev} : \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \times V_1 \longrightarrow V_2 : (\chi, v) \longmapsto \chi(v) \equiv \text{ev}_v(\chi),$$

*tj. odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe*

$$r_{\text{ev}} : V_1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), V_2) : v \longmapsto \text{ev}_v,$$

*spełnia relację*

$$\text{Im } r_{\text{ev}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), V_2).$$

■

Dowód: Rozważmy ciąg Cauchy'ego  $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  oraz – dla dowolnego wektora  $v \in V_1 \setminus \{0_{V_1}\}$  – ciąg wektorów  $\{\chi_n(v)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_2$ , który spełnia tożsamość

$$\begin{aligned} \|\chi_n(v) - \chi_m(v)\|_2 &\equiv \|v\|_1 \cdot \frac{\|\chi_n(v) - \chi_m(v)\|_2}{\|v\|_1} \leq \|v\|_1 \cdot \sup_{w \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_n(w) - \chi_m(w)\|_2}{\|w\|_1} \\ &\equiv \|v\|_1 \cdot \|\chi_n - \chi_m\|_{\text{op}}, \end{aligned}$$

a zatem dla dostatecznie dużych wartości  $m_v$  i  $n_v$

$$\|\chi_{n_v}(v) - \chi_{m_v}(v)\|_2 < \varepsilon.$$

Jest więc  $\{\chi_n(v)\}_{n \in \mathbb{N}}$  ciągiem Cauchy'ego, co w konsekwencji zupełności  $V_2$  implikuje istnienie wektorów

$$\underline{\chi}(v) := \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(v) \in V_2.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\chi : V_1 \longrightarrow V_2 : v \longmapsto \begin{cases} 0_2 & \text{dla } v = 0_1 \\ \underline{\chi}(v) & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Jego  $\mathbb{K}$ -liniowość wynika wprost z  $\mathbb{K}$ -liniowości odwzorowań  $\chi_n$ , a także ciągłości działania unormowanego ciała bazowego  $\mathbb{K}$  na  $V_1$  oraz dodawania w  $V_1$ , oto bowiem dla dowolnych  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}^\times$  oraz  $v_1, v_2 \in V_1 \setminus \{0_1\}$  (w przypadkach innych od rozpatrzonych poniżej tożsamość jest spełniona trywialnie)

$$\begin{aligned} \chi(\lambda_1 \triangleright_1 v_1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(\lambda_1 \triangleright_1 v_1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 \triangleright_2 \chi_n(v_1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \chi_n(v_2)) \\ &= \lambda_1 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(v_1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(v_2) \\ &= \lambda_1 \triangleright_2 \chi(v_1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \chi(v_2). \end{aligned}$$

W następnej kolejności dowodzimy ograniczoności  $\chi$ . W tym celu wybierzmy (dowolnie)  $v \in V_1$  o własności  $\|v\|_1 = 1$ . Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  możemy wskazać  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  oraz  $n_v \geq N_\varepsilon$  o własnościach

$$\|\chi_{n_v}(v) - \chi(v)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \forall m, n \geq N_\varepsilon : \|\chi_n - \chi_m\|_{\text{op}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

a wtedy, o ile  $n \geq N_\varepsilon$ ,

$$\|\chi(v) - \chi_n(v)\|_2 \leq \|\chi(v) - \chi_{n_v}(v)\|_2 + \|\chi_{n_v}(v) - \chi_n(v)\|_2 < \varepsilon,$$

co pozwala skonstatować, że

$$\|\chi(v)\|_2 \leq \|\chi(v) - \chi_n(v)\|_2 + \|\chi_n(v)\|_2 < \varepsilon + \|\chi_n\|_{\text{op}} < \infty,$$

czyli że  $\chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ , a nadto że

$$\|\chi - \chi_n\|_{\text{op}} \leq \varepsilon,$$

zatem  $\chi$  jest w istocie granicą ciągu  $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  względem normy operatorowej.

Na koniec sprawdzamy ograniczoność  $r_{\text{ev}}$  obliczając – dla dowolnego wektora  $v \in V \setminus \{0_V\}$  –

$$\begin{aligned} \|r_{\text{ev}}(v)\|_{\text{op}} &\equiv \sup_{\chi \in \|\cdot\|_{\text{op}}^{-1}(\{1\})} \|r_{\text{ev}}(v)(\chi)\|_2 \equiv \sup_{\chi \in \|\cdot\|_{\text{op}}^{-1}(\{1\})} \|\chi(v)\|_2 \\ &\leq \sup_{\chi \in \|\cdot\|_{\text{op}}^{-1}(\{1\})} \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \|v\|_1 = \|v\|_1. \end{aligned}$$

□

Naturalną własność normy opisuje

**STWIERDZENIE 78.** *Przyjmijmy zapis Stw. 77. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ , przy czym zakładamy, że  $V_\beta$ ,  $\beta \in \{2, 3\}$  jest przestrzenią Banacha względem normy  $\|\cdot\|_\beta$ . Norma operatorowa spełnia tożsamość*

$$\forall \chi_\gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_\gamma, V_{\gamma+1}), \gamma \in \{1, 2\} : \|\chi_2 \circ \chi_1\|_{\text{op}} \leq \|\chi_2\|_{\text{op}} \cdot \|\chi_1\|_{\text{op}}.$$

■

*Dowód:* Wprost na mocy definicji normy operatorowej oraz założenia o ograniczoności  $\chi_1$  otrzymujemy

$$\|\chi_2 \circ \chi_1\|_{\text{op}} \equiv \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_2 \circ \chi_1(v)\|_3}{\|v\|_1} \equiv \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_2(\chi_1(v))\|_3}{\|v\|_1}$$

$$\leq \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_2\|_{\text{op}} \cdot \|\chi_1(v)\|_2}{\|v\|_1} \equiv \|\chi_2\|_{\text{op}} \cdot \|\chi_1\|_{\text{op}}.$$

□

Przykładem elementarnego, acz użytecznego zastosowania opisanej powyżej struktury przestrzeni Banacha jest

**STWIERDZENIE 79.** *Przyjmijmy zapis Def. 61 i niechaj  $\chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$ . Jeżeli istnieje  $\alpha \in [0, 1[$ , dla którego spełniona jest nierówność  $\|\chi\|_{\text{op}} \leq \alpha$ , to wówczas odwzorowanie  $\text{id}_V - \chi$  jest automorfizmem  $V$ , a przy tym zachodzi nierówność*

$$\|(\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \leq (1 - \alpha)^{-1}.$$

*Dla każdego  $\tilde{\chi} \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$  o własności  $\|\tilde{\chi}\|_{\text{op}} \leq \alpha$  słusznym jest oszacowanie*

$$\|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} - (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \leq (1 - \alpha)^{-2} \cdot \|\tilde{\chi} - \chi\|_{\text{op}}.$$

■

*Dowód:* Dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  mamy  $\chi^n \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$ , przy czym  $\|\chi^n\|_{\text{op}} \leq \|\chi\|_{\text{op}}^n$ , co pozwala nam zdefiniować odwzorowanie

$$S_n := \sum_{k=0}^n \chi^k \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V).$$

Bez trudu sprawdzamy, że ciąg  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V) : n \mapsto S_n$  jest dla  $\alpha < 1$  ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$ ,

$$\|S_{n+1} - S_n\|_{\text{op}} = \|\chi^{n+1}\|_{\text{op}} \leq \|\chi\|_{\text{op}}^{n+1} \leq \alpha^{n+1},$$

więc też zbieżnym do pewnego odwzorowania

$$S_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V),$$

dla którego (wobec ciągłości normy, o której mówi Stw. 74) otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} \|S_\infty\|_{\text{op}} &\equiv \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right\|_{\text{op}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|_{\text{op}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \|\chi^k\|_{\text{op}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha^k \\ (1.4.6) \quad &= (1 - \alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

Następnie sprawdzamy, że

$$S_\infty \circ (\text{id}_V - \chi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \circ (\text{id}_V - \chi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id}_V - \chi^{n+1}) = \text{id}_V,$$

$$(\text{id}_V - \chi) \circ S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id}_V - \chi) \circ S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id}_V - \chi^{n+1}) = \text{id}_V,$$

gdyż

$$\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \chi^n \right\|_{\text{op}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi^n\|_{\text{op}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi^n = 0.$$

Powyższe rozumowanie pokazuje, że odwzorowanie  $\text{id}_V - \chi$  jest odwracalne, a wynik (1.4.6) dowodzi ograniczonej jego (obustronnej) odwrotności.

Na koniec w bezpośrednim rachunku pokazujemy

$$\begin{aligned} &\|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} - (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &= \|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} \circ ((\text{id}_V - \chi) - (\text{id}_V - \tilde{\chi})) \circ (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\equiv \|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} \circ (\tilde{\chi} - \chi) \circ (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\leq \|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1}\|_{\text{op}} \cdot \|\tilde{\chi} - \chi\|_{\text{op}} \cdot \|(\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\leq (1 - \alpha)^{-2} \cdot \|\tilde{\chi} - \chi\|_{\text{op}}. \end{aligned}$$

□

Ostatnie stwierdzenie pozwala bez trudu wykazać słuszność

**STWIERDZENIE 80.** *Przyjmijmy zapis Def. 61. Izomorfizmy, tj. ograniczone odwzorowania liniowe o ograniczonych odwrotnościach, pomiędzy dowolnymi dwiema przestrzeniami Banacha  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  tworzą albo zbiór pusty, albo też zbiór otwarty w  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ .*

■

*Dowód:* Niechaj  $\chi_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  będzie dowolnym izomorfizmem, a wtedy dowolne ograniczone odwzorowanie liniowe  $\delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  o własności

$$\|\delta\|_{\text{op}} < \frac{1}{\|\chi_0^{-1}\|_{\text{op}}}$$

definiuje w świetle Stw. 79 automorfizm  $\text{id}_{V_1} + \chi_0^{-1} \circ \delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1)$ , gdyż – na mocy Stw. 78 – zachodzi

$$\|\chi_0^{-1} \circ \delta\|_{\text{op}} \leq \|\chi_0^{-1}\|_{\text{op}} \cdot \|\delta\|_{\text{op}} < 1.$$

W takim jednak razie także  $\chi_0 + \delta$  jest izomorfizmem, oto bowiem

$$(\chi_0 + \delta)^{-1} \equiv (\chi_0 \circ (\text{id}_{V_1} + \chi_0^{-1} \circ \delta))^{-1} = (\text{id}_{V_1} + \chi_0^{-1} \circ \delta)^{-1} \circ \chi_0^{-1}.$$

□

W przypadku modelowych przestrzeni Banacha  $\mathbb{R}^{\times N}$  możemy pokusić się o przydatne w dalszych naszych rozważaniach uszczegółowienie dyskusji pojęć takich jak „zwartość”, „domkniętość”, „ograniczoność” *etc.* oraz relacji między nimi, co czynimy poniżej. Zaczniemy od pomocniczego

**STWIERDZENIE 81.** *Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ . Dowolna  $N$ -kostka w  $\mathbb{R}^{\times N}$  jest zwarta.*

■

*Dowód:* Niechaj  $I_N^{(0)}(a., b.) := \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$  będzie  $N$ -kostką zdefiniowaną w Równ. (1.4.4), o średnicy

$$\phi_0(a., b.) := \sqrt{\sum_{i=1}^N (b_i - a_i)^2}.$$

Niechaj  $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  będzie pokryciem  $I_N(a., b.)$ , z którego nie można wybrać podpokrycia skończonego. Dzieląc każdy z przedziałów  $[a_i, b_i]$ ,

$$[a_i, b_i] \equiv [a_i, c_i] \cup [c_i, b_i], \quad c_i := \frac{a_i + b_i}{2},$$

otrzymujemy rozkład  $I_N^{(0)}(a., b.)$  na  $2^N$   $N$ -kostek o średnicy  $\phi_1(a., b.) \equiv 2^{-1} \phi_0(a., b.)$ , z których przynajmniej jedna – oznaczmy ją  $I_N^{(1)}(a., b.)$  – nie może być pokryta żadną skończoną podrodziną zbiorów z rodziny  $\mathcal{O}$ . Powtórzywszy opisaną wcześniej procedurę podziału  $N$ -kostki na  $2^N$  jednakowych  $N$ -kostek w odniesieniu do  $I_N^{(1)}(a., b.)$ , znajdujemy  $N$ -kostkę  $I_N^{(2)}(a., b.) \subset I_N^{(1)}(a., b.)$  o średnicy  $\phi_2(a., b.) \equiv$

$2^{-2} \phi_0(a., b.)$ , której nie da się pokryć skończoną liczbą zbiorów z  $\mathcal{O}$ . Iteracja tej konstrukcji prowadzi do powstania monotonicznego ciągu  $I_N^{(\cdot)}(a., b.) : \mathbb{N} \rightarrow 2^{I_N^{(0)}(a., b.)}$   $N$ -kostek,

$$I_N^{(n)}(a., b.) \supset I_N^{(n+1)}(a., b.), \quad n \in \mathbb{N},$$

którego element o indeksie  $n$  ma średnicę  $\phi_n(a., b.) \equiv 2^{-n} \phi_0(a., b.)$  i nie jest pokrywany przez żadną skończoną podrodzinę zbiorów z rodziny  $\mathcal{O}$ . Tenże element można zapisać w postaci

$$I_N^{(n)}(a., b.) \equiv \prod_{i=1}^N [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$$

dla pewnych liczb rzeczywistych

$$a_i \leq a_i^{(1)} \dots \leq a_i^{(n-1)} \leq a_i^{(n)} < b_i^{(n)} \leq b_i^{(n-1)} \leq \dots \leq b_i^{(1)} \leq b_i, \quad i \in \overline{1, N}.$$

Oznaczmy

$$a_i^{(\infty)} := \sup_{m \in \mathbb{N}} \{a_i^{(m)}\}, \quad i \in \overline{1, N}.$$

Wobec powyższych nierówności zachodzi

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_i^{(\infty)} \leq b_i^{(n)}, \quad i \in \overline{1, N},$$

a ponieważ także – wprost z definicji –

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_i^{(n)} \leq a_i^{(\infty)}, \quad i \in \overline{1, N},$$

przeto

$$\forall n \in \mathbb{N} : (a_1^{(\infty)}, a_2^{(\infty)}, \dots, a_N^{(\infty)}) \in I_N^{(n)}(a., b.),$$

czyli też

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_N^{(n)}(a., b.) \neq \emptyset.$$

Niechaj  $x_\infty \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_N^{(n)}(a., b.)$ , a wtedy  $x_\infty \in \mathcal{O}_\lambda$  dla pewnego indeksu  $\lambda \in \Lambda$ . Skoro jednak  $\mathcal{O}_\lambda$  jest otwarty, to zawiera pewne otoczenie  $x_\infty$ , czyli istnieje  $r > 0$  o własności  $B_N(x_\infty; r) \subset \mathcal{O}_\lambda$ . Wybierając  $n$  dostatecznie duże, możemy zawsze uzyskać  $\phi_n(a., b.) < r$ , a wówczas dla dowolnego  $y \in I_N^{(n)}(a., b.)$  stwierdzamy, że  $\|y - x_\infty\|_N \leq \phi_n(a., b.) < r$ , więc też  $I_N^{(n)}(a., b.) \subset \mathcal{O}_\lambda$ , co leży w sprzeczności z konstrukcją ciągu  $I_N^{(\cdot)}(a., b.)$ .  $\square$

Powyższe pozwala nam łatwo udowodnić podstawowe

**STWIERDZENIE 82** (Twierdzenie Heinego–Borela). *Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ . Podzbiór przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$  jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony i domknięty.*

■

*Dowód:* Niechaj  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{\times N}$  będzie podzbiorem zwartym. Jego domkniętość wynika – w świetle Stw. 67 – wprost z (oczywistej) hausdorffowskości przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$ . Wybierzmy (dowolnie) punkt  $p \in \mathcal{K}$  i rozważmy rodzinę kul otwartych  $B^N(p; n)$ . Rodzina ta jest pokryciem (otwartym)  $\mathcal{K}$ ,

$$\bigcup_{n=1}^N B^N(p; n) = \mathcal{K},$$

możemy z niej zatem wybrać skończone podpokrycie  $\{B^N(p; n_k)\}_{k \in \overline{1, M}}$ ,  $M \in \mathbb{N}$ . Liczba  $n_{\mathcal{K}} := \max_{k \in \overline{1, M}} \{n_k\}$  spełnia warunek

$$B^N(p; n_{\mathcal{K}}) \supset \mathcal{K},$$

który jest równoznaczny z ograniczonością  $\mathcal{K}$ .

Przypuśćmy, odwrotnie, że  $\mathcal{K}$  jest ograniczony i domknięty. Pierwsza z własności implikuje  $\mathcal{K} \subset B_N(x; R)$  dla pewnych  $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathcal{K}$  i  $R > 0$ , a zatem także  $\mathcal{K} \subset \prod_{i=1}^N [x_i - R, x_i + R]$ . Oto więc  $\mathcal{K}$  jest domkniętym podzbiorem  $N$ -kostki, która na mocy Stw. 81 jest zwartą podprzestrzenią  $\mathbb{R}^{\times N}$ . Dowodzona teza jest teraz natychmiastową konsekwencją Stw. 67.  $\square$

Natychmiastową konsekwencją powyższego jest W dalszej kolejności natrafiamy na

**STWIERDZENIE 83.** *Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ . Każdy otwarty podzbiór przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$  jest sumą mnogościową przeliczalnej rodziny kul otwartych.*  $\blacksquare$

Dowód: Niechaj  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times N})$  i zdefiniujmy zbiór

$$\mathbb{Q}\mathcal{O} := \{ (p, q) \in \mathbb{Q}^{\times N} \times \mathbb{Q} \mid B^N(p; q) \subset \mathcal{O} \}.$$

Jest on przeliczalny jako podzbiór przeliczalnego zbioru  $\mathbb{Q}^{\times N+1}$ , a przy tym

$$\mathcal{O} = \bigcup_{(p, q) \in \mathbb{Q}\mathcal{O}} B^N(p; q).$$

Istotnie, niech  $x \in \mathcal{O}$ , a wtedy istnieje  $r > 0$  o własności  $B^N(x; r) \subset \mathcal{O}$ . Wybierzmy (dowolnie)  $p \in \mathbb{Q}^{\times N}$  o własności  $\|p - x\|_N \leq \frac{r}{3}$ , a następnie  $q \in \mathbb{Q}$  o własności  $\|p - x\|_N < q \leq \frac{r}{2}$  (liczby takie istnieją, gdyż  $\mathbb{Q}$  jest podzbiorem gęstym w  $\mathbb{R}$ ). Jasno widać, że  $B^N(p; q) \ni x$ .  $\square$

**STWIERDZENIE 84.** *Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ . Każdy otwarty i każdy domknięty podzbiór przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$  jest sumą mnogościową przeliczalnej rodziny podzbiorów zwartych.*  $\blacksquare$

Dowód: Zaczniemy od zbiorów otwartych. W świetle Stw. 83 wystarczy wykazać słuszność tezy dla dowolnej (otwartej) kuli  $B^N(x; r)$ . Ta jednak staje się oczywistą, gdy jako rodzinę zbiorów zwartych wybierzemy

$$\left\{ \overline{B^N\left(x; \max\left(0, r - \frac{1}{n}\right)\right)} \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}.$$

Niechaj teraz  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{\times N}$  będzie domknięty. Udowodniona część stwierdzenia implikuje istnienie przeliczalnego zwartego pokrycia  $\{\mathcal{K}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$ ,

$$\mathbb{R}^{\times N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_n,$$

a zatem także

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{C} \cap \mathbb{R}^{\times N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{C} \cap \mathcal{K}_n),$$

przy czym każdy ze zbiorów  $\mathcal{C} \cap \mathcal{K}_n \subset \mathbb{R}^{\times N}$  jest domknięty (jako przecięcie dwóch zbiorów domkniętych) i ograniczony (wszak własność tę ma zawierający go zbiór  $\mathcal{K}_n$ ), więc na mocy Stw. 82 – również zwarty.  $\square$

**TWIERDZENIE 1.4.1 (Lemat Lindelöfa).** *Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ . Każde pokrycie otwarte dowolnego podzbioru przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$  ma przeliczalne podpokrycie.* ■

*Dowód:* Niechaj  $A \subset \mathbb{R}^{\times N}$  będzie dowolnym podzbiorem,  $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  zaś – jego pokryciem (otwartym). W konstrukcji skończonego podpokrycia pokrycia  $\mathcal{O}$  wykorzystamy przeliczalne pokrycie  $\mathcal{B} := \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$  złożone z kul otwartych o środkach we wszystkich punktach  $\mathbb{Q}^{\times N}$  i – dla każdego z takich punktów – wszystkich promieniach o długości wymiernej. Rozważmy dowolny punkt  $x \in A$ . Istnieje element pokrycia  $\mathcal{O}_{\lambda(x)} \ni x$ , a wraz z nim (wobec otwartości pokrycia  $\mathcal{O}$ ) także indeks  $n_x \in \mathbb{N}$  o własności  $x \in B_{n_x} \subset \mathcal{O}_{\lambda(x)}$  (możemy np. wybrać najmniejszą liczbę naturalną, dla której spełniony jest taki warunek, a ta istnieje). Tym sposobem otrzymujemy funkcję

$$n : A \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto n_x$$

o przeliczalnym zbiorze wartości  $n_A = \{m \in \mathbb{N} \mid n^{-1}(\{m\}) \neq \emptyset\}$ . Następnie zdefiniujemy odwzorowanie

$$\beta : n_A \longrightarrow 2^A : m \longmapsto n^{-1}(\{m\}),$$

zauważając przy tym, że każdy ze zbiorów  $\beta(m)$ ,  $m \in n_A$  jest niepusty i każdy punkt  $x \in A$  należy do dokładnie jednego z nich, a mianowicie:  $x \in \beta(n_x)$ . Korzystając z Pewnika Wyboru, przyporządkujemy każdemu  $m \in n_A$  dowolny (jeden) punkt  $x_m \in \beta(m)$ . Rzecz jasna,  $x_m \in B_m \equiv B_{n_{x_m}} \subset \mathcal{O}_{\lambda(x_m)}$ . Przeliczalna rodzina

$$\underline{\mathcal{O}} := \{\mathcal{O}_{\lambda(x_m)}\}_{m \in n_A} \subset \mathcal{O}$$

jest poszukiwanym przeliczalnym podpokryciem pokrycia  $\mathcal{O}$ . Istotnie, jest to pokrycie, gdyż dowolny punkt  $y \in A$  należy do  $B_{n_y}$ , zatem też – wobec  $n_y \in n_A$  – do  $\mathcal{O}_{\lambda(x_{n_y})} \in \underline{\mathcal{O}}$ . □

Na zakończenie części naszej dyskusji poświęconej euklidesowym przestrzeniom metrycznym wysłowimy jeszcze użyteczne

**STWIERDZENIE 85 (Lemat o zwartym pokryciu).** *Przyjmijmy zapis Przykł. 25 (1). Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$  i niechaj  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N})$ , a nadto niech  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  będzie zbiorem zwartym. Wówczas istnieje zbiór zwarty  $\tilde{\mathcal{K}}$  spełniający relację  $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{O}$  i taki, dla którego istnieje para liczb  $h, r \in ]0, \infty[$  o własności*

$$\forall_{(t,x) \in \mathcal{K}} : \overline{C}_{(h,r)}(t,x) := \{ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N} \mid |s-t| \leq h \quad \wedge \quad \|y-x\|_N \leq r \} \subset \tilde{\mathcal{K}}. \quad (1.4.7)$$

*Dowód:* Dowolnemu punktowi  $p = (t,x) \in \mathcal{K}$  przyporządkujemy (dowolną) parę liczb  $(h(p), r(p)) \in ]0, \infty[^{\times 2}$  o własności

$$\overline{C}_{(2h(p), 2r(p))}(p) \subset \mathcal{O},$$

co jest możliwe z racji otwartości  $\mathcal{O}$ . Zdefiniujemy cylindry otwarte

$$C(p) := \{ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N} \mid |s-t| < h(p) \quad \wedge \quad \|y-x\|_N < r(p) \},$$

które tworzą pokrycie otwarte  $\{C(p)\}_{p \in \mathcal{K}}$  zbioru zwartego  $\mathcal{K}$ . Wybrawszy zeń podpokrycie skończone  $\{C(p_k)\}_{k \in \overline{1,L}}$ ,  $L \in \mathbb{N}^{\times}$ ,  $p_k = (t_k, x_k) \in \mathcal{K}$ , stwierdzamy, że zbiór

zwarty (wprost z konstrukcji)

$$\tilde{\mathcal{K}} := \bigcup_{k=1}^L \overline{C}_{(2h(p_k), 2r(p_k))}(p_k)$$

ma požądane własności:

$$\mathcal{O} \supset \tilde{\mathcal{K}} \supset \bigcup_{k=1}^L C(p_k) \supset \mathcal{K}.$$

Zdefiniujmy następnie liczby (dodatnie)

$$h := \min_{k \in \overline{1, L}} \{h(p_k)\}, \quad r := \min_{k \in \overline{1, L}} \{r(p_k)\},$$

aby stwierdzić, co następuje: Dowolny punkt  $p = (t, x) \in \mathcal{K}$  należy do pewnego cylindra  $C(p_k)$ ,  $k \in \overline{1, L}$ , a zatem dowolny inny punkt  $p' = (t', x') \in \overline{C}_{(h, r)}(p)$  spełnia warunki

$$|t' - t_k| \equiv |t' - t + t - t_k| \leq |t' - t| + |t_k - t| \leq h + h(p_k) \leq 2h(p_k),$$

$$\|x - x_k\|_N \equiv \|x' - x + x - x_k\|_N \leq \|x' - x\|_N + \|x - x_k\|_N \leq r + r(p_k) \leq 2r(p_k),$$

z których wynika już bezpośrednio oczekiwana relacja

$$\overline{C}_{(h, r)}(p) \subset \overline{C}_{(2h(p_k), 2r(p_k))}(p_k) \subset \tilde{\mathcal{K}}.$$

□

Powracając na zakończenie do ogólnej teorii przestrzeni Banacha, wysłowimy kilka jej elementarnych rezultatów o dalekosiężnych konsekwencjach. Pierwszym jest

**TWIERDZENIE 1.4.2 (Banacha o punkcie stałym).** *Niechaj  $(X, d_X)$  będzie zupełną przestrzenią metryczną,  $T : X \rightarrow X$  zaś – odwzorowaniem zwężającym (zwanym także **kontrakcją**), tj. odwzorowaniem spełniającym **warunek Lipschitza** w postaci*

$$(1.4.8) \quad \exists L \in [0, 1[ \quad \forall x, y \in X : d_X(T(x), T(y)) \leq L \cdot d_X(x, y).$$

*Istnieje dokładnie jeden punkt stały  $v_* \in X$  odwzorowania  $T$ ,*

$$T(v_*) = v_*,$$

*przy czym, dla dowolnego  $x_0 \in X$ ,*

$$v_* = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0).$$

■

Dowód: Wybierzmy (dowolnie)  $x_0 \in X$  i zdefiniujmy ciąg

$$x : \mathbb{N} \rightarrow X : n \mapsto T^n(x_0) \equiv x_n.$$

Jego sąsiednie wyrazy spełniają – wobec (1.4.8) – warunek

$$\begin{aligned} d_X(x_{n+1}, x_n) &\equiv d_X(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq L \cdot d_X(x_n, x_{n-1}) \equiv L \cdot d_X(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \\ &\leq L^2 \cdot d_X(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq L^n \cdot d_X(x_1, x_0), \end{aligned}$$

zatem  $x$  jest ciągiem Cauchy'ego – istotnie, dla dowolnych  $n > m \in \mathbb{N}$  słusznym jest oszacowanie

$$\begin{aligned} d_X(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=1}^{n-m} d_X(x_{n+1-k}, x_{n-k}) \leq \sum_{k=1}^{n-m} L^{n-k} \cdot d_X(x_1, x_0) \\ &\leq d_X(x_1, x_0) \cdot L^m \cdot \sum_{l=0}^{n-m-1} L^l \leq d_X(x_1, x_0) \cdot L^m \cdot \sum_{l \in \mathbb{N}} L^l \\ &\leq \frac{L^m \cdot d_X(x_1, x_0)}{1-L}, \end{aligned}$$

które pokazuje, że odległość między wyrazami ciągu o dostatecznie wysokich indeksach jest dowolnie mała. Wobec zupełności  $X$  istnieje zatem

$$v_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X,$$

przy czym z ciągłości  $T$ , będącej konsekwencją warunku Lipschitza o stałej  $0 \leq L < 1$ , stwierdzamy, że

$$v_* = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = T(v_*),$$

czyli punkt graniczny jest punktem stałym  $T$ . Jeśli także  $y \in X$  jest takim punktem, to obliczamy

$$0 \leq d_X(y, v_*) = d_X(T(y), T(v_*)) \leq L \cdot d_X(y, v_*),$$

czyli

$$0 \leq (1-q) \cdot d_X(y, v_*) \leq 0,$$

więc też – wobec niezwyrodnienia metryki –  $y = v_*$ .  $\square$

Następnym rezultatem o pierwszorzędym znaczeniu, stanowiącym podstawę uogólnienia pojęcia całki do klasy odwzorowań o wartościach w przestrzeni Banacha, jest

**TWIERDZENIE 1.4.3** (O ograniczonym rozszerzeniu liniowym). *Przyjmijmy zapis Def. 61 i niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ , przy czym zakładamy, że  $V_2$  jest przestrzenią Banacha. Niech też  $U_1 \subset V_1$  będzie podprzestrzenią  $\mathbb{K}$ -liniową,  $\chi : U_1 \rightarrow V_2$  zaś – ograniczonym odwzorowaniem liniowym o normie  $\|\chi\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(U_1, V_2)} = C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Istnieje dokładnie jedno ograniczone odwzorowanie liniowe  $\bar{\chi} : \bar{U}_1 \rightarrow V_2$  rozszerzające  $\chi$  do podprzestrzeni  $\bar{U}_1$  będącej domknięciem  $U_1$  w  $V_1$ . Rozszerzenie to ma tę samą normę  $\|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\bar{U}_1, V_2)} = C$  i jest określane mianem **ograniczonego rozszerzenia liniowego** odwzorowania  $\chi$ .*  $\blacksquare$

*Dowód:* Jednoznaczność rozszerzenia  $\bar{\chi}$  jest bezpośrednią konsekwencją jego ciągłości, pozostaje zatem wykazać jego istnienie. W przypadku  $\chi = 0$  teza jest oczywista, rozważymy zatem przypadek  $\chi \neq 0$ . Niechaj  $u : \mathbb{N} \rightarrow U_1$  będzie ciągiem Cauchy'ego o granicy  $u \in \bar{U}_1$ . Wobec założonej ciągłości  $\chi$  zachodzi nierówność

$$\|\chi(u_n) - \chi(u_m)\|_2 \leq C \cdot \|u_n - u_m\|_1,$$

przeto odnośny ciąg wektorów  $\chi(u) : \mathbb{N} \rightarrow V_2 : n \mapsto \chi(u_n)$  także jest ciągiem Cauchy'ego, co oznacza istnienie w  $V_2$  jego granicy, którą oznaczymy symbolem

$$\bar{\chi}(u) := \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(u_n).$$

Zauważmy, że granica ta nie zależy od wyboru ciągu  $u$ . o ustalonej granicy  $u$ , oto bowiem dla dowolnego ciągu wektorów  $\tilde{u} : \mathbb{N} \rightarrow U_1$  o tej samej granicy wybawszy – dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  – indeks  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby były spełnione nierówności

$$\|u_n - u\|_1 < \frac{\varepsilon}{3C}, \quad \|\tilde{u}_n - u\|_1 < \frac{\varepsilon}{3C}, \quad \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 < \frac{\varepsilon}{3},$$

stwierdzamy pożądaną relację

$$\begin{aligned} \|\bar{\chi}(u) - \chi(\tilde{u}_n)\|_2 &\leq \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 + \|\chi(u_n) - \chi(\tilde{u}_n)\|_2 \\ &\leq \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 + C \cdot \|u_n - \tilde{u}_n\|_1 \\ &\leq \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 + C \cdot (\|u_n - u\|_1 + \|\tilde{u}_n - u\|_1) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + C \cdot \frac{2\varepsilon}{3C} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ponadto, jako że dowolny wektor  $v \in U_1$  jest granicą ciągu stałego  $v : \mathbb{N} \rightarrow U_1 : n \mapsto v$ , prawdziwe jest zdanie

$$\forall v \in U_1 : \bar{\chi}(v) \equiv \chi(v).$$

Jest zatem zasadnym nazwać  $\bar{\chi}$  rozszerzeniem  $\chi$  do  $\bar{U}_1$ . Przy tym ciągłość operacji grupowych w  $V_1$  oraz działania ciała bazowego na tej przestrzeni (zachowującego  $U_1$  i  $\bar{U}_1$ ) zapewnia  $\mathbb{K}$ -liniowość tegoż rozszerzenia. Istotnie, dla dowolnej pary ciągów Cauchy'ego  $u^\alpha : \mathbb{N} \rightarrow U_1$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o granicach – odpowiednio –  $v^\alpha$  oraz skalarów  $\lambda_\alpha$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(\lambda_1 \triangleright_1 v^1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v^2) &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(\lambda_1 \triangleright_1 v_n^1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 \triangleright_2 \chi(v_n^1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \chi(v_n^2)) \\ &= \lambda_1 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(v_n^1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(v_n^2) \\ &\equiv \lambda_1 \triangleright_2 \bar{\chi}(v^1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \bar{\chi}(v^2). \end{aligned}$$

Wreszcie na koniec ciągłość norm  $\|\cdot\|_1$  i  $\|\cdot\|_2$  w połączeniu z ograniczonością  $\chi$  (oraz wobec zachowywania nierówności w przejściu granicznym) pozwala przekonać się, że rozszerzenie  $\bar{\chi}$  jest odwzorowaniem ograniczonym,

$$\begin{aligned} \|\bar{\chi}(v)\|_2 &\equiv \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(v_n) \right\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi(v_n)\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \cdot \|v_n\|_1 = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_1 \\ &\equiv C \cdot \|v\|_1, \end{aligned}$$

co pozwala stwierdzić, że

$$\|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_K(\bar{U}_1, V_2)} \equiv \sup_{v \in \bar{U}_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\bar{\chi}(v)\|_2}{\|v\|_1} \leq C.$$

Przy tym na podstawie wcześniejszych ustaleń otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned} C &\equiv \|\chi\|_{\mathcal{B}_K(U_1, V_2)} \equiv \sup_{v \in U_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi(v)\|_2}{\|v\|_1} \equiv \sup_{v \in U_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\bar{\chi}(v)\|_2}{\|v\|_1} \leq \sup_{v \in \bar{U}_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\bar{\chi}(v)\|_2}{\|v\|_1} \\ &\equiv \|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_K(\bar{U}_1, V_2)}, \end{aligned}$$

gdyż supremum obliczone na podzbiornie jest majoryzowane przez supremum obliczone na zawierającym go zbiorze. Ostatecznie więc możemy wypisać ciąg nierówności

$$C \leq \|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\bar{U}_1, V_2)} \leq C,$$

które przekonują o słuszności ostatniej części tezy dowodzonego twierdzenia.  $\square$

Istnienie normy na przestrzeni Banacha pozwala w naturalny sposób uogólnić do kategorii  $\text{Ban}_{\mathbb{K}}$  analizę stycznościową odwzorowań, którą formalizuje

**DEFINICJA 63.** Przyjmijmy zapis Def. 61 i niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ),  $\mathcal{O} \subset V_1$  – podzbiorem otwartym,  $F : \mathcal{O} \rightarrow V_2$  zaś – dowolnym odwzorowaniem. Oznaczmy

$$\mathcal{R}_2 F(v; h) := F(v +_1 h) - F(v) - DF(v)(h).$$

Odwzorowanie  $F$  nazwiemy **odwzorowaniem różniczkowalnym (w sensie Fréchet’a) w punkcie**  $v \in \mathcal{O}$ , jeśli istnieje ograniczony operator liniowy  $DF(v) : V_1 \rightarrow V_2$  o własności

$$\lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}_2 F(v; h)\|_2}{\|h\|_1} = 0.$$

Ilekoć istnieje, odwzorowanie  $DF(v)$  nazywamy  **pochodną Fréchet’a** odwzorowania  $F$  w punkcie  $v$ . **Odwzorowanie różniczkowalne na zbiorze**  $\mathcal{O}$  to takie, które jest różniczkowalne w każdym punkcie  $\mathcal{O}$ . Ilekoć odwzorowanie

$$DF : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$$

jest ciągle, mówimy, że odwzorowanie  $F$  jest **klasy (gładkości)  $C^1$** . Zbiór takich odwzorowań oznaczamy symbolem

$$C^1(\mathcal{O}, V_2) \equiv \{ F \in V_2^{\mathcal{O}} \mid F \text{ klasy } C^1 \}.$$

Zadawszy rekurencyjnie oznaczenie

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}^k(V_1, V_2) := \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^{k-1}(V_1, V_2)), \quad \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^1(V_1, V_2) \equiv \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), \quad k \in \mathbb{N}^{\times},$$

w analogii do powyższego określamy na gruncie Stw. 77, także poprzez rekurencję, wyższe pochodne odwzorowania  $F$ ,

$$D^k F := D(D^{k-1} F) : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^k(V_1, V_2),$$

odwzorowania wielokrotnie różniczkowalne oraz odnośne wyższe klasy gładkości

$$C^k(\mathcal{O}, V_2) \equiv \{ F \in V_2^{\mathcal{O}} \mid D^{k-1} F \text{ klasy } C^1 \}.$$

Oznaczenie to rozszerzamy ostatecznie na przypadki  $k \in \{0, \infty\}$  – w pierwszym z nich mamy do czynienia z odwzorowaniami ciągłymi,

$$C^0(\mathcal{O}, V_2) \equiv C(\mathcal{O}, V_2),$$

w drugim zaś – z odwzorowaniami różniczkowalnymi w sposób ciągły dowolną liczbę razy,

$$C^\infty(\mathcal{O}, V_2) \equiv \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\mathcal{O}, V_2),$$

czyli **odwzorowaniami gładkimi**. ▲

Pośród wielu naturalnych własności pochodnej Fréchet’a odnajdujemy i tę:



STWIERDZENIE 86 (Reguła łańcuchowa w przestrzeni Banacha). *Przyjmijmy zapis Def. 61 i niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  będą przestrzeniami Banacha,  $\mathcal{O}_\beta \subset V_\beta$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  – podzbiarami otwartymi,  $F_{12} : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$  zaś oraz  $F_{23} : \mathcal{O}_2 \rightarrow V_3$  odwzorowaniami różniczkowalnymi (w sensie Frécheta) w – odpowiednio –  $x_0 \in \mathcal{O}_1$  oraz  $y_0 = F_{12}(x_0) \in \mathcal{O}_2$ . Wówczas superpozycja  $F_{23} \circ F_{12} : \mathcal{O}_1 \rightarrow V_3$  jest odwzorowaniem różniczkowalnym (w sensie Frécheta) w  $x_0$ , przy czym*

$$D(F_{23} \circ F_{12})(x_0) = DF_{23}(F_{12}(x_0)) \circ DF_{12}(x_0).$$

Jeśli ponadto  $F_{12} \in C^q(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  oraz  $F_{23} \in C^q(\mathcal{O}_2, V_3)$  dla pewnego  $q \in \mathbb{N}^*$ , to także  $F_{23} \circ F_{12} \in C^q(\mathcal{O}_1, V_3)$ . ■

*Dowód:* Wybierzmy (dowolnie)  $v \in \mathcal{O}_1$  i rozważmy wyrażenie

$$\mathcal{R}_2(F_{23} \circ F_{12})(x_0; v) := F_{23} \circ F_{12}(x_0 + v) - F_{23} \circ F_{12}(x_0) - DF_{23}(F_{12}(x_0))(v).$$

Dla ustalonego (dowolnie)  $\varepsilon > 0$  dobierzmy (korzystając z ograniczoneści  $DF_{23}(y_0)$  będącej konsekwencją założonej przez nas różniczkowalności  $F_{23}$ )  $\mu > 0$  tak, ażeby było

$$\mu \cdot \|DF_{23}(y_0)\|_{\text{op}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

a następnie (wykorzystując w analogiczny sposób założenie o różniczkowalności  $F_{12}$ ) –  $\zeta > 0$  tak, ażeby było

$$\zeta \cdot (\|DF_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wobec różniczkowalności  $F_{23}$  w  $y_0$  możemy teraz dobrać  $\eta > 0$ , dla którego słuszną jest implikacja

$$\|w\|_2 < \eta \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{R}_2 F_{23}(y_0; w)\|_3 < \zeta \cdot \|w\|_2.$$

Rozumując analogicznie w odniesieniu do  $F_{12}$ , ustalamy  $\delta > 0$ , dla którego zachodzi

$$\|v\|_1 < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_3 < \mu \cdot \|v\|_1,$$

żądając dodatkowo, iżby był spełniony warunek

$$\delta \cdot (\|DF_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) < \eta.$$

Wobec tożsamości

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2(F_{23} \circ F_{12})(x_0; v) &= \mathcal{R}_2 F_{23}(y_0; DF_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)) \\ &\quad + DF_{23}(y_0)(\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)) \end{aligned}$$

oraz nierówności, słusznej dla  $\|v\|_1 < \delta$ ,

$$\begin{aligned} \|DF_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_2 &\leq (\|DF_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) \cdot \|v\|_1 \\ &< \delta \cdot (\|DF_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) < \eta, \end{aligned}$$

otrzymujemy pożądane oszacowanie

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_2(F_{23} \circ F_{12})(x_0; v)\|_3 &\leq \|\mathcal{R}_2 F_{23}(y_0; DF_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v))\|_3 \\ &\quad + \|DF_{23}(y_0)(\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v))\|_3 \\ &\leq \zeta \cdot \|DF_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|DF_{23}(y_0)\|_{\text{op}} \cdot \|\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_2 \\
& \leq \zeta \cdot (\|DF_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) \cdot \|v\|_1 \\
& + \|DF_{23}(y_0)\|_{\text{op}} \cdot \mu \cdot \|v\|_1 < \varepsilon \cdot \|v\|_1,
\end{aligned}$$

dowodzące różniczkowalności (w sensie Fréchet'a) odwzorowania  $F_{23} \circ F_{12}$ . Struktura analityczna zapostulowanego tu wzoru na pochodną tego odwzorowania przesądza o słuszności pozostałej części tezy dowodzonego stwierdzenia.  $\square$

Dalsza analiza odwzorowań różniczkowalnych na przestrzeniach Banacha oraz przyszłe jej zastosowania w dyskusji interesujących nas zagadnień odwołują się często do elementarnych wyników teorii całki na przestrzeniach Banacha, której fundamentem w wygodnym (i w pełni wystarczającym dla naszych potrzeb<sup>1</sup>) sformułowaniu Dieudonnégo jest

**DEFINICJA 64.** Przyjmijmy zapis Def. 61 oraz Stw. 76 i niechaj  $a, b \in \mathbb{R}$  spełniają warunek  $a < b$ . Odwzorowanie  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  o wartościach w przestrzeni Banacha  $(X, \|\cdot\|_V)$  nazywamy **odwzorowaniem schodkowym**, jeśli istnieje podział odcinka  $[a, b]$  postaci

$$a \equiv a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N \equiv b,$$

który będziemy oznaczać jako  $(a_0, a_1, \dots, a_N)$ , oraz wektory  $v_n \in V$ ,  $n \in \overline{1, N}$  o własności

$$(1.4.9) \quad \forall_{n \in \overline{1, N}} \forall_{t \in ]a_{n-1}, a_n[} : \sigma(t) = \sigma_n.$$

Domknięcie podprzestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $\mathbf{Map}_{\text{step}}([a, b], V)$  odwzorowań schodkowych w przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $\mathbf{Map}_b([a, b], V)$  **odwzorowań ograniczonych** na  $[a, b]$ , tj. tych  $F : [a, b] \rightarrow V$  o własności

$$\exists_{C_F \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \forall_{t \in [a, b]} : \|F(t)\|_V \leq C_F,$$

w topologii indukowanej przez normę supremum nosi miano **przestrzeni odwzorowań regulowanych** i będzie oznaczane symbolem

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V) \equiv \overline{\mathbf{Map}_b([a, b], V)}.$$

**Sumocalką odwzorowania schodkowego o wartościach w  $V$  po odcinku  $[a, b]$**  (skierowanym) nazywamy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\int_{[a, b]; V} : \mathbf{Map}_{\text{step}}([a, b], V) \rightarrow V : \sigma \mapsto \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n-1}) \triangleright \sigma_n,$$

<sup>1</sup>Tytułem uzasadnienia przyjętego tu punktu widzenia przytoczmy – na prawach anegdoty studzącej konserwatywną jego krytykę – stosowny komentarz Jeana Dieudonnégo zamieszczony w jego klasycznym traktacie [Die65]: „[...] the reader will probably observe the conspicuous absence of a time-honored topic in calculus courses, the "Riemann integral". It may well be suspected that, had it not been for its prestigious name, this would have been dropped long ago, for (with due reverence to Riemann's genius) it is certainly quite clear to any working mathematician that nowadays such a "theory" has at best the importance of a mildly interesting exercise in the general theory of measure and integration [...]. Only the stubborn conservatism of academic tradition could freeze it into a regular part of the curriculum, long after it had outlived its historical importance. Of course, it is perfectly feasible to limit the integration process to a category of functions which is large enough for all purposes of elementary analysis [...], but close enough to the continuous functions to dispense with any consideration drawn from measure theory; this is what we have done by defining only the integral of regulated functions [...]. ”

przy czym  $(a_0 \equiv a, a_1, \dots, a_N \equiv b)$  jest *dowolnym* podziałem jak w Równ. (1.4.9).  
**Całka (regulowana) Cauchy’ego–Bochnera o wartościach w  $V$  po odcinku  $[a, b]$**  (skierowanym) to ograniczone rozszerzenie liniowe (w rozumieniu Tw. 1.4.3)

$$\int_{[a,b];V} : \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a,b], V) \longrightarrow V, \quad \int_{[a,b];V} \upharpoonright \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a,b], V) \equiv \int_{[a,b];V}$$

sumocalki odwzorowania schodkowego po tymże odcinku do przestrzeni odwzorowań regulowanych. Ciągłość dodawania w  $V$  implikuje addytywność całki Cauchy’ego–Bochnera względem podziałów dziedziny, tj. dla dowolnych  $a \leq c \leq b$  stwierdzamy równość (ograniczonych) odwzorowań liniowych

$$(1.4.10) \quad \int_{[a,b];V} = \int_{[a,c];V} + \int_{[c,b];V} .$$

Tę można rozszerzyć na przypadek dowolnej trójki punktów  $a, b, c$  należących do odcinka, na którym odwzorowanie  $F$  jest jednostajną granicą ciągu odwzorowań schodkowych, jeśli tylko przyjąć konwencję

$$(1.4.11) \quad \int_{-[a,b]=[b,a];V} \equiv - \int_{[a,b];V} .$$

▲

UWAGA 16. Jest jasne, że podział odcinka  $[a, b]$ , względem którego odwzorowanie jawi się jako schodkowe, jest wysoce niejednoznaczny. Niezależność sumocalki od wyboru owego podziału jest konsekwencją niezmienniczości definiującej ją sumy względem dowolnych podziału tego rozdrobnień  $(a_0 \equiv a, a_1, \dots, a_N \equiv b) \mapsto (a_0 \equiv a, a'_1, a_1, a'_2, a_2, \dots, a'_N, a_N \equiv b)$ , która pozwala zastąpić sumy odpowiadające dwóm różnym podziałom odnośnymi sumami odpowiadającymi ich wspólnemu rozdrobieniu – te są tożsame z racji prawostronnej jednoznaczności odwzorowania schodkowego. Liniowość sumocalki jest równie oczywista, a jej ograniczoność wynika wprost z oszacowania

$$\begin{aligned} \left\| \int_{[a,b];V} \sigma \right\|_V &\leq \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n-1}) \cdot \|\sigma_n\|_V \leq (b-a) \cdot \max_{n \in \overline{1, N}} \{\|\sigma_n\|_V\} \\ &= (b-a) \cdot \sup_{t \in [a,b]} \|\sigma(t)\|_V \equiv (b-a) \cdot \|\sigma\|_\infty . \end{aligned}$$

Wobec powyższego istnienie i jednoznaczność całki Cauchy’ego–Bochnera zapewnia Tw. 1.4.3. Warto przy tym podkreślić, że jej definicja obejmuje całki z odwzorowań ciągłych, oto bowiem

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a,b], V) \supset C([a,b], V) .$$

Istotnie, każde odwzorowanie ciągłe  $F \in C([a,b], V)$  jest na mocy Stw. 75 jednostajnie ciągłe, a to oznacza, że dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  można na  $[a, b]$  zadać podział

$$a_n := a + \frac{n}{N_\varepsilon} \cdot (b-a), \quad N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n \in \overline{0, N_\varepsilon}$$

o własności

$$\forall_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} : \sup_{s, t \in ]a_{n-1}, a_n[} \|F(s) - F(t)\|_V < \varepsilon ,$$

a wtedy odwzorowanie schodkowe

$$\sigma_F : [a, b] \longrightarrow V, \quad \forall_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} \forall_{t \in ]a_{n-1}, a_n[} : \sigma_F(t) = F(a_n)$$

stanowi jednostajną aproksymację  $F$  na poziomie dokładności  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \|F - \sigma_F\|_\infty &\equiv \sup_{t \in [a,b]} \|F(t) - \sigma_F(t)\|_V = \max_{n \in \mathbb{N}, N_\varepsilon} \left\{ \sup_{t \in ]a_{n-1}, a_n[} \|F(t) - \sigma_F(t)\|_V \right\} \\ &\equiv \max_{n \in \mathbb{N}, N_\varepsilon} \left\{ \sup_{t \in ]a_{n-1}, a_n[} \|F(t) - F(a_n)\|_V \right\} \\ &\leq \max_{n \in \mathbb{N}, N_\varepsilon} \left\{ \sup_{s, t \in ]a_{n-1}, a_n[} \|F(t) - F(s)\|_V \right\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Konstrukcja całki (Cauchy'ego–Bochnera) przy użyciu sumocąłek, w połączeniu z subaddytywnością normy na przestrzeni wektorowej, podpowiada naturalną relację między normą i całką, stanowiącą jedną z absolutnie podstawowych i nader użytecznych własności tej ostatniej. Zważywszy znaczenie praktyczne tej relacji, formułujemy

**STWIERDZENIE 87.** *Przyjmijmy zapis Def. 64. Całka Cauchy'ego–Bochnera dowolnego odwzorowania  $F \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V)$  spełnia relację*

$$(1.4.12) \quad \left\| \int_{[a,b];V} F \right\|_V \leq \int_{[a,b];\mathbb{R}} \|F(\cdot)\|_V \leq |b-a| \cdot \|F\|_\infty.$$

■

*Dowód:* W pierwszej kolejności należy upewnić się, że druga z całek występujących w Równ. (1.4.12) ma sens, tj. że  $\|F(\cdot)\|_V \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \mathbb{R})$ . W tym celu wybierzmy (dowolny) ciąg  $\sigma_F, \cdot : \mathbb{N} \rightarrow C_{\text{step}}([a, b]; V)$  zbieżny do  $F$ , a następnie przywołajmy Stw. 71, ażeby otrzymać oszacowanie

$$\begin{aligned} \left\| \|F(\cdot)\|_V - \|\sigma_{F,n}(\cdot)\|_V \right\|_\infty &\equiv \sup_{t \in [a,b]} \left| \|F(t)\|_V - \|\sigma_{F,n}(t)\|_V \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|F(t) - \sigma_{F,n}(t)\|_V \\ &\equiv \|F - \sigma_{F,n}\|_\infty, \end{aligned}$$

które pokazuje dowodnie, że odwzorowanie  $\|F(\cdot)\|_V$  jest (jednostajną) granicą ciągu  $\|\sigma_{F,n}(\cdot)\|_V : \mathbb{N} \rightarrow C_{\text{step}}([a, b]; \mathbb{R})$ , w szczególności więc jest odwzorowaniem regulowanym. Wykorzystując ciągłość normy, ustaloną w Stw. 74, oraz wcześniejsze oszacowania, jak również oczywiste własności sumocąłki (a w istocie – subaddytywność normy  $\|\cdot\|_V$ ), sprawdzamy słuszność oszacowania (1.4.12) w bezpośrednim rachunku, oto bowiem z jednej strony

$$\begin{aligned} \left\| \int_{[a,b];V} F \right\|_V &\equiv \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b];V} \sigma_{F,n} \right\|_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{[a,b];V} \sigma_{F,n} \right\|_V \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b];\mathbb{R}} \|\sigma_{F,n}\|_V \equiv \int_{[a,b];\mathbb{R}} \|F\|_V \end{aligned}$$

a z drugiej –

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b];\mathbb{R}} \|\sigma_{F,n}\|_V &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |b-a| \cdot \|\sigma_{F,n}\|_\infty \leq |b-a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\|F - \sigma_{F,n}\|_\infty + \|F\|_\infty) \\ &= |b-a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|F\|_\infty \equiv |b-a| \cdot \|F\|_\infty. \end{aligned}$$

□

O naturalności wprowadzonej powyżej operacji całkowania w kategorii liniowej zaświadcza

STWIERDZENIE 88. *Przyjmijmy zapis Def. 27 i 64. Przyporządkowanie przestrzeni odwzorowań regulowanych nad  $[a, b]$  przestrzeniom Banacha rozszerza się w kanoniczny sposób do endofunktora kowariantnego*

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \cdot) : \mathbf{Ban}_{\mathbb{K}} \curvearrowright .$$

*Całka Cauchy'ego–Bochnera jest transformacją naturalną*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \cdot) & \\ \mathbf{Ban}_{\mathbb{K}} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \int_{[a, b], \cdot} \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathbf{Ban}_{\mathbb{K}} \\ & \text{id}_{\mathbf{Ban}_{\mathbb{K}}} & \end{array}$$

■

*Dowód:* Pierwsza część tezy jest oczywista – każde odwzorowanie  $\chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  indukuje odwzorowanie jawnie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \chi) : \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_1) \longrightarrow \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_2) : F \longmapsto \chi \circ F.$$

Istotnie, jeśli  $\sigma_{F, \cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{Map}_{\text{step}}([a, b], V_1)$  jest ciągiem zbieżnym do  $F$ , przy czym dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  (i  $\chi \neq 0$  – przypadek odwzorowania zerowego jest trywialny) zachodzi

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\varepsilon : \|F - \sigma_{F, n}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\|\chi\|_{\text{op}}},$$

to wówczas

$$\begin{aligned} \|\chi \circ F - \chi \circ \sigma_{F, n}\|_\infty &\equiv \sup_{t \in [a, b]} \|\chi((F - \sigma_{F, n})(t))\|_2 \leq \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \sup_{t \in [a, b]} \|(F - \sigma_{F, n})(t)\|_1 \\ &\equiv \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \|F - \sigma_{F, n}\|_\infty < \varepsilon, \end{aligned}$$

a zarazem

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \|\chi \circ \sigma_{F, n}\|_\infty &\equiv \sup_{t \in [a, b]} \|\chi(\sigma_{F, n}(t))\|_2 \leq \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \sup_{t \in [a, b]} \|\sigma_{F, n}(t)\|_1 \\ &\equiv \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \|\sigma_{F, n}\|_\infty, \end{aligned}$$

konstatujemy zatem, że  $\chi \circ \sigma_{F, \cdot}(\mathbb{N}) \subset \mathbf{Map}_{\text{step}}([a, b], V_2) \subset \mathbf{Map}_{\text{b}}([a, b], V_2)$  i ciąg ten jest zbieżny do  $\chi \circ F$ , czyli  $\chi \circ F \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_2)$ . Jest przy tym oczywiste, że dla dowolnej przestrzeni Banacha  $(V, \|\cdot\|_V)$  zachodzi tożsamość

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \text{id}_V) \equiv \text{id}_{\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V)},$$

a do tego dla dowolnej pary odwzorowań  $\chi_\beta \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_\beta, V_{\beta+1})$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  między przestrzeniami Banacha  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  spełniony jest warunek

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \chi_2 \circ \chi_1) = \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \chi_2) \circ \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \chi_1),$$

co przesądza o funktorialności  $\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \cdot)$ .

W następnej kolejności sprawdzamy naturalność całki Cauchy'ego–Bochnera, co sprowadza się do wykazania przemienności diagramów

$$\forall_{V_1, V_2 \in \text{Obj Ban}_{\mathbb{K}}}, \chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) : \begin{array}{ccc} \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_1) & \xrightarrow{\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \chi)} & \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_2) \\ \downarrow \int_{[a, b]; V_1} & & \downarrow \int_{[a, b]; V_2} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi} & V_2 \end{array}$$

lub – innymi słowy – do wykazania tożsamości

$$\forall_{F \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_1)} : \int_{[a, b]; V_2} \chi \circ F = \chi \left( \int_{[a, b]; V_1} F \right).$$

Ta jednak wynika wprost z ciągu równości (wykorzystujących wprowadzone wcześniej obserwacje i oznaczenia, jak również liniowosć i ciągłość  $\chi$ )

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]; V_2} \chi \circ F &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]; V_2} \chi \circ \sigma_{F, n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi \left( \int_{[a, b]; V_2} \sigma_{F, n} \right) \\ &= \chi \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]; V_2} \sigma_{F, n} \right) \equiv \chi \left( \int_{[a, b]; V_1} F \right). \end{aligned}$$

□

Jako prostą egzemplifikację powyższego odkrywamy

**COROLLARIUM 7.** *Przyjmijmy zapis Def. 64 oraz Stw. 77 i niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha, a nadto niech  $\chi \in C_{\text{reg}}([a, b], \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2))$ . Dla dowolnego wektora  $v \in V_1$  spełniona jest tożsamość*

$$\int_{[a, b]; V_2} r_{\text{ev}}(v) \circ \chi = \left( \int_{[a, b]; \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)} \chi \right)(v).$$

■

*Dowód:* Teza wynika wprost z połączenia (drugiej części) Stw. 77 ze Stw. 88. □

Nietrywialnego przykładu zastosowania całki Cauchy'ego–Bochnera w konstrukcji odwzorowań różniczkowalnych pomiędzy przestrzeniami Banacha nader często spotykanej i wykorzystywanej w matematycznym modelowaniu ewolucji układów fizycznych dostarcza poniższe

**STWIERDZENIE 89.** *Przyjmijmy zapis Def. 64 oraz Stw. 76. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha i niech  $F \in C^k(V_1, V_2)$ ,  $k \in \mathbb{N}^\times$ , a nadto niech  $a, b, t_0 \in \mathbb{R}$  będą dowolnymi liczbami spełniającymi relację  $a < t_0 < b$ . Odwzorowanie*

$$\sigma_{F; t_0} : C([a, b], V_1) \longrightarrow C([a, b], V_2) : \gamma \longmapsto \int_{[t_0, \cdot]; V_2} F \circ \gamma$$

jest klasy  $C^k$ , przy czym

$$\forall_{\gamma, v \in C([a, b], V_1)} : D\sigma_{F; t_0}(\gamma)(v) = \int_{[t_0, \cdot]; V_2} DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot)).$$

■

*Dowód:* Oznaczmy na potrzeby niniejszego dowodu  $I := [a, b]$ . Dokonamy najpierw, przywoławszy (1.4.12), oszacowania normy jawnie  $\mathbb{K}$ -liniowego odwzorowania  $D\sigma_{F;t_0} \circ \gamma$ ,

$$\begin{aligned}
\|D\sigma_{F;t_0} \circ \gamma\|_{\text{op}} &\equiv \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \frac{\|D\sigma_{F;t_0}(\gamma)(v)\|_{\infty}}{\|v\|_{\infty}} \\
&\equiv \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{t \in I} \left\| \int_{[t_0, t]; V_2} DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot)) \right\|_2 \right) \\
&\leq \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{t \in I} |t - t_0| \cdot \|DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot))\|_{\infty} \right) \\
&\leq (b - a) \cdot \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{s \in I} \|DF(\gamma(s))(v(s))\|_2 \right) \\
&\leq (b - a) \cdot \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{s \in I} (\|DF(\gamma(s))\|_{\text{op}} \cdot \|v(s)\|_1) \right) \\
&\leq (b - a) \cdot \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{s \in I} \|DF(\gamma(s))\|_{\text{op}} \cdot \sup_{t \in I} \|v(t)\|_1 \right) \\
&\leq (b - a) \cdot \sup_{s \in I} \|DF(\gamma(s))\|_{\text{op}}.
\end{aligned}$$

Wobec ciągłości normy  $\|\cdot\|_{\text{op}}$  (orzeczonej w Stw. 74) oraz założonej ciągłości  $DF$  i  $\gamma$  odwzorowanie  $\|DF(\gamma(\cdot))\|_{\text{op}} : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  jest ciągłe, zatem jego obraz w  $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$  jest – w świetle Stw. 69 – zwarty, więc też – na mocy Stw. 82 – ograniczony, co wobec powyższego oszacowania przesądza o ograniczoności  $D\sigma_{F;t_0} \circ \gamma$ . W podobny sposób (i z wykorzystaniem powyższych wniosków) dowodzimy ciągłości rozpatrywanego tu odwzorowania  $D\sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(C(I, V_1), C(I, V_2))$  w (dowolnym) punkcie  $\gamma \in C(I, V_1)$ , zauważając najpierw

$$\begin{aligned}
&\|D\sigma_{F;t_0}(\gamma_1) - D\sigma_{F;t_0}(\gamma)\|_{\text{op}} \\
&\leq \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left[ \frac{(b-a)}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{t \in I} (\|DF(\gamma_1(t)) - DF(\gamma(t))\|_{\text{op}} \cdot \|v(t)\|_1) \right] \\
&\leq (b - a) \cdot \sup_{t \in I} \|DF(\gamma_1(t)) - DF(\gamma(t))\|_{\text{op}},
\end{aligned}$$

a następnie wykorzystując wynikającą ze Stw. 75 jednostajną ciągłość  $DF$  na domknięciu kuli  $\overline{B_{V_1}(0; \|\gamma\|_{\infty} + 1)}$  (zakładamy, bez straty ogólności, że odległość  $\gamma_1$  od  $\gamma$  liczona w metryce na  $C(I, V_1)$  indukowanej przez normę supremum nie przekracza 1), która gwarantuje

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon}^{(DF)} > 0 \quad \forall w_1, w_2 \in \overline{B_{V_1}(0; \|\gamma\|_{\infty} + 1)} : \\
\left( \|w_2 - w_1\|_{\infty} < \delta_{\varepsilon}^{(DF)} \implies \|DF(w_2) - DF(w_1)\|_{\text{op}} < \frac{\varepsilon}{b-a} \right)$$

i tym samym pozwala – przy ustalonym  $\varepsilon > 0$  – dokonać dla

$$\|\gamma_1(t) - \gamma(t)\| \leq \|\gamma_1 - \gamma\|_{\infty} < \min\{1, \delta_{\varepsilon}^{(DF)}\} =: \delta_{\varepsilon}, \quad t \in I$$

ostatecznego oszacowania

$$\|D\sigma_{F;t_0}(\gamma_1) - D\sigma_{F;t_0}(\gamma)\|_{\text{op}} \leq (b - a) \cdot \sup_{t \in I} \|DF(\gamma_1(t)) - DF(\gamma(t))\|_{\text{op}} < \varepsilon.$$

Na zakończenie pierwszej części dowodu przekonujemy się, że rozpatrywane tu odwzorowanie (o wszystkich pożądanym własnościach) jest w istocie pochodną (w

sensie Fréchet) odwzorowania  $\sigma_{F;t_0}$ . W tym celu sprawdzamy zachowanie odnośnej reszty

$$\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma; v) := \sigma_{F;t_0}(\gamma + v) - \sigma_{F;t_0}(\gamma) - D\sigma_{F;t_0}(\gamma)(v)$$

w granicy

$$\begin{aligned} & \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma; v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} \\ &= \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \left\| \int_{[t_0, \cdot]; V_2} [F \circ (\gamma + v)(\cdot) - F(\gamma(\cdot)) - DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot))] \right\|_\infty \\ &\leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|F \circ (\gamma + v) - F \circ \gamma - DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot))\|_\infty}{\|v\|_\infty} \\ &\equiv (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\sup_{t \in I} \|F \circ (\gamma + v)(t) - F \circ \gamma(t) - DF(\gamma(t))(v(t))\|_2}{\|v\|_\infty}. \end{aligned}$$

Ciągła różniczkowalność  $F$  w połączeniu z ciągłością  $\gamma$  i  $v$  implikuje – na mocy argumentu analogicznego do tego użytego w dowodzie ograniczoności  $D\sigma_{F;t_0} \circ \gamma$  – istnienie punktu  $t_* \in I$ , w którym jest osiągnięte supremum występujące w liczniku, a zatem

$$\lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma; v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} \leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|F(\gamma(t_*) + v(t_*)) - F(\gamma(t_*)) - DF(\gamma(t_*))(v(t_*))\|_2}{\|v\|_\infty},$$

czyli też – raz jeszcze wobec różniczkowalności  $F$  (przy założeniu  $v(t_*) \neq 0$ , którego niespełnienie automatycznie implikuje pożądaną tezę) –

$$\begin{aligned} \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma; v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} &\leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|v(t_*)\|_1 \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(\gamma(t_*); v(t_*))\|_2}{\|v(t_*)\|_1}}{\|v\|_\infty} \\ &\leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\frac{\|\mathcal{R}F(\gamma(t_*); v(t_*))\|_2}{\|v(t_*)\|_1} \cdot \sup_{s \in I} \|v(s)\|_1}{\|v\|_\infty} \\ &= (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}F(\gamma(t_*); v(t_*))\|_2}{\|v(t_*)\|_1} = 0. \end{aligned}$$

Jest zatem odwzorowanie  $\sigma_{F;t_0}$  jednokrotnie różniczkowalne w sposób ciągły, przy czym pochodna ma postać zapostulowaną w treści dowodzonego stwierdzenia.

W przypadku  $k > 1$  ciągłej różniczkowalności  $\sigma_{F;t_0}$  klasy  $C^k$  dowodzimy przez indukcję względem stopnia  $r \in \overline{1, k}$ . Udowodniwszy słuszność tezy dla  $r = 1$ , założymy jej prawdziwość dla  $1 \leq r < k$ , a następnie powtórzmy rozumowanie z pierwszej części dowodu, zastępując po pierwsze ciągłe odwzorowanie  $F$  takimż odwzorowaniem  $D^r F : V_1 \rightarrow \mathcal{B}_K^r(V_1, V_2)$  oraz odwzorowanie

$$\sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \rightarrow C(I, V_2) : \gamma \mapsto \int_{[t_0, \cdot]; V_2} F \circ \gamma$$

odwzorowaniem (o definicji stanowiącej składową tezę indukcyjnej)

$$D^r \sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \rightarrow C(I, \mathcal{B}_K^r(V_1, V_2)) : \gamma \mapsto \int_{[t_0, \cdot]; \mathcal{B}_K^r(V_1, V_2)} D^r F \circ \gamma,$$

a po drugie – w konsekwencji poprzedniego – przestrzeń  $(V_2, \|\cdot\|_2)$  przestrzenią  $(\mathcal{B}_K^r(V_1, V_2), \|\cdot\|_{\text{op}})$ . Opisane podstawienie prowadzi, w szczególności, do postulatu



dotyczącego postaci odwzorowania

$$\mathbf{D}^{r+1}\sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \longrightarrow C(I, \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^{r+1}(V_1, V_2))$$

wyrażonego wzorem

$$\begin{aligned} \forall_{\gamma, v_1, v_2, \dots, v_{r+1} \in C(I, V_1)} : \mathbf{D}^{r+1}\sigma_{F;t_0}(\gamma)(v_1, v_2, \dots, v_{r+1}) \\ = \int_{[t_0, \cdot]; V_2} \mathbf{D}^{r+1}F(\gamma(\cdot))(v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots, v_{r+1}(\cdot)). \end{aligned}$$

□

Na podstawie dotychczasowej analizy możemy już sformułować podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego dla odwzorowań (regulowanych) o wartościach w przestrzeni Banacha. Zaczynamy od

**TWIERDZENIE 1.4.4** (Podstawowe rachunku różniczkowego i całkowego).  
Przyjmijmy zapis Def. 64 i niechaj  $F \in C_{\text{reg}}([a, b], V)$ , przy czym zakładamy, że  $F$  jest ciągła w punkcie  $c \in [a, b]$ . Wówczas odwzorowanie

$$I_F : [a, b] \longrightarrow V : t \longmapsto \int_{[a, t]; V} F$$

jest różniczkowalne w  $c$ , a jego pochodna jest równa

$$\mathbf{D}I_F(c) = F(c).$$

W szczególności

$$(1.4.13) \quad F(b) - F(a) = \int_{[a, b]; V} \mathbf{D}F.$$

■

*Dowód:* Korzystając z Równ. (1.4.10) i (1.4.11), jak również z Cor. 7 (w odniesieniu do stałego odwzorowania  $[a, b] \ni t \longmapsto \chi(t) \equiv \text{id}_V$ ), obliczamy wprost, dla dowolnego  $h \in \mathbb{R}$  o własności  $c + h \in [a, b]$ :

$$\begin{aligned} I_F(c+h) - I_F(c) - h \triangleright F(c) &= \int_{[a, c+h]; V} F - \int_{[a, c]; V} F - \left( \int_{[c, c+h]; V} \text{id}_V \right) (F(c)) \\ &= \int_{[c, c+h]; V} F - \int_{[c, c+h]; V} r_{\text{ev}}(F(c)) \circ \text{id}_V \\ &\equiv \int_{[c, c+h]; V} (F - F(c)) \end{aligned}$$

i na tej podstawie, a w odwołaniu do Równ. (1.4.12), otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} \|I_F(c+h) - I_F(c) - h \triangleright F(c)\|_V &= \left\| \int_{[c, c+h]; V} (F - F(c)) \right\|_V \\ &\leq |h| \cdot \sup_{t \in [c, c+h]} \|F(t) - F(c)\|_V, \end{aligned}$$

a stąd ostatecznie, uwzględnivszy ciągłość  $F$  w  $c$ , także pożądany wynik

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|I_F(c+h) - I_F(c) - h \triangleright F(c)\|_V}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [c, c+h]} \|F(t) - F(c)\|_V = 0.$$

□

Pośród nieoczywistych zastosowań Podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego pojawia się

STWIERDZENIE 90 (Nierówność Grönwalla–Bellmana). *Przyjmijmy zapis Def. 63 oraz 64 i ustalmy (dowolnie) liczby  $a, b \in \mathbb{R}$  spełniające warunek  $a < b$  oraz  $t_0 \in I := ]a, b[$ . Dla dowolnych funkcji  $f, \varphi \in C(I, [0, \infty[)$  i  $c \in [0, \infty[$  słuszną jest implikacja<sup>2</sup>*

$$\forall t \in I : f(t) \leq c + \left| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \varphi \cdot f \right| \implies \forall t \in I : f(t) \leq c \cdot \exp \left( \left| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \varphi \right| \right).$$

■

Dowód: Rozpatrzmy najpierw przypadek  $t \in ]t_0, b[$ . W tym celu zdefiniujemy funkcję

$$F : ]t_0, b[ \rightarrow [0, \infty[ : t \mapsto c + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \varphi \cdot f.$$

W świetle Tw. 1.4.4 funkcja ta jest klasy  $C^1$  i spełnia nierówność

$$F'(t) = \varphi(t) f(t) \leq \varphi(t) F(t), \quad t \in ]t_0, b[,$$

a to wobec założonej relacji  $f(t) \leq F(t)$ . Powyższą nierówność możemy przepisać w zwartej postaci (tutaj  $D \equiv \frac{d}{dt}$ )

$$D \left( \exp \left( - \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}} \varphi \right) \cdot F(\cdot) \right) (t) \leq 0,$$

a następnie – wobec ciągłej różniczkowalności wyrażenia różniczkowanego – scałkować na odcinku  $]t_0, \tau[$  dla dowolnego  $\tau \in ]t_0, b[$ , otrzymując w ten sposób

$$F(\tau) \cdot \exp \left( - \int_{[t_0, \tau]; \mathbb{R}} \varphi \right) - F(t_0) \leq 0,$$

czyli

$$F(\tau) \leq c \cdot \exp \left( \int_{[t_0, \tau]; \mathbb{R}} \varphi \right),$$

skąd na mocy użytej wcześniej nierówności z założenia otrzymujemy oczekiwaną nierówność

$$f(\tau) \leq c \cdot \exp \left( \int_{[t_0, \tau]; \mathbb{R}} \varphi \right).$$

Analogiczne rozumowanie dla  $t \in ]a, t_0[$  bierze za punkt wyjścia funkcję

$$G : ]a, t_0[ \rightarrow [0, \infty[ : t \mapsto c + \int_{[t, t_0]; \mathbb{R}} \varphi \cdot f.$$

Przypadek  $t = t_0$  nie wymaga komentarza. □

Pośród oczywistych natomiast znajdujemy użyteczne

TWIERDZENIE 1.4.5 (Rozwinięcie Taylora dla funkcji wielu zmiennych). *Przyjmijmy zapis Def. 55, 63 oraz 64 i ustalmy (dowolnie)  $n \in \mathbb{N}^\times$ , a następnie wprowadźmy notację wielowskaźnikową, w której we współrzędnych kartezjańskich  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{\times n}$  wektorowi  $M = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{\times n}$ , o długości  $\|M\| \equiv \sum_{i=1}^n m_i$ , przyporządkowujemy operator pochodnej cząstkowej*

$$D_M^{\|M\|} := \frac{\partial^{\|M\|}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}},$$

<sup>2</sup>Nie chcąc wychodzić poza zakres pojęć wprowadzonych w niniejszym skrypcie, zapisaliśmy tęzę stwierdzenia w terminach całki Cauchy'ego–Bochnera, jest jednak absolutnie oczywistym, że mamy tu w istocie do czynienia ze standardową całką Riemanna.

formę  $\|M\|$ -liniową

$$\Lambda^M : \mathbb{R}^{x^n} \longrightarrow \mathbb{R} : (r_1, r_2, \dots, r_n) \longmapsto \prod_{i=1}^n r_i^{m_i}$$

oraz symbol

$$M! := \prod_{i=1}^n m_i!.$$

Niechaj  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x^n})$  i niech  $x \in \mathcal{O}$  oraz  $h \in \mathbb{R}^{x^n}$ , przy czym zakładamy, że  $I_{x,h} := \{x + t \triangleright h \mid t \in [0, 1]\} \subset \mathcal{O}$ . Dla dowolnej funkcji  $f \in C^{r+1}(\mathcal{O}, \mathbb{R})$  spełniona jest równość

$$f(x+h) = \sum_{\|M\| \leq r} \frac{1}{M!} \Lambda^M(h) D_M^{\|M\|} f(x) + \mathcal{R}_{r+1} f(x; h),$$

w której ostatni człon jest resztą rzędu  $r+1$ , postaci<sup>3</sup>

$$\mathcal{R}_{r+1} f(x; h) = (r+1) \sum_{\|M\|=r+1} \frac{1}{M!} \Lambda^M(h) \int_{[0,1]; \mathbb{R}} (1-\cdot)^r D_M^{r+1} f(x + \cdot \triangleright h).$$

■

Dowód: Dla  $n=1$  sprowadza się do wielokrotnego użycia Tw. 1.4.4. Przypadek  $n > 1$  redukuje się do poprzedniego poprzez wprowadzenie – dla ustalonych  $x$  i  $h$  – funkcji pomocniczej  $g_{x,h} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f(x + t \triangleright h)$ . □

W następnej kolejności natrafiamy na

**TWIERDZENIE 1.4.6** (O wartości średniej). *Przyjmijmy zapis Def. 55, 63 oraz 64. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha i niech  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(V_1)$ , a do tego niech dla pewnych  $v \in \mathcal{O}$  i  $w \in V_1$  oraz dowolnego  $t \in [0, 1]$  zachodzi  $v +_1 t \triangleright w \in \mathcal{O}$ . Oznaczmy*

$$\gamma_{v;w} : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{O} : t \longmapsto v +_1 t \triangleright w.$$

Dowolne odwzorowanie  $F \in C^q(\mathcal{O}, V_2)$  spełnia tożsamość

$$F(v +_1 w) - F(v) = \left( \int_{[0,1]; \mathcal{B}_K(V_1, V_2)} DF \circ \gamma_{v;w} \right) (w),$$

więc też

$$\|F(v +_1 w) - F(v)\|_2 \leq \|w\|_1 \cdot \|DF \circ \gamma_{v;w}\|_\infty.$$

■

Dowód: Nierówność w tezie twierdzenia wynika wprost z zapostulowanej w nim równości, ograniczoności całki Cauchy’ego–Bochnera oraz oszacowania (1.4.12), pozostaje zatem udowodnić rzeczoną równość. W tym celu wystarczy jednak zauważyć, że w świetle Stw. 86 zachodzi równość

$$\begin{aligned} D(F \circ \gamma_{v;w})(t) &= DF(\gamma_{v;w}(t)) \circ D\gamma_{v;w}(t) \equiv DF(\gamma_{v;w}(t))(w) \\ &\equiv r_{\text{ev}}(w) \circ (DF \circ \gamma_{v;w})(t), \end{aligned}$$

zatem na mocy Równ. 1.4.13 oraz Cor. 7 otrzymujemy oczekiwaną równość

$$F(v +_1 w) - F(v) \equiv F \circ \gamma_{v;w}(1) - F \circ \gamma_{v;w}(0) = \int_{[0,1]; V} D(F \circ \gamma_{v;w})$$

<sup>3</sup>Patrz: przypis do treści Stw. 90.

$$\begin{aligned}
&= \int_{[0,1];V} r_{\text{ev}}(w) \circ (DF \circ \gamma_{v;w}) \\
&= \left( \int_{[0,1];\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)} DF \circ \gamma_{v;w} \right) (w).
\end{aligned}$$

□

Lipschitzowskość odwzorowania między przestrzeniami metrycznymi (rozumiana jak w (1.4.8)) implikuje – w świetle Stw. 72 – jego ciągłość. Dzięki powyższemu twierdzeniu możemy udokumentować sytuację, w której zachodzi implikacja odwrotna, co czynimy w

**STWIERDZENIE 91.** *Przyjmijmy zapis Def. 55, 63 oraz Przykł. 25 (1) i ustalmy  $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Niechaj  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_{\mathbb{E}}(\mathbb{R}^{n_1})$ , niech  $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^{n_2})$  i niech  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  będzie podzbiorem zwartym. Wówczas  $f$  spełnia globalnie na  $\mathcal{K}$  warunek Lipschitza (jak w Tw. 1.4.2),*

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathcal{K} : \|f(x) - f(y)\|_{n_2} \leq L \cdot \|x - y\|_{n_1}.$$

■

*Dowód:* Każdy punkt  $x \in \mathcal{K}$  jest punktem wewnętrznym  $\mathcal{O}$ , przeto jest w tym ostatnim zawarty wraz z pewną otwartą kulą  $B^{n_1}(x; \varepsilon_x)$ ,  $\varepsilon_x > 0$ . Rodzina kul  $\{B^{n_1}(x; \frac{\varepsilon_x}{2})\}_{x \in \mathcal{K}}$  stanowi (otwarte) pokrycie  $\mathcal{K}$ , z którego możemy wybrać skończone podpokrycie  $\{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})\}_{i \in \overline{1, N}}$ . Każda z *domkniętych* kul  $\overline{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})}$  jest (w świetle Stw. 82) zwarta i zawarta w  $\mathcal{O}$ , a nadto wypukła, możemy przeto odnieść do niej tezę Tw. 1.4.6, a ponieważ odwzorowanie  $\|Df(\cdot)\|_{\text{op}} \upharpoonright_{\overline{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})}}$  jest ograniczone na mocy Stw. 69 i Stw. 82, otrzymujemy

$$\forall_{i \in \overline{1, N}} \exists M_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall_{x, y \in \overline{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})}} : \|f(x) - f(y)\| \leq M_i \cdot \|x - y\|.$$

Wystarczy teraz położyć

$$L := \max_{i \in \overline{1, N}} \{M_i\}.$$

□

Twierdzenie o wartości średniej, mimo swą niezaprzeczalną elementarność, otwiera nam drogę do wyników stanowiących podstawę analizy lokalnej na rozmaitościach różniczkowalnych, z których nieraz przyjdzie nam korzystać w dalszej części kursu. Oto więc mamy

**TWIERDZENIE 1.4.7** (O lokalnej odwracalności odwzorowań). *Przyjmijmy zapis Def. 63 i niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ),  $\mathcal{U} \subset V_1$  podzbiorem otwartym,  $F : \mathcal{U} \rightarrow V_2$  zaś – odwzorowaniem klasy  $C^q$ ,  $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Niech dalej  $v_* \in \mathcal{U}$  i załóżmy, że pochodna (Fréchet)  $DF(v_*) \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  ma ograniczoną odwrotność. Wówczas  $F$  jest lokalnym izomorfizmem klasy  $C^q$ , tzn. istnieje otoczenie otwarte  $\mathcal{O}_{v_*} \subset \mathcal{U}$  wektora  $v_*$  oraz odwzorowanie  $G \in C^q(F(\mathcal{O}_{v_*}), \mathcal{O}_{v_*})$  spełniające warunki*

$$F \circ G = \text{id}_{F(\mathcal{O}_{v_*})}, \quad G \circ F \upharpoonright_{\mathcal{O}_{v_*}} = \text{id}_{\mathcal{O}_{v_*}}.$$

■

*Dowód:* Po pierwsze zauważmy, że dokonując w razie potrzeby przesunięcia argumentu i wartości o stałe wektory oraz przeskalowania  $F \mapsto DF(v_*)^{-1} \circ F$ , możemy zawsze sprowadzić rozważane zagadnienie do takiego, w którym mamy do czynienia z odwzorowaniem  $F \in C^q(\mathcal{U}, V_1)$  spełniającym w  $v_* = 0_1$  warunki  $F(0_1) = 0_1$  i  $DF(0_1) = \text{id}_{V_1}$ , co też uczynimy poniżej. Rozważmy odwzorowanie (klasy  $C^q$ )

$$\Phi_F : \mathcal{U} \rightarrow V_1 : v \mapsto v - F(v),$$

spełniające warunek

$$D\Phi_F(0_1) = \text{id}_{V_1} - DF(0_1) \equiv 0,$$

przy czym wobec ograniczoności pochodnej istnieje takie  $r > 0$ , dla którego

$$\forall_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; 2r)}} : \|D\Phi_F(v)\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2}.$$

Na podstawie Tw. 1.4.6 stwierdzamy wówczas, że

$$\forall_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} : \|\Phi_F(v)\|_1 \leq \frac{1}{2} \|v\|_1 < \frac{r}{2},$$

skąd wniosek:

$$\Phi_F(\overline{B_{V_1}(0_1; r)}) \subset \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}.$$

Pokażemy, że odwzorowanie  $\Phi_F : \overline{B_{V_1}(0_1; r)} \rightarrow \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}$  jest bijekcją. W tym celu wybierzmy (dowolnie)  $w \in \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}$  i rozważmy odwzorowanie

$$\Phi_F^w : \overline{B_{V_1}(0_1; r)} \rightarrow V_1 : v \mapsto w + \Phi_F(v).$$

Jako że  $2\|w\|_1, \|v\|_1 \leq r$ , mamy

$$\forall_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} : \|\Phi_F^w(v)\|_1 \leq \|w\|_1 + \|\Phi_F(v)\|_1 \leq r,$$

więc w istocie  $\Phi_F^w(\overline{B_{V_1}(0_1; r)}) \subset \overline{B_{V_1}(0_1; r)}$ , a ponieważ  $\|D\Phi_F^w(v)\|_{\mathcal{B}_K(V_1)} \leq \frac{1}{2}$ , przeto

$$\begin{aligned} \forall_{v_1, v_2 \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} : \|\Phi_F^w(v_1) - \Phi_F^w(v_2)\|_1 &= \|\Phi_F^w(v_1 - v_2)\|_1 \\ &\leq \sup_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} \|D\Phi_F^w(v)\|_{\text{op}} \cdot \|v_1 - v_2\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_1, \end{aligned}$$

więc też – na mocy Tw. 1.4.2 –  $\Phi_F^w$  ma jednoznacznie określony punkt stały  $v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}$ , a w nim

$$v = \Phi_F^w(v) \equiv w + v - F(v) \quad \Leftrightarrow \quad w = F(v).$$

Ostatecznie wnioskujemy więc, że odwzorowanie  $F$  jest odwracalne na zbiorze domkniętym  $F^{-1}(\overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}) =: B$ . Bez trudu przekonujemy się o ograniczoności tejże lokalnej odwrotności  $G$ , oto bowiem dla dowolnego  $v_1, v_2 \in B$  spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned} \|G(F(v_2)) - G(F(v_1))\|_1 &\equiv \|v_2 - v_1\|_1 = \|F(v_2) + \Phi_F(v_2) - F(v_1) - \Phi_F(v_1)\|_1 \\ &\leq \|F(v_2) - F(v_1)\|_1 + \|\Phi_F(v_2) - \Phi_F(v_1)\|_1 \\ &\leq \|F(v_2) - F(v_1)\|_1 + \frac{1}{2} \|v_2 - v_1\|_1 \\ &\equiv \|F(v_2) - F(v_1)\|_1 + \frac{1}{2} \|G(F(v_2)) - G(F(v_1))\|_1, \end{aligned}$$

z której wynika lipschitzowskość  $G$ ,

$$\forall_{w_1, w_2 \in \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}} : \|G(w_2) - G(w_1)\|_1 \leq 2\|w_2 - w_1\|_w,$$

z tej zaś – pożądana ciągłość  $G$ . W następnej kolejności dowodzimy różniczkwalności  $G$  w otwartej kuli  $B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})$ . W tym celu ustalmy (dowolnie)  $w \in B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})$  oraz  $h \in V_1$  na tyle małe, aby był spełniony warunek  $w +_1 h \in B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})$ , a zatem aby istniały (dane jednoznacznie) wektory  $v = G(w) \in B_{V_1}(0_1; r)$  oraz  $u = G(w +_1 h) - G(w) \in V_1$ . Możemy teraz – w świetle poczynionych założeń – zdefiniować odwzorowanie

$$H := DF(v)^{-1} \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1)$$

i policzyć

$$\|G(w +_1 h) - G(w) - H(w +_1 h - w)\|_1 \equiv \|u - H(F(v +_1 u) - F(v))\|_1,$$

co wobec ciągłej różniczkwalności  $F$ ,

$$F(v +_1 u) - F(v) = DF(v)(u) + \mathcal{R}_2 F(v; u), \quad \lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}_2 F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} = 0,$$

pozwała zapisać

$$\begin{aligned} \|G(w +_1 h) - G(w) - H(h)\|_1 &= \|u - H \circ DF(v)(u) - H(\mathcal{R}_2 F(v; u))\|_1 \\ &= \|H(\mathcal{R}F(v; u))\|_1 \leq \|H\|_{\text{op}} \cdot \|\mathcal{R}F(v; u)\|_1 \\ &\equiv \|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \cdot \|G(w +_1 h) - G(w)\|_1, \end{aligned}$$

czyli też – biorąc pod uwagę stwierdzoną wcześniej ograniczoność  $G$  –

$$\begin{aligned} \|G(w +_1 h) - G(w) - H(h)\|_1 &\leq 2\|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \cdot \|w +_1 h - w\|_1 \\ &\equiv 2\|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \cdot \|h\|_1. \end{aligned}$$

Powyzsza formuła dowodzi różniczkwalności  $G$ , oto bowiem – skoro  $\|w\|_1 \leq 2\|h\|_V$  (jak wynika wprost z lipschitzowskością  $G$ ) –

$$2\|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \xrightarrow{\|h\|_1 \rightarrow 0} 2\|H\|_{\text{op}} \cdot \lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} = 0,$$

a zarazem pozwala stwierdzić – zgodnie z oczekiwaniami – równość

$$(1.4.14) \quad DG(w) = H \equiv DF(G(w))^{-1}.$$

W konsekwencji ciągłości  $G, DF$  oraz operacji Inv brania odwrotności (odwzorowania liniowego), formuła powyższa zaświadcza o ciągłości odwzorowania  $DG = \text{Inv} \circ DF \circ G : B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2}) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1)$ . Wreszcie biorąc pod uwagę gładkość operacji brania odwrotności (i mając na względzie banachowską naturę przestrzeni  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}^k(V_1, V_1)$ ,  $k \in \overline{1, q}$ ), drogą indukcji dowodzimy przynależności odwzorowania  $G$  do klasy  $C^q$ , wykorzystując Stw. 86 w rekurencyjnym wzorze  $D^k G \equiv D(D^{k-1} G)$ .  $\square$  Niepoślednią rolę odgrywa także

**TWIERDZENIE 1.4.8** (O odwzorowaniu uwikłanym). *Przyjmijmy zapis Def. 63. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ),  $\mathcal{U}_\beta \subset V_\beta$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  podzbiarami otwartymi,  $F : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow V_3$  zaś – odwzorowaniem klasy  $C^q$ ,  $q \in \mathbb{N}^\times \cup \{\infty\}$ . Niech dalej  $(v_*, w_*) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  i załóżmy, że  $F(v_*, w_*) = 0$  oraz że pochodna  $D_2 F(v_*, w_*) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_2, V_3)$  względem argumentu*

z  $\mathcal{U}_2$  ma ciągłą odwrotność. Wówczas istnieje takie otoczenie otwarte  $\mathcal{O} \ni v_*$ , na którym jest jednoznacznie określone odwzorowanie  $G \in C^q(\mathcal{O}, \mathcal{U}_2)$  o własnościach

$$G(v_*) = w_*, \quad \forall v \in \mathcal{O} : F(v, G(v)) = 0.$$

■

*Dowód:* Przechodząc od  $F$  do  $D_2F(v_*, w_*)^{-1} \circ F$ , możemy zawsze doprowadzić do tego, że pochodna  $F$  względem drugiego argumentu jest w  $(v_*, w_*)$  odwzorowaniem tożsamościowym na  $V_3 \equiv V_2$ . Przyjmąwszy taki właśnie punkt wyjścia, rozważmy odwzorowanie

$$\Phi_F : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow V_1 \times V_2 : (v, w) \longmapsto (v, F(v, w)).$$

Jego pochodna  $D\Phi_F : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1 \times V_2)$  przyjmuje w  $(v_*, w_*)$  prostą postać

$$D\Phi_F(v_*, w_*) = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 \\ D_1F(v_*, w_*) & D_2F(v_*, w_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 \\ D_1F(v_*, w_*) & \text{id}_{V_2} \end{pmatrix},$$

jest zatem jawnie odwracalna,

$$D\Phi_F(v_*, w_*)^{-1} = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 \\ -D_1F(v_*, w_*) & \text{id}_{V_2} \end{pmatrix},$$

co w świetle Tw. 1.4.7 oznacza istnienie na pewnym otoczeniu  $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \ni (v_*, w_*)$  odwzorowania

$$\Psi : \Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2) \equiv \mathcal{W}_1 \times F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2) \longrightarrow \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$$

klasy  $C^q$  spełniającego warunki

$$\Phi_F \circ \Psi = \text{id}_{\Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2)}, \quad \Psi \circ \Phi_F \upharpoonright_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2} = \text{id}_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2}.$$

Wobec oczywistej własności tego odwzorowania,

$$\text{pr}_1 \circ \Psi = \text{id}_{\mathcal{W}_1},$$

wnioskujemy na tej podstawie o istnieniu odwzorowania  $\tilde{G} \in C^q_{\mathbb{K}}(\Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2), \mathcal{W}_2)$  spełniającego warunki

$$\forall (v, w) \in \Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2) \quad \forall u \in \mathcal{W}_2 : \left[ F(v, \tilde{G}(v, w)) = w \quad \wedge \quad \tilde{G}(v, F(v, u)) = u \right].$$

Powyższe formuły podpowiadają zdefiniowanie odwzorowanie

$$G : \mathcal{W}_1 \longrightarrow \mathcal{W}_2 : v \longmapsto \tilde{G}(v, 0_2)$$

klasy  $C^q$ , które w oczywisty sposób spełnia warunki z treści dowodzonego twierdzenia (dla  $\mathcal{O} \equiv \mathcal{W}_1$ ),

$$\forall v \in \mathcal{W}_1 : F(v, G(v)) \equiv F(v, \tilde{G}(v, 0)) = 0_2.$$

Na tym etapie pozostaje już tylko udowodnić jednoznaczność wyboru  $G$ , co jest konieczne, gdyż w powyższej definicji  $G$  dokonaliśmy arbitralnego wyboru przy przejściu od (danego jednoznacznie) odwzorowania  $\tilde{G}$  do  $G$ . Niech zatem  $G_*$  będzie dowolnym ciągłym odwzorowaniem określonym na pewnym otoczeniu otwartym  $\tilde{\mathcal{O}} \ni v_*$  i spełniającym warunki

$$G_*(v_*) = w_*, \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{O}} : F(v, G_*(v)) = 0_2.$$

Wówczas dla  $v \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{W}_1$  zachodzi tożsamość

$$\Phi_F(v, G_*(v)) = (v, F(v, G_*(v))) = (v, 0_2),$$

jeśli więc tylko  $G_*(v) \in \mathcal{W}_2$ , a wobec ciągłości  $G_*$  wartości  $G_*(v)$  są dowolnie bliskie  $w_*$ , to stwierdzamy równość

$$(v, G_*(v)) = \Psi \circ \Phi_F(v, G_*(v)) = \Psi(v, 0_2) = (v, G(v)),$$

czyli  $G_*(v) = G(v)$  dla  $v \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{W}_1 \cap G_*^{-1}(\mathcal{W}_2)$ , przy czym to ostatnie przecięcie jest niepustym zbiorem otwartym (zawierającym w szczególności  $v_*$ ), co dowodzi lokalnej jednoznaczności  $G$ .  $\square$

Na zakończenie niniejszej zwięzłej rekapitulacji podstawowych twierdzeń dotyczących rachunku różniczkowego i całkowego na przestrzeniach Banacha przypomnimy jeszcze

**TWIERDZENIE 1.4.9** (O rzędzie odwzorowania). *Przyjmijmy zapis Def. 63. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ) wymiaru  $\dim_{\mathbb{K}} V_\alpha = N_\alpha \in \mathbb{N}$ , niech  $v \in V_1$  i niech  $\mathcal{U}_v \ni v$  będzie jego otwartym otoczeniem w  $V_1$ , wreszcie też niech  $F \in C^q(\mathcal{U}_v, V_2)$ ,  $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ , przy czym zakładamy, że  $DF$  ma stały rząd  $\text{rk} DF = r$ , tj. odwzorowanie  $\mathcal{U}_v \rightarrow \mathbb{N} : v \mapsto \dim_{\mathbb{K}} \text{Im} DF(v)$  jest stałe. Wówczas istnieje otwarte otoczenie  $\mathcal{O}_v \subset \mathcal{U}_v$  wektora  $v$  oraz homeomorfizm*

$$\iota_1 : \mathcal{O}_v \xrightarrow{\text{homeo}} B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$$

o własnościach  $\iota_1 \in C^q(\mathcal{U}_v, B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1))$  oraz  $\iota_1^{-1} \in C^q(B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1), \mathcal{U}_v)$ , jak również otwarte otoczenie  $\mathcal{W} \supset F(\mathcal{U}_v)$  wektora  $F(v)$  oraz homeomorfizm

$$\iota_2 : B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1) \xrightarrow{\text{homeo}} \mathcal{W}$$

o własnościach  $\iota_2 \in C^q(B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1), \mathcal{W})$  oraz  $\iota_2^{-1} \in C^q(\mathcal{W}, B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1))$ , które zadają rozkład  $F$  postaci

$$(1.4.15) \quad F = \iota_2 \circ \pi_{1,2,\dots,r} \circ \iota_1,$$

zapisany przy użyciu odwzorowania

$$\pi_{1,2,\dots,r} : \mathbb{K}^{n_1} \rightarrow \mathbb{K}^{n_2} : (k_1, k_2, \dots, k_{n_1}) \mapsto (k_1, k_2, \dots, k_r, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}).$$

■

*Dowód:* Bez straty ogólności możemy przyjąć, że  $v = 0_1$  oraz  $F(v) = 0_2$  (wystarczy zastąpić odwzorowanie  $F$  odwzorowaniem  $\mathcal{U}_v \rightarrow V_2 : w \mapsto F(v + w) - F(v)$ ), co też uczynimy. Dopełnienie proste  $\text{Ker} DF(0_1)$  w  $V_1$ , którego istnienie wynika wprost z Cor. 5, jest  $r$ -wymiarową podprzestrzenią  $V_1$ , którą będziemy oznaczać symbolem  $\Delta_1$ ,

$$V_1 \cong \Delta_1 \oplus \text{Ker} DF(0_1).$$

Wybrawszy w  $V_1$  bazę  $\{v_i\}_{i \in \overline{1, n_1}} =: \mathcal{B}_1$  będącą konkatenacją baz:  $\{v_j\}_{j \in \overline{1, r}}$  w  $\Delta_1$  oraz  $\{v_{r+k}\}_{k \in \overline{1, n_1-r}}$  w  $\text{Ker} DF(0_1)$  (w rozumieniu Stw. 34), a wraz z nią – bazę dualną  $\{\varphi_i\}_{i \in \overline{1, n_1}}$  w  $V_1^*$ ,

$$\varphi_i(v_l) = \delta_{i,l}^{\mathbb{K}}, \quad i, l \in \overline{1, n_1},$$

definiujemy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\kappa_1 : V_1 \rightarrow \{\mathbf{0}_r\} \times \mathbb{K}^{\times n_1-r} \subset \mathbb{K}^{\times n_1} : w \mapsto \sum_{k=1}^{n_1-r} \varphi_{r+k}(w) \triangleright_{\mathbb{K}^{n_1}} e_{r+k},$$

gdzie  $\{e_i\}_{i \in \overline{1, n_1}}$  jest bazą standardową w  $\mathbb{K}^{\times n_1}$  wprowadzoną w Przykł. 13 (5). Wybierzmy następnie w  $V_2$  bazę  $\{w_a\}_{a \in \overline{1, n_2}} =: \mathcal{B}_2$  będącą konkatenacją baz:  $\{w_b \equiv$



$DF(0_1)(v_b)\}_{b \in \overline{1, r}}$  w  $\text{Im } DF(0)$  oraz  $\{w_{r+c}\}_{c \in \overline{1, n_2-r}}$  w dopełnieniu  $\Delta_2$  podprzestrzeni  $\text{Im } DF(0) \subset V_2$ ,

$$V_2 \cong \text{Im } DF(0_1) \oplus \Delta_2,$$

wraz z odnośną bazą dualną  $\{\psi_a\}_{a \in \overline{1, n_2}}$ ,

$$\psi_a(w_b) = \delta_{a,b}^{\mathbb{K}}, \quad a, b \in \overline{1, n_2},$$

po czym zdefiniujemy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\kappa_2 : V_2 \longrightarrow \mathbb{K}^{\times r} \times \{\mathbf{0}_{n_1-r}\} \subset \mathbb{K}^{\times n_1} : w \longmapsto \sum_{b=1}^r \psi_b(w) \triangleright_{\mathbb{K}^{n_1}} e_b,$$

Możemy już teraz określić odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\Phi : \mathcal{U}_{0_1} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n_1} : w \longmapsto \kappa_2 \circ F(w) +_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \kappa_1(w),$$

jawnie różniczkowalne w sposób ciągły, przy czym dla dowolnych  $w \in \mathcal{U}_{0_1}$  oraz  $u \in V_1$  zachodzi – wprost na mocy definicji odwzorowań  $\kappa_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  (i wobec  $\mathbb{K}$ -liniowości form  $\varphi_i$  oraz  $\psi_a$ ) – równość

$$D\Phi(w)(u) = \kappa_2(DF(w)(u)) +_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \kappa_1(\text{id}_{V_1}(u)) \equiv \kappa_2(DF(w)(u)) +_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \kappa_1(u), \quad (1.4.16)$$

a zatem w szczególności, dla dowolnego  $i \in \overline{1, n_1}$ ,

$$\begin{aligned} D\Phi(0_1)(v_i) &= \kappa_2(DF(0_1)(v_i)) +_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \kappa_1(v_i) \\ &= \begin{cases} \kappa_2(v_i) +_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \mathbf{0}_{n_1} = e_i, & \text{gdy } i \notin \overline{1, r} \\ \mathbf{0}_{n_1} +_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \kappa_1(v_i) = e_i, & \text{gdy } i \in \overline{r+1, n_1} \end{cases} \\ &\equiv e_i. \end{aligned}$$

Macierz pochodnej  $D\Phi(0_1)$  względem baz  $\mathcal{B}_1$  i  $\mathcal{B}_2$  przyjmuje więc postać

$$[D\Phi(0_1)]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \mathbf{1}_{n_1},$$

a zatem odwzorowanie  $\Phi$  spełnia założenia Tw. 1.4.7, na mocy którego istnieje otwarte otoczenie  $\tilde{\mathcal{O}}_{0_1} \subset \mathcal{U}_{0_1}$  wektora  $v = 0_1$  takie, że  $\Phi \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{O}}_{0_1}}$  jest lokalnym izomorfizmem klasy  $C^q$  (wszak odwzorowania  $\kappa_\alpha$  są klasy  $C^\infty$ ). Co więcej, zważywszy ciągłość odwzorowania  $D\Phi : \mathcal{U}_{0_1} \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, \mathbb{K}^{\times n_1})$  możemy wybrać  $\tilde{\mathcal{O}}_{0_1}$  na tyle małe, aby  $D\Phi(w)$  było liniową bijekcją dla każdego wektora  $w \in \tilde{\mathcal{O}}_{0_1}$  – wystarczy przeciąć dowolne otwarte otoczenie  $\mathcal{O}_1$ , na którym  $\Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_1}$  jest lokalnym izomorfizmem klasy  $C^q$ , z przeciwobrazem (nieodzwornie otwartym) dowolnego otwartego otoczenia odwzorowania  $D\Phi(0_1)$  w zbiorze liniowych izomorfizmów, o którego istnieniu przesądza Stw. 80. Skoro zaś  $\text{Im } DF(w)$  ma stały wymiar nad  $w \in \mathcal{U}_{0_1} \supset \tilde{\mathcal{O}}_{0_1}$ , przeto wobec równości  $D\Phi(w)(u) = \kappa_2(DF(w)(u))$  spełnionej dla dowolnego  $u \in \Delta_1$  (oraz bijektywności  $DF(w)$ ) odwzorowanie  $DF(w)$  jest nieodzwornie liniową bijekcją  $r$ -wymiarowej podprzestrzeni  $\Delta_1$  na  $r$ -wymiarową podprzestrzeń  $\text{Im } DF(w)$ , ograniczenie  $\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)}$  zaś – liniową bijekcją  $\text{Im } DF(w)$  na  $\text{Im } D\Phi(w) \cong \mathbb{K}^{\times r}$ . Oznaczmy

$$(1.4.17) \quad \Lambda_w := (\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1} : \mathbb{K}^{\times r} \xrightarrow{\cong} \text{Im } DF(w),$$

co uczyniwszy, otrzymujemy równość

$$DF(w) = \Lambda_w \circ \kappa_2 \circ DF(w).$$

Odwzorowanie  $\Phi \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{O}}_1}$  zyskuje tu interpretację lokalnej mapy na dziedzinie  $F$  (w przestrzeni modelową  $\mathbb{K}^{\times n_1}$ ), odwzorowanie  $\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)}$  zaś – interpretację takiejż mapy na stycznej do obrazu  $F$ . Przejdziemy obecnie do uszczegółowienia tak związanego opisu współrzędnowego dziedziny i obrazu odwzorowania  $F$ .

W tym celu ustalmy  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  o własności  $B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; R) \subset \Phi(\tilde{\mathcal{O}}_1)$  i oznaczymy

$$\mathcal{O}_{0_1} := \Phi^{-1}(B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; R)) \in \mathcal{T}(V_1)$$

(otwarte otoczenie  $0_1$ ) oraz

$$\iota_1 := \ell_{\frac{1}{R}} \circ \Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_{0_1}} : \mathcal{O}_{0_1} \longrightarrow \ell_{\frac{1}{R}}(B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; R)) = B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1),$$

przy czym – podkreślmy – powyższe odwzorowanie (przeskalowana mapa lokalna) jest jawnie odwracalne (z racji odwracalności  $\Phi \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{O}}_1 \supset \mathcal{O}_{0_1}}$ ), pozwala więc zdefiniować

$$F_1 := F \circ \iota_1^{-1} : B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1) \longrightarrow V_2,$$

tj. zadać wygodną połowicznie (w dziedzinie) współrzędnową lokalną prezentację odwzorowania  $F$ . Dokonując rozkładu dziedziny  $F_1$  wedle schematu

$$(1.4.18) \quad B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1) \equiv B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1) \cap (\mathbb{K}^{\times r} \times \mathbb{K}^{\times n_1-r}),$$

a następnie różniczkując obustronnie tożsamość (zapisaną w obrazie tegoż rozkładu)

$$(1.4.19) \quad F(w) = F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)), \quad w \in \mathcal{O}_{0_1},$$

otrzymujemy – przywoławszy po drodze Stw. 86 oraz Równ. (1.4.16), a dla dowolnego  $u \in V_1$  –

$$\begin{aligned} \ell_R \circ DF(w)(u) &= D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) \circ \text{pr}_1 \circ \kappa_2(DF(w)(u)) \\ &\quad + {}_2D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) \circ \text{pr}_2 \circ \kappa_1(u). \end{aligned}$$

Stąd wniosek, że

$$\begin{aligned} &D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) \circ \text{pr}_2 \circ \kappa_1(u) \\ &= (\ell_R \circ \Lambda_w - D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w))) \circ \text{pr}_1 \circ \kappa_2(DF(w)(u)). \end{aligned}$$

Obliczając powyższe dla  $u \in \Delta_1 \subset V_1$ , konstatujemy, że

$$(\ell_R \circ \Lambda_w - D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w))) \circ \text{pr}_1 \circ \kappa_2 \circ DF(w) \upharpoonright_{\Delta_1} = 0,$$

ponieważ jednak  $\text{pr}_1 \circ \kappa_2 \circ DF(w) \upharpoonright_{\Delta_1} : \Delta_1 \longrightarrow \mathbb{K}^{\times r} \times \{\mathbf{0}_{n_1-r}\} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times r}$  jest – wprost z konstrukcji – (liniową) bijekcją, przeto stwierdzamy na tej podstawie równość

$$(1.4.20) \quad \ell_R \circ \Lambda_w - D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) = 0.$$

Ta z kolei oznacza, że

$$D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) \circ \text{pr}_2 \circ \kappa_1(u) = 0_2$$

dla dowolnego wektora  $u \in V_1$ , co wobec surjektywności  $\text{pr}_2 \circ \kappa_1 : V_1 \longrightarrow \{\mathbf{0}_r\} \times \mathbb{K}^{\times n_1-r} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n_1-r}$  pozwala wyprowadzić równość

$$D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) = 0.$$

Surjektywność odwzorowania  $\iota_1$  zapewnia – w obrazie rozkładu (1.4.18) – słuszność powyższej równości na całej kuli jednostkowej  $B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$ , czyli

$$D_2 F_1 = 0.$$

Koniec końców możemy zatem zapisać – znów w obrazie rozkładu (1.4.18) –

$$F_1 = \tilde{F}_1 \circ \text{pr}_1$$

dla pewnego odwzorowania  $\tilde{F}_1 \in C^q(\text{pr}_1(B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)), V_2) \equiv C^q(B_{\mathbb{K}^{\times r}}(\mathbf{0}_r; 1), V_2)$ , gdzie  $B_{\mathbb{K}^{\times r}}(\mathbf{0}_r; 1)$  należy rozumieć jako „dysk równikowy” będący miejscem zerowym współrzędnych o indeksach  $k \in \overline{r+1, n_1}$  wewnątrz  $B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$ , przeto także – w świetle Równ. (1.4.19) –

$$\forall_{u \in F(\mathcal{O}_{0_1})} : u = \tilde{F}_1((\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2)(u)).$$

Przywoławszy definicję odwzorowania  $\Phi$  (i ograniczywszy w niej dziedzinę do  $\mathcal{O}_{0_1}$  zgodnie z przedstawionym wyżej tokiem rozumowania), bez trudu zauważamy, że obrazem  $r$ -wymiarowej powierzchni  $F(\mathcal{O}_{0_1}) \subset V_2$  względem odwzorowania  $\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2$  jest dysk  $B_{\mathbb{K}^{\times r}}(\mathbf{0}_r; 1) \equiv \text{pr}_1(B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1))$ , ten zaś jest przez  $\tilde{F}_1$  (czyli – równoważnie – przez  $F_1$ ) przeprowadzany na  $F(\mathcal{O}_{0_1})$ , przy czym – wobec definicji (ograniczonej) lokalnej mapy  $\Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_{0_1}}$  – dowolny punkt dysku  $x \in B_{\mathbb{K}^{\times r}}(\mathbf{0}_r; 1) \times \{\mathbf{0}_{n_1-r}\}$  jest przez  $\iota_1^{-1} \equiv \Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_{0_1}}^{-1} \circ \ell_R$  odwzorowywany w punkt  $w_x \in \mathcal{O}_{0_1}$ , którego obraz  $F(w_x)$  spełnia oczywisty warunek

$$\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2(F(w_x)) \equiv \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2(F(w_x)) + \kappa_1(w_x) = x,$$

co zapiszemy zwięźle w postaci

$$\forall_{\underline{x} \in B_{\mathbb{K}^{\times r}}(\mathbf{0}_r; 1)} : (\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2)(\tilde{F}_1(\underline{x})) = \underline{x}.$$

W podsumowaniu stwierdzamy, że  $\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \upharpoonright_{F(\mathcal{O}_{0_1})}$  jest izomorfizmem (klasy  $C^q$ ) między  $F(\mathcal{O}_{0_1})$  a  $B_{\mathbb{K}^{\times r}}(\mathbf{0}_r; 1) \subset B_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$  o odwrotności  $\tilde{F}_1$ .

Ostatni etap konstrukcji „kanonicznego” lokalnego opisu odwzorowania  $F$  o stałym rzędzie otwiera uzupełnienie dotychczasowej listy odwzorowań pomocniczych o  $\mathbb{K}$ -liniowy izomorfizm

$$\kappa_3 : \mathbb{K}^{\times n_2-r} \xrightarrow{\cong} \Delta_2$$

między składową prostą  $\mathbb{K}^{\times n_2-r} \cong \{\mathbf{0}_r\} \times \mathbb{K}^{\times n_2-r}$  przestrzeni modelowej  $\mathbb{K}^{\times r} \times \mathbb{K}^{\times n_2-r} \equiv \mathbb{K}^{\times n_2}$  dla przeciwdziedziny  $V_2$  w składową prostą  $\Delta_2$  tej ostatniej będącą dopełnieniem podprzestrzeni  $\text{Im } DF(0)$ , a następnie – o odwzorowanie

$$\iota_2 : B_{\mathbb{K}^{\times r}}(\mathbf{0}_r; 1) \times B_{\mathbb{K}^{\times n_2-r}}(\mathbf{0}_{n_2-r}; 1) \longrightarrow V_2 : (\underline{x}, \underline{y}) \longmapsto \tilde{F}_1(\underline{x}) +_2 \kappa_3(\underline{y}),$$

jawnie różniczkowalne w sposób ciągły (klasy  $C^q$ ). W świetle wcześniejszych naszych obserwacji zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} \kappa_2 \circ \iota_2(\underline{x}, \underline{y}) &= \kappa_2 \circ \tilde{F}_1(\underline{x}) \equiv \kappa_2 \circ F_1(\underline{x}, \mathbf{0}_{n_1-r}) \equiv \kappa_2 \circ F \circ \Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_{0_1}}^{-1} \circ \ell_R(\underline{x}, \mathbf{0}_{n_1-r}) \\ &= R \triangleright_{\mathbb{K}^{\times r}} \underline{x}, \end{aligned}$$

to jednak przesądza o iniektywności  $\iota_2$ , oto bowiem  $\iota_2(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{y}}) = \iota_2(\underline{x}, \underline{y})$  implikuje  $\tilde{\underline{x}} = \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ \iota_2(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{y}}) = \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ \iota_2(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}$ , a zatem także  $\kappa_3(\tilde{\underline{y}}) = \kappa_3(\underline{y})$ , czyli – wobec bijektywności  $\kappa_3$  – ostatecznie  $(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{y}}) = (\underline{x}, \underline{y})$ . Na podstawie Równ. (1.4.20) i wyprowadzonej zeń analizy odwzorowania  $F_1$  stwierdzamy dalej, że

$$D\tilde{F}_1(\text{pr}_1 \circ \iota_1(w)) \equiv D\tilde{F}_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w)) = \ell_R \circ \Lambda_w,$$

czyli w obrazie wprowadzonego wcześniej rozkładu (1.4.18), w którym  $\iota_1(w) =: (\underline{x}, \underline{y})$ ,

$$D\tilde{F}_1(\underline{x}) \equiv D\tilde{F}_1\left(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w)\right) = \ell_R \circ \Lambda_{\iota_1^{-1}(\underline{x}, \underline{y})}.$$

W takim jednak razie dla dowolnych  $(\underline{x}, \underline{y}) \in B_{\mathbb{K}^{r}}(\mathbf{0}_r; 1) \times B_{\mathbb{K}^{n_2-r}}(\mathbf{0}_{n_2-r}; 1)$  otrzymujemy formułę

$$D\iota_2(\underline{x}, \underline{y}) : \mathbb{K}^{r} \times \mathbb{K}^{n_2-r} \longrightarrow V_2 : (\xi, \zeta) \longmapsto \ell_R \circ \Lambda_{\iota_1^{-1}(\underline{x}, \underline{y})}(\xi) +_2 \kappa_3(\zeta),$$

którą można przepisać, przywoławszy definiującą Równ. (1.4.17), w postaci

$$D\iota_2(\underline{x}, \underline{y})(\xi, \zeta) = (\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}(R \triangleright_{\mathbb{K}^{r}} \xi) +_2 \kappa_3(\zeta),$$

a ponieważ podprzestrzenie  $\text{Im}(\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}$  i  $\text{Im } \kappa_3$  w przestrzeni  $V_2$  mają jednopunktowe przecięcie,

$$\begin{aligned} (\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}(\tilde{\xi}) = \kappa_3(\tilde{\zeta}) &\implies \tilde{\xi} = \kappa_2 \circ \kappa_3(\tilde{\zeta}) = \mathbf{0}_{n_2} \\ &\implies (\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}(\tilde{\xi}) = \mathbf{0}_2 = \kappa_3(\tilde{\zeta}), \end{aligned}$$

a ich wymiary sumują się do wymiaru  $V_2$ , przeto  $D\iota_2(\underline{x}, \underline{y})$  jawi się liniowym homeomorfizmem. W konsekwencji tego faktu, a na mocy Tw. 1.4.7, każdy punkt ograniczenia  $B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1) \subset B_{\mathbb{K}^{r}}(\mathbf{0}_r; 1) \times B_{\mathbb{K}^{n_2-r}}(\mathbf{0}_{n_2-r}; 1)$  dziedziny odwzorowania  $\iota_2$  ma otoczenie otwarte, które jest przez  $\iota_2$  odwzorowywane na swój obraz w sposób homeomorficzny (w klasie gładkości  $C^q$ ), a ponieważ  $\iota_2$  jest przy tym – jak to zostało pokazane wcześniej – injekcją, przeto  $\iota_2$  jest homeomorfizmem klasy  $C^q$  (o odwrotności różniczkowalnej w sposób ciągły) na całym zbiorze  $B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1)$ . Tożsamość (1.4.15) wynika już wprost z opisanej tu szczegółowo konstrukcji.  $\square$

Na zakończenie niniejszego zwięzłego przeglądu podstawowych narzędzi i metod analitycznych, do których przyjdzie nam odwoływać się w dyskusji rozmaitych form geometryzacji pojęć algebraicznych, a zarazem w charakterze ilustracji wielu z tych przedstawionych dotychczas wysłowimy obecnie kilka fundamentalnych wyników teorii równań różniczkowych zwyczajnych (i towarzyszących stwierdzeń pomocniczych). Już wkrótce przyjdzie nam zastosować je w analizie istotnych – także z fizykalnego punktu widzenia (jak choćby w nader bogatym i ważnym kontekście rozważań nad symetrami zjawisk fizycznych) – relacji między polami wektorowymi na rozmaitościach i dyfeomorfizmami oraz w badaniu grup topologicznych ze strukturą różniczkową. Zaczniemy od fundamentalnego

**TWIERDZENIE 1.4.10** (Picarda–Lindelöfa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy’ego). *Przyjmijmy zapis Def. 55, 63 oraz Przykł. 25 (1) i ustalmy (dowolnie)  $N \in \mathbb{N}^{\times}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^{\times N}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  oraz  $\varepsilon, r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Niechaj będzie dane odwzorowanie*

$$f : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B^N(x_0; r)} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$$

*ciągłe w pierwszym argumencie i spełniające warunek Lipschitza (1.4.8) w drugim argumencie ze stałą Lipschitza  $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , a nadto oznaczmy*

$$\sup_{y \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B^N(x_0; r)}} \|f(y)\|_N =: M.$$

*Wówczas zagadnienie początkowe*

$$(1.4.21) \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie  $x \in C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)})$ , o ile

$$(1.4.22) \quad 0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{r}{M}\right\}.$$

W konsekwencji powyższego dla dowolnego podzbioru zwartego  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{\times 1+N}$  zawartego w otwartej dziedzinie  $\mathcal{O}$  ciągłości funkcji  $f$  istnieje stała  $\varepsilon_{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}_{>0}$  taka, że dla dowolnego punktu  $(t_0, x_0) \in \mathcal{K}$  zagadnienie początkowe (1.4.21) ma dokładnie jedno rozwiązanie na odcinku  $]t_0 - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_0 + \varepsilon_{\mathcal{K}}[$ .

■

*Dowód:* Zaczniemy od takiego przeformułowania zagadnienia początkowego (1.4.21), które pozwoli na zastosowanie Tw. 1.4.2 wobec odwzorowania zwięzającego realizującego iteracyjną metodę odcałkowania (1.4.21). Oto więc na podstawie założenia o ciągłości  $f$  (zwróćmy uwagę na to, że warunek Lipschitza względem drugiego argumentu implikuje ciągłość  $f$  w tymże argumentcie), możemy przepisać (1.4.21) w równoważnej postaci całkowej

$$x(t) = x_0 + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, x(\cdot)).$$

Istotnie, jeśli poszukiwane rozwiązanie jest różniczkowalne w sposób ciągły w  $t$  (a takie jest wprost z definicji), to jest też ciągle w  $t$  i możemy odcałkować prawą stronę równania różniczkowego (1.4.21). I odwrotnie, jeśli znajdziemy rozwiązanie wypisanego powyżej zagadnienia całkowego ciągle w  $t$ , to – jak łatwo widać wprost – będzie ono także różniczkowalne w sposób ciągły<sup>4</sup>. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)} &: C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)}) \longrightarrow C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)}) \\ &: g \longmapsto \left( t \longmapsto x_0 + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, g(\cdot)) \right), \end{aligned}$$

zwane **funkcjonałem Picarda**. Funkcja  $\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}[g]$  jest jawnie ciągła, pozostaje jedynie sprawdzić, że jej wartości są zawarte w kuli  $\overline{B^N(x_0; r)}$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g)(t) - x_0\|_N &= \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, g(\cdot)) \right\|_N \leq M \cdot |t - t_0| \\ &\leq M\varepsilon < r, \end{aligned}$$

przy czym wykorzystaliśmy oszacowanie (1.4.12) oraz założenie (1.4.22). Następnie bez trudu przekonujemy się, że funkcjonał Picarda jest odwzorowaniem zwięzającym – istotnie, dla dowolnych dwóch odwzorowań  $g_1, g_2 \in C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)})$  norma różnicy  $\|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2)(\cdot) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1)(\cdot)\|_N$  jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  i jako taka osiąga – w świetle Stw. 69 oraz 82 – swoje kresy, w szczególności istnieje punkt  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  o własności

$$\|(\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1))(t)\|_N = \|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1)\|_{\infty},$$

możemy więc zapisać, przywołując Równ. (1.4.12) oraz warunek Lipschitza dla  $f$ ,

$$\|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1)\|_{\infty} = \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} [f(\cdot, g_2(\cdot)) - f(\cdot, g_1(\cdot))] \right\|$$

<sup>4</sup>W przypadku zagadnienia **autonomicznego** klasy  $C^k$ , tj. takiego, w którym funkcja  $f$  zależy od  $t$  tylko poprzez zależność od  $x$  i ta ostatnia jest klasy  $C^k$ , rozwiązanie klasy  $C$  względem  $t$ , będąc – jak w przypadku ogólnym – klasy  $C^1$ , jest automatycznie klasy  $C^2$ , a zatem także klasy  $C^3$  itd., przy czym jedynym ograniczeniem tego ciągu wynika jest stopień ciągłej różniczkowalności  $f$ . Widzimy więc, że rozwiązanie klasy  $C$  w  $t$  jest zarazem klasy  $C^{k+1}$ .

$$\begin{aligned}
&\leq |t - t_0| \cdot \sup_{s \in [t_0, t]} \|f(s, g_2(s)) - f(s, g_1(s))\|_N \\
&\leq L \cdot |t - t_0| \cdot \sup_{s \in [t_0, t]} \|g_2(s) - g_1(s)\|_N \\
&\leq L \cdot \varepsilon \cdot \|g_2 - g_1\|_\infty < \|g_2 - g_1\|_\infty.
\end{aligned}$$

Na podstawie dotychczasowych ustaleń stwierdzamy w świetle Tw. 1.4.2 odniesionego tutaj do przestrzeni metrycznej  $(C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)}), \|\cdot\|_\infty)$ , o której zupełności przesądza Stw. 76, że funkcjonal Picarda ma dokładnie jeden punkt stały,

$$x_0 + \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{x_N}} f(\cdot, x(\cdot)) = \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(x)(\cdot) = x(\cdot),$$

ten zaś jest właśnie rozwiązaniem zagadnienia początkowego (1.4.21) przewidzianym w tezie dowodzonego twierdzenia.

Przejdźmy następnie do drugiej części tezy. Odwzorowanie  $f$  jest teraz określone (i ciągłe) na pewnym zbiorze otwartym  $\mathcal{O}$  zawierającym zwarty podzbiór  $\mathcal{K}$ , a nadto spełnia na  $\mathcal{O}$  warunek Lipschitza w drugim argumencie ze stałą  $L$ . Niechaj  $\tilde{\mathcal{K}}$  i  $(h, r)$  będą jak w tezie Stw. 85. Zastępując zbiór  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B^N(x_0; r)}$  w definicji stałej  $M$  zbiorem zwartym  $\tilde{\mathcal{K}}$  (na którym także funkcja  $f$  osiąga supremum), pożądaną tezę otrzymujemy wprost z wcześniejszych rozważań, o ile tylko wybierzemy (dowolnie)

$$0 < \varepsilon_{\mathcal{K}} \leq \min\left\{h, \frac{1}{L}, \frac{r}{M}\right\}.$$

□

Pierwszym z pytań, przed jakimi stawia nas powyższe twierdzenie, jest to dotyczące możliwości zszywania rozwiązań lokalnych i jednoznaczności otrzymanego tą drogą wzajemnego przedłużenia tychże rozwiązań na sumę mnogościową (nakładających się na siebie) odnośnych przedziałów określoności. Odpowiedzi na tak postawione pytanie udziela

**TWIERDZENIE 1.4.11** (O jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego w dziedzinie określoności). *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.10. Niechaj  $I_\alpha := [t_{0\alpha} - \varepsilon_\alpha, t_{0\alpha} + \varepsilon_\alpha] \subset \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i niech odwzorowania  $x_\alpha : I_\alpha \rightarrow \overline{B^N(x_{0\alpha}; r_\alpha)}$  będą odnośnymi rozwiązaniami zagadnienia początkowego (1.4.21) (przy podstawieniu  $(t_0, x_0) \mapsto (t_{0\alpha}, x_{0\alpha})$ ). Ilekroć istnieje  $t_0 \in I_1 \cap I_2$ , w którym  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ , wówczas zachodzi równość*

$$(x_2 - x_1) \upharpoonright_{I_1 \cap I_2} = 0,$$

a odwzorowanie

$$x : I_1 \cup I_2 \longrightarrow \overline{B^N(x_{01}; r_1)} \cup \overline{B^N(x_{02}; r_2)} : t \longmapsto \begin{cases} x_1(t) & \text{dla } t \in I_1 \\ x_2(t) & \text{dla } t \in I_2 \end{cases}$$

jest rozwiązaniem zagadnienia na  $I_1 \cup I_2$ .

■

*Dowód:* Wobec zwartości  $I_A$  także  $I_1 \cap I_2$  jest zwarty, co wobec ciągłości  $x_A$  implikuje zwartość zbioru  $\Gamma := (\text{id}_{\mathbb{R}}, x_1)(I_1 \cap I_1) \cup (\text{id}_{\mathbb{R}}, x_2)(I_1 \cap I_1)$  na mocy Stw. 69. Niechaj  $L$  będzie stałą Lipschitza dla  $f$  na  $\Gamma$ , a wtedy w dowolnym punkcie

$t \in I_1 \cap I_2$  stwierdzamy – w odwołaniu do (liniowości całki Cauchy’ego–Bochnera oraz) oszacowania (1.4.12) – równość

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\|_N &= \left\| x_2(t_0) + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, x_2(\cdot)) - x_1(t_0) - \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} f(\cdot, x_1(\cdot)) \right\|_N \\ &= \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} [f(\cdot, x_2(\cdot)) - f(\cdot, x_1(\cdot))] \right\|_N \\ &\leq \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \|f(\cdot, x_2(\cdot)) - f(\cdot, x_1(\cdot))\|_N \\ &\leq \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} L \|(x_2 - x_1)(\cdot)\|_N, \end{aligned}$$

przy czym wykorzystaliśmy równania całkowe definiujące  $x_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , które pozwalają zapisać

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= x_{0\alpha} + \int_{[t_{0\alpha}, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) \equiv x_\alpha(t_{0\alpha}) + \int_{[t_{0\alpha}, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) \\ &= x_\alpha(t_0) - x_\alpha(t_{0\alpha}) - \int_{[t_{0\alpha}, t_0]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) + x_\alpha(t_{0\alpha}) + \int_{[t_{0\alpha}, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) \\ &= x_\alpha(t_0) + \int_{[t_0, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)). \end{aligned}$$

Funkcje  $(f, \varphi) = (\|x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\|_N, L)$  spełniają założenia Stw. 90 przy  $I = \text{Int}(I_1 \cap I_2)$  dla  $c = 0$ , co prowadzi do wniosku, że

$$\forall t \in \text{Int}(I_1 \cap I_2) : \|x_2(t) - x_1(t)\|_N = 0,$$

czyli wobec ciągłości obu rozwiązań

$$\forall t \in I_1 \cap I_2 : x_2(t) = x_1(t).$$

Odwzorowanie  $x$  z treści dowodzonego twierdzenia jest zatem dobrze określone, klasy  $C^r$  i stanowi – w rzeczy samej – rozwiązanie zagadnienia na  $I_1 \cup I_2$ .  $\square$

Granice opisanej przez nas procedury przedłużania rozwiązań nakreśla następane twierdzenie, które ukazuje zarazem pewną globalną regularność zachowania rozwiązań.

**TWIERDZENIE 1.4.12** (O przedłużaniu rozwiązania zagadnienia Cauchy’ego). *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.10. Dla każdego  $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$  rozwiązanie zagadnienia początkowego (1.4.21) przedłuża się do pewnego maksymalnego przedziału określoności  $I_f(t_0, x_0) = ]a_f(t_0, x_0), b_f(t_0, x_0)[ \subset \mathbb{R}$ . Ponadto jeśli  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  jest zbiorem zwartym zawierającym  $(t_0, x_0)$ , to istnieją liczby  $a_f(\mathcal{K}), b_f(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}$  spełniające warunek  $a_f(t_0, x_0) < a_f(\mathcal{K}) < b_f(\mathcal{K}) \leq b_f(t_0, x_0)$ , dla których zachodzi implikacja*

$$\forall t \in I_f(t_0, x_0) \setminus [a_f(\mathcal{K}), b_f(\mathcal{K})] : (t, x(t)) \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{K}.$$

■

*Dowód:* Zdefiniujmy  $\mathcal{A}$  jako zbiór wszystkich przedziałów otwartych  $I \subset \mathbb{R}$  zawierających  $t_0$ , na których są określone odnośne rozwiązania  $x_I : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  zagadnienia początkowego (1.4.21). Na mocy Tw. 1.4.10 zbiór ten jest niepusty, przeto możemy zdefiniować podzbiór otwarty

$$I_f(t_0, x_0) := \bigcup_{I \in \mathcal{A}} I \subset \mathbb{R}.$$

Skoro  $t_0 \in I$ , jest jasnym, że  $I_f(t_0, x_0)$  jest przedziałem (otwartym),  $I_f(t_0, x_0) = ]a_f(t_0, x_0), b_f(t_0, x_0)[$ , przy czym może to być przedział jedno- lub obustronnie nieograniczony. Rozważmy dowolny punkt  $t \in I_f(t_0, x_0)$ . Wprost z definicji istnieje  $I \in \mathcal{A}$  taki, że  $t \in I$ , a zatem także rozwiązanie  $x_I$  na  $I$ . Jeśli także  $I' \in \mathcal{A}$  zawiera  $t$ , to na mocy Tw. 1.4.11 jest  $(x_{I'} - x_I)|_{I \cap I'} = 0$ , czyli w szczególności  $x_{I'}(t) = x_I(t)$ . Oznacza to, że możemy zdefiniować odwzorowanie

$$x : I_f(t_0, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^N : t \longmapsto x_I(t),$$

gdzie  $I \in \mathcal{A}$  jest dowolnym przedziałem zawierającym  $t$ . Tak określone odwzorowanie jest – w świetle Tw. 1.4.10 – (jedynym) rozwiązaniem zagadnienia początkowego na  $I_f(t_0, x_0)$ , co przesądza o maksymalności  $I_f(t_0, x_0)$ .

Jeśli teraz  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  jest zbiorem zwartym zawierającym  $(t_0, x_0)$ , to możemy zdefiniować zbiór

$$G(\mathcal{K}) := \{ t \in I_f(t_0, x_0) \mid (t, x(t)) \in \mathcal{K} \},$$

który na mocy Tw. 1.4.10 jest niepusty. Jako że  $\mathcal{K}$  jest zwarty, przeto – w świetle Stw. 82 –  $G(\mathcal{K})$  jest ograniczony, a w takim razie

$$b_f(\mathcal{K}) := \sup G(\mathcal{K}) < \infty.$$

Wystarczy pokazać, że  $b_f(\mathcal{K}) < b_f(t_0, x_0)$ . Niechaj więc  $t_* \in G(\mathcal{K})$ , co oznacza, że  $(t_*, x_*) := (t_*, x(t_*)) \in \mathcal{K}$ . W odwołaniu do Tw. 1.4.10 możemy zatem znaleźć na przedziale  $]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[$  (jedyne) rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_*) = x_*,$$

które w świetle Tw. 1.4.11 spełnia warunek

$$(y - x)|_{I_f(t_0, x_0) \cap ]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[} = 0$$

i przedłuża się do  $x$  na  $I_f(t_0, x_0) \cup ]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[$ . Jednakowoż przedział  $I_f(t_0, x_0)$  jest maksymalny, więc koniecznie  $I_f(t_0, x_0) \cup ]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[ = I_f(t_0, x_0)$ , to zaś oznacza, że (każde)  $t_*$  spełnia nierówność  $t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}} \leq b_f(t_0, x_0)$ , więc też  $\sup_{t_* \in G(\mathcal{K})} (t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}) \leq \sup_{t_* \in G(\mathcal{K})} b_f(t_0, x_0)$ , a to pozwala stwierdzić, że

$$b_f(\mathcal{K}) + \varepsilon_{\mathcal{K}} \leq b_f(t_0, x_0) \quad \implies \quad b_f(\mathcal{K}) < b_f(t_0, x_0).$$

Analogicznie rozumiemy w odniesieniu do

$$a_f(\mathcal{K}) := \inf G(\mathcal{K}) > -\infty,$$

przekonując się, że  $a_f(\mathcal{K}) > a_f(t_0, x_0)$ .  $\square$

Dotychczasowe nasze rozważania przygotowują grunt pod szczegółową analizę funkcjonalnej natury zależności rozwiązań zagadnienia początkowego od danych początkowych  $(t_0, x_0)$ . Wyniki tej analizy mają absolutnie kapitalne znaczenie zarówno dla zastosowań równań różniczkowych zwyczajnych w modelowaniu dynamiki układów fizycznych, jak i dla zrozumienia relacji między (gładkimi) rozkładami wektorów na nietrywialnych geometriach (tzw. gładkimi polami wektorowymi) i przekształceniami tych ostatnich, która stanowi punkt wyjścia chociażby do opisu geometrii w terminach topologii różniczkowej, dostarczającej – ze swej strony – głębokiej inspiracji dla konstrukcji funkcyjnego schematu kwantowania. Mając to wszystko na uwadze, przechodzimy obecnie do dokładnego omówienia rzeczowej zależności, zaczynając od



**TWIERDZENIE 1.4.13** (O ciągłej zależności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego od danych początkowych). *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.10 i 1.4.12. Dziedzina całkowalności zagadnienia początkowego (1.4.21) o danych początkowych z  $\mathcal{O}$ ,*

$$(1.4.23) \quad \mathcal{D}_f := \{ (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O} \mid t \in I_f(t_0, x_0) \},$$

*jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^{2+N}$ , a odwzorowanie*

$$\Phi_f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}^N : (t, t_0, x_0) \longmapsto x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

*zwane **potokiem odwzorowania**  $f$ , jest ciągłe. Ponadto funkcja*

$$b_f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R} : (t_0, x_0) \longmapsto b_f(t_0, x_0)$$

*jest półciągła z dołu, a funkcja*

$$a_f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R} : (t_0, x_0) \longmapsto a_f(t_0, x_0)$$

*jest półciągła z góry.*

■

Dowód: Nasz dowód twierdzenia zasadza się na słuszności poniższego

**LEMAT 1.4.14.** *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.13 i niechaj  $I = [a, b]$  będzie dowolnym przedziałem spełniającym warunek  $t_0 \in I \subset I_f(t_0, x_0)$ . Dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie otoczenie otwarte  $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathcal{O}$  punktu  $(t_0, x_0)$ , że dla dowolnego  $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_\varepsilon$  rozwiązanie zagadnienia początkowego (1.4.21) dla danych początkowych  $(t_1, x_1)$  (tj. przy warunku początkowym  $x(t_1) = x_1$ ) jest dobrze określone na  $I$ , przy czym potok  $f$  spełnia relację*

$$\forall t \in I : \|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \varepsilon.$$

■

Dowód Lematu 1.4.14. Ustalmy  $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$  i niech  $I = [a, b]$  będzie jak w treści lematu. Rozważmy zbiór zwarty

$$\mathcal{K} := \{ (t, \Phi_f(t, t_0, x_0)) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid t \in I \}$$

i niech  $\tilde{\mathcal{K}}$  będzie zwartym pokryciem  $\mathcal{K}$  w  $\mathcal{O}$  dla pary  $(h, r) \in ]0, \infty[^{\times 2}$ , którego istnienie orzeka Stw. 85. Wreszcie też niech

$$M := \sup_{(t, x) \in \tilde{\mathcal{K}}} \|f(t, x)\|_N$$

(istnienie  $M$  zapewnia ciągłość  $f$  w połączeniu ze zwartością  $\tilde{\mathcal{K}}$ , a to na mocy Stw. 74, 69 oraz 82) i niech  $L$  będzie stałą Lipschitza dla  $f$  (w drugim argumentcie). Ustaliwszy (dowolnie)  $\varepsilon > 0$  przy  $r > \varepsilon$  (warunek ten charakteryzuje  $r$ ), dobierzemy następnie  $\delta > 0$  na tyle małe, iżby otoczenie

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid |t - t_0| < \delta \quad \wedge \quad \|x - x_0\|_N < \delta \}$$

spełniało warunki wymienione w tezie dowodzonego lematu. Oto więc niech  $\delta > 0$  będzie dowolną liczbą spełniającą układ relacji

$$\delta < \min\{h, r\} \quad \wedge \quad ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \subset [a, b] \quad \wedge \quad \delta \cdot (M + 1) \cdot e^{L \cdot (b-a)} < \varepsilon < r,$$

co pociąga za sobą natychmiast relację

$$\mathcal{U}_\varepsilon \subset C_{(h, r)}(t_0, x_0) := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid |t - t_0| < h \quad \wedge \quad \|x - x_0\|_N < r \} \subset \tilde{\mathcal{K}}.$$

Ustalmy (dowolnie)  $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_\varepsilon$  i niech  $J = [a_1, b_1]$  będzie największym podprzedziałem w  $I_f(t_1, x_1)$ , dla którego spełniona jest relacja

$$\{ (s, \Phi_f(s, t_1, x_1)) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid s \in J \} \subset \tilde{\mathcal{K}},$$

przy czym Tw. 1.4.10 przesądza o tym, że  $J \neq \emptyset$ , w szczególności zaś  $t_1 \in J$ . Skoro przy tym  $|t_1 - t_0| < \delta$ , to także  $t_1 \in I$ , zatem  $I \cap J \neq \emptyset$ , a ponieważ na mocy Tw. 1.4.12 dla dostatecznie dużych (i dostatecznie małych) wartości  $t$  punkty  $(t, \Phi_f(t, t_1, x_1))$  leżą poza  $\tilde{\mathcal{K}}$ , przeto  $J \not\subset I_f(t_1, x_1)$ . Skoro jednak dla dowolnego  $t \in I_f(t_\alpha, x_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{0, 1\}$  mamy równości

$$\Phi_f(t, t_\alpha, x_\alpha) = x_\alpha + \int_{[t_\alpha, t]; \mathbb{R}^{xN}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_\alpha, x_\alpha)),$$

to dla  $t \in I \cap J$  otrzymujemy relację

$$\begin{aligned} & \Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0) \\ = & x_1 - x_0 + \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{xN}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_1, x_1)) - \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{xN}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0)) \\ \equiv & x_1 - x_0 - \int_{[t_0, t_1]; \mathbb{R}^{xN}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0)) \\ & + \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{xN}} [f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_1, x_1)) - f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0))]. \end{aligned}$$

Zważywszy, że dla wszystkich  $t \in I \cap J$  oba rozwiązania pozostają w  $\tilde{\mathcal{K}}$  (w przypadku  $(t_0, x_0)$  rozwiązanie pozostaje wręcz w  $\mathcal{K}$ , wprost na mocy definicji tego zbioru), a ponadto cały odcinek  $I_{01}$  zawarty między  $t_0$  i  $t_1$  zawiera się wewnątrz  $I$ , przeto  $\Phi_f(I_{01}, (t_0, x_0)) \subset \mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{K}}$ , otrzymujemy – w świetle Stw. 87 – oszacowanie

$$\begin{aligned} & \|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N \\ \leq & \|x_1 - x_0\|_N + |t - t_0| \cdot \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|f(s, \Phi_f(s, t_0, x_0))\|_N \\ & + \left| \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{xN}} \|f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_1, x_1)) - f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0))\|_N \right| \\ \leq & \delta + M \cdot |t_1 - t_0| + \left| \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{xN}} L \cdot \|\Phi_f(\cdot, t_1, x_1) - \Phi_f(\cdot, t_0, x_0)\|_N \right| \\ \leq & \delta \cdot (1 + M) + \left| \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{xN}} L \cdot \|\Phi_f(s, t_1, x_1) - \Phi_f(s, t_0, x_0)\|_N \right|, \end{aligned}$$

z którego na podstawie Stw. 90 (i dotychczasowych założeń) wyprowadzamy

$$\|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N \leq \delta \cdot (1 + M) \cdot e^{L \cdot |t - t_1|}.$$

Skoro jednak  $t \in I \cap J \subset I \equiv [a, b]$  oraz  $t_1 \in I$ , to  $|t - t_1| \leq b - a$ , a w takim razie – wprost na mocy poczynionych założeń –

$$\|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N \leq \delta \cdot (1 + M) \cdot e^{L \cdot (b-a)} < \varepsilon < r.$$

Nasze rozumowanie pokazuje dowodnie, że na całym odcinku  $I \cap J \ni t$  trajektoria  $(t, \Phi_f(t, t_1, x_1))$  pozostaje wewnątrz  $C_{(h,r)}(t_0, x_0)$ , czyli też wewnątrz  $\tilde{\mathcal{K}}$ . Jednakowoż oba przedziały:  $I$  i  $J$  są nie tylko domknięte, ale także spójne, więc też sytuacja, w której któryś z końców  $k \in \{a_1, b_1\}$  byłby punktem wewnętrznym  $I$  byłaby równoważna temu, że punkt  $(k, \Phi_f(k, t_1, x_1))$  leży na granicy  $\tilde{\mathcal{K}}$ . Tymczasem pokazaliśmy właśnie, że punkt ten – jak wszystkie punkty na trajektorii

będące obrazami punktów z przecięcia  $I \cap J$  – leży *wewnątrz*  $\tilde{\mathcal{K}}$ . Wyciągamy stąd prosty wniosek, że  $I \subset J$ , a stąd już wprost wynika konkluzja, że  $\Phi_f(t, t_1, x_1)$  jest dobrze określone (jako rozwiązanie rozważanego zagadnienia początkowego dla danych początkowych  $(t_1, x_1)$ ) dla dowolnego  $t \in I$ , nierówności

$$a(t_1, x_1) < a_1 \leq a, \quad b \leq b_1 < b(t_1, x_1)$$

oraz relacja

$$\forall t \in I : \|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \varepsilon.$$

□

Udowodniwszy lemat, możemy powrócić do dowodu twierdzenia. Zaczniemy od wykazania ciągłości  $\Phi_f$  na  $\mathcal{D}_f$ . W tym celu ustalmy punkt  $(t, t_0, x_0) \in \mathcal{D}_f$  i wybierzmy stałą  $\varepsilon > 0$  oraz przedział  $I = [a, b] \subset I_f(t_0, x_0)$  taki, by było  $a < t < b$ . Następnie ograniczymy rozważania do otoczenia  $\mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset \mathcal{O}$  punktu  $(t_0, x_0)$ , o którym mowa w tezie Lematu 1.4.14. Wybierzmy punkt  $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ , a wtedy dla dowolnego  $t' \in I$  otrzymamy oszacowanie

$$\|\Phi_f(t', t_1, x_1) - \Phi_f(t', t_0, x_0)\|_N < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ciągłość  $\Phi_f(t', t_0, x_0)$  w zmiennej  $t' \in I$ , wynikająca z inkluzji  $I \subset I_f(t_0, x_0)$  (oznaczającej, że odwzorowanie to jest na  $I$  rozwiązaniem zagadnienia początkowego (1.4.21) przy warunku początkowym  $(t_0, x_0)$ ), pozwala stwierdzić istnienie  $\delta > 0$  o własności  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \subset I$ , dla którego spełniony jest warunek

$$\|\Phi_f(t', t_0, x_0) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \frac{\varepsilon}{2},$$

o ile tylko  $|t' - t| < \delta$ . W sumie więc dla dowolnego  $(t', t_1, x_1) \in ]t - \delta, t + \delta[ \times \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}$  obliczamy

$$\|\Phi_f(t', t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N$$

$$\leq \|\Phi_f(t', t_1, x_1) - \Phi_f(t', t_0, x_0)\|_N + \|\Phi_f(t', t_0, x_0) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \varepsilon,$$

dowodząc tym samym ciągłości potoku  $f$  na  $\mathcal{D}_f$  w rozumieniu Stw. 72. Zauważmy zarazem, że skonstruowany tu zbiór  $]t - \delta, t + \delta[ \times \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}$  jest otwartym otoczeniem (dowolnego) punktu dziedziny  $(t, t_0, x_0)$  w niej zawartym, skąd wniosek, że  $\mathcal{D}_f$  jest w istocie zbiorem otwartym.

Na koniec zajmijmy się zależnością  $b_f$  (wzgl.  $a_f$ ) od argumentu  $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$ . Wybierzmy (dowolnie)  $b < b_f(t_0, x_0)$ , a wtedy – na mocy Lematu 1.4.14 – istnieje takie otoczenie otwarte  $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathcal{O}$  punktu  $(t_0, x_0)$ , którego dowolny punkt  $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_\varepsilon$  ma dobrze określoną trajektorię  $(t, \Phi_f(t, t_1, x_1))$  dla dowolnego  $t \in [t_1, b]$ , co oznacza, że  $b_f(t_1, x_1) \geq b$ . Takie zachowanie funkcji  $b_f$  w otoczeniu dowolnego punktu  $(t_0, x_0)$  jej dziedziny  $\mathcal{O}$  jest równoznaczne z jej półciągłością z dołu. Analogicznie dowodzimy półciągłości z góry funkcji  $a_f$ . □

W konkretnych przypadkach zagadnienia początkowego, które przyjdzie nam rozważać w dalszej części niniejszego kursu, zależność odwzorowania definiującego  $f$  od parametru ewolucji (pierwszego argumentu) będzie trywialna, nawet jednak w takich okolicznościach droga do odpowiedzi na pytanie o gładkość zależności potoku od danych początkowych wiedzie przez (pomocnicze) zagadnienie początkowe, w którym pojawia się jawna zależność nie tylko od parametru ewolucji, ale wręcz – od parametrów z pewnej topologicznej przestrzeni wektorowej. Tytułem przygotowania do dyskusji przedstawimy

**TWIERDZENIE 1.4.15** (O redukcji zagadnienia Cauchy'ego do postaci autonomicznej). *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.13. Zagadnienie początkowe określone przez odwzorowanie  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{\times N}$  o nietrywialnej zależności od argumentu z  $\text{pr}_1(\mathcal{O})$ , zwane **zagadnieniem nieautonomicznym**, jest równoważne zagadnieniu określone przez odwzorowanie  $\tilde{f} := (1, f) \circ \text{pr}_{2,3} : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N}$ , niezależne od pierwszego argumentu, zwane **zagadnieniem autonomicznym**. Podobnie **parametryczne zagadnienie początkowe** określane przez odwzorowanie  $f : \mathcal{O} \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{\times N}$  zależne (w sposób ciągły) od parametrów z otwartego podzbioru  $\Pi$  topologicznej przestrzeni wektorowej  $V$  jest równoważne zagadnieniu określone przez niezależne od parametrów odwzorowanie  $\tilde{f} := (f, 0) : \tilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{\times N} \times V$  o dziedzinie ciągłości  $\tilde{\mathcal{O}}$ .* ■

Dowód: Zajmiemy się najpierw zagadnieniem nieautonomicznym

$$D_1\Phi_f(t, t_0, x_0) = f(t, \Phi_f(t, t_0, x_0)), \quad \Phi_f(t_0, t_0, x_0) = x_0 \in \text{pr}_2(\mathcal{O}).$$

Zdefiniowawszy odwzorowanie  $\tilde{f}$  jak w treści twierdzenia, otrzymujemy zagadnienie początkowe

$$D_1\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0) = \tilde{f}(t, \Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0)), \quad \Phi_{\tilde{f}}(t_0, t_0, s_0, x_0) = (s_0, x_0) \in \mathcal{O}.$$

Jako że  $\Phi_{\tilde{f}}$  przyjmuje wartości w  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N}$ , możemy zapisać

$$\Phi_{\tilde{f}} = (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2),$$

przy czym odwzorowania

$$\Phi_{\tilde{f}}^1 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_{\tilde{f}}^2 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{\times N}$$

spełniają równania

$$\begin{aligned} D_1\Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, s_0, x_0) &= \text{pr}_1 \circ \tilde{f}(t, (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) \\ &= \text{pr}_1 \circ (1, f \circ (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) = 1, \\ D_1\Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0) &= \text{pr}_2 \circ \tilde{f}(t, (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) \\ &= \text{pr}_2 \circ (1, f \circ (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) \\ &= f \circ (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0) \end{aligned}$$

przy warunkach początkowych

$$\Phi_{\tilde{f}}^1(t_0, t_0, s_0, x_0) = s_0, \quad \Phi_{\tilde{f}}^2(t_0, t_0, s_0, x_0) = x_0,$$

których rozwiązanie, jednoznaczne na mocy Tw. 1.4.10, to

$$\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0) = (t - t_0 + s_0, \Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)),$$

wobec czego druga składowa zagadnienia nowego początkowego przyjmuje postać

$$D_1\Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0) = f(t - t_0 + s_0, \Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)).$$

Oznaczmy

$$\Psi_f(t - t_0 + s_0, s_0, x_0) := \Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)$$

i dokonajmy trywialnego przesunięcia  $t \mapsto t+t_0-s_0$ , a wtedy dostajemy zagadnienie początkowe

$$D_1\Psi_f(t, s_0, x_0) = f(t, \Psi_f(t, s_0, x_0)),$$

$$\Psi_f(s_0, s_0, x_0) \equiv \Phi_{\tilde{f}}^2(t_0, t_0, s_0, x_0) = \text{pr}_2 \circ \Phi_{\tilde{f}}(t_0, t_0, s_0, x_0) = \text{pr}_2(s_0, x_0) = x_0,$$

skąd wniosek, że  $\Psi_f$  jest potokiem określonym przez wyjściowe odwzorowanie  $f$ , czyli

$$\Psi_f(t, s_0, x_0) \equiv \Phi_f(t - s_0 + t_0, t_0, x_0),$$

a dalej

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0) &= (t - t_0 + s_0, \Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)) \equiv (t - t_0 + s_0, \Psi_f(t - t_0 + s_0, s_0, x_0)) \\ &= (t - t_0 + s_0, \Phi_f(t, t_0, x_0)). \end{aligned}$$

W szczególności więc ilekroć  $\Phi_f(t, t_0, x_0)$  jest dobrze określone (dla pewnego  $x_0 \in \text{pr}_2(\mathcal{O})$ ), także  $\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0)$  jest dobrze określone.

Następnie przechodzimy do omówienia zagadnienia parametrycznego

$$D_1\Phi_f(t, t_0, x_0, \pi) = f_\pi(t, \Phi_f(t, t_0, x_0, \pi)), \quad \Phi_f(t_0, t_0, x_0, \pi) = x_0.$$

W tym przypadku natrafiamy na stowarzyszone (wg przepisu z treści dowodzonego twierdzenia) zagadnienie początkowe

$$D_1\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, x_0, \pi) = \widehat{f}(t, \Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, x_0, \pi)), \quad \Phi_{\tilde{f}}(t_0, t_0, x_0, \pi) = (x_0, \pi) \in \text{pr}_2(\mathcal{O}) \times \Pi,$$

a ponieważ przeciwdziedzina  $\Phi_{\tilde{f}}$  jest tym razem  $\mathbb{R}^{\times N} \times X$ , przeto możemy rozłożyć

$$\Phi_{\tilde{f}} = (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)$$

w terminach pewnych odwzorowań

$$\Phi_{\tilde{f}}^1 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{\times N}, \quad \Phi_{\tilde{f}}^2 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \Pi \rightarrow V,$$

spełniających równania (nieautonomiczne)

$$D_1\Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi) = f_{\Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, x_0, \pi)}(t, \Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi)), \quad D_1\Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, x_0, \pi) = 0_V$$

przy warunkach początkowych

$$\Phi_{\tilde{f}}^1(t_0, t_0, x_0, \pi) = x_0, \quad \Phi_{\tilde{f}}^2(t_0, t_0, x_0, \pi) = \pi.$$

Ich rozwiązanie jest postaci

$$\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, x_0, \pi) = (\Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi), \pi),$$

przy czym  $\Phi_{\tilde{f}}^1$  jest określone przez zagadnienie początkowe

$$D_1\Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi) = f_\pi(t, \Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi)), \quad \Phi_{\tilde{f}}^1(t_0, t_0, x_0, \pi) = x_0,$$

które prowadzi wprost do identyfikacji

$$\Phi_{\tilde{f}}^1 \equiv \Phi_f,$$

a ta – do ostatecznego odszyfrowania postaci potoku stowarzyszonego z nowym odwzorowaniem:

$$\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, x_0, \pi) = (\Phi_f(t, t_0, x_0, \pi), \pi).$$

□

Zwieńczeniem naszej analizy zagadnień początkowych opisywanych przez równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu jest poniższe twierdzenie, w którym ustalamy klasę gładkości funkcjonalnej zależności potoku od warunków początkowych.

**TWIERDZENIE 1.4.16** (O różniczkowalności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego). *Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 1.4.13 i 1.4.15. Jeżeli rozważany układ ma charakter autonomiczny i funkcja  $f$  jest klasy  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  (w drugim argumencie, od którego – jako jedyne, wprost z założenia – zależność jest nietrywialną), to wówczas zależność potoku  $\Phi_f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}^N$  od warunku początkowego i parametru  $t$ , zwanego dalej **czasem**, także jest klasy  $C^k$  (przy ustalonym czasie początkowym).*

■

Dowód: Zaczniemy od uwagi porządkującej: autonomiczny charakter zagadnienia oznacza trywialną zależność  $f$  od pierwszego argumentu, co podkreślimy w dalszej części naszego wyводу zastępując funkcję  $f$  funkcją  $\underline{f} \in C^k(\underline{\mathcal{O}}, \mathbb{R}^N)$ ,  $\underline{\mathcal{O}} \equiv \text{pr}_2(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^{xN}$ , dla której

$$f(s, y(s)) \equiv \underline{f}(y(s)).$$

Ustalmy dane początkowe  $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$  i rozważmy odnośny maksymalny przedział czasowy  $I_f(t_0, x_0) = ]a_f(t_0, x_0), b_f(t_0, x_0)[$ , którego istnienie orzeka Stw. 1.4.12. Wybierzmy (dowolnie) otwarte otoczenie  $\mathcal{U}_{x_0} \subset \underline{\mathcal{O}}$  punktu  $x_0$ , na którym funkcja  $\underline{f}$  spełnia warunek

$$M_{x_0} := \sup_{x \in \mathcal{U}_{x_0}} \|\underline{D}\underline{f}(x)\|_{\text{op}} < \infty$$

(wystarczy wybrać wewnątrz dowolnego zbioru zwartego, na którym  $\underline{f}$ , z założenia różniczkowalna w sposób ciągły na  $\underline{\mathcal{O}}$ , spełnia ten warunek), a następnie podprzedział  $I = [a, b] \subset I_f(t_0, x_0)$  o długości

$$b - a < M_{x_0}$$

zawierający  $t_0$  jako punkt wewnętrzny,

$$a_f(t_0, x_0) < a < t_0 < b < b_f(t_0, x_0).$$

Otoczenie  $\mathcal{U}_{x_0}$  będziemy przy tym rozpatrywać jako podzbiór przestrzeni Banacha  $(\mathbb{R}^{xN}, \|\cdot\|_N)$  ze standardową normą euklidesową jak w Przykł. 25 (1). Rozważmy

dalej otwarty podzbiór<sup>5</sup>

$$\mathcal{V}_{x_0} := \{ \gamma \in C(I, \mathbb{R}^{\times N}) \mid \gamma(I) \subset \mathcal{U}_{x_0} \}$$

przestrzeni Banacha  $(C(I, \mathbb{R}^{\times N}), \|\cdot\|_\infty)$  i wreszcie zdefiniujemy odwzorowanie

$$T_{f;t_0} : \mathcal{U}_{x_0} \times \mathcal{V}_{x_0} \rightarrow C(I, \mathbb{R}^{\times N}) : (x_1, \gamma) \mapsto \gamma(\cdot) - x_1 - \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} \underline{f} \circ \gamma,$$

którego znaczenie dla naszych rozważań ujawnia oczywista obserwacja: poziomica zera  $T_{f;t_0}$  jest zbiorem (jednoznacznych) lokalnych rozwiązań rozpatrywanego zagadnienia początkowego przy warunkach początkowych z otoczenia  $\mathcal{U}_{x_0}$ . Odnosząc Stw. 89 do odwzorowania  $F$  będącego dowolnym rozszerzeniem  $\underline{f}$  do całej przestrzeni Banacha  $(\mathbb{R}^{\times N}, \|\cdot\|_N)$ , stwierdzamy ciągłą różniczkowalność klasy  $C^k$  odwzorowania  $T_{f;t_0}$ , przy czym

$$\begin{aligned} DT_{f;t_0}(x_1, \gamma)(\bullet_1, \bullet_2) &= -\text{id}_{\mathbb{R}^{\times N}}(\bullet_1) \oplus \left( \text{id}_{C(I, \mathbb{R}^{\times N})}(\bullet_2) - \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(\bullet_2(\cdot)) \right) \\ &\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N} \oplus C(I, \mathbb{R}^{\times N}), C(I, \mathbb{R}^{\times N})). \end{aligned}$$

Proste oszacowanie

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(\bullet_2(\cdot)) \right\|_{\text{op}} \\ &\equiv \sup_{v \in C(I, \mathbb{R}^{\times N}) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \left\| \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(v(\cdot)) \right\|_\infty \right) \\ &\equiv \sup_{v \in C(I, \mathbb{R}^{\times N}) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \sup_{t \in I} \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(v(\cdot)) \right\|_N \right) \\ (1.4.24) \quad &\leq (b-a) \cdot M_{x_0} < 1 \end{aligned}$$

dowodzi – na gruncie Stw. 79 – odwracalności na zbiorze otwartym  $\mathcal{U}_{x_0} \times \mathcal{V}_{x_0} \ni (x_1, \gamma)$  ciągłego odwzorowania  $\mathbb{R}$ -liniowego

$$D_2 T_{f;t_0}(x_1, \gamma)(\bullet_2) = \text{id}_{C(I, \mathbb{R}^{\times N})}(\bullet_2) - \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(\bullet_2(\cdot)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(C(I, \mathbb{R}^{\times N})).$$

Przywołując tezę Tw. 1.4.8, którego założenia są tutaj w oczywisty sposób spełnione dla  $V_1 = \mathbb{R}^{\times N}$ ,  $V_2 = C(I, \mathbb{R}^{\times N})$ ,  $U_1 = \mathcal{U}_{x_0}$ ,  $U_2 = \mathcal{V}_{x_0}$  oraz  $F = T_{f;t_0}$ , wnioskujemy

<sup>5</sup>Otwartość  $\mathcal{V}_{x_0}$  jest prostym następstwem tego, że każdy punkt ścieżki  $\gamma(I)$  leżącej w otwartym zbiorze  $\mathcal{U}_{x_0}$  zawiera się w nim wraz z pewną kulą otwartą, suma zaś tych kul wzięta po wszystkich punktach ścieżki definiuje jej otwarte otoczenie w  $\mathcal{U}_{x_0}$ . Zastępując każdą z kul koncentryczną z nią kulą o dwukrotnie mniejszym promieniu, uzyskujemy pokrycie ścieżki o tej własności, że jego domknięcie, otrzymane przez zastąpienie każdej z kul otwartych jej domknięciem, zawiera się w  $\mathcal{U}_{x_0}$ . Z pokrycia tego możemy – wobec zwartości ścieżki, będącej w świetle Stw. 69 konsekwencją ciągłości  $\gamma$  i zwartości  $I$  – wybrać podpokrycie skończone będące rodziną kul  $\mathcal{B} := \{B_i^N\}_{i \in \overline{1, M}}$ ,  $M \in \mathbb{N}^\times$ . Domknięcie  $\overline{\Sigma}$  ich (otwartej) sumy mnogościowej  $\Sigma$  jest w oczywisty sposób ograniczone w  $\mathbb{R}^{\times N}$  (zawiera się w kuli o środku w  $\gamma(a)$  i promieniu większym od  $\max_{i \in \overline{1, M}} \sup_{x_i \in B_i^N} \|\gamma(a) - x_i\|_N$ ), a jego brzeg  $\partial \overline{\Sigma}$  jest nie tylko ograniczony (jako podzbiór  $\overline{\Sigma}$ ), lecz także domknięty jako przecięcie  $\overline{\Sigma} \cap (\mathbb{R}^{\times N} \setminus \Sigma)$ , więc zwarty na mocy Stw. 82. Przywoławszy Stw. 71 oraz 69 i 82, wyznaczamy odległość między  $\partial \overline{\Sigma}$  i  $\gamma(I)$ , daną jako  $\inf_{(x,y) \in \gamma(I) \times \partial \overline{\Sigma}} \|x - y\|_N =: \varepsilon_\gamma$ , a ponieważ w zwartym podzbiorku  $\gamma(I) \times \partial \overline{\Sigma} \subset \mathbb{R}^{\times N} \times \mathbb{R}^{\times N}$  istnieje punkt, w którym infimum to jest osiągnięte, przeto nieodzownie jest ono niezerowe,  $\varepsilon_\gamma > 0$  (w przeciwnym razie rodzina  $\mathcal{B}$  nie byłaby pokryciem otwartym ścieżki). Jest oczywiste, że kula otwarta w  $C(I, \mathbb{R}^{\times N})$  o środku w  $\gamma$  i promieniu  $\varepsilon_\gamma$  zawiera się w  $\mathcal{V}_{x_0}$ .

o istnieniu otwartego otoczenia  $\mathcal{O}_{x_0} \subset \mathcal{U}_{x_0}$  warunku początkowego  $x_0$ , na którym jest określone odwzorowanie klasy  $C^k$

$$\Gamma_{x_0}^{(t_0)} : \mathcal{O}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{V}_{x_0} : x_1 \longmapsto \gamma_{x_1}^{(t_0)},$$

$$(1.4.25) \quad \gamma_{x_1}^{(t_0)}(t) = x_1 + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} \underline{f} \circ \gamma_{x_1}^{(t_0)} \equiv \Phi_f(t, t_0, x_1).$$

Z powyższego wywiedziemy wniosek<sup>6</sup> o różniczkowalności klasy  $C^k$  zależności potoku  $\Phi_f$  od argumentów  $(t, x_1)$  przy ustalonym czasie początkowym  $t_0$ . Tytułem rozgrzewki powtórzmy najpierw dowód ciągłości potoku przy ustalonym  $t_0$ , z której nie korzystaliśmy w dotychczasowych rozważaniach. Oto więc dla dowolnych  $(s, x_1), (t, x_2) \in I \times \mathcal{O}_{x_0}$  obliczamy

$$\begin{aligned} \|\Phi_f(t, t_0, x_2) - \Phi_f(s, t_0, x_1)\|_N &\leq \|\Phi_f(t, t_0, x_2) - \Phi_f(t, t_0, x_1)\|_N \\ &\quad + \|\Phi_f(t, t_0, x_1) - \Phi_f(s, t_0, x_1)\|_N \\ &\equiv \|\gamma_{x_2}^{(t_0)}(t) - \gamma_{x_1}^{(t_0)}(t)\|_N + \|\gamma_{x_1}^{(t_0)}(t) - \gamma_{x_1}^{(t_0)}(s)\|_N \\ &\equiv \|\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2)(t) - \Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(t)\|_N \\ &\quad + \|\gamma_{x_1}^{(t_0)}(t) - \gamma_{x_1}^{(t_0)}(s)\|_N. \end{aligned}$$

Wobec ciągłości (danych lokalnie) ścieżek  $\gamma_{x_1}^{(t_0)}$  oraz ciągłości odwzorowania  $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$  na  $\mathcal{O}_{x_0}$ , majorantę pojawiającą się po prawej stronie powyższej nierówności możemy uczynić dowolnie małą, co dowodzi ciągłości potoku w otoczeniu  $(t_0, x_0)$  (przy ustalonym  $t_0$ ). Na mocy swej definicji potok, określony w terminach lokalnych odwzorowań  $\gamma_{x_1}^{(t_0)}$ , jest różniczkowalny, a ponieważ pochodna w argumentie czasowym

$$D_1\Phi_f(t, t_0, x_1) = \underline{f}(\Phi_f(t, t_0, x_1))$$

jest superpozycją funkcji ciągłych, przeto sama jest funkcją ciągłą. Rozważmy następnie pochodną

$$D\Gamma_{x_0}^{(t_0)} : \mathcal{O}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N}, C(I, \mathbb{R}^{\times N})),$$

która – jak wynika wprost z konstrukcji odwzorowania  $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$  – jest klasy  $C^{k-1}$ , a przy tym spełnia relację (definiującą)

$$(1.4.26) \quad \gamma_{x_1+v}^{(t_0)} - \gamma_{x_1}^{(t_0)} = D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v) + \mathcal{B}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; v), \quad v \in \mathbb{R}^{\times N},$$

gdzie

$$\lim_{\|v\|_N \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{B}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; v)\|_{\infty}}{\|v\|_N} = 0.$$

Obliczając obie strony relacji (1.4.26) w chwili  $t \in I$ , otrzymujemy równość

$$\Phi_f(t, t_0, x_1 + v) - \Phi_f(t, t_0, x_1) = (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) + \mathcal{B}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; v)(t),$$

<sup>6</sup>Należy podkreślić, że istnienie *lokalnych* odwzorowań  $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$  klasy  $C^k$  przyporządkowujących warunkom początkowym z otoczenia  $x_0$  odnośne (lokalne) rozwiązania zagadnienia początkowego nie przesądza automatycznie o różniczkowalności globalnie (na  $\mathcal{D}_f$ ) zadanego potoku  $\Phi_f$ , będącego odwzorowaniem pomiędzy przestrzeniami topologicznymi odmiennymi od (podzbiorów) dziedziny i przeciwdziedziny  $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$ .



na podstawie której identyfikujemy

$$D_3\Phi_f(t, t_0, x_1)(v) = (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t),$$

a stąd – wobec założonej ograniczoności  $D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  –

$$\begin{aligned} & \|D_3\Phi_f(t, t_0, x_2)(v) - D_3\Phi_f(s, t_0, x_1)(v)\|_N \\ & \leq \| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) \|_N \\ & \quad + \| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \|_N \\ & \leq \| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2) - D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1))(v) \|_\infty \\ & \quad + \| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \|_N \\ & \leq \| D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2) - D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1) \|_{\text{op}} \cdot \|v\|_N \\ & \quad + \| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \|_N. \end{aligned}$$

Ażeby wygodnie oszacować drugi składnik sumy występującej po prawej stronie powyższej nierówności, musimy zbadać nieco dokładniej elementarne własności potoku  $\Phi_f$  wynikające z konstrukcji odwzorowania  $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$ . W tym celu dla ustalonych  $w \in \mathbb{R}^{\times N}$  oraz  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  dokonajmy we wzorze (1.4.25) podstawienia  $x_1 \mapsto x_1 + \lambda \triangleright w$ , po czym obliczmy (korzystając z  $\mathbb{R}$ -liniowości całki)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \triangleright (\Phi_f(t, t_0, x_1 + \lambda \triangleright w) - \Phi_f(t, t_0, x_1)) \\ & = w + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} \frac{1}{\lambda} \triangleright [f(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1 + \lambda \triangleright w)) - f(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1))]. \end{aligned}$$

Oznaczmy dla wygody

$$\Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)} := D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w) + \frac{1}{\lambda} \triangleright \mathcal{H}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; \lambda \triangleright w).$$

Uwzględnivszy relację (1.4.26) i wziąwszy pod uwagę  $\mathbb{R}$ -liniowość odwzorowania  $D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)$ , a nadto przywoławszy Tw. 1.4.6 (w połączeniu z Cor. 7) w odniesieniu do funkcji  $\underline{f}$  (klasy  $C^1$ ) w formie

$$\begin{aligned} & \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1 + \lambda \triangleright w)) - \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1)) \\ & = \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1) + \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)) - \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1)) \\ & = \left( \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} D\underline{f} \circ \gamma_{\Phi_f(s, t_0, x_1), \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)} \right) (\lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)) \\ & = \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} r_{\text{ev}}(\lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)) \circ D\underline{f} \circ \gamma_{\Phi_f(s, t_0, x_1), \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)} \end{aligned}$$

otrzymujemy tym sposobem równość (indeks  $\alpha \in \{1, 2\}$  w oznaczeniu  $\cdot_\alpha$  identyfikuje całkę, opatrzoną tym samym indeksem umieszczonym w nawiasie, której odpowiada zmienna symbolizowana przez  $\cdot_\alpha$ )

$$\Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(t) = w$$

$$+ \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})}^{(2)} r_{\text{ev}}(\Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(\cdot_1)) \circ D\underline{f} \circ \gamma_{\Phi_f(\cdot_1, t_0, x_1), \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(\cdot_1)}(\cdot_2)$$

a ponieważ graniczne zachowanie reszty (przy  $\lambda \triangleright w \rightarrow 0$ ) implikuje

$$\frac{1}{\lambda} \triangleright \mathcal{R}_2 \Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; \lambda \triangleright w) \equiv \left( \frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot \|w\|_N \right) \triangleright \frac{1}{\|\lambda \triangleright w\|_N} \triangleright \mathcal{R}_2 \Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; \lambda \triangleright w) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

więc też przechodząc obustronnie do granicy  $\lambda \rightarrow 0$  w poprzedniej równości (z uwzględnieniem liniowości i ciągłości  $D\underline{f}$  oraz obu całek, a także ciągłości pozostałych wykorzystanych powyżej odwzorowań) znajdujemy relację

$$\begin{aligned} & (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w))(t) \\ &= w + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}}^{(1)} \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})}^{(2)} r_{\text{ev}} \left( (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w))(\cdot_1) \right) \circ D\underline{f}(\Phi_f(\cdot_1, t_0, x_1)) \\ &\equiv w + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1)) \left( (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w))(\cdot) \right). \end{aligned}$$

W świetle (1.4.24) daje nam to oszacowanie

$$\begin{aligned} & \left\| (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \right\|_N \\ &= \left\| \int_{[s, t]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1)) \left( (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(\cdot) \right) \right\|_N \\ &\leq |t - s| \cdot (b - a) \cdot M_{x_0} \cdot \|D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)\|_{\text{op}} \cdot \|v\|_N < |t - s| \cdot \|D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)\|_{\text{op}} \cdot \|v\|_N, \end{aligned}$$

z którego ostatecznie wynika pożądana nierówność

$$\begin{aligned} & \|D_3\Phi_f(t, t_0, x_2) - D_3\Phi_f(s, t_0, x_1)\|_{\text{op}} \\ &\leq \|D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2) - D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)\|_{\text{op}} + |t - s| \cdot \|D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)\|_{\text{op}} \end{aligned}$$

dowodząca – wobec ograniczoności (więc i ciągłości)  $D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$  oraz  $D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)$  – ciągłości pochodnej  $D_3\Phi_f$  (przy ustalonym  $t_0$ ). W połączeniu z wcześniejszym dowodem ciągłości, prowadzi nas to do wniosku, iż  $\Phi_f$  jest klasy  $C^1$  w otoczeniu  $(t_0, x_0)$  (przy ustalonym  $t_0$ ). Podkreślmy przy tym, że w dowodzie wykorzystaliśmy jedynie ciągłą różniczkowalność odwzorowania  $f$ .

Dotychczasowa dyskusja pozwala nam przeprowadzić indukcyjny (względem stopnia ciągłej różniczkowalności  $f$ ) dowód różniczkowalności wyższego stopnia potoku (przy ustalonym  $t_0$ ), do którego punktem wyjścia jest następująca obserwacja:

$$\begin{aligned} D_3\Phi_f(t, t_0, x_1) &= \text{id}_{\mathbb{R}^{\times N}} + \int_{[t_0, t]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} D_3(\underline{f} \circ \Phi_f)(\cdot, t_0, x_1) \\ &= \text{id}_{\mathbb{R}^{\times N}} + \int_{[t_0, t]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} D\underline{f}(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1)) \circ D_3\Phi_f(\cdot, t_0, x_1), \end{aligned}$$

wykorzystująca ciągłość pierwszej pochodnej potoku (przy różniczkowaniu wyrażenia podcałkowego z wykorzystaniem Stw. 89 oraz 86). Porównując ją z równaniem całkowym

$$\Phi_f(t, t_0, x_1) = x_1 + \int_{[t_0, t]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} \underline{f} \circ \Phi_f(\cdot, t_0, x_1),$$

konstatujemy, że  $D_3\Phi_f$  jest rozwiązaniem, przy warunku początkowym

$$D_3\Phi_f(t_0, t_0, x_1) = \text{id}_{\mathbb{R}^{\times N}},$$

(nieautonomicznego, parametrycznego)  $\mathbb{R}$ -liniowego zagadnienia początkowego

$$(1.4.27) \quad D_1(D_3\Phi_f)(t, t_0, x_1) = D\underline{f}(\Phi_f(t, t_0, x_1)) \circ D_3\Phi_f(t, t_0, x_1).$$

Na podstawie Tw. 1.4.15 stwierdzamy, że zagadnienie to jest różniczkowo równoważne pewnemu autonomicznemu bezparametrycznemu zagadnieniu początkowemu, możemy więc odnieść do niego wprost tezę dowodzonego twierdzenia w ujęciu indukcyjnym: oto założmy, że teza ta została wykazana dla odwzorowań klasy  $C^l$  dla  $l \in \overline{1, k-1}$ , a wtedy – wobec przynależności rozważanego przez nas  $f$  do klasy  $C^{k-1}$  (jako odwzorowania klasy  $C^k$ ) – wiemy na pewno, że zależność argumentu odwzorowania  $\underline{Df}$  od  $(t, x_0)$  jest klasy  $C^{k-1}$  ( $x_1$  pełni tutaj rolę ciągłego parametru wektorowego), a nadto samo odwzorowanie  $\underline{Df}$  jest klasy  $C^{k-1}$ , więc też  $\mathbb{R}$ -liniowe odwzorowanie określające zagadnienie początkowe (1.4.27) jest tej klasy, co przy powtórznym zastosowaniu założenia indukcyjnego implikuje natychmiast ciągłą różniczkowalność stopnia  $k-1$  potoku  $D_3\Phi_f$  w  $(t, x_0)$  przy ustalonym  $t_0$ . Łącząc tę konkluzję z obserwacją (również wykorzystującą hipotezę indukcyjną)

$$D_1\Phi_f(\cdot, t_0, \cdot) = \underline{f} \circ \Phi_f(\cdot, t_0, \cdot) \in C^{k-1}(I \times \text{pr}_2(\mathcal{O}_{x_0}), \mathbb{R}^{\times N}),$$

wniosujemy, że  $D\Phi_f(\cdot, t_0, \cdot)$  (przy ustalonym  $t_0$ ) jest klasy  $C^{k-1}$ , zatem sam potok  $\Phi_f(\cdot, t_0, \cdot)$  jest klasy  $C^k$ , co należało pokazać.  $\square$

Udowodnione przez nas z mozołem twierdzenie o gładkości potoku odwzorowania definiującego zagadnienie początkowe, tej samej klasy co gładkość tegoż odwzorowania, będzie przez nas wielokrotnie wykorzystywane w następnym rozdziale, jak też w późniejszej dyskusji zastosowań gromadzonych przez nas metod w geometryzacji wyższych struktur algebraicznych.

### 3. Geometria różniczkowa – algebra liniowa jako model lokalny

Na styku dziedzin przywołanych – w zakresie niezbędnym dla dalszych naszych rozważań – w rozdziałach poprzednich, więc algebry liniowej oraz elementarnej topologii i teorii przestrzeni Banacha, pojawia się możliwość znaczącego poszerzenia zakresu rozważań analitycznych, ograniczonych dotychczas do przestrzeni topologicznych ze strukturą liniową zgodną ze strukturą topologiczną. Możliwość tę, będącą poważnym krokiem na drodze do modelowania rzeczywistych zjawisk, otwiera niezwykle płodna Zasada Lokalnej Trywializacji (ZLT), opisana w Przedmowie. Poniżej zilustrujemy ją na kilku przykładach o fundamentalnym znaczeniu dla modelowania zjawisk i budowania ich areny geometrycznej, jaką jest czasoprzestrzeń. Te nasze wstępne rozważania, stanowiące ledwie przypomnienie i – ewentualnie – wygodne przeformułowanie podstawowych konstrukcji i wyników kursu geometrii różniczkowej, ustalą punkt wyjścia do bardziej zaawansowanych zastosowań ZLT w dalszej części kursu. Naszą dyskusję zaczynamy od zupełnie podstawowych pojęć i konstrukcji geometrii różniczkowej.

DEFINICJA 65. Przyjmijmy zapis Def. 1, 59 i 63 oraz Przykł. 25 (1). Ustalmy (dowolnie)  $n \in \mathbb{N}$  i niechaj  $\mathcal{T}_n^{(k)}$  będzie kategorią, w której klasa obiektów to  $\text{Obj } \mathcal{T}_n^{(k)} := \mathcal{T}_E(\mathbb{R}^{\times n})$ , a zbiór morfizmów między dwoma dowolnymi obiektami  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \text{Obj } \mathcal{T}_n^{(k)}$  to  $\text{Hom}_{\mathcal{T}_n^{(k)}}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) := C^k(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ . **Rozmaitość różniczkowalna klasy  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$**  (zwana też  **$C^k$ -rozmaitością**) wymiaru  $\dim M = n$  to przestrzeń Hausdorffa typu Top lokalnie modelowana na kategorii  $\mathcal{T}_n^{(k)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , czyli czwórka  $((M, \mathcal{T}(M)), \mathcal{O}, \mathcal{U}, \kappa)$  złożona z przestrzeni Hausdorffa  $(M, \mathcal{T}(M))$ , jej pokrycia otwartego  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(M)$ , rodziny podzbiorów

$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_E(\mathbb{R}^{x^n})$  oraz homeomorfizmów

$$\kappa_i : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i, \quad i \in I,$$

zwanych **mapami** lub (**lokalnymi**) **układami współrzędnych**, o odwzorowaniach odwrotnych

$$\pi_i \equiv \kappa_i^{-1} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i, \quad i \in I,$$

zwanych **lokalnymi parametryzacjami**, i takich, że dla wszystkich par indeksów  $(i, j) \in \langle I^{x2} \rangle_{\emptyset}$  homeomorfizmy

$$(1.4.28) \quad t_{ji} := \kappa_j \circ \kappa_i^{-1} \upharpoonright_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij})} : \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \xrightarrow{\cong} \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}),$$

określane mianem (**lokalnych**) **transformacji współrzędniowych**, są dyfeomorfizmami klasy  $C^k$ . Kolekcja map  $\{\kappa_i\}_{i \in I} =: \mathcal{A}$  jest określana mianem **atlasu** klasy  $C^k$ . Najczęściej przyjmuje się, że definicja rozmaitości różniczkowalnej klasy  $C^k$  obejmuje także atlas  $\widehat{\mathcal{A}}$  klasy  $C^k$  **maksymalny** w tym sensie, że dla każdego atlasu  $\mathcal{A}$  na  $M$  klasy  $C^k$  zachodzi tożsamość<sup>7</sup>

$$\mathcal{A} \cup \widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}.$$

W przypadku  $k = 0$  mówimy o **rozmaitościach topologicznych**. Odtąd będziemy zatem często zapisywać rozmaitość różniczkowalną klasy  $C^k$  wymiaru  $n$  jako parę  $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$ , złożoną z przestrzeni Hausdorffa  $(M, \mathcal{T}(M))$  j/w oraz atlasu maksymalnego  $\widehat{\mathcal{A}}$ , lub wręcz – jeśli nie będzie to prowadzić do nieporozumień – jako parę  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ . Strukturę tę będziemy wymiennie określać mianem **struktury rozmaitości różniczkowalnej (klasy  $C^k$ )**, **struktury  $C^k$ -rozmaitości** lub po prostu **struktury różniczkowej (klasy  $C^k$ )**.

**Podrozmaitość** wymiaru  $k \leq \dim M$  to podprzestrzeń topologiczna  $S \subseteq M$  rozmaitości różniczkowalnej  $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$  klasy  $C^k$  o strukturze różniczkowalnej określonej przez atlas

$$\widehat{\mathcal{A}} \cap S := \{\varphi_i^S := \varphi_i \upharpoonright_{\mathcal{O}_i \cap S}\}_{i \in I_S}, \quad I_S := \{i \in I \mid \mathcal{O}_i \cap S \neq \emptyset\},$$

którego mapy spełniają warunek

$$\mathcal{O}_i \cap S = \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{xk} \subset \mathbb{R}^{xn}), \quad i \in I.$$

W tym przypadku liczbę naturalną

$$\text{codim}_M S := n - k$$

określamy mianem **kwymiaru** podrozmaitości  $((S, \mathcal{T}_M(S)), \widehat{\mathcal{A}} \cap S)$  w rozmaitości  $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$ .

Niechaj  $((M_\alpha, \mathcal{T}(M_\alpha)), \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema rozmaitościami różniczkowalnymi klasy  $C^k$  i niech  $f : M_1 \rightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem ciągłym między nimi, przy czym zakładamy, że ustalone (dowolnie) pokrycia  $\mathcal{O}_\alpha = \{\mathcal{O}_{i_\alpha}^\alpha\}_{i_\alpha \in I_\alpha} \subset \mathcal{T}(M_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  zostały wybrane tak, że istnieje odwzorowanie  $\phi : I_1 \rightarrow I_2$  pokrywające  $f$  w sensie relacji

$$f(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2, \quad i_1 \in I_1,$$

<sup>7</sup>Każdy atlas klasy  $C^k$  można rozszerzyć do atlasu maksymalnego klasy  $C^k$  uzupełniając go o wszystkie mapy o transformacjach współrzędniowych z mapami wyjściowymi będących klasy  $C^k$ .

co nie stanowi ograniczenia ogólności naszych rozważań, patrz: przypis do Def. 1. Odwzorowanie  $f$  nazywamy **odwzorowaniem różniczkowalnym klasy  $C^p$** ,  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , lub po prostu  **$C^p$ -odwzorowaniem**, jeśli ma ono **prezentację lokalną**

$$f_{i_1} := \kappa_{\phi(i_1)}^2 \circ f \circ (\kappa_{i_1}^1)^{-1} : \kappa_{i_1}^1(\mathcal{O}_{i_1}^1) \rightarrow \kappa_{\phi(i_1)}^2(\mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2), \quad i_1 \in I_1$$

tejże klasy, czyli ilekroć

$$\forall_{i_1 \in I_1} : f_{i_1} \in C^p(\kappa_{i_1}^1(\mathcal{O}_{i_1}^1), \kappa_{\phi(i_1)}^2(\mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2)).$$

Biorąc pod uwagę stopień ciągłej różniczkowości transformacji współrzędnych (1.4.28), zasadnym jest ograniczenie rozważań do  $p \leq k$ .

**Kategoria różniczkowalności różniczkowalnej klasy  $C^k$** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{Man}^{(k)},$$

to podkategoria kategorii Top, której obiektami są różniczkowalne klasy  $C^k$ , morfizmami zaś – odwzorowania różniczkowalne klasy  $C^k$  między nimi, oznaczane symbolami

$$C^k(M_1, M_2) \equiv \text{Hom}_{\mathbf{Man}^{(k)}}(((M_1, \mathcal{T}(M_1)), \widehat{\mathcal{A}}_1), ((M_2, \mathcal{T}(M_2)), \widehat{\mathcal{A}}_2)).$$

Izomorfizmy w tej kategorii (tj. bijekcje klasy  $C^k$  o odwzorowaniach odwrotnych także klasy  $C^k$ ) określamy mianem **dyfeomorfizmów klasy  $C^k$**  lub po prostu  **$C^k$ -dyfeomorfizmów** i oznaczamy symbolami  $\text{Diff}^k(M_1, M_2)$ . W szczególności automorfizmy różniczkowalnej klasy  $C^k$  na  $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$  oznaczamy symbolem  $\text{Diff}^k(M)$ . W przypadku  $k = 0$  mamy do czynienia z textbfkategorią różniczkowalności topologicznych

$$\mathbf{Man}^{(0)} \equiv \mathbf{TopMan},$$

w której dyfeomorfizmami są homeomorfizmy. ▲

**UWAGA 17.** Należy podkreślić, że klasa gładkości odwzorowania między różniczkowalnymi klasami  $C^k$  jest dobrze określona – ilekroć odwzorowanie takie ma prezentację lokalną klasy  $C^p$ , każda inna jego prezentacja lokalna stowarzyszona z tym samym atlasem maksymalnym jest także klasy  $C^p$ . Istotnie, superpozycja odwzorowań klas  $C^k$  i  $C^p$ ,  $p \leq k$  jest klasy  $C^p$ , tymczasem dla dowolnego  $j_1 \in I_1$  o własności  $\mathcal{O}_{i_1 j_1}^1 \neq \emptyset$  zachodzi

$$f_{j_1} \equiv \tau_{\phi(j_1)\phi(i_1)}^2 \circ f_{i_1} \circ (\tau_{j_1 i_1}^1)^{-1}.$$

▬

**PRZYKŁAD(Y) 26.**

- (1) **Struktura produktowa różniczkowalności** dla pary  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  różniczkowalnej klasy  $C^k$  o atlasach  $\widehat{\mathcal{A}}_\alpha = \{\varphi_{i_\alpha}^\alpha\}_{i_\alpha \in I_\alpha}$  to struktura różniczkowalna klasy  $C^k$  na iloczynie kartezjańskim  $M_1 \times M_2$  (wyposażonym w standardową topologię produktową z Przykł. 24 (5)) określona przez atlas

$$\widehat{\mathcal{A}}_1 \times \widehat{\mathcal{A}}_2 := \{\varphi_{i_1}^1 \times \varphi_{i_2}^2\}_{(i_1, i_2) \in I_1 \times I_2}$$

złożony z map

$$\varphi_{i_1}^1 \times \varphi_{i_2}^2 : \mathcal{O}_{i_1}^1 \times \mathcal{O}_{i_2}^2 \rightsquigarrow \mathcal{U}_{i_1}^1 \times \mathcal{U}_{i_2}^2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \cong \mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

- (2) **Struktura cofnięta rozmaitości** na przestrzeń topologiczną  $M$  wzdłuż odwzorowania  $f : M \rightarrow N$ , będącego homeomorfizmem  $M$  na obraz  $f(M) \subset N$ , z rozmaitości różniczkowalnej  $(N, \widehat{\mathcal{A}})$  o atlasie  $\widehat{\mathcal{A}} = \{\varphi_i\}_{i \in I}$  to struktura różniczkowalna klasy  $C^p$  na  $M$  określona przez atlas

$$f^* \widehat{\mathcal{A}} := \{f^* \varphi_i\}_{i \in I}$$

złożony z map

$$f^* \varphi_i : f^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{n_n}, \quad i \in I.$$

✓

Istnienie topologicznie trywialnego lokalnego modelu ma swoje dalekosiężne konsekwencje, spośród których wymienimy tutaj tylko przydatne w dalszej części wykładu

**STWIERDZENIE 92.** *Każda rozmaitość spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności i jest lokalnie zwarta, więc też lokalnie przewarta.*

■

*Dowód:* Dowolny punkt  $x \in M$  rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  wymiaru  $n$  należy do dziedziny  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M)$  pewnej lokalnej mapy  $\kappa : \mathcal{O} \rightsquigarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_n}$ ,  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\mathbb{E}}(\mathbb{R}^{n_n})$ , przy czym  $\kappa(x)$  zawiera się w  $\mathcal{U}$  wraz z pewną domkniętą kulą  $B^n(\kappa(x); \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , która w świetle Stw. 82 jest zwarta. Na mocy Stw. 69 homeomorficzny przeciwobraz tejże kuli w  $\mathcal{O}$ , który wprost z konstrukcji zawiera  $x$ , także jest zwarty. To rozumowanie przesądza o lokalnej zwartości przestrzeni  $M$ , a ponieważ ta ostatnia jest przestrzenią Hausdorffa, przeto wskazany uprzednio jej zwarty podzbiór zawierający  $x$  jest zarazem przewarty jako zbiór domknięty, co implikuje lokalną przewartość  $M$ . Spełnianie przez  $M$  pierwszego aksjomatu przeliczalności jest trywialną konsekwencją tej samej własności lokalnego modelu  $\mathbb{R}^{n_n}$ . □

Dużo mniej oczywistą, a zarazem nader istotną z homologicznego, więc także fizycznego punktu widzenia<sup>8</sup> konsekwencją użycia w definicji rozmaitości lokalnego modelu o trywialnej topologii i naturalnej strukturze liniowej jest istnienie szczególnie prostych topologicznie pokryć otwartych tejże rozmaitości, które opisuje

**DEFINICJA 66.** Przyjmijmy zapis Def. 65 i dla dowolnego pokrycia otwartego  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  rozmaitości różniczkowalnej (klasy  $C^k$ )  $M$  oznaczmy, uogólniając, dla dowolnego  $N \in \mathbb{N}^{\times}$ , zapis Def. 1,

$$\langle I^{\times N} \rangle_{\mathcal{O}} := \{ (i_1, i_2, \dots, i_N) \in I^{\times N} \mid \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N} \equiv \mathcal{O}_{i_1} \cap \mathcal{O}_{i_2} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{i_N} \neq \emptyset \}.$$

Pokrycie  $\mathcal{O}$  nazywamy **dobrym klasy  $C^k$** , jeśli jest ono lokalnie skończone, jego elementy są przewarte, a nadto każde niepuste ich przecięcie,

$$\mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}, \quad (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \langle I^{\times N} \rangle_{\mathcal{O}}, \quad N \in \mathbb{N}^{\times},$$

jest  $C^k$ -**ściągalne**, co oznacza, że istnieje dyfeomorfizm klasy  $C^k$

$$\rho : [0, 1] \times \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N} \rightsquigarrow \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}$$

<sup>8</sup>Patrz: Rozdz. 6.

o własnościach

$$\forall x \in \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N} : \rho(0, x) = x_* \quad \wedge \quad \rho(1, x) = x$$

dla pewnego punktu  $x_* \in \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}$ . Dyfeomorfizm taki określamy mianem **retrakcji różniczkowalnej** (klasy  $C^k$ ) zbioru  $\mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}$ . ▲

Mamy fundamentalne

**TWIERDZENIE 1.4.17** (de Rhama–Weila o istnieniu pokrycia dobrego). *Na każdej rozmaitości różniczkowalnej klasy  $C^k$  o  $k \geq 2$  istnieje pokrycie dobre klasy  $C^k$ .* ■

*Dowód:* Za Ref. [Wei52]. □

Obok wymienionych powyżej, istnieją wiele innych jeszcze naturalnych schematów indukcji struktury różniczkowej – niektóre z nich napotkamy w dalszej części kursu. Szczególne miejsce wśród nich zajmuje kanoniczna i zarazem naturalna (tj. funktorialna) konstrukcja, która z dowolną rozmaitością  $(M, \mathcal{A})$  klasy  $C^k$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^+$  stowarzysza rozmaitość klasy  $C^k$  dwukrotnie większego wymiaru, kodującą – jak się okaże – informację o klasach (współ)stycznych krzywych w  $M$  i tym samym otwierającą możliwość przetransportowania naturalnej struktury liniowej z przestrzeni modelowej  $\mathbb{R}^{2n}$ . Jej wprowadzenie do naszych rozważań pozwoli uporządkować dyskusję głównych typów odwzorowań różniczkowalnych, niezbędną dla naszych przyszłych celów, a zarazem da nam do ręki potężne narzędzie lokalnej (zlinearyzowanej) analizy automorfizmów (czyli symetrii) struktur różniczkowych, o oczywistych i nader istotnych konotacjach fizykalnych. Istnieje kilka (równoważnych) definicji rzeczonyj konstrukcji, kładących nacisk na jej różne aspekty geometryczne (struktura rozmaitości, struktura wiązki wektorowej, związek z różniczkowaniami algebry funkcji na  $M$ ). Poniżej wybierzemy tę z nich, która wydaje się być najbardziej elementarną (choć niekoniecznie najbardziej „intuicyjną”), a zarazem dostarczy prostej i czytelnej ilustracji ogólnego schematu budowania obiektów geometrycznych o analogicznej (produktowej) strukturze lokalnej, który sformalizujemy i wykorzystamy już wkrótce. Punktem wyjścia jest tutaj dekonstrukcja rozmaitości  $M$  w terminach lokalnych map (czyli też parametryzacji), tj. spojrzenie na  $M$  jako sumę rozłączną swych lokalnych modeli,

$$(1.4.29) \quad M \cong \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) / \sim,$$

w których punkty zostały utożsamione wedle reguły

$$(x, i) \sim (y, j) \quad \iff \quad \pi_i(x) = \pi_j(y) \in \mathcal{O}_{ij}.$$

Lokalnie rozmaitość można zatem traktować jako podzbiór (otwarty)  $\mathbb{R}^{2n}$ , co pozwala modelować przestrzeń styczną do  $M$  w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_i$  tej rozmaitości na stycznej do odnośnego obrazu w  $\kappa_i(x) \in \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{2n}$  przestrzeni  $\mathbb{R}^{2n}$ . Ten sposób myślenia o wyjściowej rozmaitości  $M$  prowadzi nas wprost do

**DEFINICJA 67.** Przyjmijmy zapis Def. 65, Przykł. 19 oraz 24 (4) i (5). **Wiązka styczna**  $C^{k+1}$ -rozmaitości  $(M, \mathcal{A})$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^+$ , o atlasie  $\mathcal{A} = \{\kappa_i\}_{i \in I}$  stowarzyszonym z pokryciem otwartym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , to  $C^k$ -rozmaitość  $(TM, \mathcal{T}\mathcal{A})$  utworzona, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$\mathbb{T}M := \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x^n} \right) / \sim_{\mathbb{D}t..}$$

relacji

$$(x, i, v) \sim (y, j, w) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ w = \mathbb{D}t_{ji}(\kappa_i(x))(v) \end{cases} ,$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{\mathbb{T}M} : \mathbb{T}M \longrightarrow M : [(x, i, v)]_{\sim_{\mathbb{D}t..}} \longmapsto x ,$$

zwane **rzutem kanonicznym (na bazę wiązki)**, którego poziomice

$$\mathbb{T}_x M := \pi_{\mathbb{T}M}^{-1}(\{x\})$$

noszą miano **włókien**;

- topologia zbioru  $\mathbb{T}M$  jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektynego rzutu

$$\pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x^n} \longrightarrow \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x^n} \right) / \sim_{\mathbb{D}t..} : (x, i, v) \longmapsto [(x, i, v)]_{\sim_{\mathbb{D}t..}}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni  $\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x^n}$ , o injekcjach kanonicznych

$$j_i : \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x^n} \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times \mathbb{R}^{x^n} : (x, v) \longmapsto (x, i, v), \quad i \in I ,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{S}(\mathbb{T}M) := \left\{ \mathcal{O} \subset \mathbb{T}M \mid \forall i \in I : j_i^{-1}(\pi_{\sim}^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x^n}) \right\} ;$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej  $\mathbb{T}M$  definiują (jawnie homeomorficzne) odwzorowania

$$\mathbb{T}\kappa_i : \pi_{\mathbb{T}M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{x^n} : [(x, i, v)]_{\sim_{\mathbb{D}t..}} \longmapsto (\kappa_i(x), v), \quad i \in I ,$$

zwane **mapami naturalnymi**, które określają transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \mathbb{T}t_{ji} := \mathbb{T}\kappa_j \circ (\mathbb{T}\kappa_i)^{-1} \upharpoonright_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{x^n}} & : \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{x^n} \twoheadrightarrow \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{x^n} \\ & : (\kappa_i(x), v) \longmapsto (\kappa_j(x), \mathbb{D}t_{ji}(\kappa_i(x))(v)), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób należące do klasy  $C^r$ .

Klasę abstrakcji

$$(1.4.30) \quad V(x) := [(x, i, v)]_{\sim_{\mathbb{D}t..}} \in \mathbb{T}_x M$$

określamy mianem **wektora stycznego** do  $C^{k+1}$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  (zaczepionego) w punkcie  $x \in M$ .

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy  $C^k$ )

$$\mathbf{0}_{\mathbb{T}M} : M \longrightarrow \mathbb{T}M : x \longmapsto [(x, i, \mathbf{0}^n)]_{\sim_{\mathbb{D}t..}}$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki stycznej  $\mathbb{T}M$ .

▲



UWAGA 18. Homeomorficzny charakter map naturalnych wymaga skromnego komentarza. Po pierwsze zauważmy, że dowolna klasa  $[(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \in \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \subset TM$  zawiera dokładnie jednego reprezentanta  $(x, i, v) \in \mathcal{O}_i \times \{i\} \times \mathbb{R}^{xn}$  (o ustalonym indeksie pokrycia), oto bowiem – wprost z definicji –

$$(y, i, w) \in [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \implies (y, w) = (x, Dt_{ii}(\kappa_i(x))(v)) \equiv (x, v),$$

a ponieważ także

$$\forall_{(x,v) \in \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn}} : (x, i, v) \in [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}},$$

przeto otrzymujemy homeomorfizm

$$\tau_i : \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn} : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \mapsto (x, v).$$

Jego złożenie z produktem homeomorfizmów

$$\kappa_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^{xn}} : \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{xn} : (x, v) \mapsto (\kappa_i(x), v)$$

odtworza mapę naturalną

$$\mathbb{T}\kappa_i \equiv (\kappa_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^{xn}}) \circ \tau_i.$$

Należy ponadto podkreślić, że w opisanej topologii także rzut kanoniczny jest odwzorowaniem ciągłym.

Wreszcie pojawienie się liniowych odwzorowań  $Dt_{ji}$  zarówno w definicji ilorazu (por. Równ. (1.4.29)), jak i w definicji transformacji współrzędniowych dla map naturalnych, jest całkowicie naturalne, jeśli myśleć o wektorach stycznych do  $M$  w punkcie  $x$  jako o klasach współstyczności ścieżek przechodzących przez ten punkt, te zaś – wyreprezentować przy użyciu linii prostych przecinających się w obrazie  $x$  względem lokalnej mapy  $\kappa_i$  (wzgl.  $\kappa_j$ ). Oczywiście przywołany argument opiera się na założeniu, że myślenie takie jest usprawiedliwione, co zbadamy poniżej.

̄

Jakkolwiek w tworzeniu terminologii matematycznej powszechnie dochodzi do głosu zasada „świnki morskiej”, wedle której „wektor styczny” nie musi być ani wektorem w rozumieniu algebraicznym, ani obiektem stycznym do  $M$  w żadnym sensie podpowiadającym przez intuicję wyrobioną w geometrii euklidesowej, to jednak pojawia się naturalne pytanie o ewentualną równoważność powyższej definicji z inną naturalną geometryczną definicją wektora stycznego jako klasy (współ)styczności ścieżek przechodzących przez punkt  $x \in M$ , reprezentujących możliwe trajektorie ucieczki (z określoną „prędkością”) z punktu  $x$ , i tym samym – elementu pewnej wyróżnionej przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej przypisanej do tego punktu. Nasza odpowiedź na to pytanie będzie dwuczłonowa: najpierw wykazemy istnienie naturalnej struktury  $\mathbb{R}$ -liniowej na włóknie wiązki stycznej nad dowolnym punktem, następnie zaś udowodnimy strukturalną (w kategorii  $\mathbb{R}$ -liniowej) równoważność obu definicji wektora stycznego. Oto więc zacniemy od oczywistego

STWIERDZENIE 93. *Przyjmijmy zapis Def. 67 oraz Przykł. 11 (10). Wybierzmy dowolny punkt  $x \in \mathcal{O}_i \subset M$   $C^k$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^x$ , a wówczas odwzorowanie*

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x \kappa_i & : \mathbb{T}_x M \xrightarrow{\mathbb{T}\kappa_i} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{xn} \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{R}^{xn} \\ & : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \mapsto (\kappa_i(x), v) \mapsto v, \end{aligned}$$

będące złożeniem lokalnej mapy naturalnej na  $TM$  z kanonicznym rzutem na drugą składową iloczynu kartezjańskiego, jest bijekcją i jako takie w kanoniczny sposób indukuje na  $T_x M$  strukturę przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej,

$$T_x M \underset{\mathbb{R}\text{-lin.}}{\cong} \mathbb{R}^{x_n},$$

określaną mianem **przestrzeni stycznej do rozmaitości  $M$  w punkcie  $x$** . ■

Dowód: Strukturę  $\mathbb{R}$ -liniowa, o której mowa w tezie stwierdzenia, określa formuła

$$\lambda_1 \triangleright [(x, i, v_1)]_{\sim_{Dt..}} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, v_2)]_{\sim_{Dt..}} := [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_{Dt..}},$$

zapisana dla dowolnych  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Wobec  $\mathbb{R}$ -liniowego charakteru relacji z Def. 67, struktura ta jest dobrze określona. Istotnie, niechaj  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  i niech  $w_\alpha := Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , a wtedy

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \triangleright [(x, j, w_1)]_{\sim_{Dt..}} + \lambda_2 \triangleright [(x, j, w_2)]_{\sim_{Dt..}} = [(x, j, \lambda_1 \triangleright w_1 + \lambda_2 \triangleright w_2)]_{\sim_{Dt..}} \\ & = [(x, j, \lambda_1 \triangleright Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v_1) + \lambda_2 \triangleright Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v_2))]_{\sim_{Dt..}} \\ & = [(x, j, Dt_{ji}(\kappa_i(x))(\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2))]_{\sim} = [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_{Dt..}} \\ & \equiv \lambda_1 \triangleright [(x, j, w_1)]_{\sim_{Dt..}} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, v_2)]_{\sim_{Dt..}}. \end{aligned}$$

□

Powyższe pozwala nam wysłowić porządkujące

**STWIERDZENIE 94.** *Przyjmijmy zapis Stw. 93. Rozważmy relację równoważności na zbiorze ścieżek klasy  $C^1$  w  $C^k$ -rozmaitości  $(M, \mathcal{A})$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^x$  przechodzących przez jej punkt  $x$ ,*

$$\gamma : ]-\varepsilon_\gamma, \varepsilon_\gamma[ \longrightarrow M, \quad \varepsilon_\gamma > 0, \quad \gamma(0) = x,$$

określaną przez warunek (współ)styczności w  $x$ ,

$$\tilde{\gamma} \sim_x \gamma \iff \begin{cases} \tilde{\gamma}(0) = x = \gamma(0) \\ D(\kappa \circ \tilde{\gamma})(0) = D(\kappa \circ \gamma)(0) \end{cases},$$

wypowiedziany w terminach dowolnej mapy  $\kappa : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{x_n}$  określonej na otoczeniu otwartym  $\mathcal{O} \ni x$ . Oznaczmy  $v_\gamma := D(\kappa \circ \gamma)(0) \in \mathbb{R}^{x_n}$  dla skrótu, na zbiorze  $P_x$  klas abstrakcji ścieżek względem powyższej relacji określamy strukturę grupy przemiennej z działaniem

$$P_x \times P_x \longrightarrow P_x$$

$$\begin{aligned} & : ([\gamma_1]_{\sim_x}, [\gamma_2]_{\sim_x}) \longmapsto [ ]-\varepsilon, \varepsilon[ \exists t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2})) \in \mathcal{O} ]_{\sim_x} \\ & =: [\gamma_1]_{\sim_x} + [\gamma_2]_{\sim_x} \end{aligned}$$

i elementem neutralnym danym w postaci klasy  $[\gamma_x]_{\sim_x}$  ścieżki stałej

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow M : t \longmapsto x,$$

a następnie działanie ciała  $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \times P_x \longrightarrow P_x : (\lambda, [\gamma]_{\sim_x}) \longmapsto [ ]-\varepsilon, \varepsilon[ \exists t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \cdot \lambda \triangleright v_\gamma) \in \mathcal{O} ]_{\sim_x},$$

przy czym w obu przypadkach  $\varepsilon > 0$  jest dobrane tak, ażeby ścieżka będąca wymi-kiem działania leżała w całości w  $\mathcal{O}$ . Tak zdefiniowana przestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa jest izomorficzna z przestrzenią  $\mathbb{R}$ -liniową o nośniku  $T_x M$  opisaną w Stw. 93. ■

Dowód: Zaczniemy od spostrzeżenia, że relacja współstyczności nie zależy od wyboru lokalnej mapy – istotnie, jeśli  $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{x^n}$  jest lokalną mapą na otoczeniu otwartym  $\mathcal{U} \ni x$ , to dla ścieżek  $\gamma$  i  $\tilde{\gamma}$  z treści stwierdzenia zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} D(\psi \circ \tilde{\gamma})(0) &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \tilde{\gamma}(0)) \circ D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma(0)) \circ D(\varphi \circ \gamma)(0) = D(\psi \circ \gamma)(0). \end{aligned}$$

Bez trudu sprawdzamy też analogiczną własność definicji struktury  $\mathbb{R}$ -liniowej na zbiorze ścieżek, a to za sprawą tożsamości

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) \upharpoonright_{t=0} &= \psi^{-1} \circ \psi(x) = x \\ \equiv \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) \upharpoonright_{t=0} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \psi^{-1}(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) &= \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2 \\ = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)). \end{aligned}$$

Możemy następnie przystąpić do konstrukcji pożądanego izomorfizmu przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych. Oto więc klasie współstyczności ścieżek przez  $x \in \mathcal{O}_i$  przyporządkowujemy punkty we włóknie  $T_x M$  wedle formuły (w oczywisty sposób dobrze określonej)

$$(1.4.31) \quad V_x : [\gamma]_{\sim_x} \mapsto [(\gamma(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{Dt..}},$$

i odwrotnie – punktowi  $[(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}}$  w tymże włóknie przypisujemy klasę ścieżki (trajektorii) „ruchu jednostajnego prostoliniowego” wedle formuły

$$\Gamma_x : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \mapsto [-\varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \varphi_i^{-1}(\varphi_i(x) + t \triangleright v) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x},$$

przy czym liczba  $\varepsilon > 0$  w ostatnim wzorze jest dobrana tak, by warunek  $\kappa_i(x) + t \triangleright v \in \kappa_i(\mathcal{O}_i)$  był spełniony dla dowolnego  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  (jej istnienie jest konsekwencją otwartości  $\kappa_i(\mathcal{O}_i)$ ). Zauważmy, że oba przyporządkowania są dobrze określone, oto bowiem dla  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  dostajemy z jednej strony

$$\begin{aligned} [(\gamma(0), j, D(\kappa_j \circ \gamma)(0))]_{\sim} &= [(\gamma(0), j, Dt_{ji}(\kappa_i \circ \gamma)(0) \circ D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{Dt..}} \\ &\equiv [(\gamma(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{Dt..}}, \end{aligned}$$

a z drugiej, dla  $w := Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v)$ ,

$$\Gamma_x([(x, j, w)]_{\sim_{Dt..}}) = [\gamma_j^w : ]_{\sim_x} - \varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \kappa_j^{-1}(\kappa_j(x) + t \triangleright w) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x},$$

więc też

$$\gamma_j^w(0) = \kappa_j^{-1}(\kappa_j(x) + 0 \triangleright w) \equiv \kappa_j^{-1} \circ \kappa_j(x) = x = \gamma_i^v(0)$$

oraz

$$\begin{aligned} D(\kappa_i \circ \gamma_j^w)(0) &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (t_{ij}(\kappa_j(x) + t \triangleright w)) = Dt_{ij}(\kappa_j(x))(w) \\ &\equiv Dt_{ij}(\kappa_j(x)) \circ Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v) = \text{Did}_{\kappa_i(\mathcal{O}_i)}(\kappa_i(x))(v) \\ &= \text{id}_{\mathbb{T}_{\kappa_i(x)}\mathbb{R}^n}(v) = v = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\kappa_i(x) + t \triangleright v) = D(\kappa_i \circ \gamma_i^v)(0), \end{aligned}$$

co implikuje pożądaną równoważność

$$\gamma_j^w \sim \gamma_i^v.$$

Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowania te są wzajem odwrotne. Istotnie, jak pokazuje powyższy rachunek,

$$V_x \circ \Gamma_x([(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}}) = V_x([\gamma_i^v]_{\sim_x}) = [(\gamma_i^v(0), j, D(\kappa_j \circ \gamma_i^v)(0))]_{\sim_{Dt..}} = [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}},$$

a ponadto

$$\Gamma_x \circ V_x([\gamma]_{\sim_x}) = [\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)} : ] - \varepsilon, \varepsilon [\exists t \mapsto \kappa_i^{-1}(\kappa_i \circ \gamma(0) + t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x},$$

przy czym

$$\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}(0) = \kappa_i^{-1} \circ \kappa_i \circ \gamma(0) = \gamma(0)$$

oraz

$$D(\kappa_i \circ \gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)})(0) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\kappa_i \circ \gamma(0) + t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) = D(\kappa_i \circ \gamma)(0)$$

więc też

$$[\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}]_{\sim_x} = [\gamma]_{\sim_x},$$

zgodnie z wysłownym wcześniej stwierdzeniem.

Na zakończenie dowodzimy liniowości obu przyporządkowań. W tym celu w definicji kombinacji liniowej klas ścieżek współstycznych w  $x$  wybierzmy lokalną mapę  $\kappa \equiv \kappa_i$  i oznaczmy

$$\gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i}(t) := \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)),$$

a wtedy

$$\begin{aligned} V_x(\lambda_1 \triangleright [\gamma_1]_{\sim_x} + \lambda_2 \triangleright [\gamma_2]_{\sim_x}) &\equiv [(\gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i}(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i})(0))]_{\sim_x} \\ &= [(\kappa_i^{-1} \circ \kappa_i(x), i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_x} = [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_x} \\ &\equiv \lambda_1 \triangleright [(x, i, D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0))]_{\sim_x} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0))]_{\sim_x} \\ &\equiv \lambda_1 \triangleright V_x([\gamma_1]_{\sim_x}) + \lambda_2 \triangleright V_x([\gamma_2]_{\sim_x}). \end{aligned}$$

Jako odwrotność  $\mathbb{R}$ -liniowej bijekcji odwzorowanie  $\Gamma_x$  jest automatycznie  $\mathbb{R}$ -liniowe.  $\square$

Jak zapowiadaliśmy na wstępie, przyporządkowanie rozmaitości jej wiązki stycznej ma charakter naturalny, co precyzuje poniższe

**STWIERDZENIE 95.** *Odwzorowanie*

$$\mathbb{T} : \text{Obj } \mathbf{Man}^{(k+1)} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Man}^{(k)} : (M, \widehat{\mathcal{A}}) \longmapsto (\mathbb{T}M, \mathbb{T}\widehat{\mathcal{A}})$$

opisane w Def. 67 rozszerza się kanonicznie do funktora kowariantnego

$$\mathbb{T} : \mathbf{Man}^{(k+1)} \rightarrow \mathbf{Man}^{(k)},$$

zwanego **funktorem stycznym**. ■

Dowód: Mając dane  $C^{k+1}$ -rozmaitości  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$   $\alpha \in \{1, 2\}$  wymiaru  $\dim M_\alpha = n_\alpha$ , a na nich lokalne mapy  $\kappa_{i_\alpha}^\alpha : \mathcal{O}_{i_\alpha}^\alpha \rightarrow \mathcal{U}_{i_\alpha}^\alpha \subset \mathbb{R}^{n_\alpha}$ ,  $i_\alpha \in I_\alpha$  o dyskutowanej wcześniej własności  $f(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2$  (zapisanej dla pewnego odwzorowania  $\phi : I_1 \rightarrow I_2$ ) oraz stowarzyszone z nimi mapy naturalne  $\mathbb{T}\kappa_{i_\alpha}^\alpha : \pi_{\mathbb{T}M_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_{i_\alpha}^\alpha) \rightarrow \mathcal{U}_{i_\alpha}^\alpha \times \mathbb{R}^{n_\alpha}$ , zdefiniujemy dla dowolnego  $C^{k+1}$ -odwzorowania

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

o prezentacjach lokalnych  $f_{i_1} = \kappa_{\phi(i_1)}^2 \circ f \circ (\kappa_{i_1}^1)^{-1}$  lokalne odwzorowania

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{i_1} f & : \pi_{\mathbb{T}M_1}^{-1}(\mathcal{O}_{i_1}^1) \longrightarrow \pi_{\mathbb{T}M_2}^{-1}(\mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2) \\ & : [(x, i_1, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}} \longmapsto [(f(x), \phi(i_1), \text{D}f_{i_1}(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}} . \end{aligned}$$

Powyższa definicja nie zależy od wyboru reprezentanta klasy równoważności, o czym przekonuje krótki rachunek

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{j_1} f([(x, i_1, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}}) & \equiv \mathbb{T}_{j_1} f([(x, j_1, \text{D}t_{j_1 i_1}^1(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}}) \\ & = [(f(x), \phi(j_1), \text{D}f_{j_1}(\kappa_{j_1}^1(x)) \circ \text{D}t_{j_1 i_1}^1(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}} \\ & \equiv [(f(x), \phi(i_1), \text{D}t_{\phi(i_1)\phi(j_1)}^2(\kappa_{\phi(j_1)}^2 \circ f(x)) \circ \text{D}f_{j_1}(\kappa_{j_1}^1(x)) \circ \text{D}t_{j_1 i_1}^1(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}} \\ & = [(f(x), \phi(i_1), \text{D}(t_{\phi(i_1)\phi(j_1)}^2 \circ f_{j_1} \circ t_{j_1 i_1}^1)(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}} \\ & = [(f(x), \phi(i_1), \text{D}f_{i_1}(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}} \\ & \equiv \mathbb{T}_{i_1} f([(x, i_1, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}}) , \end{aligned}$$

przeprowadzony dla dowolnego  $x \in \mathcal{O}_{i_1 j_1}^1$ , a wykorzystujący jedynie definicje występujących weń klas abstrakcji oraz Stw. 86. Z tej to przyczyny mamy do czynienia z zadanym globalnie  $C^k$ -odwzorowaniem

$$\mathbb{T}f : \mathbb{T}M_1 \longrightarrow \mathbb{T}M_2$$

o lokalnej postaci

$$\mathbb{T}f \upharpoonright_{\pi_{\mathbb{T}M_1}^{-1}(\mathcal{O}_{i_1}^1)} = \mathbb{T}_{i_1} f ,$$

zwanym **odwzorowaniem stycznym** do  $f$ . Odwzorowanie to pokrywa  $f$  w sensie, jaki wyraża diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}M_1 & \xrightarrow{\mathbb{T}f} & \mathbb{T}M_2 \\ \pi_{\mathbb{T}M_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{T}M_2} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array} .$$

Teza Stw. 86 gwarantuje także przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccccc}
 & & TM_2 & & \\
 & \nearrow Tf_{12} & \uparrow & \searrow Tf_{23} & \\
 TM_1 & \xrightarrow{T(f_{23} \circ f_{12})} & TM_3 & & \\
 \downarrow \pi_{TM_1} & & \downarrow \pi_{TM_2} & & \downarrow \pi_{TM_3} \\
 & & M_2 & & \\
 \nearrow f_{12} & & \searrow f_{23} & & \\
 M_1 & \xrightarrow{f_{23} \circ f_{12}} & M_3 & & 
 \end{array}$$

dla dowolnej trójki  $C^{k+1}$ -rozmaitości  $(M_\beta, \mathcal{A}_\beta)$ ,  $\beta \in \{1, 2, 3\}$  i pary  $C^{k+1}$ -odwzorowań  $f_{\gamma\gamma+1} : M_\gamma \rightarrow M_{\gamma+1}$ ,  $\gamma \in \{1, 2\}$ . Mamy też oczywistą tożsamość

$$\text{Tid}_M = \text{id}_{TM},$$

wynikającą wprost z definicji (lokalnej postaci)  $Tf$ .  $\square$

UWAGA 19. Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że odwzorowanie styczne  $Tf$  respektuje wprowadzoną wcześniej strukturę  $\mathbb{R}$ -liniową na (włóknie)  $TM_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , gdyż obcięcia jego lokalnych prezentacji do punktu,

$$(1.4.32) \quad T_x f := Tf \upharpoonright_{T_x M_1}, \quad x \in M_1,$$

są  $\mathbb{R}$ -liniowe – w rzeczy samej, wprowadziwszy w  $T_x M_1 \cong \mathbb{R}^{\times n_1}$  oraz  $T_{f(x)} M_2 \cong \mathbb{R}^{\times n_2}$  odnośne bazy:

$$(1.4.33) \quad \tau_a^1(x) := [(x, i, e_a)]_{\sim_{\text{Dt.}}}, \quad a \in \overline{1, n_1}, \quad \tau_A^2(x) := [(x, i, e_A)]_{\sim_{\text{Dt.}}}, \quad A \in \overline{1, n_2},$$

określone przy użyciu baz standardowych  $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n_1}}$  w  $\mathbb{R}^{\times n_1}$  i  $\{e_A\}_{A \in \overline{1, n_2}}$  w  $\mathbb{R}^{\times n_2}$  (patrz: Przykł. 13 (5)), a względem pierwszej z nich – rozkład dowolnego wektora stycznego ze wzoru (1.4.30) w postaci

$$V(x) = [(x, i, v^a \triangleright e_a)]_{\sim_{\text{Dt.}}} \equiv v^a \triangleright \tau_a^1(x),$$

obliczamy

$$\begin{aligned}
 T_x f(V(x)) &\equiv Tf_i([(x, i, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}}) = [(f(x), \phi(i), Df_i(\kappa_i^1(x))(v))]_{\sim} \\
 &\equiv Df_i(\kappa_i^1(x))_a^A v^a \triangleright \tau_A^2(x),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$Df_i(\kappa_i^1(x))(e_a) =: Df_i(\kappa_i^1(x))_a^A \triangleright e_A.$$

$\bar{\wedge}$

Na zakończenie wstępnej dyskusji struktur stycznosciowych warto wysłowić jeszcze nader pomocne w dalszych naszych rozważaniach

STWIERDZENIE 96. *Przyjmijmy zapis Def. 67 oraz Przykł. 27 (1) i niechaj  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą rozmaitościami różniczkowalnymi klasy  $C^{k+1}$ . Istnieje kanoniczny dyfeomorfizm*

$$\mathbb{T}(M_1 \times M_2) \cong \mathbb{T}M_1 \times \mathbb{T}M_2.$$

■

*Dowód:* Niechaj  $\text{pr}_\alpha : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą rzutami kanonicznymi. Gładkość odwzorowania

$$\tau_{M_1, M_2} \equiv (\mathbb{T}\text{pr}_1, \mathbb{T}\text{pr}_2) : \mathbb{T}(M_1 \times M_2) \longrightarrow \mathbb{T}M_1 \times \mathbb{T}M_2$$

(jako jedyne gładkiego o własnościach  $\text{pr}_\alpha \circ \tau_{M_1, M_2} = \mathbb{T}\text{pr}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ ) wynika wprost z uniwersalnego charakteru produktu rozmaitości  $\mathbb{T}M_1 \times \mathbb{T}M_2$ . Wykorzystując odwzorowania jawnie gładkie

$$j_{m_2} : M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2 : m \longmapsto (m, m_2),$$

$$j_{m_1} : M_2 \longrightarrow M_1 \times M_2 : \tilde{m} \longmapsto (m_1, \tilde{m}),$$

określone dla dowolnych  $m_\alpha \in M_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , konstruujemy odwzorowanie (gładkie, co bez trudu sprawdzamy w dowolnej mapie lokalnej)

$$j_\times : \mathbb{T}M_1 \times \mathbb{T}M_2 \longrightarrow \mathbb{T}(M_1 \times M_2) : (v_1, v_2) \longmapsto \mathbb{T}j_{\pi_{\mathbb{T}M_2}(v_2)}(v_1) + \mathbb{T}j_{\pi_{\mathbb{T}M_2}(v_1)}(v_2).$$

Odwzorowania te są w oczywisty sposób wzajem odwrotne. □

Zanim przejdziemy do zastosowań funktora stycznego w opisie odwzorowań różniczkowalnych, poczynimy dygresję skromną, a przy tym o tyle naturalną, że sprowokowaną wcześniejszymi uwagami o strukturze  $\mathbb{R}$ -liniowej na włóknie wiązki stycznej, które rodzą pytanie o strukturę dualną oraz wielo-dualną, czyli o przestrzeń form wieloliniowych, w szczególności zaś – form alternujących. Wnioski ze zwięzłej dyskusji tego zagadnienia znajdują zastosowanie w rozdziałach późniejszych. Przedstawiony poniżej schemat indukcji struktury różniczkowej jest zdeterminowany przez konstrukcję wiązki stycznej i jako taki stanowi kolejny przykład geometryzacji obiektu algebraicznego. Mamy zatem

DEFINICJA 68. Przyjmijmy zapis Def. 16 i 67. **Wiązka kostyczna**  $C^{k+1}$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^\times$ , o atlasie  $\widehat{\mathcal{A}} = \{\kappa_i\}_{i \in I}$  stowarzyszonym z pokryciem otwartym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , to  $C^k$ -rozmaitość  $(\mathbb{T}^*M, \mathbb{T}^*\widehat{\mathcal{A}})$  utworzona, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$\mathbb{T}^*M := \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{\times n})^* \right) / \sim_{D_{t^{-1}}}$$

relacji

$$(x, i, \Phi) \sim (y, j, \Psi) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ \Psi = \Phi \circ Dt_{ij}(\kappa_j(x)) \equiv \Phi \circ D(t_{ji}^{-1})(\kappa_j(x)) \end{cases},$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{\mathbb{T}^*M} : \mathbb{T}^*M \longrightarrow M : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{D_{t^{-1}}}} \longmapsto x,$$

zwane **rzutem kanonicznym (na bazę wiązki)**, którego poziomice

$$\mathbb{T}_x^*M := \pi_{\mathbb{T}^*M}^{-1}(\{x\})$$

noszą miano **włókien**;

- topologia zbioru  $T^*M$  jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektywnego rzutu

$$\pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{\times n})^* \longrightarrow \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{\times n})^* \right) / \sim_{Dt_{\cdot}^{-1}} : (x, i, \Phi) \longmapsto [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt_{\cdot}^{-1}}}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni  $\mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{\times n})^* \cong \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n}$ , o injekcjach kanonicznych

$$J_i : \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{\times n})^* \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times (\mathbb{R}^{\times n})^* : (x, \Phi) \longmapsto (x, i, \Phi), \quad i \in I,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{S}(T^*M) := \left\{ \mathcal{O} \subset T^*M \mid \forall_{i \in I} : J_i^{-1}(\pi_{\sim}^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{\times n})^*) \right\};$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej  $T^*M$  określają (jawnie homeomorficzne) odwzorowania

$$T^* \kappa_i : \pi_{T^*M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \times (\mathbb{R}^n)^* : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt_{\cdot}^{-1}}} \mapsto (\kappa_i(x), \Phi),$$

zwane **mapami naturalnymi**, które definiują transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} T^* t_{ji} := T^* \kappa_j \circ (T^* \kappa_i)^{-1} & : \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times (\mathbb{R}^n)^* \twoheadrightarrow \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times (\mathbb{R}^n)^* \\ & : (\kappa_i(x), \Phi) \mapsto (\kappa_j(x), \Phi \circ Dt_{ij}(\kappa_j(x))), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób należące do klasy  $C^k$ .

Klasę abstrakcji

$$\phi(x) := [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt_{\cdot}^{-1}}} \in T_x^*M$$

określamy mianem **kowektora** zaczepionego w punkcie  $x \in M$ .

Analogicznie definiujemy – dla dowolnego  $p \in \mathbb{1}$ ,  $\dim M$  – **wiązkę  $p$ -form różniczkowych** na  $(M, \mathcal{S})$   $C^k$ -rozmaitość  $(\wedge^p T^*M, \wedge^p T^* \mathcal{S})$  utworzoną, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$\wedge^p T^*M := \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \right) / \sim_{Dt_{\cdot}^{-p}}$$

relacji

$$(x, i, \Phi) \sim (y, j, \Psi) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ \Psi = \Phi \circ \times_{i=1}^p Dt_{ij}(\kappa_j(x)) \end{cases},$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{\wedge^p T^*M} : \wedge^p T^*M \longrightarrow M : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt_{\cdot}^{-p}}} \longmapsto x,$$

zwane **rzutem kanonicznym (na bazę wiązki)**, którego poziomice

$$\wedge^p T_x^*M := \pi_{\wedge^p T^*M}^{-1}(\{x\})$$

noszą miano **włókien**;



- topologia zbioru  $\wedge^p \mathbb{T}^* M$  jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektywnego rzutu

$$\begin{aligned} \pi_{\sim} &: \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \longrightarrow \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \right) / \sim_{\text{Dt}^{\sim p}} \\ &: (x, i, \Phi) \longmapsto [(x, i, \Phi)]_{\sim_{\text{Dt}^{\sim 1}}} \end{aligned}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni  $\mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \cong \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$ , o injekcjach kanonicznych

$$j_i : \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) : (x, \Phi) \longmapsto (x, i, \Phi), \quad i \in I,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{S}(\wedge^p \mathbb{T}^* M) := \left\{ \mathcal{O} \subset \wedge^p \mathbb{T}^* M \mid \forall i \in I : j_i^{-1}(\pi_{\sim}^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n})) \right\};$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej  $\wedge^p \mathbb{T}^* M$  określają (jawnie homeomorficzne) odwzorowania

$$\wedge^p \mathbb{T}^* \kappa_i : \pi_{\wedge^p \mathbb{T}^* M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{\text{Dt}^{\sim 1}}} \mapsto (\kappa_i(x), \Phi),$$

zwane **mapami naturalnymi**, które definiują transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \wedge^p \mathbb{T}^* t_{ji} := \wedge^p \mathbb{T}^* \kappa_j \circ (\wedge^p \mathbb{T}^* \kappa_i)^{-1} &: \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \twoheadrightarrow \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{\times n}) \\ &: (\kappa_i(x), \Phi) \mapsto (\kappa_j(x), \Phi \circ \times_{i=1}^p \text{Dt}_{ij}(\kappa_j(x))), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób należące do klasy  $C^k$ .

Klasę abstrakcji

$$\phi(x) := [(x, i, \Phi)]_{\sim_{\text{Dt}^{\sim 1}}} \in \wedge^p \mathbb{T}_x^* M$$

określamy mianem  **$p$ -formy** zaczepionej w punkcie  $x \in M$ .

▲

UWAGA 20. Struktura różniczkowa wiązki kostycznej (a więc także wiązek  $p$ -form różniczkowych) jest w pełni zdeterminowana przez strukturę różniczkową wiązki stycznej i wymóg dwoistości. Oto bowiem żądanie, iżby ewaluacja kowektora na wektorze stycznym wykorzystująca kanoniczną dwoistość  $(\mathbb{R}^{\times n})^* \times \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\langle \phi(x), V(x) \rangle := \langle \text{pr}_2 \circ \mathbb{T}^* \kappa_i(\phi(x)), \text{pr}_2 \circ \mathbb{T} \kappa_i(V(x)) \rangle_{\mathbb{R}^{\times n}},$$

była dobrze określona, tj. niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych w  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ , implikuje wypisaną wyżej postać mapy naturalnej na  $\pi_{\mathbb{T}^* M}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \text{pr}_2 \circ \mathbb{T}^* \kappa_j(\phi(x)), \text{pr}_2 \circ \mathbb{T} \kappa_j(V(x)) \rangle_{\mathbb{R}^{\times n}} &= \langle \Phi \circ \text{D}(t_{ji}^{-1})(\kappa_j(x)), \text{Dt}_{ji}(\kappa_i(x))(v) \rangle_{\mathbb{R}^{\times n}} \\ &\equiv \Phi \circ \text{D}(t_{ji}^{-1})(\kappa_j(x)) \circ \text{Dt}_{ji}(\kappa_i(x))(v) \\ &= \Phi(v) \equiv \langle \Phi, v \rangle_{\mathbb{R}^{\times n}} \\ &\equiv \langle \text{pr}_2 \circ \mathbb{T}^* \kappa_i(\phi(x)), \text{pr}_2 \circ \mathbb{T} \kappa_i(V(x)) \rangle_{\mathbb{R}^{\times n}}. \end{aligned}$$

▬

I wreszcie na koniec końców wprowadzenia do geometrii stycznej słowo o globalizacji (*Απαγε Σατανας?!*) pojęć z natury swej lokalnych, jakimi są wektory i kowektory zaczepione w punkcie rozmaitości. Rzecz idzie o nadanie sensu postulatowi gładkości lokalnego, czy wręcz globalnego rozkładu takowych obiektów w pewnym rozciągniętym nośniku zawartym w  $M$ , czyli w istocie – o geometryzację pojęcia wektora i formy liniowej zgodną z zaproponowanym powyżej schematem geometryzacji pojęcia przestrzeni wektorowej i dualnej do niej. Ogólną metodę postępowania w przypadku przestrzeni topologicznych lokalnie modelowanych na (szczególnych) iloczynach kartezjańskich rozmaitości różniczkowalnych (zw. wiązkami włóknistymi) poznamy w Rozdz. 4.1, tymczasem jednak okazuje się, że aby Słowu temu odpowiednią dać Rzec w obecnym kontekście, wystarczy przejść – w odwołaniu do konkretnej interpretacji geometrycznej rozpatrywanych tu struktur – od dotychczasowych definicji wektora stycznego (algebraicznej z Def. 67 i 68 oraz geometrycznej ze Stw. 94) do jego definicji analitycznej, niezwykle wygodnej z punktu widzenia późniejszych zastosowań pojęcia pierwotnego. Zaczniemy od

DEFINICJA 69. Przyjmijmy oznaczenia Def. 65. Niechaj  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  będzie  $C^{k \geq 1}$ -rozmaitością. **Różniczkowanie w punkcie**  $x \in M$  to odwzorowanie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$V : C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

spełniające **warunek Leibniza**

$$\forall_{f, g \in C^1(M, \mathbb{R})} : V(f \cdot g) = V(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot V(g).$$

Zbiór różniczkowań w  $x$  wyposażony w punktową strukturę  $\mathbb{R}$ -liniową określamy mianem **przestrzeni różniczkowań w  $x$**  i oznaczamy jako

$$\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}).$$

▲

Przerzucenie pomostu logicznego pomiędzy wprowadzonym tu nowym pojęciem a wcześniejszymi definicjami wektora stycznego, otwierające drogę do szeregu istotnych zastosowań, wymaga wzbogacenia naszego arsenału narzędzi różniczkowo-geometrycznych o prostą, acz przydatną konstrukcję funkcjonalną stanowiącą podstawę powszechną w rozważaniach strukturalnych redukcji zagadnień globalnych do postaci lokalnej, pozwalającej na wykorzystanie lokalnego opisu współrzędniowego. Zaczniemy więc od

DEFINICJA 70. Przyjmijmy oznaczenia Def. 65. Niechaj  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  będzie  $C^k$ -rozmaitością i niech  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie dowolnym pokryciem otwartym  $M$ . **Rozkład jedności klasy  $C^k$  podporządkowany  $\mathcal{O}$**  to rodzina  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  odwzorowań  $\lambda_i \in C^k(M, [0, 1])$  spełniających następujące warunki:

- $\forall_{i \in I} : \text{supp } \lambda_i \subset \mathcal{O}_i$ , przy czym – przypomnijmy – dla dowolnej funkcji ciągłej  $f \in C(M, \mathbb{R})$  zbiór  $\text{supp } f$ , zwany **nośnikiem**  $f$ , jest określony jako domknięcie przeciwobrazu  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tj.

$$\text{supp } f := \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})};$$

- rodzina  $\{\text{supp } \lambda_i\}_{i \in I}$  jest **lokalnie skończona**, tj. każdy punkt  $M$  ma otoczenie otwarte, na którym prawie wszystkie<sup>9</sup> funkcje  $\lambda_i$  przybierają wartość 0;

<sup>9</sup>Tj. wszystkie prócz skończonej liczby.

- $\forall_{x \in M} : \sum_{i \in I} \lambda_i(x) = 1$ , przy czym wypisana tu suma ma sens (jest skończona) wobec poprzedniego założenia.

Ostatni z warunków oznacza, że rodzina  $\{\text{Int supp } \lambda_i\}_{i \in I}$  stanowi lokalnie skończone podpokrycie  $\mathcal{O}$ .

▲

Powyższa definicja byłaby bezużyteczna, gdyby nie

**TWIERDZENIE 1.4.18** (O istnieniu rozkładu jedności). *Przyjmijmy oznaczenia Def. 65. Z dowolnym pokryciem otwartym  $C^k$ -rozmaitości parazwartej można stowarzyszyć rozkład jedności klasy  $C^k$  podporządkowany temu pokryciu.*

■

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że w świetle Def. 59 dowolne otwarte pokrycie  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  rozmaitości  $(M, \mathcal{A})$  ma lokalnie skończone (otwarte) rozdrobnienie, możemy zatem zacząć od skonstruowania rozkładu jedności dla takiego lokalnie skończonego rozdrobnienia  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$  pokrycia  $\mathcal{O}$ . Pokażemy najpierw, że pokrycie  $\mathcal{U}$  można zastąpić jego lokalnie skończonym (otwartym) rozdrobnieniem  $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$  o własności

$$\forall_{i \in I} : \overline{\mathcal{V}_i} \subset \mathcal{U}_i.$$

W tym celu każdemu punktowi  $x \in M$  przyporządkujemy otwarte otoczenie  $\mathcal{W}_x \ni x$  spełniające warunek

$$\exists_{i \in I} : \mathcal{U}_i \supset \overline{\mathcal{W}_x}.$$

Rodzina  $\{\mathcal{W}_x\}_{x \in M}$  jest otwartym rozdrobnieniem  $\mathcal{U}$ , dla którego z racji parazwartości  $M$  możemy wybrać lokalnie skończone otwarte rozdrobnienie  $\mathcal{W}' \equiv \{\mathcal{W}'_j\}_{j \in J}$ . Dla dowolnego  $i \in I$  definiujemy następnie podzbiór  $J_i := \{k \in J \mid \overline{\mathcal{W}'_k} \subset \mathcal{U}_i\}$  zbioru indeksów pokrycia oraz zbiór otwarty

$$\mathcal{V}_i := \bigcup_{j \in J_i} \mathcal{W}'_j.$$

Załóżmy, że  $\overline{\mathcal{V}_i} \setminus \mathcal{U}_i \ni x$ , a wtedy wobec lokalnej skończoności  $\mathcal{W}'$  istnieje otwarte otoczenie  $\mathcal{U}_x \ni x$  o własności

$$|\{k \in J_i \mid \mathcal{U}_x \cap \mathcal{W}'_k \neq \emptyset\}| < \infty.$$

Wybrawszy tak określone otoczenie, oznaczmy

$$K_{\mathcal{U}_x; i} := \{k \in J_i \mid \mathcal{U}_x \cap \mathcal{W}'_k \neq \emptyset\},$$

a następnie rozważmy zbiór otwarty

$$\mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i} := \mathcal{U}_x \setminus \bigcup_{k \in K_{\mathcal{U}_x; i}} \overline{\mathcal{W}'_k},$$

który wprost z definicji spełnia warunek

$$\mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i} \cap \mathcal{V}_i = \emptyset.$$

Skoro też  $x \notin \mathcal{U}_i$ , to wobec inkluzji  $\overline{\mathcal{W}'_k} \subset \mathcal{U}_i$  słusznej dla dowolnego  $k \in K_{\mathcal{U}_x; i} \subset J_i$  stwierdzamy, że  $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i}$ . Wtedy jednak zbiór  $M \setminus \mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i}$  nie zawiera  $x$ , a zawiera  $\mathcal{V}_i$ , zatem – jako zbiór domknięty – zawiera także  $\overline{\mathcal{V}_i}$ . Wnioskujemy przeto, że  $x \notin \overline{\mathcal{V}_i}$ ,

co jest sprzeczne z początkowym założeniem. Stąd nieodzownie  $\overline{\mathcal{V}_i} \setminus \mathcal{U}_i = \emptyset$ , czyli – innymi słowy –

$$\overline{\mathcal{V}_i} \subset \mathcal{U}_i,$$

co jest postulowaną relacją.

W następnej kolejności dowodzimy, że dla dowolnego podzbioru domkniętego  $\mathcal{C} \subset M$  i dowolnego otwartego otoczenia  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$  istnieje funkcja  $f \in C^k(M, \mathbb{R}_{\geq 0})$  spełniająca warunki

$$(1.4.34) \quad f \upharpoonright_{M \setminus \mathcal{U}_{\mathcal{C}}} = 0 \quad \wedge \quad \forall_{x \in \mathcal{C}} : f(x) > 0.$$

W tym celu przekonujemy się najpierw, że dla dowolnego  $x \in M$  i dowolnego jego otwartego otoczenia  $\mathcal{U}_x \ni x$  istnieje funkcja  $f_{\mathcal{U}_x} \in C^k(M, [0, 1])$  o własnościach

$$f_{\mathcal{U}_x}(x) = 1 \quad \wedge \quad f_{\mathcal{U}_x} \upharpoonright_{M \setminus \mathcal{U}_x} = 0.$$

Istotnie, niechaj  $\kappa : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{x_n}$ ,  $n = \dim M$  będzie dowolną mapą atlasu  $\widehat{\mathcal{A}}$ , której dziedzina  $\mathcal{U}$  zawiera  $x$ , przy czym założymy (dokonując – jeśli zachodzi taka potrzeba – stosownej liniowej transformacji lokalnych współrzędnych, a mianowicie: translacji i jednorodnego przeskalowania), że  $\kappa(x) = 0$  oraz  $\kappa(\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}) \supset B^n(0; 2)$ . Wówczas przykładem odwzorowania, o którym mowa powyżej, jest superpozycja  $\lambda \circ \kappa =: f_{\mathcal{U}_x}$  mapy  $\kappa$  z **funkcją typu Uluru** określoną, jak następuje:

$$\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \gamma(\|x\|),$$

gdzie

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \frac{\int_1^2 dt \beta(t)}{\int_1^2 ds \beta(s)}, \quad \beta(t) := \alpha(t-1) \cdot \alpha(2-t)$$

jest zdefiniowane przy użyciu

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0 \end{cases}.$$

Wyberzmy teraz w każdym punkcie  $x \in \mathcal{C}$  takie jego otoczenie  $\mathcal{U}_x$ , które jest zawarte w zadanym zbiorze  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ , po czym z każdego  $\mathcal{U}_x$  wydzielmy podotoczenie  $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$ , na którym znaleziona wcześniej funkcja  $f_{\mathcal{U}_x}$  spełnia nierówność

$$\forall_{y \in \mathcal{V}_x} : f_{\mathcal{U}_x}(y) > 0,$$

co jest możliwe, gdyż  $x$  należy do otwartego zbioru  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$  wraz z pewnym swoim otwartym otoczeniem, a wobec swej ciągłości funkcja  $f_{\mathcal{U}_x}$  przyjmuje w otoczeniu  $x$  wartości bliskie 1. W konsekwencji domkniętości  $\mathcal{C}$  z jego otwartego pokrycia  $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in \mathcal{C}}$  możemy – na mocy Stw. 67 – wybrać lokalnie skończone podpokrycie  $\{\mathcal{V}_y\}_{y \in A \subset \mathcal{C}}$ ,

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{y \in A} \mathcal{V}_y,$$

a następnie zdefiniować funkcję

$$f := \sum_{y \in A} f_{\mathcal{U}_y},$$

która w każdym punkcie  $M$  jest dobrze określona, gdyż suma jest lokalnie skończona, a nadto spełnia warunki (1.4.34).

Z połączenia dotychczasowych obserwacji wyciągamy następujący wniosek: Stosując dwukrotnie procedurę rozdrabniania lokalnie skończonego pokrycia otwartego

rozmaitości  $M$ , możemy uzyskać parę lokalnie skończonych otwartych rozdrobnień  $\mathcal{V} \equiv \{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$ ,  $\mathcal{W} \equiv \{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$  pokrycia  $\mathcal{U}$  spełniających relacje

$$\forall i \in I : \mathcal{W}_i \subset \overline{\mathcal{W}_i} \subset \mathcal{V}_i \subset \overline{\mathcal{V}_i} \subset \mathcal{U}_i,$$

a następnie dla każdego  $i \in I$  wskazać funkcję  $g_i \in C^k(M, \mathbb{R}_{\geq 0})$  o własnościach

$$g_i \upharpoonright_{M \setminus \mathcal{V}_i} = 0 \quad \wedge \quad \forall_{x \in \overline{\mathcal{W}_i}} : g_i(x) > 0.$$

Jako że  $\overline{\mathcal{W}_i} \subset \text{supp } g_i \subset \mathcal{U}_i$ , a  $\mathcal{U}$  jest lokalnie skończone, suma  $g := \sum_{i \in I} g_i$  jest wszędzie dobrze określona (skończona) jako funkcja klasy  $C^k$ , a ponieważ  $\mathcal{W}$  jest pokryciem  $M$ , przeto

$$\forall_{x \in M} : g(x) > 0.$$

Możemy zatem zdefiniować funkcje

$$\lambda_i := \frac{g_i}{g} \in C^k(M, [0, 1]),$$

które spełniają wszystkie warunki z Def. 70.

Na koniec wykorzystamy  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  do skonstruowania rozkładu jedności dla wyjściowego pokrycia  $\mathcal{O}$ . W tym celu dla każdego  $i \in I$  ustalamy – przywoławszy warunek (1.4.1) – indeks  $\phi(i) \in A$  o własności  $\mathcal{O}_{\phi(i)} \supset \mathcal{U}_i$ , co określa odwzorowanie  $\phi : I \rightarrow A : i \mapsto \phi(i)$ . Następnie definiujemy funkcję

$$\rho_\alpha := \sum_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \lambda_i \in C^k(M; \mathbb{R}),$$

przy czym przyjmujemy konwencję, w której  $\phi^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$  oznacza  $\rho_\alpha = 0$ . Wprost z konstrukcji

$$\text{supp } \rho_\alpha \subset \bigcup_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \text{supp } \lambda_i \subset \bigcup_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \mathcal{U}_i \subset \bigcup_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \mathcal{O}_{\phi(i)} = \mathcal{O}_\alpha$$

oraz

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_\alpha} : \rho_\alpha(x) \in [0, 1],$$

a nadto

$$\forall_{x \in M} : \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(x) \equiv \sum_{\alpha \in A} \sum_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \lambda_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i(x) = 1.$$

Wreszcie też stwierdzamy, że rodzina  $\{\text{supp } \rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  jest lokalnie skończona. Istotnie, założmy, przeciwnie, że  $x \in M$  jest punktem, na którego dowolnym otoczeniu nieskończenie wiele funkcji  $\rho_\alpha$  przyjmuje wartość większą od 0. Każdej z nich odpowiada przynajmniej jedna funkcja  $\lambda_i$ ,  $i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})$ , która nie znika w  $x$ , otrzymujemy zatem nieskończenie wiele funkcji  $\lambda_i$  o własności  $\lambda_i(x) > 0$ , co przeczy lokalnej skończoności rodziny  $\{\text{supp } \lambda_i\}_{i \in I}$ . Konstatujemy więc na koniec, że  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  jest pożądanym rozkładem jedności stowarzyszonym z (dowolnym) pokryciem otwartym  $\mathcal{O}$ .  $\square$

Odwracając logikę powyższego dowodu, bez trudu otrzymujemy przydatne

**STWIERDZENIE 97.** *Przyjmijmy zapis Def. 70. Niechaj  $\mathcal{C} \subset M$  będzie zbiorem domkniętym. Dla dowolnego otwartego otoczenia  $\mathcal{O} \supset \mathcal{C}$  istnieje funkcja  $f \in C^k(M; \mathbb{R})$  o własnościach*

$$\forall_{x \in \mathcal{C}} : f(x) = 1 \quad \wedge \quad \text{supp } f \subset \mathcal{O}.$$

Co więcej, jeśli dany jest dowolny punkt  $p \in M \setminus \mathcal{C}$ , to otoczenie  $\mathcal{O}$  oraz funkcję  $f$  można dobrać tak, ażeby był spełniony dodatkowy warunek

$$f(p) = 0.$$

■

*Dowód:* Rozważmy rozkład jedności  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  klasy  $C^k$  stowarzyszony z (lokalnie skończonym) pokryciem otwartym  $\{\mathcal{O}_1 := \mathcal{O}, \mathcal{O}_2 := M \setminus \mathcal{C}\}$  rozmaitości  $M$ , którego istnienie gwarantuje Tw. 1.4.18. Kładąc  $f := \lambda_1$ , otrzymujemy  $\text{supp } f \equiv \text{supp } \lambda_1 \subset \mathcal{O}_1 \equiv \mathcal{O}$ , a nadto – wobec oczywistej tożsamości  $\lambda_2 \upharpoonright_{\mathcal{C}} = 0$  –

$$f \upharpoonright_{\mathcal{C}} \equiv \lambda_1 \upharpoonright_{\mathcal{C}} = \left( \sum_{i \in \{1,2\}} \lambda_i \right) \upharpoonright_{\mathcal{C}} = 1 \upharpoonright_{\mathcal{C}} = 1.$$

Jako  $\mathcal{O}$  można wybrać sumę mnogościową otwartych otoczeń  $\mathcal{O}_x$  punktów  $x \in \mathcal{C}$  niezawierających  $p$  (ich istnienie zapewnia hausdorffowskość  $M$ ),

$$\mathcal{O} := \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{O}_x, \quad \forall x \in \mathcal{C} : \mathcal{O}_x \not\ni p,$$

a wtedy

$$\text{supp } f \equiv \text{supp } \lambda_1 \subset \mathcal{O}_1 \equiv \mathcal{O} \subset M \setminus \{p\}.$$

□

Prostej ilustracji przydatności rozkładu jedności, z której przyjdzie nam skorzystać już niebawem, dostarcza

**STWIERDZENIE 98** (O rozszerzaniu funkcji). *Przyjmijmy oznaczenia Def. 70. Niechaj  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  będzie rozkładem jedności klasy  $C^k$  podporządkowanym pokryciu otwartemu  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$   $C^k$ -rozmaitości  $(M, \mathcal{A})$  i niech  $\{f_i\}_{i \in I}$  będzie rodziną funkcji  $f_i \in C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})$ . Wówczas funkcja*

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{i \in \{j \in I \mid \mathcal{O}_j \ni x\}} \lambda_i(x) \cdot f_i(x)$$

jest klasy  $C^k$ . W szczególności dla dowolnego podzbioru  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M)$  oraz dowolnych: domkniętego  $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$  oraz otwartego  $\mathcal{U} \supset \mathcal{C}$  każda funkcja  $f \in C^k(\mathcal{O}; \mathbb{R})$  ma rozszerzenie  $\tilde{f} \in C^k(M; \mathbb{R})$  o własnościach

$$\tilde{f} \upharpoonright_{\mathcal{C}} = f \upharpoonright_{\mathcal{C}} \quad \wedge \quad \text{supp } \tilde{f} \subset \mathcal{U}.$$

■

*Dowód:* Celem wykazania pierwszej części tezy wystarczy zauważyć, że dowolną funkcję  $\lambda_i \cdot f_i$  możemy rozszerzyć przez 0 na  $M \setminus \text{supp } \lambda_i$ , otrzymując tym sposobem funkcję klasy  $C^k$ , a następnie – wysumować wszystkie takie rozszerzenia, przy czym tak otrzymana suma  $f$  odwzorowań klasy  $C^k$  jest lokalnie skończona, więc dobrze określona.

Dla ustalonych  $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$  oraz  $\mathcal{U} \supset \mathcal{C}$  rozważmy indeksowaną przez  $\mathcal{C} \ni x$  rodzinę otoczeń otwartych  $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{U}$  oraz odnośnych funkcji (dowolnych)  $f_x \in C^k(\mathcal{O}_x; \mathbb{R})$  o własności

$$f_x \upharpoonright_{\mathcal{O}_x \cap \mathcal{C}} = f \upharpoonright_{\mathcal{O}_x \cap \mathcal{C}}.$$

Rodzina  $\{\mathcal{O}_x\}_{x \in \mathcal{C}} \cup \{\mathcal{O}_* := M \setminus \mathcal{C}\}$  jest pokryciem otwartym  $M$ , z którym w świetle Tw. 1.4.18 możemy stowarzyszyć rozkład jedności  $\{\lambda_x\}_{x \in \mathcal{C}} \cup \{\lambda_*\}$  o własności  $\text{supp } \lambda_i \subset \mathcal{O}_i$ ,  $i \in \mathcal{C} \cup \{*\}$ . Każdą z funkcji  $f_x \cdot \lambda_x \upharpoonright_{\mathcal{O}_x} \in C^k(\mathcal{O}_x; \mathbb{R})$ ,  $x \in \mathcal{C}$  możemy

następnie rozszerzyć przez 0 do funkcji tej samej klasy  $C^k$ , kładąc jednocześnie  $f_* := 0$ , co pozwala określić – w odwołaniu do udowodnionej już pierwszej części tezy – zdefiniować funkcję

$$\begin{aligned} \tilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \sum_{z \in \{x \in \mathcal{C} \mid \mathcal{O}_x \ni y\}} \lambda_z(y) \cdot f_z(y) &\equiv \sum_{x \in \mathcal{C}} \lambda_x(y) \cdot f_x(y) \\ &\equiv \sum_{i \in \mathcal{C} \cup \{*\}} \lambda_i(y) \cdot f_i(y), \end{aligned}$$

przy czym pierwsza z wypisanych równości wynika wprost z implikacji

$$y \notin \mathcal{O}_x \supset \text{supp } \lambda_x \quad \Longrightarrow \quad \lambda_x(y) = 0.$$

Biorąc  $y \in \mathcal{C}$ , wprost z konstrukcji funkcji  $f_x$  dostajemy  $f_x(y) = f(y)$  dla wszystkich  $x$  o własności  $\mathcal{O}_x \ni y$ , a nadto  $\lambda_*(y) = 0$  (wszak  $y \in M \setminus \mathcal{O}_*$ ), co pozwala zapisać

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) &= \sum_{z \in \{x \in \mathcal{C} \mid \mathcal{O}_x \ni y\}} \lambda_z(y) \cdot f(y) \equiv \sum_{x \in \mathcal{C}} \lambda_x(y) \cdot f(y) = f(y) \cdot \sum_{x \in \mathcal{C}} \lambda_x(y) \\ &\equiv f(y) \cdot \sum_{i \in \mathcal{C} \cup \{*\}} \lambda_i(y) = f(y), \end{aligned}$$

czyli w istocie

$$\tilde{f} \upharpoonright_{\mathcal{C}} = f \upharpoonright_{\mathcal{C}}.$$

Zarazem jest oczywiste, że funkcja  $\tilde{f}$  jest tożsamościowo równa zeru na dopełnieniu sumy mnogościowej nośników funkcji  $\lambda_x$ ,  $x \in \mathcal{C}$ , czyli (tym bardziej) na dopełnieniu sumy mnogościowej zbiorów  $\mathcal{O}_x$ , te jednak zawierają się w  $\mathcal{U}$ , przeto niechybnie

$$\text{supp } \tilde{f} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{O}_x \subset \mathcal{U}.$$

□

Jako proste, acz pożyteczne corollarium do Stw. 97 i 98 dostajemy

**STWIERDZENIE 99.** *Przyjmijmy zapis Def. 69. Ilekroć istnieje otoczenie otwarte  $\mathcal{O}_x \ni x$ , na którym dwie funkcje  $f_1, f_2 \in C^1(M; \mathbb{R})$  pokrywają się,*

$$\forall y \in \mathcal{O}_x : f_1(y) = f_2(y),$$

*zachodzi*

$$\forall V \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) : V(f_1) = V(f_2).$$

■

*Dowód:* Wobec addytywności różniczkowań wystarczy sprawdzić słuszność implikacji

$$\forall y \in \mathcal{O}_x : f(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall V \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) : V(f) = 0.$$

Odniosłszy tezę Stw. 97 do zbioru domkniętego  $\mathcal{C} := \text{supp } f$  oraz punktu  $p := x \in M \setminus \text{supp } f$ , stwierdzamy istnienie otoczenia otwartego  $\mathcal{O} \supset \text{supp } f$  oraz funkcji  $\chi \in C^1(M; \mathbb{R})$  o własnościach

$$\forall y \in \text{supp } f : \chi(y) = 1 \quad \wedge \quad \text{supp } \chi \subset \mathcal{O} \quad \wedge \quad \chi(x) = 0,$$

a zatem także

$$f \equiv f \cdot \chi.$$

Postulowana tożsamość staje się teraz prostą konsekwencją warunku Leibniza,

$$V(f) \equiv V(f \cdot \chi) = V(f) \cdot \chi(x) + f(x) \cdot V(\chi) = V(f) \cdot 0 + 0 \cdot V(\chi) = 0.$$

□

Mamy także oczekiwane

**STWIERDZENIE 100.** *Przyjmijmy zapis Def. 69. Dowolna funkcja  $f \in C^1(\mathcal{O}; \mathbb{R})$  stała na pewnym otoczeniu otwartym  $x \in M$  spełnia tożsamość*

$$\forall V \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) : V(f) = 0.$$

■

*Dowód:* Warunek Leibniza daje nam tożsamość (1 jest tutaj funkcją stałą przyjmującą wartość 1 na otoczeniu  $x$ )

$$V(1) \equiv V(1 \cdot 1) = V(1) \cdot 1 + 1 \cdot V(1) = 2V(1) \quad \Rightarrow \quad V(1) = 0,$$

która w połączeniu z  $\mathbb{R}$ -liniowością  $V$  daje – dla dowolnej (funkcji) stałej  $c \in \mathbb{R}$  – równość

$$V(c) \equiv V(c \triangleright 1) = c \cdot V(1) = 0.$$

□

Możemy już teraz bez lęku w sercu powrócić do zasadniczego wątku naszych rozważań, jakim jest relacja między różniczkowaniami w punkcie rozmaitości i zaczepionymi w tymże punkcie wektorami do niej stycznymi. Relację tę określa

**TWIERDZENIE 1.4.19.** *Przyjmijmy oznaczenia Def. 69 i Stw. 93. Istnieje izomorfizm przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych*

$$\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{T}_x M.$$

*Wynika zeń strukturalne utożsamienie (punkt po punkcie)*

$$\text{Der } C^1(M, \mathbb{R}) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{T}M.$$

■

*Dowód:* Zaczniemy od określenia wygodnej bazy w  $\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R})$ . W tym celu wprowadźmy **pchnięcie różniczkowania wzdłuż odwzorowania**  $F \in C^1(M, N)$  (określonego dla pary  $C^{k \geq 1}$ -rozmaitości  $M \ni x$  i  $N$ ) jako odwzorowanie, jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe,

$$F_*^x : \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Der}_{F(x)} C^1(N, \mathbb{R}) : V \longmapsto V \circ F^*,$$

zapisane w terminach operacji **cofnięcia funkcji wzdłuż  $F$**

$$F^* : C^1(N, \mathbb{R}) \longrightarrow C^1(M, \mathbb{R}) : f \longmapsto f \circ F.$$

Jest oczywistym, że ilekroć  $F$  jest dyfeomorfizmem (klasy  $C^1$ ), odnośne pchnięcie  $F_*^x$  jest izomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych, oto bowiem pchnięcie wzdłuż  $F^{-1}$  w  $x$  jest obustronną odwrotnością  $F_*^x$ .

W następnej kolejności wykorzystamy wprowadzoną wcześniej technikę rozkładu jedności celem skonstruowania lokalnego modelu (analitycznej) stycznej w



punkcie. Oto więc rozważmy włożenie  $\iota_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow M$  dowolnego podzbioru otwartego  $\mathcal{O}$  i wybierzmy (dowolnie) punkt  $x \in \mathcal{O}$ . Bez trudu przekonujemy się, iż pchnięcie wzdłuż odwzorowania  $\iota_{\mathcal{O}}$  jest izomorfizmem przestrzeni różniczkowań

$$\iota_{\mathcal{O}*}^x : \text{Der}_x C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)} C^1(M, \mathbb{R}).$$

W rzeczy samej, odwzorowanie to jest iniektywne, a to na mocy Stw. 98, jeśli bowiem  $V \in \ker \iota_{\mathcal{O}*}$ , to rozszerzając dowolną funkcję  $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$  do funkcji  $\tilde{f} \in C^1(M, \mathbb{R})$  pokrywającej się z  $f$  na domknięciu  $\overline{\mathcal{O}_x}$  pewnego otoczenia otwartego  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x$ , które wybieramy na tyle małym, aby był spełniony konieczny warunek  $\overline{\mathcal{O}_x} \subset \mathcal{O}$  (co zawsze możemy osiągnąć, choćby wybierając jako  $\mathcal{O}_x$  przeciwobraz dostatecznie małej kuli otwartej względem lokalnej mapy na otoczeniu  $x$ ), stwierdzamy, przywoławszy Stw. 99, że

$$V(f) = V(\tilde{f} \circ \iota_{\mathcal{O}}) \equiv \iota_{\mathcal{O}*}^x V(\tilde{f}) = 0,$$

czyli  $V = 0$ . Jest ono również surjektywne. Istotnie, rozważmy dowolne różniczkowanie  $W \in \text{Der}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)} C^1(M, \mathbb{R})$ . Możemy z nim stowarzyszyć odwzorowanie

$$\underline{W} : C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto W(\tilde{f}),$$

w którego definicji wykorzystujemy *dowolne* rozszerzenie  $f$ , tj. dowolną funkcję  $\tilde{f} \in C^1(M, \mathbb{R})$  pokrywającą się z  $f$  na domknięciu  $\overline{\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}}$  pewnego otoczenia otwartego  $\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}$  punktu  $\iota_{\mathcal{O}}(x)$ , które wybieramy na tyle małym, aby był spełniony konieczny warunek  $\overline{\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}} \subset \mathcal{O}$ . Odwzorowanie to jest dobrze określone, tzn. nie zależy od wyboru rozszerzenia, jeśli bowiem  $\tilde{f}'$  jest innym rozszerzeniem, to różnica  $\Delta := \tilde{f}' - \tilde{f}$  jest tożsamościowo równa zeru na (otwartym) przecięciu odnośnych otoczeń  $\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}$ , a zatem raz jeszcze na mocy Stw. 99

$$W(\tilde{f}') = W(\tilde{f}).$$

Wynik ten automatycznie implikuje liniowość  $\underline{W}$ , gdyż jako rozszerzenie kombinacji  $\mathbb{R}$ -liniowej  $\lambda_1 \triangleright f_1 + \lambda_2 \triangleright f_2$  funkcji  $f_1, f_2 \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$  o współczynnikach  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  możemy zawsze wybrać kombinację liniową  $\lambda_1 \triangleright \tilde{f}_1 + \lambda_2 \triangleright \tilde{f}_2$  odnośnych rozszerzeń, a następnie wykorzystać  $\mathbb{R}$ -liniowość  $W$ . Jest więc  $\underline{W} \in \text{Der}_x C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ , a przy tym dla dowolnej funkcji  $f \in C^1(M, \mathbb{R})$  zachodzi równość

$$(\iota_{\mathcal{O}*}^x \underline{W})(f) \equiv W(\widehat{f \circ \iota_{\mathcal{O}}}) = W(f),$$

co daje nam pożądaną równość

$$\iota_{\mathcal{O}*}^x \underline{W} = W.$$

Łącząc dotychczasowe obserwacje, konstatujemy istnienie  $\mathbb{R}$ -liniowego izomorfizmu

$$\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \xrightarrow[\iota_{\mathcal{O}*}^{-1}]{} \text{Der}_x C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \xrightarrow[\kappa_*^x]{} \text{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow[\iota_{\mathcal{U}*}^{\kappa(x)}]{} \text{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R})$$

indukowanego przez dowolną mapę  $\kappa : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$  atlasu  $\widehat{\mathcal{A}}$  na (dowolnym) otwartym otoczeniu  $\mathcal{O}$  punktu  $x$  – ta jest wszakże (tautologicznie) dyfeomorfizmem klasy  $C^k$  swej dziedziny na homeomorficzny z nią podzbiór  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{x^n}$ . Na obecnym etapie wystarczy zatem wykazać istnienie izomorfizmu (czy – co na jedno wychodzi – równość wymiarów  $\mathbb{R}$ -liniowych) przestrzeni  $\text{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R})$  i  $T_x M$ . W tym celu wyznaczmy naturalną bazę pierwszej z nich. Oznaczmy  $\kappa(x) =: u_*$ ,

wprowadźmy na  $\mathbb{R}^{\times n}$  standardowe współrzędne kartezjańskie (czyli funkcje współrzędniowe)  $y^i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , w których  $y \equiv (y^1, y^2, \dots, y^n)$ , i przywołajmy treść Tw. 1.4.5 dla dowolnej funkcji  $f \in C^1(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbb{R})$ ,

$$f(u_* + y) = f(u_*) + y^i \int_{[0,1];\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_* + \cdot \triangleright y).$$

Ewaluacja różniczkowania  $V \in \text{Der}_{u_*} C^1(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbb{R})$  na funkcji  $f$  daje zatem – wobec  $\mathbb{R}$ -liniowości  $V$  i spełnianego przezeń warunku Leibniza – wynik

$$\begin{aligned} V(f) &= V(f(u_*)) + V(y^i) \int_0^1 dt \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_* + t \triangleright 0) + 0 \cdot \int_0^1 dt V\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}(u_* + t \triangleright y)\right) \upharpoonright_{y=0} \\ &= V(f(u_*)) + V(y^i) \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_*). \end{aligned}$$

Ten na gruncie Stw. 100 redukujemy do postaci

$$V(f) = V(y^i) \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_*),$$

która pokazuje dowodnie, iż różniczkowania

$$D_i : C^1(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(u_*)$$

stanowią układ generujący dla przestrzeni  $\text{Der}_{u_*} C^1(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbb{R})$ . O tym, że jest to układ liniowo niezależny, przekonujemy się natychmiast dokonując ewaluacji kombinacji  $\mathbb{R}$ -liniowej  $\lambda^i \triangleright D_i = 0$  na funkcjach współrzędniowych i dostając tym sposobem oczekiwany wynik  $\lambda^i = 0$ ,  $i \in \overline{1, n}$ . Mamy zatem antycypowaną równość

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbb{R}) = n = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M,$$

ta zaś implikuje istnienie izomorfizmu (oraz globalnego utożsamienia), o którym mowa w treści dowodzonego twierdzenia.  $\square$

Powyższe przeformułowanie opisu przestrzeni stycznej do rozmaitości w jej dowolnym punkcie otwiera drogę do dyskusji odwzorowań  $M \longrightarrow \mathbb{T}M$  o dowolnym stopniu gładkości, określonym lokalnie lub globalnie i ograniczonym w naturalny sposób przez stopień gładkości samej rozmaitości. Odwzorowania te stanowią poszukiwaną przez nas geometryzację algebraicznego pojęcia wektora. Możemy więc wprowadzić

**DEFINICJA 71.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 67 i 69. **Pole wektorowe** na  $C^k$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  to przyporządkowanie

$$\mathcal{V} : M \longrightarrow \text{Der } C^1(M, \mathbb{R}) (\equiv \mathbb{T}M) : x \longmapsto \mathcal{V}(x) \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}),$$

które kanonicznie określa  $\mathbb{R}$ -liniowe odwzorowanie

$$D_{\mathcal{V}} : C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^M : f \longmapsto (M \ni x \longmapsto \mathcal{V}(x)(f) \in \mathbb{R}),$$

zwane **różniczkowaniem wzdłuż** (lub **w kierunku**)  $\mathcal{V}$ . Dla dowolnego  $l < k$  pole wektorowe  $\mathcal{V}$  nazywamy **różniczkowalnym klasy  $C^l$  na zbiorze** (otwartym)  $S \subseteq M$ , jeśli dla dowolnej lokalnej mapy  $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}$  na otoczeniu  $\mathcal{O}$  dowolnego punktu  $x \in S$  odwzorowania  $D_{\mathcal{V}} x^i$ ,  $i \in \overline{1, n}$  są funkcjami różniczkowalnymi klasy  $C^l$  na  $\mathcal{O} \cap S$ . Zbiór pól wektorowych klasy  $C^l$  na  $M$ , wyposażony w naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem  $C^l(M, \mathbb{R})$ , oznaczamy symbolami

$$\mathfrak{X}^l(M) \equiv \Gamma^l(\mathbb{T}M),$$

dla przypadku<sup>10</sup>  $l = k$  rezerwując symbole

$$\mathfrak{X}(M) \equiv \Gamma(TM).$$

▲

Jedną z fundamentalnych operacji na polach wektorowych, z jakich przyjdzie nam korzystać w dalszej części kursu, jest ich transport stycznościowy wzdłuż dyfeomorfizmów. Opisujemy go w

DEFINICJA 72. Przyjmijmy zapis Def. 71 oraz dowodu Tw. 1.4.19 i niechaj  $F : M_1 \rightarrow M_2$  będzie dyfeomorfizmem klasy  $C^{r+1}$  między  $C^k$ -rozmaitościami ( $k > r$ )  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . **Pchnięcie (stycznościowe) pola wektorowego** na  $M_1$  wzdłuż dyfeomorfizmu  $F$  to odwzorowanie

$$F_* : \mathfrak{X}^l(M_1) \rightarrow \mathfrak{X}^{\min(l,r)}(M_2) : \mathcal{V} \mapsto F_*^{F^{-1}(\cdot)}(\mathcal{V} \circ F^{-1}(\cdot)).$$

▲

UWAGA 21. Warto wypisać jawną postać lokalną pola pchniętego, używając do tego lokalnych map:  $\kappa_2 \equiv (y^1, y^2, \dots, y^{n_2}) : \mathcal{O}_2 \rightarrow \mathcal{U}_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_2})$ ,  $n_2 = \dim M_2$  na otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_2 \ni F(m)$  oraz  $\kappa_1 \equiv (x^1, x^2, \dots, x^{n_1}) : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{U}_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1})$ ,  $n_1 = \dim M_1$  na otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_1 \ni m$ . Przywoławszy definicję pchnięcia różniczkowania (w punkcie) z dowodu Tw. 1.4.19, otrzymujemy – dla dowolnych  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^l(M_1)$  oraz  $f \in C^1(M_2; \mathbb{R})$  –

$$\begin{aligned} (F_*\mathcal{V})(F(m))(f) &\equiv F_*^m(\mathcal{V}(m))(f) = \mathcal{V}(m)(f \circ F) \\ &= \mathcal{V}(m)(x^i) \frac{\partial(f \circ F \circ \kappa_1^{-1})}{\partial x^i}(\kappa_1(m)) \\ &= \mathcal{V}(m)(x^i) \frac{\partial(f \circ \kappa_2^{-1})}{\partial y^a}(\kappa_2(m)) \frac{\partial(y^a \circ F \circ \kappa_1^{-1})}{\partial x^i}(\kappa_1(m)), \end{aligned}$$

czyli

$$(F_*\mathcal{V})(F(m))(y^a) = \mathcal{V}(m)(x^i) \frac{\partial(y^a \circ F \circ \kappa_1^{-1})}{\partial x^i}(\kappa_1(m)),$$

co dowodnie pokazuje, że pchnięcie pola wektorowego stanowi naturalną adaptację odwzorowania stycznościowego (którego elementy macierzowe w naturalnej bazie współrzędniowej odnajdujemy po prawej stronie powyższej formuły). Odtąd będziemy (często) wymiennie stosować oba zapisy, dokonując *implicite* utożsamienia  $\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \cong T_x M$ . Wymóg bijektywności  $F$  staje się oczywisty, kiedy przypomnimy sobie, że obrazem pola wektorowego ma być gładki rozkład nad całą przeciwdziedziną  $F$  (stąd potrzeba surjektywności) *jednoznacznie* określonych w każdym punkcie (stąd potrzeba injektywności) różniczkowań  $C^1(M_2; \mathbb{R})$ .

▮

Jedną z podstawowych, a nader użytecznych własności operacji pchnięcia pola wektorowego opisuje

STWIERDZENIE 101. *Przyjmijmy zapis Def. 72 i niechaj  $F : M_1 \rightarrow M_2$  oraz  $G : M_2 \rightarrow M_3$  będą odwzorowaniami klasy  $C^1$  między  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Zachodzi tożsamość*

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

<sup>10</sup>Nie ma sensu rozważać pól wektorowych o klasie gładkości  $C^l$ ,  $l > k$  na rozmaitości klasy  $C^k$ .

■

*Dowód:* Wynika wprost z definicji pchnięcia pola wektorowego. □

Przedstawiony tu analityczny schemat konstrukcji pól wektorowych na rozmaitości pozwala bez trudu zidentyfikować nader istotną dodatkową strukturę na  $\mathfrak{X}(M)$ , o której mówi

DEFINICJA 73. Przyjmijmy zapis Def. 71. **Komutator pól wektorowych** to odwzorowanie dwuliniowe skośnie symetryczne

$$[\cdot, \cdot]_M : \mathfrak{X}^1(M) \times \mathfrak{X}^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^0(M)$$

określone (jednoznacznie) przez warunek

$$\forall \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}^1(M) : D_{[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_M} = D_{\mathcal{V}_1} \circ D_{\mathcal{V}_2} - D_{\mathcal{V}_2} \circ D_{\mathcal{V}_1}.$$

Parę

$$(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot]_M)$$

określamy mianem **algebry pól wektorowych na  $M$** .

▲

UWAGA 22. O sensowności powyższej definicji najłatwiej przekonać się w bezpośrednim rachunku przeprowadzonym na dziedzinie  $\mathcal{O} \ni m$  lokalnej mapy  $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \rightsquigarrow \mathcal{U} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ ,  $n = \dim M$ , w której to nawias pól  $\mathcal{V}_\alpha \in \mathfrak{X}^1(M)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o odnośnych wartościach  $\mathcal{V}_\alpha(m) = \mathcal{V}_\alpha^i(m) \frac{\partial}{\partial x^i}(m)$ ,  $\mathcal{V}_\alpha^i(m) \equiv \mathcal{V}_\alpha(m)(x^i)$  przybiera postać

$$[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_M(m) = \left( \mathcal{V}_1^j \circ \kappa^{-1} \frac{\partial(\mathcal{V}_2^i \circ \kappa^{-1})}{\partial x^j} - \mathcal{V}_2^j \circ \kappa^{-1} \frac{\partial(\mathcal{V}_1^i \circ \kappa^{-1})}{\partial x^j} \right) (\kappa(m)) \frac{\partial}{\partial x^i}(m).$$

(1.4.35)

▬

Podstawową własność tej struktury, która obsadza ją w roli obiektu modelowego dla kategorii struktur opisanych w Rozdz. 1.5, nazywa

STWIERDZENIE 102. *Przyjmijmy zapis Def. 73. Odwzorowanie trójliniowe*

$$\text{Jac}_M : \mathfrak{X}^2(M) \times \mathfrak{X}^2(M) \times \mathfrak{X}^2(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^0(M)$$

$$: (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3) \longmapsto [[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_M, \mathcal{V}_3]_M + [[\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_1]_M, \mathcal{V}_2]_M + [[\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3]_M, \mathcal{V}_1]_M,$$

zwane **jakobiatozem pól wektorowych na  $M$** , jest tożsamościowo równe zeru.

■

*Dowód:* Trywialny rachunek bezpośredni w (dowolnej) prezentacji lokalnej. □

O naturalności wskazanej przez nas dodatkowej struktury algebraicznej w kategorii rozmaitości różniczkowalnych zaświadcza

STWIERDZENIE 103. *Przyjmijmy zapis Def. 72 oraz 73 i niechaj  $F : M_1 \longrightarrow M_2$  będzie dyfeomorfizmem klasy  $C^{r+1}$  między  $C^k$ -rozmaitościami ( $k > r > 0$ ) ( $M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha$ ),  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Wówczas zachodzi tożsamość*

$$[\cdot, \cdot]_{M_2} \circ (F_* \times F_*) = F_* \circ [\cdot, \cdot]_{M_1}.$$

■

*Dowód:* Sprawdzamy prawdziwość postulowanej formuły lokalnie w otoczeniu punktów  $F(m) \in M_2$  i  $m \in M_1$ , stosując notację jak w treści Uwagi 21, oznaczając  $F_1 \equiv F \circ \kappa_1^{-1}$  oraz  $f_2 \equiv f \circ \kappa_2^{-1}$  dla skrótu i przywołując po drodze Równ. 1.4.35. Niechaj  $f \in C^1(M_2; \mathbb{R})$  i  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}^1(M_1)$ , a wtedy

$$\begin{aligned}
& [F_*\mathcal{V}_1, F_*\mathcal{V}_2]_{M_2}(F(m))(f) \\
&= [\mathcal{V}_1^k(m) \frac{\partial(y^j \circ F_1)}{\partial x^k}(\kappa_1(m)) \frac{\partial}{\partial y^j}(\mathcal{V}_2^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m)) \\
&\quad - \mathcal{V}_2^k(m) \frac{\partial(y^j \circ F_1)}{\partial x^k}(\kappa_1(m)) \frac{\partial}{\partial y^j}(\mathcal{V}_1^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m))] \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \\
&= [\mathcal{V}_1^k(m) \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{V}_2^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m)) \\
&\quad - \mathcal{V}_2^k(m) \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{V}_1^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m))] \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \\
&= [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{M_1}(m)(x^l) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\kappa_1(m)) \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \\
&\equiv (F_*[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{M_1})(F(m))(y^i) \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \equiv (F_*[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{M_1})(F(m))(f)
\end{aligned}$$

□

UWAGA 23. W antycypacji dyskusji z Rozdz. 1.5, możemy zwięźle zreasumować powyższą dyskusję, jak następuje: przypisanie różniczkowalnym przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych pól wektorowych na nich, wraz z komutatorem pól wektorowych, a dyfeomorfizmom pomiędzy różniczkowalnymi – odnośnych pchnięć stycznosciowych pól wektorowych to składowe – odpowiednio – obiektowa i morfizmowa funktora (kowariantnego) z (ograniczonej) kategorii różniczkowalnych z dyfeomorfizmami jako morfizmami w kategorię rzeczywistych algebr Liego z izomorfizmami jako morfizmami.

▮

Okazuje się, że transport nawiasu pól wektorowych jest możliwy w dużo ogólniejszej sytuacji, z którą będziemy mieli do czynienia w dalszej części kursu, a którą opisuje poniższa

DEFINICJA 74. Przyjmijmy zapis Def. 71 oraz dowodu Tw. 1.4.19 i niechaj  $F : M_1 \rightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^1$  między różniczkowalnymi  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  klasy  $C^{k_\alpha}$ ,  $k_\alpha \geq 1$ . Powiemy, że **para  $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$  pól wektorowych  $\mathcal{V}_\alpha \in \mathfrak{X}^{l_\alpha}(M_\alpha)$ ,  $l_\alpha \leq k_\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  jest w relacji określonej przez odwzorowanie różniczkowalne  $F$** , jeśli zachodzi tożsamość

$$F_*^{(\cdot)}\mathcal{V}_1(\cdot) = \mathcal{V}_2 \circ F.$$

▲

W opisanej tu sytuacji słusznym jest

STWIERDZENIE 104. *Przyjmijmy zapis Def. 73 oraz 74. Dla dowolnych dwóch par:  $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$  i  $(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$  pól wektorowych (klasy  $C^1$ ) w relacji określonej przez odwzorowanie  $F \in C^2(M_1, M_2)$  między  $C^2$ -różniczkowalnymi para pól wektorowych  $([\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}, [\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2})$  również jest w takowej relacji, tj. zachodzi tożsamość*

$$F_*^{(\cdot)}[\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}(\cdot) = [\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2} \circ F.$$

■

Dowód: Zacznijmy od wyprowadzenia, w dowolnym punkcie  $x \in M_1$  i dla dowolnej funkcji  $f \in C^1(M_2; \mathbb{R})$ , równości

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{V}_1}(f \circ F)(x) &\equiv \mathcal{V}_1(x)(f \circ F) = F_*^x \mathcal{V}_1(x)(f) = (\mathcal{V}_2 \circ F)(x)(f) \equiv D_{\mathcal{V}_2}f(F(x)) \\ &= (D_{\mathcal{V}_2}f) \circ F(x), \end{aligned}$$

czyli tożsamości funkcjonalnej

$$D_{\mathcal{V}_1}(f \circ F) = (D_{\mathcal{V}_2}f) \circ F,$$

i analogicznej tożsamości dla drugiej pary pól w relacji,

$$D_{\mathcal{W}_1}(f \circ F) = (D_{\mathcal{W}_2}f) \circ F.$$

Na ich podstawie obliczamy (rekursywnie), tym razem dla  $f \in C^2(M_2; \mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} F_*^x [\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}(x)(f) &\equiv [\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}(x)(f \circ F) \\ &= D_{\mathcal{V}_1}(D_{\mathcal{W}_1}(f \circ F))(x) - D_{\mathcal{W}_1}(D_{\mathcal{V}_1}(f \circ F))(x) \\ &= D_{\mathcal{V}_1}((D_{\mathcal{W}_2}f) \circ F)(x) - D_{\mathcal{W}_1}((D_{\mathcal{V}_2}f) \circ F)(x) \\ &= (D_{\mathcal{V}_2}(D_{\mathcal{W}_2}f)) \circ F(x) - (D_{\mathcal{W}_2}(D_{\mathcal{V}_2}f)) \circ F(x) \\ &= (D_{\mathcal{V}_2}(D_{\mathcal{W}_2}f) - D_{\mathcal{W}_2}(D_{\mathcal{V}_2}f))(F(x)) \\ &\equiv [\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2}(F(x))(f) \equiv ([\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2} \circ F)(x)(f), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Z polami wektorowymi możemy w naturalny sposób stowarzyszać 1-wymiarowe podrozmaitości w ich nośniku, o czym mówi

**DEFINICJA 75.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 71 oraz Przykł. 25 (1). Ustalmy (dowolnie)  $l \leq k \in \mathbb{N}^{\times}$  oraz  $a < b \in \mathbb{R}$  i niechaj  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  będzie **zwartą ścieżką różniczkowalną klasy  $C^l$  w  $M$** , tj. ograniczeniem pewnego  $C^l$ -odwzorowania  $\tilde{\gamma} : \mathcal{U} \rightarrow M$  określonego na otwartym podzbiórze  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\mathbb{E}}(\mathbb{R})$  zawierającym  $[a, b]$ . **Wektorem stycznym do  $\gamma$  (klasy  $C^1$ ) w  $\gamma(t_*)$ ,  $t_* \in ]a, b[$  nazywamy różniczkowanie w  $\gamma(t_*)$  dane wzorem**

$$\dot{\gamma}(t_*) : C^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_*).$$

Niechaj teraz  $\mathcal{V} \in \text{Der } C^1(M, \mathbb{R})$  będzie polem wektorowym na  $M$ . Ścieżkę  $\gamma$  określimy mianem **krzywej całkowej** (lub **trajektorii**)  $\mathcal{V}$ , jeśli spełnia warunek

$$(1.4.36) \quad \forall t \in ]a, b[ : \dot{\gamma}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)).$$

▲

Mamy proste, acz istotne

**STWIERDZENIE 105.** *Przyjmijmy oznaczenia Def. 75 i niechaj  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^1(M)$ . Przez dowolny punkt  $x_* \in M$  przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa  $\gamma_{x_*} : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$ , zdefiniowana dla pewnego  $\varepsilon > 0$ , spełniająca warunek początkowy  $\gamma_{x_*}(0) = x_*$ . Przy tym jeśli  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^l(M)$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , to krzywa ta jest klasy  $C^{\min(l+1, k)}$ .*

■

*Dowód:* W lokalnym układzie współrzędnych  $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ,  $n = \dim M$  na pewnym otoczeniu  $\mathcal{O} \ni x_*$  krzywa całkowa pola  $\mathcal{V}$  przechodząca przez  $x_*$  jest (lokalnie) prezentowana przez odwzorowanie  $(\gamma_{x_*}^i \equiv x^i \circ \gamma_{x_*}) \in C([- \varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R}^{\times n})$  będące rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{x_*}^i}{dt}(t) &\equiv \frac{d(x^i \circ \gamma_{x_*})}{dt}(t) \equiv \dot{\gamma}_{x_*}^i(t)(x^i) = \mathcal{V}(\gamma_{x_*}(t))(x^i) \equiv D_{\mathcal{V}}(x^i)(\gamma_{x_*}(t)), \\ \gamma_{x_*}^i(0) &= x^i(x_*), \quad i \in \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Wobec lokalnej lipschitzowskości odwzorowań  $D_{\mathcal{V}}(x^i)$  (tj. ich lipschitzowskości na zwartych podzbiorach dziedziny, wynikającej z ich ciągłej różniczkowalności, por. Stw. 91), Tw. 1.4.10 przesądza o lokalnym istnieniu jedyne go rozwiązania powyższego zagadnienia, co wobec homeomorficzności lokalnego układu współrzędnych kończy dowód stwierdzenia. Stwierdzenie dotyczące klasy różniczkowalności  $\gamma_{x_*}$  jest oczywistą konsekwencją Tw. 1.4.16 oraz struktury zagadnienia początkowego. Istotnie, w dowodzie rzeczonego twierdzenia, w którym stopień gładkości  $l$  zależności potoku (zagadnienia autonomicznego, z jakim mamy tutaj do czynienia) od obu zmiennych został wyznaczony w jednym kroku, bez rozdzielania tych zmiennych. Przywoławszy rekursywny argument z tegoż dowodu do definiującego potok Równ. (1.4.36), stwierdzamy, że gładkość klasy  $C^l$  zależności krzywej całkowej od czasu  $t$  oznacza (wobec tego samego stopnia gładkości pola wektorowego), że  $\dot{\gamma}_{x_*}$  jest klasy  $C^l$ , zatem ostatecznie  $\gamma_{x_*}$  jest klasy  $C^{\min(l+1, k)}$  (ograniczenie górne  $k$  na stopień gładkości ścieżek w  $M$  wynika z założenia o stopniu gładkości transformacji współrzędniowych na  $M$ ). Jest przy tym oczywistym, że stopień gładkości  $\mathcal{V}$  nie pozwala poprowadzić przedstawionego tu argumentu dalej. □

Ostatnie stwierdzenie pozwala nam wprowadzić przydatne pojęcie globalne:

**DEFINICJA 76.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 75 oraz Tw. 1.4.13 i niechaj dla dowolnego  $x \in M$  przedział otwarty  $I_{\mathcal{V}}(x) \subset \mathbb{R}$  będzie maksymalnym, w rozumieniu Stw. 1.4.12, dla którego jest określone jednoznacznie rozwiązanie  $\gamma_x$  zagadnienia początkowego dla pola wektorowego  $\mathcal{V}$  (klasy  $C^l$ ,  $l \leq k$ ) zdefiniowanego w treści Stw. 105. Zdefiniujemy **dziedzinę całkowalności pola wektorowego  $\mathcal{V}$**

$$\mathcal{D}_{\mathcal{V}} := \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_{\mathcal{V}}(x) \} \equiv \bigsqcup_{x \in M} I_{\mathcal{V}}(x),$$

por. Równ. (1.4.23). **Potok pola wektorowego  $\mathcal{V}$**  to odwzorowanie

$$\Phi_{\mathcal{V}} : \mathcal{D}_{\mathcal{V}} \longrightarrow M : (t, x) \longmapsto \gamma_x(t) \equiv \Phi_{\mathcal{V}}(t, x),$$

które w zgodzie z Tw. 1.4.16 i Stw. 105 jest klasy  $C^{\min(l+1, k)}$  w pierwszym i klasy  $C^l$  w drugim argumentcie.

Pole wektorowe o dziedzinie całkowalności  $\mathcal{D}_{\mathcal{V}} = \mathbb{R} \times M$  nazywamy **zupełnym**.

▲

Zwieńczeniem naszych dotychczasowych wysiłków zmierzających do możliwie precyzyjnego zrozumienia zależności między stopniem gładkości pola wektorowego i stopniem gładkości jego potoku, dokumentującym – *a posteriori* – zapowiadaną wcześniej fundamentalną rolę pól wektorowych w (lokalnym) opisie symetrii struktur różniczkowych i tym samym wskazującym kontekst ich przyszłego zastosowania

w dyskusji problemów umotywowanych fizykalnie, jest relacja między polami wektorowymi a (lokalnymi) grupami (lokalnych) dyfeomorfizmów na rozmaitościach różniczkowalnych, którą bez trudu wywiedziemy z wcześniejszych dociekań w odwołaniu do poniższej

DEFINICJA 77. Przyjmijmy zapis Def. 65 i ustalmy  $l \leq k \in \mathbb{N}^\times$  oraz  $\varepsilon > 0$ , a następnie oznaczmy  $I_\varepsilon := ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R}$ . **Lokalna jednoparametrowa grupa lokalnych dyfeomorfizmów klasy  $C^l$  na zbiorze  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M)$  o skali  $\varepsilon$  to rodzina**

$$\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M) := \{ \mathcal{G} : I_\varepsilon \times \mathcal{O} \longrightarrow M \} \subset C^l(I_\varepsilon \times \mathcal{O}; M),$$

indeksowana przez przedział otwarty  $I_\varepsilon$ , odwzorowań spełniających następujące aksjomaty

$$\text{(LD1)} \quad \forall t \in I_\varepsilon : \mathcal{G}_t \in \text{Diff}^l(\mathcal{O}, \mathcal{G}_t(\mathcal{O}));$$

$$\text{(LD2)} \quad \mathcal{G}_0 = \text{id}_{\mathcal{O}};$$

$$\text{(LD3)} \quad \forall t_1, t_2 \in I_\varepsilon, x \in \mathcal{O} : \left( (t_1 + t_2 \in I_\varepsilon \wedge \mathcal{G}_{t_1}(x) \in \mathcal{O}) \implies \mathcal{G}_{t_2+t_1}(x) = \mathcal{G}_{t_2} \circ \mathcal{G}_{t_1}(x) \right).$$

W przypadku  $\varepsilon \rightarrow \infty$  mówimy o **jednoparametrowej grupie lokalnych dyfeomorfizmów klasy  $C^l$  na zbiorze  $\mathcal{O}$** , a w przypadku  $\mathcal{O} = M$  – o **lokalnej jednoparametrowej grupie dyfeomorfizmów klasy  $C^l$  rozmaitości  $M$** . Wreszcie ilekroć  $\varepsilon \rightarrow \infty$  i  $\mathcal{O} = M$ , używamy określenia **jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów klasy  $C^l$** . ▲

UWAGA 24. Powyższa definicja wymaga kilku słów komentarza. Po pierwsze zauważmy, że aksjomat (LD3) ma charakter konstruktywny (tj. zawsze istnieją nietrywialne dyfeomorfizmy  $\mathcal{G}_{t_2}, \mathcal{G}_{t_1}$ ,  $t_1, t_2 \neq 0$ , które można składać), gdyż wobec założonej ciągłości  $\mathcal{G}$  istnieją nietrywialne dyfeomorfizmy dowolnie bliskie  $\text{id}_{\mathcal{O}}$ , a przy tym wobec otwartości  $\mathcal{O}$  każdy punkt poddawany przekształceniu należy do  $\mathcal{O}$  wraz z pewnym swoim otwartym otoczeniem, można więc zawsze tak dobrać  $t \in I_\varepsilon$ , aby obraz tego punktu pozostawał w rzeczonym otoczeniu. Po drugie godzi się podkreślić, że mamy tu do czynienia ze wspomnianą wcześniej „świnką morską”, gdyż poza przypadkiem  $\varepsilon \rightarrow \infty$  i  $\mathcal{O} = M$  superpozycja odwzorowań nie zadaje na  $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$  struktury grupy (z odwrotnością  $\mathcal{G}_t \mapsto \mathcal{G}_{-t}$  i jednością  $\mathcal{G}_0$ ). Napotkaną tu strukturę określa się czasem mianem **grupy częściowej**. I wreszcie w przypadku  $\mathcal{O} = M$  aksjomat (LD1) jest konsekwencją dwóch pozostałych, oto bowiem  $t \in I_\varepsilon$  implikuje  $-t \in I_\varepsilon$  oraz  $\mathcal{G}_t(\mathcal{O}), \mathcal{G}_{-t}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ , możemy przeto obliczyć

$$\mathcal{G}_t \circ \mathcal{G}_{-t} = \mathcal{G}_{t+(-t)} = \mathcal{G}_0 = \text{id}_M$$

oraz

$$\mathcal{G}_{-t} \circ \mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{-t+t} = \mathcal{G}_0 = \text{id}_M,$$

skąd wniosek, że

$$\mathcal{G}_{-t} = \mathcal{G}_t^{-1}.$$

▮

Możemy już teraz wypowiedzieć kluczowe



**TWIERDZENIE 1.4.20.** *Przyjmijmy oznaczenia Def. 71 i 77 oraz dowodu Tw. 1.4.19. Każda lokalna jednoparametrowa grupa lokalnych dyfeomorfizmów  $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$  klasy  $C^l$  na dowolnym podziorze otwartym  $\mathcal{O} \subseteq M$   $C^k$ -rozmaitości ( $k \geq l$ )  $(M, \widetilde{\mathcal{A}})$  indukuje pole wektorowe klasy  $C^{l-1}$  na  $\mathcal{O}$ , którego krzywymi całkowymi są orbity grupy, przy czym zaindukowane pole jest **lokalnie**  $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$ -**niezmiennicze**, tj. spełnia warunek*

$$(1.4.37) \forall_{s \in I_\varepsilon, x \in \mathcal{O}} : \left( \mathcal{G}_s(x) \in \mathcal{O} \implies \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_s(x)) = \mathcal{G}_{s*}^x(\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)) \right).$$

*I odwrotnie, niechaj  $\mathcal{V}$  będzie dowolnym (lokalnym) polem wektorowym klasy  $C^l$  na dowolnym podziorze otwartym  $\mathcal{U} \subseteq M$ . W dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{U}$  z polem  $\mathcal{V}$  można stowarzyszyć lokalną jednoparametrową grupę lokalnych dyfeomorfizmów  $\text{Diff}_{\mathcal{O}_x;\varepsilon_x}^l(M)$  na pewnym otwartym otoczeniu  $\mathcal{O}_x \ni x$ , która indukuje to pole.*

■

Dowód: Rozważmy lokalną jednoparametrową grupę  $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$  lokalnych dyfeomorfizmów klasy  $C^l$  na zbiorze otwartym  $\mathcal{O} \subset M$ . Określa ona (lokalne) pole wektorowe

$$\mathcal{V}_{\mathcal{G}} : \mathcal{O} \longrightarrow \text{Der } C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) : x \longmapsto \left( C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \ni f \longmapsto \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_t(x) \in \mathbb{R} \right).$$

Istotnie, przyporządkowanie

$$C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \ni f \longmapsto \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_t(x) \in \mathbb{R}$$

jest jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe, a nadto dla dowolnych  $f, g \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(f \cdot g) &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (f \circ \mathcal{G}_t(x) \cdot g \circ \mathcal{G}_t(x)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (f \circ \mathcal{G}_t(x)) \cdot g \circ \mathcal{G}_0(x) + f \circ \mathcal{G}_0(x) \cdot \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (g \circ \mathcal{G}_t(x)) \\ &= \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(g), \end{aligned}$$

czyli spełniony jest warunek Leibniza. W celu wyznaczenia klasy gładkości  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$  różniczkujemy w jego kierunku składową  $\kappa^i$  dowolnej lokalnej mapy  $\kappa : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{x^n}$  na otoczeniu  $\mathcal{U}$  punktu  $x$ ,

$$D_{\mathcal{V}_{\mathcal{G}}} \kappa^i \equiv \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(\kappa^i) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \kappa^i \circ \mathcal{G}_t(x).$$

Zależność argumentu odwzorowania  $\kappa^i$  klasy  $C^k$  od pary  $(t, x)$  jest na mocy założenia klasy  $C^l$ ,  $l \leq k$ , przeto  $D_{\mathcal{V}_{\mathcal{G}}} \kappa^i$ , czyli także (wprost z definicji)  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ , jest klasy  $C^{l-1}$ . W następnej kolejności przekonujemy się, że dla dowolnego punktu  $x \in \mathcal{O}$  przechodząca przezeń ścieżka  $\gamma_x : I_\varepsilon \longrightarrow M : t \longmapsto \mathcal{G}_t(x)$  jest krzywą całkową  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ . Istotnie, dla dowolnej funkcji  $f \in C^1(\mathcal{O}; \mathbb{R})$  obliczamy (na gruncie Def. 75 i 77)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x(s)(f) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=s} f \circ \gamma_x(t) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=s} f \circ \mathcal{G}_t(x) = \frac{d}{du} \upharpoonright_{u=0} f \circ \mathcal{G}_{u+s}(x) \\ &= \frac{d}{du} \upharpoonright_{u=0} f \circ \mathcal{G}_u(\mathcal{G}_s(x)) \equiv \frac{d}{du} \upharpoonright_{u=0} f \circ \mathcal{G}_u(\gamma_x(s)) \equiv \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(\gamma_x(s))(f), \end{aligned}$$

a stąd – wobec dowolności  $f$  – wynika już pożądana relacja

$$\dot{\gamma}_x(s) = \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(\gamma_x(s)).$$

Na koniec sprawdzamy słuszność relacji (1.4.37). Poczynione założenia pozwalają skorzystać z aksjomatu (LD3), co daje

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_G(\mathcal{G}_s(x))(f) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_t(\mathcal{G}_s(x)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_{t+s}(x) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_s \circ \mathcal{G}_t(x) \\ &= \mathcal{V}_G(x)(f \circ \mathcal{G}_s) \equiv \mathcal{V}_G(x)(\mathcal{G}_s^* f) \equiv (\mathcal{G}_{s*}(\mathcal{V}_G(x)))(f). \end{aligned}$$

Odwracając tok poprzedniego rozumowania, rozważmy dowolne lokalne pole wektorowe  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^l(\mathcal{O})$ . Wybrawszy (dowolnie) punkt  $x \in \mathcal{O}$  oraz lokalną mapę  $\kappa = (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  na pewnym jego otoczeniu  $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}$ , wnioskujemy na gruncie Tw. 1.4.10, że na dowolnym zwartym podzbiorniku  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_x$  zawierającym  $x$  możemy globalnie określić stałą  $\varepsilon_{\mathcal{K}} > 0$  o tej własności, że dla dowolnego  $y \in \mathcal{K}$  zagadnienie początkowe

$$\dot{\gamma}_y(t) = \mathcal{V}(\gamma_y(t)), \quad \gamma_y(0) = y$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, o ile  $t \in ]-\varepsilon_{\mathcal{K}}, \varepsilon_{\mathcal{K}}[ =: I_{\varepsilon_{\mathcal{K}}}$ , przy czym zależność owego rozwiązania od danej początkowej  $y \in \mathcal{K}$  jest klasy  $C^l$ . Tym samym otrzymujemy (ograniczony) potok  $\Phi_{\mathcal{V}} \upharpoonright_{I_{\varepsilon_{\mathcal{K}}} \times \mathcal{K}}$  pola  $\mathcal{V}$  na  $I_{\varepsilon_{\mathcal{K}}} \times \mathcal{K}$  klasy  $C^l$ . Ponadto wobec ciągłości potoku oraz jego (współdefiniującej) własności

$$\Phi_{\mathcal{V}}(0, \cdot) = \text{id}_{\mathcal{K}}$$

możemy zawsze dobrać  $\varepsilon_x \leq \varepsilon_{\mathcal{K}}$  oraz podzbiór otwarty  $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{K}$  będący otoczeniem punktu  $x$  tak, by był spełniony warunek

$$(1.4.38) \quad \forall (t, y) \in I_{\varepsilon_x} \times \mathcal{O}_x : \Phi_{\mathcal{V}}(t, y) \in \mathcal{K}.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$\mathcal{G}^{\mathcal{V}} := \Phi_{\mathcal{V}} \upharpoonright_{I_{\varepsilon_x} \times \mathcal{O}_x} : I_{\varepsilon_x} \times \mathcal{O}_x \rightarrow M : (t, y) \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}(t, y) \equiv \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}(y).$$

Warunek (1.4.38) pozwala rozważać złożenia  $\mathcal{G}_s^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}$  dla  $s, t \in I_{\varepsilon_x}$ . Zdefiniujemy ścieżkę (różniczkowalną klasy  $C^l$ )

$$\Gamma_{y;s} : I_{\varepsilon_x} \rightarrow M : t \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}(t + s, y).$$

Bez trudu sprawdzamy w bezpośrednim rachunku

$$\dot{\Gamma}_{y;s}(t) \equiv \frac{d}{dt} \Phi_{\mathcal{V}}(t + s, y) = \frac{d}{d\xi} \upharpoonright_{\xi=t+s} \Phi_{\mathcal{V}}(\xi, y) = \mathcal{V}(\Phi(t + s, y)) \equiv \mathcal{V}(\Gamma_{y;s}(t)),$$

że ścieżka ta jest krzywą całkową  $\mathcal{V}$  wychodzącą z punktu

$$\Gamma_{y;s}(0) = \Psi(s, y).$$

Ale krzywą taką jest także – wprost z definicji –

$$\gamma_{\Psi(s, y)} : I_{\varepsilon_x} \rightarrow M : t \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}(t, \Phi_{\mathcal{V}}(s, y)),$$

co w świetle jednoznaczności rozwiązania rozważanego tu zagadnienia początkowego oznacza równość

$$(1.4.39) \quad \forall t \in I_{\varepsilon_x} : \Phi_{\mathcal{V}}(t + s, y) \equiv \Gamma_{y;s}(t) = \gamma_{\Psi(s, y)}(t) \equiv \Phi_{\mathcal{V}}(t, \Phi_{\mathcal{V}}(s, y)),$$

którą możemy przepisać w terminach odwzorowań  $\mathcal{G}^{\mathcal{V}}$  w znajomej postaci

$$\forall t \in I_{\varepsilon_x} : \mathcal{G}_{t+s}^{\mathcal{V}}(y) = \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_s^{\mathcal{V}}(y).$$

W szczególności dla  $s = -t$  (co jest wyborem dozwolonym wobec symetryczności  $I_{\varepsilon_x}$  względem 0) zachodzi

$$\forall t \in I_{\varepsilon_x} : \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_{-t}^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_{t+(-t)}^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_0^{\mathcal{V}} = \text{id}_{\mathcal{O}_x} \equiv \mathcal{G}_0^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_{-t+0}^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_{-t}^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}},$$

to zaś każe nam skonstatować, że każde z odwzorowań  $\mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}$ ,  $t \in I_{\varepsilon_x}$  jest dyfeomorfizmem  $\mathcal{O}_x$  na odnośny obraz  $\mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}(\mathcal{O}_x) \subset \mathcal{K}$ . Na koniec zauważamy, że  $\mathcal{G}^{\mathcal{V}}$  w oczywisty sposób indukuje pole  $\mathcal{V}$  według opisanego wcześniej schematu, i tym samym kończymy dowód.  $\square$

Powyższe twierdzenie, które nadaje głębszy geometryczny sens założeniu o gładkości rozkładu wektorów w wiązce stycznej nad rozmaitością, znajdzie istotne zastosowania w analizie geometrii grup Liego w Rozdz. 1.5, jak również w studiach nad symetrami modeli fizykalnych w rozdziałach późniejszych.

Tymczasem teraz dokonamy przetransponowania przedstawionego tu punktu widzenia na pojęcie gładkości (równoważnego innym, nierzadko wymagającym dostarczenia wyższej struktury różniczkowo-geometrycznej na rozmaitości  $TM$ ) na odwzorowania z  $M$  w wiązki  $p$ -form różniczkowych, wprowadzone w Def. 68. Poążając tym tropem napotykamy

DEFINICJA 78. Przyjmijmy oznaczenia Def. 68 i 69. **Pole  $p$ -form** na  $C^k$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  wymiaru  $n := \dim M \geq p$  to przyporządkowanie

$$\omega : M \longrightarrow \bigwedge^p T^*M : x \longmapsto \omega(x) \in \left( \bigwedge^p T^*M \right)_x,$$

które kanonicznie określa  $p$ -liniowe odwzorowanie alternujące

$$\langle \omega, \cdot \rangle : \times_{i=1}^p \mathfrak{X}^l(M) \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

$$: (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_p) \longmapsto (M \ni x \longmapsto \omega(x)(\mathcal{V}_1(x), \mathcal{V}_2(x), \dots, \mathcal{V}_p(x)) \in \mathbb{R}),$$

zwane **ewaluacją pola  $p$ -form** na polach wektorowych  $\mathcal{V}_i$ ,  $i \in \overline{1, p}$ . Na oznaczenie ewaluacji, także w punkcie, będziemy także (wymienne) używać symboli

$$\langle \omega, (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle \equiv \mathcal{V}_p \lrcorner \mathcal{V}_{p-1} \lrcorner \dots \lrcorner \mathcal{V}_1 \lrcorner \omega \equiv \iota_{\mathcal{V}_p} \iota_{\mathcal{V}_{p-1}} \dots \iota_{\mathcal{V}_1} \omega.$$

Dla dowolnego  $l < k$  pole  $p$ -form  $\omega$  nazywamy **różniczkowalnym klasy  $C^l$  na zbiorze** (otwartym)  $S \subseteq M$ , jeśli dla dowolnej lokalnej mapy  $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{x^n}$  na otoczeniu  $\mathcal{O}$  dowolnego punktu  $x \in S$  zdefiniowane powyżej odwzorowania  $\langle \omega, (\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}) \rangle$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$  są funkcjami różniczkowalnymi klasy  $C^l$  na  $\mathcal{O} \cap S$ . Zbiór pól  $p$ -form klasy  $C^l$  na  $M$ , wyposażony w naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem  $C^l(M, \mathbb{R})$ , oznaczamy symbolami

$$\Omega_{(l)}^p(M) \equiv \Gamma^l(\bigwedge^p T^*M),$$

dla przypadku  $l = k$  rezerwując symbole

$$\Omega^p(M) \equiv \Gamma(\bigwedge^p T^*M).$$

Na potrzeby przyszych naszych rozważań wprowadzamy także oznaczenia

$$\Omega_{(l)}^0(M) \equiv C^l(M, \mathbb{R}),$$

oraz

$$\Omega^0(M) \equiv C^k(M, \mathbb{R}).$$

Moduł

$$\Omega_{(l)}^\bullet(M) := \bigoplus_{p=0}^n \Omega_{(l)}^p(M)$$

nad pierścieniem  $C^l(M, \mathbb{R})$  nazywamy **modułem form różniczkowych** klasy  $C^l$  na  $M$ . W przypadku  $l = \infty$  stosujemy zapis

$$\Omega^\bullet(M) \equiv \Omega_{(\infty)}^\bullet(M).$$

▲

Moduł form różniczkowych na rozmaitości jest wyposażony w naturalną dodatkową strukturę algebraiczną. Poniżej przypominamy ją w sposób dopasowany do jej konkretnych standardowych zastosowań praktycznych. Już niebawem poddamy ją formalizacji, która pozwoli na rozszerzenie zakresu zastosowań i zarazem umieści formy różniczkowe w szerszym kontekście algebraicznym. Zaczynamy od określenia naturalnego mnożenia na przestrzeni form, stanowiącego prostą geometryzację wprowadzonej wcześniej operacji dwuliniowej na formach wieloliniowych alternujących.

**DEFINICJA 79.** Przyjmijmy zapis Def. 78 oraz Stw. 5. **Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych** to odwzorowanie dwu- $C^l(M, \mathbb{R})$ -liniowe

$$\wedge : \Omega_{(l)}^\bullet(M) \times \Omega_{(l)}^\bullet(M) \longrightarrow \Omega_{(l)}^\bullet(M)$$

o ograniczeniach – określonych dla dowolnych  $p_1, p_2 \in \overline{1, n}$  –

$$\forall_{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_{(l)}^{p_1}(M) \times \Omega_{(l)}^{p_2}(M)} \forall_{x \in M} : (\omega_1 \wedge \omega_2)(x) := \omega_1(x) \wedge_{p_1, p_2} \omega_2(x)$$

oraz

$$\forall_{(f, \omega) \in \Omega_{(l)}^0(M) \times \Omega_{(l)}^{p_2}(M)} \forall_{x \in M} : (f \wedge \omega)(x) := f(x) \cdot \omega(x).$$

▲

Podstawowe własności iloczynu zewnętrznego opisuje

**STWIERDZENIE 106.** *Przyjmijmy zapis Def. 79 i ustalmy (dowolnie)  $p_1, p_2, p_3 \in \overline{0, n}$  oraz  $\omega_\alpha \in \Omega_{(l)}^{p_\alpha}(M)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ . Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych spełnia tożsamości:*

$$\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{p_1 p_2} \omega_1 \wedge \omega_2$$

oraz

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3).$$

■

Dowód: Oczywista konsekwencja Stw. 5. □

W następnej kolejności przechodzimy do konstrukcji uwzględniających strukturę analityczną na  $M$  (więc i na  $\Omega_{(l)}^\bullet(M)$ ). Oto więc mamy

**DEFINICJA 80.** Przyjmijmy zapis Def. 71 oraz 79 i ustalmy (dowolnie)  $l \in \mathbb{N}^\times$ . **Pochodna zewnętrzna** to jedyne odwzorowanie

$$d : \Omega_{(l)}^\bullet(M) \longrightarrow \Omega_{(l-1)}^\bullet(M)$$

spełniające aksjomaty:

(ED1)  $d$  jest  $\mathbb{R}$ -liniowe;

(ED2) w ograniczeniu do  $\Omega_{(l)}^0(M) \ni f$  jest ono określone wzorem

$$\langle df, \cdot \rangle : \mathfrak{X}^1(M) \longrightarrow C^{\min(l-1,1)}(M, \mathbb{R}) : \mathcal{V} \longmapsto D_{\mathcal{V}}f,$$

przy czym

$$\forall f \in \Omega_{(l)}^0(M) : d \circ d(f) = 0;$$

(ED3) dla dowolnych  $\omega_{\alpha} \in \Omega_{(l)}^{p_{\alpha}}(M)$ ,  $p_{\alpha} \in \overline{0, n}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  zachodzi tożsamość

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{p_1} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

▲

UWAGA 25. Warto przekonać się, że powyższe warunki w istocie określają operator pochodnej zewnętrznej  $d$  w pełni jednoznacznie. Rozważmy dziedzinę dowolnej lokalnej mapy  $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  na otoczeniu  $\mathcal{O}$  dowolnego punktu  $x \in \mathcal{O}$ . Jednoformy  $dx^i \in \Omega^1(\mathcal{O})$ ,  $i \in \overline{1, n}$  tworzą bazę modułu  $\Omega_{(l)}^1(\mathcal{O})$ , oto bowiem w świetle Stw. 8 dowolną  $p$ -formę  $\omega \in \Omega_{(l)}^p(\mathcal{O})$  można przedstawić (w sposób jednoznaczny) w postaci

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

przy czym dla *dowolnych*  $i_k \in \overline{1, n}$ ,  $k \in \overline{1, p}$  wprowadziliśmy oznaczenie

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} := \langle \omega, \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right) \rangle \in C^l(\mathcal{O}, \mathbb{R}).$$

Wobec oczywistej relacji

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} = \text{sgn}(\sigma) \omega_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(p)}}$$

możemy przepisać powyższy wzór w postaci

$$\omega \equiv \frac{1}{p!} \omega_{j_1 j_2 \dots j_p} \triangleright dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_p},$$

gdzie tym razem każdy ze wskaźników jest wysumowany niezależnie po pełnym zakresie zmienności  $\overline{1, n}$ . Na mocy przyjętej aksjomatyki, a wobec skośnej symetrii  $\omega$ , pochodna zewnętrzna  $\omega$  jest równa

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!} \left( d\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} + p \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \wedge d \circ d(x^{i_1}) \right) \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} \lrcorner d\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &\equiv \frac{1}{p!} D \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że aksjomaty nie pozostawiają w definicji pochodnej zewnętrznej  $p$ -formy żadnej niejednoznaczności w opisie lokalnym, a ponieważ schemat sklejenia opisów lokalnych pozwala w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O} \cap \tilde{\mathcal{O}}$  z przecięcia dziedzin lokalnych map:  $\kappa$  jak wyżej i  $\tilde{\kappa} = (y^1, y^2, \dots, y^n) : \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  każe utożsamić

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) \triangleright \frac{\partial}{\partial y^j}(x), \quad dx^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(x) \triangleright dy^j(x),$$

przeto wypisana formuła lokalna, w której każdemu obiektowi  $\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$  towarzyszy obiekt  $dx^{i_k}$  podlegający dualnej transformacji liniowej przy przejściu do opisu lokalnego związanego z  $\tilde{\kappa}$ , definiuje obiekt globalny. Bez trudu wyprowadzamy też w

opisie lokalnym – dla dowolnych pól  $\mathcal{V}_\alpha \in \mathfrak{X}^m(M)$ ,  $\alpha \in \overline{0, p}$ ,  $m \leq k$  –

$$\begin{aligned}
\langle d\omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle &= \frac{1}{p!} D_{\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\overline{0, p}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{\sigma(0)}^{i_0} \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{i_1} \dots \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{i_p} \\
&\equiv \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p D_{\mathcal{V}_k} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\overline{0, p}}, \sigma(0)=k} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{i_1} \mathcal{V}_{\sigma(2)}^{i_2} \dots \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{i_p} \\
&= \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \cdot \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{\overline{0, p} \setminus \{k\}}} \operatorname{sgn}(\rho) \mathcal{V}_{\rho(0)}^{i_0} \mathcal{V}_{\rho(1)}^{i_1} \dots \mathcal{V}_{\rho(p)}^{i_p} \\
&= \sum_{k=0}^p (-1)^k \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} D_{\mathcal{V}_k} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p}.
\end{aligned}$$

□

Bezpośrednim następstwem aksjomatów definiujących pochodną zewnętrzną jest

STWIERDZENIE 107. *Przyjmijmy zapis Def. 80. Zachodzi tożsamość*

$$d \circ d = 0.$$

■

*Dowód:* W świetle Uwagi 25 i w przyjętej tam notacji, a przywołując po drodze skośną symetrię iloczynu zewnętrznego, możemy zapisać – dla dowolnej  $p$ -formy  $\omega \in \Omega_{(l)}^p(M)$ ,  $l \geq 2$  –

$$\begin{aligned}
d \circ d(\omega) &= \frac{1}{p!} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \circ D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} (\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}) \triangleright dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\
&= \frac{1}{2 \cdot p!} [D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}, D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}] \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \equiv 0.
\end{aligned}$$

□

Przydatnej reprezentacji pochodnej zewnętrznej dostarcza poniższe

STWIERDZENIE 108. *Przyjmijmy zapis Def. 73 i 80. Pochodna zewnętrzna pola  $p$ -formy  $\omega \in \Omega_{(l)}^p(M)$  spełnia tożsamość, słuszną dla dowolnych  $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p \in \mathfrak{X}^1(M)$ ,*

$$\begin{aligned}
\langle d\omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle &= \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \langle \omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle \\
&\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \langle \omega, ([\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j], \mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle.
\end{aligned}$$

■

*Dowód:* Rozważmy pierwszą z sum po prawej stronie dowodzonej równości,

$$S_1 := \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \langle \omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle,$$

w ograniczeniu do dziedziny  $\mathcal{O}$  lokalnej mapy  $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{x^n}$ . Otrzymujemy wyrażenie lokalne (w zapisie Uwagi 25)

$$S_1 = \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^p (-1)^k \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} D_{\mathcal{V}_k} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} + \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} D_{\mathcal{V}_k} \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \right).$$

Jej porównanie z formułą z końca Uwagi 25 sprowadza tezę dowodzonego stwierdzenia do tożsamości

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} D_{\mathcal{V}_k} \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \right) = \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{[j,i] l_0 \dots l_p} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i] \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}\}}} \text{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_{\sigma([j,i])}} \mathcal{V}_0^{l_{\sigma(0)}} \mathcal{V}_1^{l_{\sigma(1)}} \cdots \mathcal{V}_p^{l_{\sigma(p)}},$$

w której  $\mathcal{V}_{[j,i]} = [\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_i]$ , przy czym należy zwrócić uwagę na porządek indeksów:  $j > i$ . Lewą stronę pożądaną tożsamości rozpisujemy i upraszczamy, jak następuje

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} D_{\mathcal{V}_k} \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \left( \sum_{l=0}^{k-1} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{l=k+1}^p \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \\ & \quad + \sum_{k=0}^p \sum_{l=k+1}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \\ & \quad + \sum_{l=1}^p \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \\ &\equiv \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_l \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \\ & \quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \omega_{j_0 j_1 \dots j_k \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{k-1}^{j_{k-1}} (D_{\mathcal{V}_l} \mathcal{V}_k^{j_k}) \mathcal{V}_{k+1}^{j_{k+1}} \mathcal{V}_{k+2}^{j_{k+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_l^{j_l}} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_l \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} [\mathcal{V}_k, \mathcal{V}_l]^{j_l} \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}}, \end{aligned}$$

czyli wobec relacji  $k > l$  (i zakresu zmienności obu indeksów)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} D_{\mathcal{V}_k} \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \cdots \mathcal{V}_p^{j_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k+l} \omega_{i_0 i_1 \dots i_p} \mathcal{V}_{[k,l]}^i \mathcal{V}_0^{i_0} \mathcal{V}_1^{i_1} \cdots \mathcal{V}_p^{i_p} \overline{\mathcal{V}_k^{j_k} \mathcal{V}_l^{i_l}}. \end{aligned}$$

Z kolei strona prawa rozpisuje się do postaci

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_0 \dots l_p} \\
& \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_{\sigma([j,i])}} \mathcal{V}_0^{l_{\sigma(0)}} \mathcal{V}_1^{l_{\sigma(1)}} \dots \mathcal{V}_p^{l_{\sigma(p)}} \\
= & \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_0 \dots l_p} \\
& \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{\sigma([j,i])}^{l_{[j,i]}} \mathcal{V}_{\sigma(0)}^{l_0} \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{l_1} \dots \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{l_p} \\
= & \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_0 \dots l_p} \sum_{k \in \{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}} \\
& \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}}, \sigma(k)=[j,i]} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_k} \mathcal{V}_{\sigma(0)}^{l_0} \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{l_1} \dots \mathcal{V}_{\sigma(i)}^{l_i} \mathcal{V}_{\sigma(j)}^{l_j} \mathcal{V}_{\sigma([j,i])}^{l_{[j,i]}} \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{l_p} \\
= & \frac{1}{(p-1)!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_{[j,i]}} \omega_{l_{[j,i]} l_0 \dots l_p} \\
& \cdot \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{\overline{0,p} \setminus \{i,j\}}} \operatorname{sgn}(\rho) \mathcal{V}_{\rho(0)}^{l_0} \mathcal{V}_{\rho(1)}^{l_1} \dots \mathcal{V}_{\rho(i)}^{l_i} \mathcal{V}_{\rho(j)}^{l_j} \mathcal{V}_{\rho(p)}^{l_p} \\
= & \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \mathcal{V}_{[j,i]}^l \omega_{l_0 \dots l_p} \mathcal{V}_0^{l_0} \mathcal{V}_1^{l_1} \dots \mathcal{V}_p^{l_p},
\end{aligned}$$

jest zatem równa stronie lewej, zgodnie z postulowaną tezą.  $\square$

Na zakończenie rekapitulacji elementarnej struktury algebraicznej i analitycznej na zbiorze form różniczkowych na rozmaitości, należy jeszcze wspomnieć o konstrukcji w pewnym sensie dualnej w stosunku do dyskutowanego wcześniej transportu stycznościowego wektorów i pól wektorowych, a stanowiącej uogólnienie operacji cofnięcia funkcji wzdłuż odwzorowania, wprowadzonej w dowodzie Tw. 1.4.19. Mówi o niej

**DEFINICJA 81.** Przyjmijmy zapis Def. 78 i niechaj  $F : M_1 \rightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^{r+1}$  między  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . **Cofnięcie pola form** na  $M_2$  wzdłuż odwzorowania  $F$  to odwzorowanie

$$F^* : \Omega_{(l)}^p(M_2) \rightarrow \Omega_{(\min(l,r))}^p(M_1)$$

zadawane w dowolnym punkcie  $x \in M_1$  formułą

$$(F^* \omega)(x) := \omega(F(x)) \circ \bigtimes_{k=1}^p \Gamma_x F.$$

$\blacktriangle$

Kluczowe własności operacji cofnięcia zbiera

**STWIERDZENIE 109.** Przyjmijmy zapis Def. 81 i niechaj  $F : M_1 \rightarrow M_2$  oraz  $G : M_2 \rightarrow M_3$  będą odwzorowaniami klasy  $C^1$  między  $C^k$ -rozmaitościami ( $k > r$ )  $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Zdefiniowane przez nie cofnięcia pola form spełniają tożsamości

$$F^* \circ \wedge = \wedge \circ (F^* \times F^*),$$



$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* ,$$

$$F^* \circ d = d \circ F^* .$$

■

*Dowód:* Oczywiście – najwygodniej przeprowadzić go w reprezentacji lokalnej, jak w Uwadze 25. □

W dalszej części dyskusji w ramach niniejszego wprowadzenia wykorzystamy functor styczny w klasyfikacji odwzorowań między rozmaitościami różniczkowalnymi, poznając przy tej okazji kilka standardowych metod ich konstrukcji.

DEFINICJA 82. Przyjmijmy zapis Stw. 95 i jego dowodu. Odwzorowanie  $f \in C^1(M_1, M_2)$  między dwiema  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  (dla  $k \geq 1$ ) nazywamy

- **immersywnym w punkcie**  $x \in M_1$ , jeśli odwzorowanie styczne  $T_x f$  jest iniektywne, tj.  $\ker T_x f = \{0\}$ ;
- **submersywnym w punkcie**  $x \in M_1$ , jeśli odwzorowanie styczne  $T_x f$  jest surjektywne, tj.  $\operatorname{im} T_x f = T_{f(x)} M_2$ ;

Ileokroć odwzorowanie  $f$  jest immersywne (wzgl. submersywne) w każdym punkcie swej dziedziny, określamy je mianem **immersji** lub **zanurzenia** (wzgl. **submersji**). Immersja będąca homeomorfizmem na obraz to **włożenie**.

▲

W przyjętym przez nas schemacie interpretacyjnym immersje i submersje jawią się jako geometryzacje znanych dobrze pojęć z algebry liniowej: monomorfizmu i – odpowiednio – epimorfizmu przestrzeni wektorowych. Oczywiście związek między wektorami stycznymi w punkcie rozmaitości i lokalnymi układami współrzędnych w jego otoczeniu w połączeniu z Tw. 18 prowadzi do stwierdzeń o kanonicznej postaci odwzorowania immersywnego (wzgl. submersywnego) w danym punkcie, które przedstawiamy poniżej. Zaczniemy od odwzorowań immersywnych.

STWIERDZENIE 110 (Twierdzenie o lokalnej immersji). *Przyjmijmy zapis Def. 65. Niechaj  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą  $C^k$ -rozmaitościami o wymiarach  $\dim M_\alpha =: n_\alpha$ ,  $n_2 \geq n_1$  i niech  $f \in C^1(M_1, M_2)$  będzie odwzorowaniem immersywnym w punkcie  $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$  dla pewnego  $y \in M_2$ . Wówczas istnieją otoczenia otwarte  $\mathcal{O}_1 \ni x$  i  $\mathcal{O}_2 \ni y$  oraz lokalne mapy  $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o własnościach*

$$(1.4.40) \quad \kappa_1(x) = 0, \quad \kappa_2(y) = 0$$

oraz

$$(1.4.41) \quad f(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}_2 ,$$

w których lokalna prezentacja odwzorowania  $f$  przyjmuje postać

$$\widetilde{f} \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} = \iota_{1,2,\dots,n_1} \upharpoonright_{\kappa_1(\mathcal{O}_1)} ,$$

gdzie odwzorowanie  $\iota_{1,2,\dots,n_1}$  jest **immersją kanoniczną**

$$\iota_{1,2,\dots,n_1} : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, 0, 0, \dots, 0) .$$

■

Dowód: Rozważmy lokalną prezentację  $f$  względem dowolnych map  $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_\alpha}}$  określonych na pewnych otoczeniach  $\mathcal{U}_1 \ni x$  i  $\mathcal{U}_2 \ni y$ , przy czym dokonując – jeśli trzeba – ich trywialnej modyfikacji (translacja wartości o stałą) możemy zawsze wycentrować oba układy współrzędnych na – odpowiednio –  $\psi_1(x)$  i  $\psi_2(y)$ . Przy tym jeśli warunek  $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_2$  nie jest spełniony, wystarczy zastąpić mapę  $\psi_1$  podmapą  $\psi_1 \upharpoonright_{\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2)}$ , o dziedzinie  $\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2) =: \mathcal{U}_1^f$ . Wprowadźmy oznaczenie  $\widehat{f} := \psi_2 \circ f \circ (\psi_1 \upharpoonright_{\mathcal{U}_1^f})^{-1}$ . Skoro  $T_0\widehat{f}$  jest iniekcją, możemy w świetle Stw. 18 wybrać bazy  $\mathcal{B}_\alpha$  w  $\mathbb{R}^{x_{n_\alpha}} \cong T_0\mathbb{R}^{x_{n_\alpha}}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  tak, by macierz odwzorowania  $T_0\widehat{f}$  względem tych baz miała postać

$$[T_0\widehat{f}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{0}_{(n_2-n_1) \times n_1} \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$G : \psi_1(\mathcal{U}_1^f) \times \mathbb{R}^{x_{n_2-n_1}} \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_2}} : (v, w) \mapsto \widehat{f}(v) + (0, w),$$

którego styczne ma (względem baz wybranych uprzednio) postać  $T_0G = \mathbf{1}_{n_2}$ , w szczególności więc jest odwracalne. Na mocy Tw. 1.4.7  $G$  jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(\psi_1(\mathcal{U}_1^f) \times \mathbb{R}^{x_{n_2-n_1}})$  punktu  $0$  na otoczenie  $\mathcal{V}$  tegoż punktu w  $\mathbb{R}^{x_{n_2}}$ . Zauważmy jednak, że

$$\widehat{f} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})} = G \circ \iota_{1,2,\dots,n_1} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})},$$

co wobec lokalnej odwracalności  $G$  możemy przepisać jako

$$((G \upharpoonright_{\mathcal{U}})^{-1} \circ \psi_2) \circ f \circ \psi_1^{-1} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})} = \iota_{1,2,\dots,n_1} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})}.$$

Mapy  $\kappa_1 := \psi_1 \upharpoonright_{\psi_1^{-1} \circ \iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})}$  oraz  $\kappa_2 := (G \upharpoonright_{\mathcal{U}})^{-1} \circ \psi_2 \upharpoonright_{\psi_2^{-1}(\mathcal{V})}$  są tymi właśnie, o których mowa w tezie dowodzonego stwierdzenia.  $\square$

Odpowiednikiem powyższego dla odwzorowań submersywnych jest

**STWIERDZENIE 111** (Twierdzenie o lokalnej submersji). *Przyjmijmy zapis Def. 65. Niechaj  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą  $C^k$ -rozmaitościami o wymiarach  $\dim M_\alpha =: n_\alpha$ ,  $n_2 \leq n_1$  i niech  $f \in C^1(M_1, M_2)$  będzie odwzorowaniem submersywnym w punkcie  $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$  dla pewnego  $y \in M_2$ . Wówczas istnieją otoczenia otwarte  $\mathcal{O}_1 \ni x$  i  $\mathcal{O}_2 \ni y$  oraz lokalne mapy  $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_\alpha}}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o własnościach (1.4.40) i (1.4.41), w których lokalna prezentacja odwzorowania  $f$  przyjmuje postać*

$$\widetilde{f} \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} = \pi_{1,2,\dots,n_2} \upharpoonright_{\kappa_1(\mathcal{O}_1)},$$

gdzie odwzorowanie  $\pi_{1,2,\dots,n_2}$  jest **submersją kanoniczną**

$$\pi_{1,2,\dots,n_2} : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2, \dots, x_{n_2}, \dots, x_{n_1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n_2}).$$

■

Dowód: Postępując jak w dowodzie poprzedniego stwierdzenia, otrzymujemy surjekttywne odwzorowanie  $T_0\widehat{f}$ , w przypadku którego możemy tak dobrać bazy  $\mathcal{B}_\alpha$  w  $\mathbb{R}^{x_{n_\alpha}}$ , aby było

$$[T_0\widehat{f}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = (\mathbf{1}_{n_2} | \mathbf{0}_{n_2 \times (n_1-n_2)}).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$G : \psi_1(\mathcal{U}_1^f) \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_1}}$$

$$: \widehat{x} := (x_1, x_2, \dots, x_{n_2}, \dots, x_{n_1}) \mapsto (\widehat{f}(\widehat{x}), x_{n_2+1}, x_{n_2+2}, \dots, x_{n_1}),$$

którego styczne ma (względem baz wybranych uprzednio) postać  $T_0G = \mathbf{1}_{n_1}$ , zatem na mocy Tw. 1.4.7  $G$  jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(\psi_1(\mathcal{U}_1^f))$  punktu 0 na otoczenie  $\mathcal{V}$  tegoż punktu w  $\mathbb{R}^{x_{n_1}}$ . Skoro zaś

$$\widehat{f} = \pi_{1,2,\dots,n_2} \circ G,$$

to wobec odwracalności  $G|_{\mathcal{U}}$  możemy zapisać

$$\psi_2 \circ f \circ (\psi_1^{-1} \circ (G|_{\mathcal{U}})^{-1}) = \pi_{1,2,\dots,n_2}|_{\mathcal{V}},$$

otrzymując poszukiwane mapy  $\kappa_1 := G \circ \psi_1|_{\psi_1^{-1}(\mathcal{U})}$  oraz  $\kappa_2 := \psi_2$ .  $\square$

Warto zwrócić uwagę, że zarówno obraz immersji kanonicznej, jak i dowolna poziomiczna submersji kanonicznej są podrozmaitościami w – odpowiednio – przeciwdziedzinie i dziedzinie odnośnego odwzorowania. To stwierdzenie traci słuszność w ogólnym przypadku (tj. w przypadku dowolnej immersji<sup>11</sup> wzgl. submersji), o czym łatwo jest się przekonać analizując immersje okręgu oraz prostej w  $\mathbb{R}^{x^2}$ , których obrazem jest lemniskata, jak również poziomiczne rzutu w  $\mathbb{R}^{x^3}$  na pierwszą składową ograniczonego do torusa zanurzonego w  $\mathbb{R}^{x^3}$  tak, że leży on w sposób stabilny na płaszczyźnie  $x_3 = 0$ , a jego środek symetrii jest na osi  $x_1 = 0 = x_2$ . W dalszej części naszej dyskusji zajmiemy się zbadaniem warunków, jakie muszą być spełnione w każdym z wymienionych przypadków, aby obraz wzgl. przeciwobraz punktu (tudzież innej podrozmaitości) względem  $C^r$ -odwzorowania był podrozmaitością. W wyniku naszych dociekań nie tylko uzyskamy wygodne narzędzia konstrukcji nowych podrozmaitości, ale też – jak się okaże – otrzymamy przydatny opis *dowolnej* rozmaitości. Zaczynamy od immersji.

**TWIERDZENIE 1.4.21.** *Przyjmijmy zapis Def. 65 i niechaj  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  będzie  $C^k$ -rozmaitością. Podzbiór  $S \subset M$  jest podrozmaitością klasy  $C^k$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest on obrazem włożenia klasy  $C^k$ .*

■

Dowód:

- $\Rightarrow$  Każda podrozmaitość dziedziczy strukturę różniczkową z przestrzeni zanurzenia. Wprost na mocy definicji kanoniczna iniekcja  $S \hookrightarrow M$  jest włożeniem względem tej struktury różniczkowej (kanoniczną immersją na poziomie lokalnej prezentacji, identycznościowo wkładającą  $S$  w  $M$ ).
- $\Leftarrow$  W pierwszej kolejności sprowadzimy zagadnienie do analizy włożenia klasy  $C^k$  otwartego podzbioru  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{x_{n_1}}$  w  $\mathbb{R}^{x_{n_2}}$ . W tym celu zauważamy, że dla dowolnej podprzestrzeni  $S := f(M_1) \subset M_2$  status podrozmaitości ma charakter lokalny i niezmienny względem dyfeomorfizmów, toteż do jego weryfikacji możemy użyć lokalnych układów współrzędnych:
- $\{ \kappa_{i_2}^2 : \mathcal{O}_{i_2}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_2}} \}_{i_2 \in I_2}$  na  $M_2$ , które pokrywają  $S$  oraz
  - $\{ \kappa_{i_1}^1 : \mathcal{O}_{i_1}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{x_{n_1}} \}_{i_1 \in I_1}$  na  $M_1$ , o własności  $f(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2$ .
- Istnienie atlasów o tych własnościach wynika z ciągłości  $f$ , por. komentarz na str. 8. Wykorzystując ciągłość odwzorowania odwrotnego (oznaczającą otwartość  $f$ , a będącą konsekwencją homeomorficznego charakteru  $f$  w

<sup>11</sup>Należy podkreślić, że źródłem obstrukcji może się okazać nie tylko nieiniektynowy charakter odwzorowania, ale też brak ciągłości jego odwrotności w sytuacji, kiedy odwrotność istnieje.

ograniczeniu do obrazu) możemy zrealizować wymóg bardziej szczegółowy:  $f(\mathcal{O}_{i_1}^1) = S \cap \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2$  – istotnie, w tym celu należy zastąpić wyjściowe pokrycie  $\mathcal{O}_2 = \{\mathcal{O}_{i_2}^2\}_{i_2 \in I_2}$  (ograniczone do  $S$ ) jego rozdrobnieniem względem pokrycia  $f(\mathcal{O}_1) = \{f(\mathcal{O}_{i_1}^1)\}_{i_1 \in I_1}$ . Wystarczy teraz wskazać mapy stowarzyszone z pokryciem  $S$  otrzymanym tym sposobem, w których  $S$  jawi się lokalnie jako otwarty podzbiór  $\mathbb{R}^{x_{n_1}} \equiv \mathbb{R}^{x_{n_1}} \times \{\mathbf{0}_{n_2-n_1}\} \subset \mathbb{R}^{x_{n_2}}$ . Oznaczmy  $\mathcal{U}_{i_1}^1 := \kappa_{i_1}^1(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathbb{R}^{x_{n_1}}$ ,  $i_1 \in I_1$  i rozważmy

$$f_{i_1} = \kappa_{\phi(i_1)}^2 \circ f \circ (\kappa_{i_1}^1)^{-1} : \mathcal{U}_{i_1}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^{x_{n_2}}.$$

Lokalne prezentacje  $f_{i_1}$  to – rzecz jasna – włożenia klasy  $C^k$ , przeto na mocy Stw. 110 możemy wybrać w ich dziedzinie i przeciwdziedzinie współrzędne, w których te odwzorowania przyjmują postać kanoniczną i które tym samym sparametryzują zbiory  $f(\mathcal{O}_{i_1}^1)$  w pożądanym sposób.  $\square$

Szczegółowa dyskusja warunków, w których poziomica ustalonego punktu ze zbioru wartości odwzorowania klasy  $C^k$  jest podrozmaitością, wymaga wprowadzenia dodatkowych pojęć, co czynimy poniżej.

DEFINICJA 83. Przyjmijmy zapis Def. 82. Jeśli  $f$  jest submersywnie w punkcie  $x \in M_1$ , to wówczas  $x$  nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania  $f$ . W przeciwnym razie mówimy o **punkcie krytycznym**. Punkt przeciwdziedziny  $y \in M_2$  będący obrazem punktu krytycznego względem  $f$  to **wartość krytyczna**, wszystkie pozostałe punkty przeciwdziedziny (nie wyłączając tych spoza obrazu odwzorowania) noszą miano **wartości regularnych**. Poziomice  $f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$  wartości regularnych  $y \in M_2$  bywają nazywane **poziomicami regularnymi**, a w przypadku surjektywnej submersji także **włóknami**. Rozmaitość  $M_1$  zyskuje w tym kontekście przydomek **przestrzeni totalnej (submersji)**. Niechaj  $f_\alpha : M_1^{(\alpha)} \rightarrow M_2^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą submersjami. Parę odwzorowań gładkich  $F_\beta : M_\beta^{(1)} \rightarrow M_\beta^{(2)}$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} M_1^{(1)} & \xrightarrow{F_1} & M_1^{(2)} \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ M_2^{(1)} & \xrightarrow{F_2} & M_2^{(2)} \end{array}$$

nazywamy **morfizmem submersji**. Powiemy też, że  $F_1$  zachowuje włókna obu submersji.  $\blacktriangle$

O pierwszorzędnym znaczeniu wprowadzonych tu pojęć w kontekście naszych rozważań przekonuje

**TWIERDZENIE 1.4.22 (O wartości regularnej).** *Poziomica regularna odwzorowania klasy  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  pomiędzy  $C^k$ -rozmaitościami jest podrozmaitością klasy  $C^k$  w dziedzinie tegoż odwzorowania, wymiaru równego różnicy wymiarów dziedzin i przeciwdziedziny odwzorowania.*  $\blacksquare$

*Dowód:* Jak stwierdziliśmy uprzednio, status podrozmaitości ma charakter lokalny i niezmienniczy względem dyfeomorfizmów, przeto jego weryfikację wystarczy przeprowadzić w dziedzinie jednej z map na dziedzinie odwzorowania oraz w dziedzinie odnośnej mapy na jego przeciwdziedzinie. Rozważmy zatem otwarte otoczenie punktu regularnego  $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$  odwzorowania  $f : M_1 \rightarrow M_2$  klasy  $C^k$  między  $C^k$ -rozmaitościami  $M_1$  i  $M_2$ . Odwzorowanie  $f$  jest submersywne w  $x$ , zatem na mocy Stw. 111 istnieją lokalne układy współrzędnych  $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  na zbiorach otwartych  $\mathcal{O}_1 \ni x$  i  $\mathcal{O}_2 \ni y$  o własnościach (1.4.40) i (1.4.41) i takie, w których lokalna prezentacja  $\tilde{f} = \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}$  jest ograniczeniem submersji kanonicznej do  $\kappa_1(\mathcal{O}_1)$ . Wprost z konstrukcji wynika, że dla każdego punktu  $\tilde{x} \in \mathcal{O}_1 \cap f^{-1}(\{y\})$  jest spełniony warunek  $x^k(\tilde{x}) = 0$ ,  $k \in \overline{1, n_2}$  dla składowych mapy  $\kappa_1 = (x^1, x^2, \dots, x^{n_2})$ , oto bowiem

$$(x^1(\tilde{x}), x^2(\tilde{x}), \dots, x^{n_2}(\tilde{x})) = \tilde{f} \circ \kappa_1(\tilde{x}) \equiv \kappa_2 \circ f(\tilde{x}) = \kappa_2(y) = 0.$$

Jest to jedyny warunek, jaki przyjęte założenia narzucają na  $\kappa_1(\tilde{x})$ , stąd też podprzestrzeń  $\mathcal{O}_1 \cap f^{-1}(\{y\})$  jest parametryzowana przez  $n_1 - n_2$  ostatnich współrzędnych na  $\mathcal{O}_1$ ,

$$\kappa_1(\tilde{x}) = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n_2}, x^{n_2+1}(\tilde{x}), x^{n_2+2}(\tilde{x}), \dots, x^{n_1}(\tilde{x}),$$

co daje nam tezę dowodzonego twierdzenia.  $\square$

Warto przy tej okazji odnotować także powszechnie stosowane

**STWIERDZENIE 112.** *W oznaczeniach dowodu Tw. 1.4.22 zachodzi tożsamość*

$$\mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\}) = \ker \mathbb{T}_x f.$$

■

*Dowód:* Jako że  $f$  jest stałe na swej poziomicy, zachodzi równość

$$\mathbb{T}_x f \upharpoonright_{\mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\})} = 0,$$

więc też

$$\mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\}) \subset \ker \mathbb{T}_x f.$$

Z drugiej strony czysto algebraiczny bilans wymiarów ze Stw. 17 dla odwzorowania liniowego  $\mathbb{T}_x f$  daje nam – wobec jego surjektywności, a w świetle Tw. 1.4.22 – równość

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \ker \mathbb{T}_x f &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M_1 - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} \mathbb{T}_x f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M_1 - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_y M_2 \\ &\equiv \dim M_1 - \dim M_2 = \dim f^{-1}(\{y\}) \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\}), \end{aligned}$$

która zamyka dowód.  $\square$

Tytułem rozwinięcia dotychczasowej naszej dyskusji podstawowych typów odwzorowań różniczkowalnych między rozmaitościami omówimy kilka przykładów oraz podstawowe ich własności. Zaczyniemy od warunków wystarczających dla bycia immersją.

**STWIERDZENIE 113.** *Przyjmijmy zapis Def. 65 i ustalmy (dowolnie)  $k \in \mathbb{N}^*$ . Każde injektywne  $C^k$ -odwzorowanie o stałym rzędzie (w rozumieniu Tw. 1.4.9, odniesionego do dowolnej lokalnej prezentacji odwzorowania) między dwiema  $C^k$ -rozmaitościami jest immersją.* ■

*Dowód:* Załóżmy, że  $C^k$ -odwzorowanie  $f : M_1 \rightarrow M_2$  o stałym rzędzie  $\text{rk} DF = r$  między dwiema  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  wymiaru  $n_\alpha := \dim M_\alpha$  jest wprawdzie injektywne, ale *nie* jest immersją, czyli  $r < n_1$ . Rozważmy obrazy: dowolnego punktu  $x \in M_1$  oraz jego obrazu  $f(x) \in M_2$  względem odnośnych lokalnych map  $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathcal{U}_\alpha$  określonych na pewnych otwartych otoczeniach:  $\mathcal{O}_1 \ni x$  i  $\mathcal{O}_2 \ni f(x)$ , które są odwzorowywane homeomorficznie w odnośne zbiory otwarte  $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^{n_\alpha}$ . Odwzorowanie  $\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$  spełnia założenia Tw. 1.4.9, możemy przeto odnieść do niego tezę tego twierdzenia, która przesądza o istnieniu na pewnych otoczeniach  $\widetilde{\mathcal{U}}_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  punktów:  $\kappa_1(x) \in \widetilde{\mathcal{U}}_1$  i  $\kappa_2 \circ f(x) \in \widetilde{\mathcal{U}}_2$  lokalnych transformacji współrzędniowych (dyfeomorfizmów)  $\iota_\alpha$  klasy  $C^k$ , które pozwalają sprowadzić lokalną prezentację  $f$  do szczególnie prostej postaci danej wzorem (wykorzystującym notację Tw. 1.4.9)

$$\iota_2^{-1} \circ \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \circ \iota_1^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) = (x_1, x_2, \dots, x_r, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_2-r}).$$

To jednak prowadzi nas do wniosku, że wszystkie punkty z dziedziny powyższej lokalnej prezentacji, które są szczególnej postaci  $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_r, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n_1-r})$ ,  $\varepsilon_i \in$

$\mathbb{R}$ ,  $i \in \overline{1, n_1 - r}$ , są przez nią przeprowadzane na punkt  $\mathbf{0}_{n_2}$ , co wobec relacji  $r < n_1$  implikuje nieinjektywność tejże lokalnej prezentacji, a zatem także – nieinjektywność  $f$ , w sprzeczności z poczynionymi założeniami. □

Praktyczny opis włożenia zawiera natomiast

**STWIERDZENIE 114.** *Każda injektywna immersja będąca odwzorowaniem właściwym jest gładkim włożeniem.* ■

*Dowód:* Odwzorowanie, o którym mowa w treści stwierdzenia, jest na mocy Stw. 68 (które możemy tu zastosować na podstawie Stw. 92) domknięte, co w świetle Stw. 61 oznacza, że jest ono włożeniem topologicznym. □

Przydatny przykład zastosowania powyższego rezultatu stanowi

**STWIERDZENIE 115.** *Przyjmijmy zapis Def. 65 i niechaj  $f : M_1 \rightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^k$  pomiędzy dwiema  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . **Wykres odwzorowania**  $f$ , tj. podzbiór*

$$\text{graph}(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in M_1 \} \subset M_1 \times M_2,$$

*wyposażony w topologię produktową, jest podrozmaitością klasy  $C^k$  rozmaitości produktowej  $M_1 \times M_2$ .* ■

*Dowód:* Odwzorowanie  $(\text{id}_{M_1}, f) : M_1 \rightarrow M_1 \times M_2$ , którego obrazem jest  $\text{graph}(f)$ , jest w oczywisty sposób injektywną immersją. Ponadto jest ono właściwe. Istotnie, rozważmy dowolny zbiór zwarty  $\mathcal{K} \subset M_1 \times M_2$  oraz dowolny ciąg punktów

$x : \mathbb{N} \rightarrow (\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$  w jego przeciwobrazie w  $M_1$ . Obraz tego ciągu w  $\mathcal{K}$  zawiera – w świetle Stw. 66 – pewien podciąg zbieżny  $(x_n, f(x_n)) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{K}$  o granicy  $(x_*, f(x_*)) \in \mathcal{K}$ , której postać jest podyktowana przez założoną ciągłość  $f$ . Ów podciąg definiuje podciąg  $x_n : \mathbb{N} \rightarrow (\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$  zbieżny do  $x_* \in (\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$ , co przesądza o zwartości zbioru  $(\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$ . Na gruncie Stw. 114 konstatujemy, że  $(\text{id}_{M_1}, f)$  jest gładkim włożeniem, więc też – w odwołaniu do Tw. 1.4.21 – jego obraz  $\text{graph}(f)$  jest podrozmaitością klasy  $C^k$ , zgodnie z postulowaną tezą.  $\square$

Przejdziemy teraz do dyskusji odwzorowań submersywnych. Prostą, acz istotną ich własność, stanowiącą geometryzację zaawansowanego pojęcia algebry liniowej, jakim jest rozszczepialny krótki ciąg dokładny modułów nad pierścieniem, opisuje

**STWIERDZENIE 116.** *Przyjmijmy zapis Def. 82. Obraz każdego punktu regularnego  $x \in M_1$  odwzorowania  $f : M_1 \rightarrow M_2$  klasy  $C^l$ ,  $l \leq k$  (dla  $k \geq 1$ ) ma otoczenie  $\mathcal{O}_{f(x)} \ni f(x)$ , na którym jest określone odwzorowanie  $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow M_1$  klasy  $C^l$  o własnościach*

$$f \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} \quad \wedge \quad \sigma \circ f(x) = x,$$

zwane **cięciem lokalnym** odwzorowania  $f$ . ■

*Dowód:* Teza ma charakter lokalny, możemy zatem ograniczyć rozważania do pewnego otoczenia  $\mathcal{O}_x \ni x$  będącego dziedziną lokalnej mapy  $\kappa_1 : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{U}_1$ ,  $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x_{n_1}})$ , w której  $\kappa_1(x) = 0$ , a także – do pewnego otoczenia  $\tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \ni f(x)$  będącego dziedziną lokalnej mapy  $\kappa_2 : \tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \rightarrow \mathcal{U}_2$ ,  $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{x_{n_2}})$ , w której  $\kappa_2 \circ \pi(x) = 0$ . Submersywność  $f$  w  $x$  oznacza, że odwzorowanie styczne

$$T_{\kappa(x)=0}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}) : T_{\kappa_1(x)=0}\mathbb{R}^{x_{n_1}} \cong \mathbb{R}^{x_{n_1}} \rightarrow T_{\kappa_2 \circ f(x)=0}\mathbb{R}^{x_{n_2}} \cong \mathbb{R}^{x_{n_2}}$$

jest epimorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych. Niechaj zatem  $V_1 \subset \mathbb{R}^{x_{n_1}}$  będzie (dowolną) podprzestrznią izomorficznie odwzorowywaną w  $\mathbb{R}^{x_{n_2}}$  przez (ograniczenie)  $T_{\kappa(x)}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})$ , a wtedy odwzorowanie styczne do odwzorowania klasy  $C^l$

$$F := \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}|_{\mathcal{U}_1 \cap V_1} : \mathcal{U}_1 \cap V_1 \rightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{x_{n_2}},$$

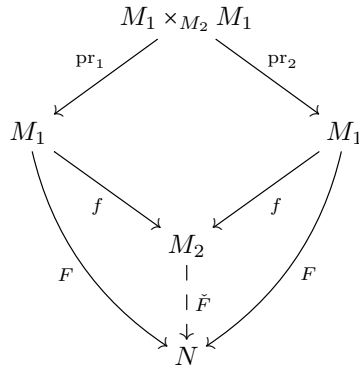
o jawnie niepustej dziedzinie (wszak  $V_1$  jest podprzestrznią w  $\mathbb{R}^{x_{n_1}}$ , a  $\mathcal{U}_1$  jest otoczeniem wektora 0), jest odwracalne. Istotnie, wobec tożsamości  $T_0V_1 \cong V_1$ , dziedzina  $T_0F$  przyjmuje postać  $T_0\mathcal{U}_1 \cap T_0V_1 \cong \mathbb{R}^{x_{n_1}} \cap V_1 = V_1$ , co oznacza, że  $T_0F$  jest izomorfizmem

$$T_0F \cong T_0(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})|_{V_1}.$$

W odwołaniu do Tw. 1.4.7 wnioskujemy zatem, że  $F \cong \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}|_{\mathcal{U}_1 \cap V_1}$  ma pożądaną lokalną odwrótność  $\kappa_1 \circ \sigma \circ \kappa_2^{-1}|_{F(\mathcal{U}_0)}$  klasy  $C^l$  na pewnym otoczeniu  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \cap V_1$  wektora  $0 \cong \kappa_1(x)$ . Homeomorficzny przeciwobraz  $\kappa_1^{-1}(\mathcal{U}_0)$  tego ostatniego jest postulowanym otoczeniem punktu  $x$ , na którym jest określone lokalne cięcie  $\sigma$  klasy  $C^l$ .  $\square$

I wreszcie na koniec rzut oka na własności submersji, która ukazuje ją jako byt pokrewny dyskutowanym wcześniej algebraicznym strukturom uniwersalnym.

STWIERDZENIE 117 (Kwazi-universalna<sup>12</sup> własność submersji). *Przyjmijmy zapis Def. 48 i 82 oraz Przykł. 21 (1), zakładając przy tym, że  $f : M_1 \rightarrow M_2$  jest surjektywną submersją klasy  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Niechaj ponadto  $N$  będzie  $C^k$ -rozmaitością, a  $\check{F} : M_2 \rightarrow N$  dowolnym odwzorowaniem. Odwzorowanie  $\check{F}$  jest klasy  $C^k$  wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie złożone  $\check{F} \circ f : M_1 \rightarrow N$  ma tę własność. W szczególności każdemu  $C^k$ -odwzorowaniu  $F : M_1 \rightarrow N$  stałemu na poziomicach  $f$  odpowiada dokładnie jedno odwzorowanie  $\check{F} \in C^k(M_2, N)$  o własności wyrażonej – wraz z rzezoną własnością  $f$  – przez diagram przemienny*



■

*Dowód:* Ilekroć  $g$  jest klasy  $C^k$ , także  $g \circ f$  ma tę własność jako superpozycja odwzorowań klasy  $C^k$ .

I odwrotnie, niechaj  $g \circ f \in C^k(M_1, N)$ . Wobec surjektywności  $f$  dowolny punkt w  $M_2$  możemy przedstawić w postaci  $f(x)$  dla pewnego  $x \in M_1$ . Wybierzmy zatem (dowolnie) punkt  $f(x) \in M_2$  oraz jego otoczenie  $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$ , na którym jest określone cięcie lokalne  $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow M_1$  odwzorowania  $f$  spełniające warunki z tezy Stw. 116. Przyjawszy zapis dowodu rzezonego stwierdzenia, otrzymujemy tożsamość

$$g \upharpoonright_{\mathcal{O}_{f(x)}} \equiv g \circ \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} = (g \circ f) \circ \sigma,$$

która dowodzi  $C^k$ -gładkości  $g \upharpoonright_{\mathcal{O}_{f(x)}}$  na gruncie założenia o  $C^k$ -gładkości  $g \circ f$  oraz wynikającej ze Stw. 116  $C^k$ -gładkości cięcia lokalnego  $\sigma$ . Dowolność wyboru  $f(x)$  pozwala wnioskować o globalnej  $C^k$ -gładkości  $g$ .

Wreszcie na koniec zajmiemy się udowodnieniem istnienia i jednoznaczności odwzorowania  $g \in C^k(M_2, N)$ , spełniającego tożsamość

$$F = g \circ f.$$

Po pierwsze zauważmy, że każde dwa takie odwzorowania pokrywają się na zbiorze  $f(M_1)$ , który z racji surjektywności  $f$  jest tożsamy z  $M_2$ , przeto odwzorowanie  $g$  może być co najwyżej jedno. Postulujemy

$$g : M_2 \rightarrow N : f(x) \mapsto F(x),$$

wykorzystując raz jeszcze surjektywność  $f$ . Założona przez nas stałość  $F$  na włóknach  $f$  przesądza o sensowności powyższego postulat (  $F(x)$  nie zależy od wyboru

<sup>12</sup>Powodem, dla którego wzbraniamy się przed nadaniem tej własności submersji miana „uniwersalnej”, jest to, że klasa obiektów, pośród których para  $(M_2, f)$  odgrywa rolę „inicjalną”, jest zdefiniowana w terminach odwzorowania  $f$  (chodzi o stałość na poziomicach tego odwzorowania).



reprezentanta włókna  $f^{-1}(\{f(x)\})$ ), a do tego wprost z definicji zachodzi pożądana tożsamość

$$g \circ f(x) = F(x).$$

□

Dotychczasowe nasze rozważania nieuchronnie prowadzą do pytania o warunki, których spełnienie gwarantuje, że przeciwobraz podrozmaitości w przeciwdziedzinie odwzorowania względem tegoż odwzorowania także jest podrozmaitością. Przy ich wyprowadzaniu natrafiamy na naturalne uogólnienie pojęcia „regularności” punktu przeciwdziedziny, o czytelnej interpretacji geometrycznej. Tak jak poprzednio dociekania nasze prowadzimy na poziomie lokalnym. Stwierdzamy przy tym, że przeciwobraz dowolnej podrozmaitości  $S \subset M_2$  klasy  $C^k$  rozmaitości tejże klasy względem odwzorowania  $f : M_1 \rightarrow M_2$  klasy  $C^k$  jest podrozmaitością klasy  $C^k$  wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt  $x \in f^{-1}(S)$  ma otoczenie  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M_1)$  o tej własności, że  $\mathcal{O} \cap f^{-1}(S)$  jest (pod)rozmaitością klasy  $C^k$  (tego samego wymiaru). Ustalmy  $y \in S$  i przywołajmy treść Tw. 1.4.21, z której wynika, że  $S \subset M_2$  jest obrazem włożenia  $\iota_S : S \hookrightarrow M_2$  (klasy  $C^k$ ), zatem też – na mocy Stw. 110 – lokalnie, tj. w pewnym otoczeniu  $\mathcal{O}_y$  punktu  $y$ , jest wspólną poziomicy zerową układu  $\text{codim}_{M_2} S =: s$  liniowo niezależnych funkcji<sup>13</sup>  $w_l := \varphi_2^{\dim S + l}$ ,  $l \in \overline{1, s}$ . Wobec tego w pewnym otoczeniu  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(S) \subset M_1$  zbiór  $f^{-1}(S)$  jest wspólną poziomicy zerową układu funkcji  $w_l \circ f$ ,  $l \in \overline{1, s}$ . Zdefiniujmy submersję<sup>14</sup>

$$w := (w_1, w_2, \dots, w_s) : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathbb{R}^{xs},$$

a następnie rozważmy odwzorowanie

$$w \circ f : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{R}^{xs}.$$

W świetle Tw. 1.4.22 podprzestrzeń  $(w \circ f)^{-1}(\{0\}) \equiv \mathcal{O}_y$  jest podrozmaitością, jeśli 0 jest wartością regularną odwzorowania  $w \circ f$ . Zachodzi

$$\mathbb{T}_x(w \circ f) = \mathbb{T}_y w \circ \mathbb{T}_x f : \mathbb{T}_x \rightarrow \mathbb{T}_0 \mathbb{R}^{xs} \equiv \mathbb{R}^{xs},$$

wobec czego  $\mathbb{T}_x(w \circ f)$  jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbb{T}_y w$  odwzorowuje  $\text{im } \mathbb{T}_x f$  na  $\mathbb{R}^{xs}$ . Jednakowoż  $\ker \mathbb{T}_y w = \mathbb{T}_y S$  na mocy Stw. 112, musimy zatem wobec surjektywności  $\mathbb{T}_y w$  zażądać spełnienia warunku, o którym mowa w

DEFINICJA 84. Przyjmijmy zapis Def. 65. Niechaj  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha) \in \text{Obj } \mathbf{Man}^{(k)}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i niech  $f \in C^1(M_1, M_2)$ , a ponadto niech  $S \subset M_2$  będzie podrozmaitością klasy  $C^k$ . Odwzorowanie  $f$  określamy mianem **transwersalnego w punkcie**  $f(x) \in S$ ,  $x \in M_1$  **względem**  $S$ , co zapisujemy symbolicznie jako

$$f \overline{\pitchfork}_{f(x)} S,$$

jeśli spełnia ono warunek

$$(1.4.42) \quad \text{im } \mathbb{T}_x f + \mathbb{T}_{f(x)} S = \mathbb{T}_{f(x)} M_2$$

(w którego zapisie suma po lewej stronie znaku równości jest sumą algebraiczną przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych). Ilekroć warunek ten jest spełniony w każdym z punktów poziomicy  $f^{-1}(S)$ , mówimy, że odwzorowanie  $f$  jest **transwersalne względem**  $S$  i piszemy  $f \overline{\pitchfork} S$ .

▲

<sup>13</sup>Tj. funkcji o różniczkach liniowo niezależnych na pewnym otoczeniu  $y$ .

<sup>14</sup>Odwzorowanie styczne ma względem odpowiednich baz macierz jednostkową.

W podsumowaniu naszej wcześniejszej analizy możemy już wysłowić

**TWIERDZENIE 1.4.23.** *Przyjmijmy zapis Def. 84 i niechaj  $S \subset M_2$  będzie podrozmaitością klasy  $C^k$ . Jeśli  $f \bar{\pitchfork} S$ , to także  $f^{-1}(S) \subset M_1$  jest podrozmaitością klasy  $C^k$ , przy czym*

$$\text{codim}_{M_1} f^{-1}(S) = \text{codim}_{M_2} S.$$

■

*Dowód:* Jedynym stwierdzeniem, które nie zostało dotąd udowodnione, jest to dotyczące kowymiaru przeciwobrazu. Przypomnijmy, że w dotychczasowych naszych rozważaniach kowymiar  $S$  przyjęliśmy równym  $s$ . Przeciwobraz  $f^{-1}(S)$  możemy opisać lokalnie jako wspólną poziomice zerową układu  $s$  funkcji  $w_l \circ f$ ,  $l \in \bar{1}, s$ , przy czym ich jednoczesne zerowanie się jest jedynym warunkiem definiującym tę podrozmaitość. Ich liniowa niezależność wynika wprost z naszej konstrukcji (patrz: rozumowanie prowadzące do wzoru (1.4.42)), oto bowiem

$$\text{im}(\mathbb{T}_x(w_1 \circ f), \mathbb{T}_x(w_2 \circ f), \dots, \mathbb{T}_x(w_s \circ f)) \equiv \text{im } \mathbb{T}_x(w \circ f) = \mathbb{R}^{\times s}.$$

□

**UWAGA 26.** Ilekroć  $S = \{y\}$  (pojedynczy punkt przeciwdziedziny), powyższa konstrukcja daje  $\mathbb{T}_y S = \{0\} \subset \mathbb{T}_y M_2$ , więc też

$$f \bar{\pitchfork} S \iff \forall_{x \in f^{-1}(\{y\})} : \mathbb{T}_x M_2 = \text{im } \mathbb{T}_x f + 0 \equiv \text{im } \mathbb{T}_x f,$$

co jest równoznaczne z surjektywnością odwzorowania  $\mathbb{R}$ -liniowego  $\mathbb{T}_x f$  w każdym z punktów poziomic. Tym samym odtwarzamy poprzednio wprowadzone pojęcie wartości regularnej jako szczególny przypadek ogólniejszego pojęcia transwersalności odwzorowania względem podrozmaitości. To ostatnie można prosto rozszerzyć do pary podrozmaitości oraz pary odwzorowań o wspólnej przeciwdziedziny, czym zajmujemy się w dalszej części naszej dyskusji.

▮

**DEFINICJA 85.** Przyjmijmy zapis Def. 84 i niechaj  $S_1, S_2 \subset M$  będą dwiema podrozmaitościami klasy  $C^k$ . Powiemy, że są one wzajem **transwersalne**, co zapiszemy symbolicznie jako

$$S_1 \bar{\pitchfork} S_2,$$

jeśli kanoniczna iniekcja  $\iota_{S_1} : S_1 \hookrightarrow M$  spełnia warunek  $\iota_{S_1} \bar{\pitchfork} S_2$  (lub – równoważnie –  $\iota_{S_2} \bar{\pitchfork} S_1$  dla  $\iota_{S_2} : S_2 \hookrightarrow M$ ).

Analogicznie, odwzorowania  $f_\alpha \in C^1(M_\alpha, M)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  określimy jako wzajem **transwersalne**, zapisując

$$f_1 \bar{\pitchfork} f_2,$$

jeśli dla dowolnej pary punktów  $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$  o własności  $f_1(x_1) = f_2(x_2)$  spełniona jest tożsamość

$$\mathbb{T}_{f_1(x)} M = \text{im } \mathbb{T}_{x_1} f_1 + \text{im } \mathbb{T}_{x_2} f_2.$$

▲

Należy zwrócić uwagę, że  $x \in S_1$  należy do przeciwbrazu  $\iota_{S_1}^{-1}(S_2)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \equiv \iota_{S_1}(x) \in S_1 \cap S_2 \subset M$ , a ponieważ  $\mathbb{T}_x \iota_{S_1} : \mathbb{T}_x S_1 \rightarrow \mathbb{T}_{\iota_{S_1}(x)} M$  jest kanonicznym monomorfizmem, przeto

$$(1.4.43) \quad S_1 \bar{\cap} S_2 \iff \forall_{x \in S_1 \cap S_2} : \mathbb{T}_x S_1 + \mathbb{T}_x S_2 = \mathbb{T}_x M,$$

co jest zgodne z intuicją geometryczną leżącą u podstaw całej konstrukcji. Znajduje ona dodatkowe solidne podparcie w

**STWIERDZENIE 118.** *Przyjmijmy oznaczenia Def. 85. Ilekroć  $S_1 \bar{\cap} S_2$ , podprzestrzeń  $S_1 \cap S_2$  ma kanoniczną strukturę podrozmaitości klasy  $C^k$ , kowymiaru*

$$(1.4.44) \quad \text{codim}_M (S_1 \cap S_2) = \text{codim}_M S_1 + \text{codim}_M S_2,$$

więc też

$$\forall_{x \in S_1 \cap S_2} : \mathbb{T}_x (S_1 \cap S_2) = \mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2.$$

■

*Dowód:* W świetle Tw. 1.4.23 (i uwag wypowiedzianych pod jego dowodem)  $\iota_{S_1}^{-1}(S_2) \equiv S_1 \cap S_2$  ma kanoniczną strukturę podrozmaitości, a nadto otrzymujemy równość

$$\text{codim}_{S_1} (S_1 \cap S_2) \equiv \text{codim}_{S_1} \iota_{S_1}^{-1}(S_2) = \text{codim}_M S_2,$$

tj.

$$\dim S_1 - \dim (S_1 \cap S_2) = \dim M - \dim S_2,$$

a zatem

$$\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = -\dim (S_1 \cap S_2).$$

Stąd też

$$\begin{aligned} \text{codim}_M S_1 + \text{codim}_M S_2 &\equiv 2\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = \dim M - \dim (S_1 \cap S_2) \\ &\equiv \text{codim}_M (S_1 \cap S_2), \end{aligned}$$

która pokazuje dowodnie, że  $\text{codim}_M S_1$  liniowo niezależnych funkcji definiujących  $S_1$  jako ich wspólną poziomice zerową, wraz z  $\text{codim}_M S_2$  liniowo niezależnymi funkcjami definiującymi  $S_2$  tworzy układ liniowo niezależny definiujący w tenże sposób  $S_1 \cap S_2$ .

Ponadto jest oczywistym, że  $\mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2 \subset \mathbb{T}_x (S_1 \cap S_2)$ , dla zakończenia dowodu pozostaje więc sprawdzić równość wymiarów obu podprzestrzeni. W tym celu przywołujemy warunek transwersalności (1.4.43), który prowadzi do równości

$$\dim M = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2)$$

i na mocy wcześniej udowodnionej równości kowymiarów (1.4.44) daje pożądaną równość

$$\begin{aligned} \dim M - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x (S_1 \cap S_2) &\equiv \text{codim}_M (S_1 \cap S_2) = \text{codim}_M S_1 + \text{codim}_M S_2 \\ &\equiv 2\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = \dim M - \dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2). \end{aligned}$$

□

Przydatnego przeformułowania warunku definiującego parę map transwersalnych dostarcza

STWIERDZENIE 119. *Przyjmijmy zapis Def. 85 oraz Stw. 115 i rozważmy odwzorowania  $f_\alpha \in C^k(M_\alpha, M)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Prawdziwą jest równoważność*

$$f_1 \bar{\pitchfork} f_2 \iff f_1 \times f_2 \bar{\pitchfork} \text{graph}(\text{id}_M) \subset M \times M.$$

■

*Dowód:* Transwersalność produktu  $f_1 \times f_2$  względem  $\text{graph}(\text{id}_M)$  jest równoznaczna z równością – dla dowolnego punktu  $(x_1, x_2) \in (f_1 \times f_2)^{-1}(\text{graph}(\text{id}_M))$  –

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(f_1 \times f_2)(x_1, x_2)}(M \times M) &= \mathbb{T}_{(f_1 \times f_2)(x_1, x_2)} \text{graph}(\text{id}_M) \\ &\quad + \mathbb{T}_{(x_1, x_2)}(f_1 \times f_2)(\mathbb{T}_{(x_1, x_2)}(M_1 \times M_2)), \end{aligned}$$

którą przepisujemy w postaci

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathbb{T}_{f_2(x_2)}M &= \mathbb{T}_{(f_1(x_1), f_2(x_2))} \text{graph}(\text{id}_M) \\ &\quad + \mathbb{T}_{x_1}f_1(\mathbb{T}_{x_1}M_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2}f_2(\mathbb{T}_{x_2}M_2), \end{aligned}$$

co po uwzględnieniu  $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) \in \text{graph}(\text{id}_M)$  daje

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M &= \mathbb{T}_{(f_1(x_1), f_1(x_1))} \text{graph}(\text{id}_M) \\ &\quad + \mathbb{T}_{x_1}f_1(\mathbb{T}_{x_1}M_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2}f_2(\mathbb{T}_{x_2}M_2) \\ &\equiv \Delta_{\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M}(\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M) \\ &\quad + \mathbb{T}_{x_1}f_1(\mathbb{T}_{x_1}M_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2}f_2(\mathbb{T}_{x_2}M_2), \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy w zapisie określone dla dowolnego punktu  $y \in M$  diagonalne zanurzenie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\Delta_{\mathbb{T}_y M} : \mathbb{T}_y M \longrightarrow \mathbb{T}_y M \oplus \mathbb{T}_y M : v \longmapsto (v, v).$$

Na tym etapie możemy już przywołać Stw. 29, które w obecnym kontekście pozwala zapisać ustalą równoważność między wypisanym rozkładem algebraicznym  $\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M$  i równością

$$\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M = \mathbb{T}_{x_1}f_1(\mathbb{T}_{x_1}M_1) +_G \mathbb{T}_{x_2}f_2(\mathbb{T}_{x_2}M_2),$$

w której rozpoznajemy warunek transwersalności odwzorowań  $f_1$  i  $f_2$ . □

Dotychczasowe nasze ustalenia pozwalają wysłowić twierdzenie dające nam do ręki ważne i naturalne narzędzie konstrukcyjne, z którego przyjdzie nam nieraz korzystać w dalszej części kursu, poświęconej geometryzacji struktur algebraicznych. Oto więc mamy

**TWIERDZENIE 1.4.24.** *Przyjmijmy zapis Def. 85 oraz Przykł. 21 (1) i niechaj  $f_\alpha : M_\alpha \rightarrow M$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą odwzorowaniami klasy  $C^k$  między  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i  $C^k$ -rozmaitością  $(M, \mathcal{A})$ . Wyposażmy produkt włóknisty  $M_1 \times_M M_2$  domykający kopułkę  $((f_1, f_2), M)$  do diagramu przemiennego*

$$\begin{array}{ccc}
 & M_1 \times_M M_2 & \\
 \text{pr}_1 \uparrow_{M_1 \times_M M_2} & \swarrow & \searrow \text{pr}_2 \uparrow_{M_1 \times_M M_2} \\
 M_1 & & M_2 \\
 & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\
 & M &
 \end{array}$$

w topologię podprzestrzeni indukowaną z topologii produktowej na  $M_1 \times M_2$ . Ilekroć  $f_1 \bar{\cap} f_2$ ,  $M_1 \times_M M_2$  jest podrozmaitością klasy  $C^k$  gładko włożoną w  $M_1 \times M_2$ , zwaną **produktem włóknistym rozmaitości różniczkowalnych**  $M_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  **nad rozmaitością**  $M$ . W szczególności jest tak, gdy jedno z odwzorowań  $f_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  jest submersją.

■

Dowód: W świetle Stw. 119, a z racji założenia o transwersalności  $f_1$  i  $f_2$  – spełniona jest relacja

$$f_1 \times f_2 \bar{\cap} \text{graph}(\text{id}_M),$$

a ponieważ produkt włóknisty spełnia tożsamość

$$M_1 \times_M M_2 = (f_1 \times f_2)^{-1} \text{graph}(\text{id}_M),$$

przeto teza wynika wprost z treści Stw. 1.4.23.

W przypadku, gdy (choć) jedno z odwzorowań – powiedzmy, że  $f_1$  – jest submersją, warunek transwersalności wzajemnej obu odwzorowań z pierwszej części tezy dowodzonego twierdzenia jest spełniony automatycznie, oto bowiem dla dowolnej pary punktów  $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$  o własności  $f_1(x_1) = f_2(x_2)$  otrzymujemy ciąg inkluzji

$$\mathbb{T}_{f_1(x)} M = \text{im } \mathbb{T}_{x_1} f_1 \subset \text{im } \mathbb{T}_{x_1} f_1 + \text{im } \mathbb{T}_{x_2} f_2 \subset \mathbb{T}_{f_1(x)} M,$$

który dowodzi pożądaną równość

$$\mathbb{T}_{f_1(x)} M = \text{im } \mathbb{T}_{x_1} f_1 + \text{im } \mathbb{T}_{x_2} f_2.$$

□

## Grupy topologiczne – struktura i działanie

DEFINICJA 86. **Grupa topologiczna** to obiekt grupowy ( $\bullet$  jest punktem)

$$(\{\bullet\}, G, m \equiv \cdot, \text{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto e),$$

w kategorii **Top** w rozumieniu Def. 51. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej  $(\{\bullet\}, G, m, \text{Inv}, \star \rightarrow \{e\})$  to grupa topologiczna  $(\{\bullet\}, H, m \upharpoonright_{H \times H}, \text{Inv} \upharpoonright_H, \bullet \mapsto e)$ , której obiekt morfizmów  $H$  jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni  $G$ . **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi  $(\star_1, G_1, m_1, \text{Inv}_1, \bullet_1 \mapsto e_1)$  i  $(\star_2, G_2, m_2, \text{Inv}_2, \bullet_2 \mapsto e_2)$  to homomorfizm wewnętrzny w **Top** między tymi obiektami grupowymi. Grupy topologiczne wraz z homomorfizmami topologicznymi między nimi tworzą **kategorię grup topologicznych**, którą będziemy oznaczać symbolem

**TopGrp.**

Analogicznie definiujemy **grupę Liego** jako obiekt grupowy (j/w) w kategorii **Man**<sup>(∞)</sup>. **Podgrupa Liego** grupy Liego  $(\star, G, m, \text{Inv}, \star \rightarrow \{e\})$  to grupa Liego  $(\star, H, m \upharpoonright_{H \times H}, \text{Inv} \upharpoonright_H, \star \rightarrow \{e\})$ , której obiekt morfizmów  $H$  jest podrozmaitością klasy  $C^\infty$  rozmaitości  $G$ . **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm wewnętrzny w **Man**<sup>(∞)</sup> między tymi obiektami grupowymi. Grupy Liego wraz z homomorfizmami grup Liego tworzą **kategorię grup Liego**, którą będziemy oznaczać symbolem

**LieGrp.**

▲

PRZYKŁAD(Y) 27.

- (1)  $\mathbb{R}^{\times n}$
- (2)  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv U(1) \cong \mathbb{S}^1$
- (3)  $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$
- (4) Grupa liniowa główna  $GL_{\mathbb{R}}(n)$  z Przykł. 12 (7) dziedziczy topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni  $\mathbb{R}(n) \equiv \mathbb{R}^{\times n^2}$ , w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty  $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{R}_{\neq 0})$  (wszak  $\det_{(n)} : \mathbb{R}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym).

✓

LEMAT 1.5.1. *Przyjmijmy zapis Def. 86 i niechaj  $G$  będzie grupą topologiczną. Dla dowolnego elementu  $g \in G$  i dowolnego otoczenia otwartego  $\mathcal{O}_e \in \mathcal{T}(G)$  elementu neutralnego  $e \in G$  istnieje otoczenie otwarte  $\mathcal{O}_g \in \mathcal{T}(G)$  elementu  $g$  spełniające warunek*

$$m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)(\mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e.$$

■

*Dowód:* Odwzorowanie  $f \equiv m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)$  jest ciągle (w topologii produktowej na swej dziedzinie), przeto istnieją otoczenia otwarte  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  elementu  $g$  o własności  $f(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_e$ . Otwarte otoczenie  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 =: \mathcal{O}_g$  spełnia pożądaną własność  $f(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e$ . □

STWIERDZENIE 120. *Przyjmijmy zapis Def. 86 i Stw. 95. Funktor styczny  $\mathbb{T}$  z kategorii  $\mathbf{Man}^{(\infty)}$  indukuje w kanoniczny sposób endofunktor kategorii  $\mathbf{LieGrp}$ , przy czym obraz*

$$\{(\bullet, 0)\}, \mathbb{T}G, \mathbb{T}m, \mathbb{T}\text{Inv}, (\bullet, 0) \mapsto 0_{\mathbb{T}_e G} \in \mathbb{T}_e G$$

*grupy Liego  $(\star, G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$  nosi miano **stycznej grupy Liego**. Rzut kanoniczny  $\pi_{\mathbb{T}G}$  oraz cięcia zerowe  $\mathbf{0}_{\mathbb{T}G}$  są homomorfizmami grup Liego spełniającymi relację*

$$(1.5.1) \quad \pi_{\mathbb{T}G} \circ \mathbf{0}_{\mathbb{T}G} = \text{id}_G.$$

■

*Dowód:* Funktorialność  $\mathbb{T}$  zapewnia transport nie tylko pełnej struktury (czyli rozmaitości i odwzorowań) grupy Liego  $G$ , ale także jej aksjomatyki – funkcyjnym obrazem diagramów przemiennych (IG1)-(IG3) dla  $G$  są analogiczne diagramy dla  $\mathbb{T}G$ . Jedynym zatem nietrywialnym punktem dowodzonego stwierdzenia jest ten mówiący o homomorficznym charakterze rzutu kanonicznego i cięcia zerowego oraz ich wzajemnej relacji. Zaczniemy od rzutu kanonicznego. Zważywszy definicję odwzorowania stycznego, stwierdzamy, że dla dowolnych  $(g, h) \in G^{\times 2}$  jest

$$\mathbb{T}_{(g,h)}m : \mathbb{T}_{(g,h)}(G \times G) \cong \mathbb{T}_g G \oplus \mathbb{T}_h G \longrightarrow \mathbb{T}_{m(g,h)}G,$$

zatem

$$\pi_{\mathbb{T}G} \circ \mathbb{T}m = m \circ (\pi_{\mathbb{T}G} \times \pi_{\mathbb{T}G}),$$

a to jest właśnie definiująca własność homomorfizmu grup, przy czym wobec gładkości  $m$  także odwzorowanie styczne jest gładkie, mamy przeto do czynienia z homomorfizmem grup Liego. Aby postąpić dalej, musimy wejrzeć w strukturę  $\mathbb{T}_{(g,h)}m$ . Wybierzmy lokalne mapy:  $\kappa_g \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O}_g \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ ,  $n = \dim G$  na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_g$  punktu  $g$ ,  $\kappa_h \equiv (y^1, y^2, \dots, y^n) : \mathcal{O}_h \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_h \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$  na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_h$  punktu  $h$  oraz  $\kappa_{g \cdot h} \equiv (z^1, z^2, \dots, z^n) : \mathcal{O}_{g \cdot h} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{g \cdot h} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$  na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_{g \cdot h}$  punktu  $g \cdot h$ , a wtedy – dla dowolnych  $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g) \in \mathbb{T}_g G$  i  $W = W^a \frac{\partial}{\partial y^a}(h) \in \mathbb{T}_h G$  (patrz: dowód Tw. 1.4.19) – dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(g,h)}m(V, W) &= V^i \frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g), \kappa_h(h)) \frac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h) \\ &\quad + W^a \frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g), \kappa_h(h)) \frac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h). \end{aligned}$$

W wyrażeniach  $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g), \kappa_h(h))$  i  $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g), \kappa_h(h))$  rozpoznajemy elementy macierzy odwzorowań liniowych  $\mathbb{T}_g \wp_h$  i  $\mathbb{T}_h \ell_g$ , odpowiednio, możemy zatem przepisać powyższe w wygodnej postaci

$$(1.5.2) \quad \mathbb{T}_{(g,h)}m = \mathbb{T}_g \wp_h \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \text{pr}_2.$$

Na tej podstawie wnioskujemy o słuszności równości

$$\begin{aligned} \mathbb{T}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \mathbf{0}_{\mathbb{T}G})(g, h) &= \mathbb{T}_{(g,h)}m(0_{\mathbb{T}_g G}, 0_{\mathbb{T}_h G}) = \mathbb{T}_g \wp_h(0_{\mathbb{T}_g G}) + \mathbb{T}_h \ell_g(0_{\mathbb{T}_h G}) \\ &= 0_{\mathbb{T}_{g,h}G} + 0_{\mathbb{T}_{g,h}G} = 0_{\mathbb{T}_{g,h}G} \equiv \mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \circ m(g, h), \end{aligned}$$

która dokumentuje homomorficzny charakter  $\mathbf{0}_{\mathbb{T}G}$ , przy czym – rzecz jasna – mamy tu do czynienia z homomorfizmem gładkim. Tożsamość (1.5.1) jest oczywista.  $\square$

UWAGA 27. Ażeby do końca oswoić styczną grupę Liego, znajdziemy jeszcze jawną postać morfizmu  $\mathbb{T}\text{Inv}$ . W tym celu roważymy tożsamości

$$m \circ (\text{id}_G \times \text{Inv}) \circ \Delta = \eta = m \circ (\text{Inv} \times \text{id}_G) \circ \Delta,$$

w których zapisie użyliśmy odwzorowań (jawnie) gładkich

$$\Delta : G \longrightarrow G \times G : g \longmapsto (g, g), \quad \eta : G \curvearrowright : g \longmapsto e,$$

a których funktorialnym obrazem względem  $\mathbb{T}$  jest

$$\mathbb{T}m \circ (\text{id}_{\mathbb{T}G} \times \mathbb{T}\text{Inv}) \circ \mathbb{T}\Delta = 0 = \mathbb{T}m \circ (\mathbb{T}\text{Inv} \times \text{id}_{\mathbb{T}G}) \circ \mathbb{T}\Delta.$$

Uwzględniając Równ. (1.5.2), wyprowadzamy stąd tożsamości (dla dowolnych  $g \in G$  i  $V \in \mathbb{T}_g G$ )

$$\mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}}(V) + \mathbb{T}_{g^{-1}} \ell_g \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(V) = 0_{\mathbb{T}_e G} = \mathbb{T}_{g^{-1}} \wp_g \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(V) + \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}(V),$$

czyli

$$\mathbb{T}_g \text{Inv} = -\mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}} = -\mathbb{T}_e \wp_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}.$$

Godzi się przy tym podkreślić, że ostatnia równość nie wymaga powyższego wyprowadzenia, wynika ona bowiem wprost ze wzajemnej przemienności lewego i prawego działania regularnego na  $G$ .

$\bar{\lambda}$

STWIERDZENIE 121. *Przyjmijmy zapis Def. 7 i 54, Stw. 120 oraz Przykł. 7 (5). Odwzorowanie*

$$\mathbb{T}_e \ell. : G_{\mathbb{T}_e \text{Ad}} \times \mathbb{T}_e G \longrightarrow \mathbb{T}G : (g, X) \longmapsto \mathbb{T}_e \ell_g(X)$$

*jest izomorfizmem grup Liego.*

■

*Dowód:* Na podstawie Równ. (1.5.2) możemy przepisać

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(g,e)}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \text{id}_{\mathbb{T}_e G})(g, X) &= \mathbb{T}_{(g,e)}m(0_{\mathbb{T}_g G}, X) = \mathbb{T}_g \wp_e(0_{\mathbb{T}_g G}) + \mathbb{T}_e \ell_g(X) \\ (1.5.4) \quad &= \mathbb{T}_e \ell_g(X) \equiv \mathbb{T}_e \ell_g(X), \end{aligned}$$

czyli

$$\mathbb{T}_e \ell. = \mathbb{T}_{(g,e)}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \text{id}_{\mathbb{T}_e G}),$$



co dowodzi gładkości  $\mathbb{T}_e \ell$ . W połączeniu z obserwacją

$$(\mathbb{T}_e \ell)^{-1} = (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot)),$$

którą weryfikujemy w bezpośrednim rachunku (w którym  $v \in \text{TG}$ ):

$$\begin{aligned} & (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot)) \circ \mathbb{T}_e \ell(g, X) \\ &= (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot)) \circ \mathbb{T}_e \ell_g(X) = (g, \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_e \ell_g(X)) \\ &= (g, \mathbb{T}_e(\ell_{g^{-1}} \circ \ell_g)(X)) = (g, \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}.g}(X)) = (g, \mathbb{T}_e \ell_e(X)) = (g, X), \\ & \mathbb{T}_e \ell \circ (\pi_{\text{TG}}, \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(\cdot)} \ell_{\text{Inv} \circ \pi_{\text{TG}}(\cdot)}(\cdot))(v) \\ &= \mathbb{T}_e \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)} \circ \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)} \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)^{-1}}(v) = \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)}(\ell_{\pi_{\text{TG}}(v)} \circ \ell_{\pi_{\text{TG}}(v)^{-1}})(v) \\ &= \mathbb{T}_{\pi_{\text{TG}}(v)}(\ell_e)(v) = v, \end{aligned}$$

przekonuje nas to o dyfeomorficznym charakterze tego odwzorowania (zależność  $(\mathbb{T}_e \ell)^{-1}$  od argumentu jest jawnie gładka). Pozostaje zatem upewnić się, że mamy do czynienia z homomorfizmem grup. W tym celu obliczamy – dla dowolnych  $X, Y \in \mathbb{T}_e G$  oraz  $g, h \in G$ , a w odwołaniu do Równ. (1.5.2) –

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}_e \ell((g, X)_{\mathbb{T}_e \text{Ad} \cdot} (h, Y)) = \mathbb{T}_e \ell(g \cdot h, \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y) \\ &= \mathbb{T}_e \ell_{g \cdot h}(\mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y) = \mathbb{T}_e(\ell_{g \cdot h \cdot h^{-1}} \circ \wp_h)(X) + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_h(Y) \\ &= \mathbb{T}_e(\wp_h \circ \ell_g)(X) + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_h(Y) = \mathbb{T}_g \wp_h(\mathbb{T}_e \ell_g(X)) + \mathbb{T}_h \ell_g(\mathbb{T}_e \ell_h(Y)) \\ &\equiv \mathbb{T}_{(g,h)} m(\mathbb{T}_e \ell_g(X), \mathbb{T}_e \ell_h(Y)) \equiv \mathbb{T}_{(g,h)} m(\mathbb{T}_e \ell(g, X), \mathbb{T}_e \ell(h, Y)). \end{aligned}$$

Warto odnotować na marginesie, że  $\mathbb{T}_e \ell$  jest stycznościowym odpowiednikiem dyfeomorfizmu  $\ell \upharpoonright_{G \times \{e\}} : G \times \{e\} \rightarrow G$ .  $\square$

DEFINICJA 87. Przyjmijmy zapis Stw. 95 i dowodu Tw. 1.4.19. **Pole wektorowe lewoniemiennicze** na grupie Liego  $G$  to pole wektorowe  $\mathcal{V}_L \in \Gamma(\text{TG})$  o własności

$$\forall_{g \in G} : \ell_g * \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Analogicznie, **pole wektorowe prawoniemiennicze** na  $G$  to pole wektorowe  $\mathcal{V}_R \in \Gamma(\text{TG})$  o własności

$$\forall_{g \in G} : \wp_g * \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

▲

STWIERDZENIE 122. Przyjmijmy zapis Def. 73 i 87. Zbiory

$$\mathfrak{X}_L(G) := \{ \mathcal{V} \in \mathfrak{X}(G) \mid \mathcal{V} \text{ lewoniemiennicze} \},$$

$$\mathfrak{X}_R(G) := \{ \mathcal{V} \in \mathfrak{X}(G) \mid \mathcal{V} \text{ prawoniemiennicze} \}$$

są podprzestrzeniami  $\mathbb{R}$ -liniowymi w  $\mathfrak{X}(G)$ , a ponadto komutator pól wektorowych ogranicza się do każdego z nich,

$$[\cdot, \cdot]_G(\mathfrak{X}_H(G) \times \mathfrak{X}_H(G)) \subset \mathfrak{X}_H(G), \quad H \in \{L, R\}.$$

Parę

$$(\mathfrak{X}_L(G), [\cdot, \cdot]_G \upharpoonright_{\mathfrak{X}_L(G) \times \mathfrak{X}_L(G)})$$

nazywamy **algebrą pól lewoniezmienicznych na  $G$** , a parę

$$(\mathfrak{X}_R(G), [\cdot, \cdot]_G \upharpoonright_{\mathfrak{X}_R(G) \times \mathfrak{X}_R(G)})$$

**algebrą pól prawoniezmienicznych na  $G$** . ■

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost z  $\mathbb{R}$ -liniowości warunku lewoliniowości (wzgl. prawoliniowości), a druga – ze Stw. 103. Istotnie, dla dowolnego elementu  $g \in G$  i dowolnych pól lewoniezmienicznych  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}_L(G)$ , otrzymujemy

$$\ell_{g*}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_G = [\ell_{g*}\mathcal{V}_1, \ell_{g*}\mathcal{V}_2]_G = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_G.$$

Analogiczny rachunek dowodzi prawoniezmieniczności komutatora dowolnej pary pól prawoniezmienicznych. □

DEFINICJA 88. Przyjmijmy zapis Def. 16. **Algebra Liego** nad ciałem  $\mathbb{K}$  to kolekcja  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V), [\cdot, \cdot]_V$  złożona z przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V)$  oraz odwzorowania dwu- $\mathbb{K}$ -liniowego skośnie symetrycznego

$$[\cdot, \cdot]_V : V \times V \longrightarrow V : (v, w) \longmapsto [v, w]_V,$$

zwanego **nawiasem Liego na  $V$** , którego **jakobiator**

$$\text{Jac}_V : V \times V \times V \longrightarrow V$$

$$: (X_1, X_2, X_3) \longmapsto [[X_1, X_2]_V, X_3]_V + [[X_3, X_1]_V, X_2]_V + [[X_2, X_3]_V, X_1]_V$$

jest tożsamościowo równy zeru. Tożsamość w algebrze wyrażająca znikanie jakobiatora nazywa się **tożsamością Jacobiego**.

**Podalgebrą Liego** algebry Liego  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V), [\cdot, \cdot]_V$  nazywamy algebrę Liego  $((W, +_W \upharpoonright_{W \times W}, P_W \upharpoonright_W, \bullet \mapsto \mathbf{0}_W), \ell_W \upharpoonright_{\mathbb{K} \times W}), [\cdot, \cdot]_V \upharpoonright_{W \times W}$  o nośniku  $W \subseteq V$  będącym podprzestrzenią  $\mathbb{K}$ -liniową  $V$ .

**Homomorfizm algebr Liego** między algebrami Liego  $((V_\alpha, +_\alpha, P_\alpha, \bullet \mapsto \mathbf{0}_\alpha), \ell_\alpha), [\cdot, \cdot]_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  to odwzorowanie  $\mathbb{R}$ -liniowe  $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  o własności

$$[\cdot, \cdot]_2 \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot, \cdot]_1.$$

Algebry Liego nad ciałem  $\mathbb{K}$  wraz z homomorfizmami algebr Liego tworzą **kategorię algebr Liego nad ciałem  $\mathbb{K}$** , którą będziemy oznaczać symbolem

**LieAlg**.

▲

STWIERDZENIE 123. Przyjmijmy zapis Def. 88, Stw. 122 i Przykł. 7 (4).  
Odwzorowanie

$$\text{T.Ad.} : \mathfrak{X}_R(\mathbf{G}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_L(\mathbf{G}) : \mathcal{V} \mapsto \text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot))$$

jest izomorfizmem przestrzeni pól prawo- i lewoniemiennicznych. Istnieją kanoniczne izomorfizmy (przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych)

$$H. : \mathfrak{g} \cong \text{Der}_e C^1(\mathbf{G}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_H(\mathbf{G}), \quad H \in \{L, R\},$$

o własności

$$(1.5.5) \quad L \circ (R.)^{-1} \cong \text{T.Ad.}$$

Indukują one na przestrzeni  $\mathfrak{g} \cong \text{T}_e \mathbf{G}$  nawias Liego

$$[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : (X_1, X_2) \mapsto [L_{X_1}, L_{X_2}]_{\mathbf{G}}(e).$$

Algebra Liego

$$(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}) \cong \text{Lie } \mathbf{G}$$

(w której zapisie  $\mathfrak{g}$  jest traktowana jako przestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa) nosi miano **algebry Liego grupy Liego**  $\mathbf{G}$ . ■

Dowód: Dla dowolnego pola prawoniemienniczego  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_R(\mathbf{G})$  sprawdzamy lewoniemienniczność jego obrazu względem (jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowego i odwracalnego)  $\text{T.Ad.}$  w bezpośrednim rachunku, prowadzonym dla dowolnych  $g, h \in \mathbf{G}$  z uwzględnieniem prawoniemienniczności  $\mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} \ell_{g*}(\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(h) &= \ell_{g*}^{\ell_{g^{-1}}(h)}((\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot))(\ell_{g^{-1}}(h))) \\ &= \ell_{g*}^{g^{-1}h}(\text{T}_{g^{-1}h} \text{Ad}_{g^{-1}h}(\mathcal{V}(g^{-1}h))) = \text{T}_{g^{-1}h}(\ell_h \circ \varrho_{h^{-1}g})(\mathcal{V}(g^{-1}h)) \\ &= \text{T}_e \ell_h \circ \text{T}_{g^{-1}h} \varrho_{h^{-1}g}(\mathcal{V}(g^{-1}h)) = \text{T}_e \ell_h(\mathcal{V}(e)) \cong \text{T}_e \ell_h \circ \text{T}_h \varrho_{h^{-1}}(\mathcal{V}(h)) \\ &\cong (\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(h). \end{aligned}$$

Poszukiwania izomorfizmu  $L$  zaczniemy od zauważenia, że dowolne pole lewoniemienniczne  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(\mathbf{G})$  spełnia tożsamość

$$\mathcal{V}(g) = (\ell_{g*} \mathcal{V})(g) \cong \ell_{g*}^{\ell_{g^{-1}}(g)}(\mathcal{V} \circ \ell_{g^{-1}}(g)) = \ell_{g*}^e(\mathcal{V}(e)) \cong \mathcal{V}(e) \circ \ell_g^*,$$

gdzie  $\ell_g^*$ ,  $g \in \mathbf{G}$  jest cofnięciem zdefiniowanym w dowodzie Tw. 1.4.19. Jako że  $\mathcal{V}(e) \in \mathfrak{g}$ , powyższa obserwacja odpowiada wprost definicję poszukiwanego izomorfizmu. Określmy odwzorowanie, jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe,

$$L. : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{G}) : X \mapsto X \circ \ell^* \cong L_X,$$

Bez trudu sprawdzamy lewoniemienniczność pól w jego obrazie,

$$\begin{aligned} \ell_{g*} L_X &= \ell_{g*}^{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}(L_X \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)) \cong (L_X \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)) \circ \ell_g^* \cong X \circ \ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}^* \circ \ell_g^* \\ &= X \circ (\ell_g \circ \ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)})^* = X \circ \ell_{g \cdot \ell_{g^{-1}}(\cdot)}^* = X \circ \ell^* \cong L_X, \quad g \in \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Kierując się wcześniejszym rachunkiem postulujemy odwrotność  $L$ . w postaci, także jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowej,

$$\text{ev}_e : \mathfrak{X}_L(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathfrak{g} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}(e),$$

oto bowiem zachodzi

$$\mathcal{V} = \text{ev}_e(\mathcal{V}) \circ \ell_e^* \equiv L_{\text{ev}(\mathcal{V})}.$$

Z drugiej strony obliczamy

$$\text{ev}_e(L_X) = X \circ \ell_e^* = X,$$

więc w istocie

$$\text{ev}_e = (L.)^{-1}.$$

Zastąpiwszy w powyższym rozumowaniu działanie lewe regularne  $\ell$ , jego prawym odpowiednikiem  $\wp$ , możemy powtórzyć to rozumowanie w odniesieniu do pól prawoniezmienniczych, co daje nam izomorfizm

$$R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_R(G) : X \longmapsto X \circ \wp_e^* \equiv R_X,$$

o odwrotności – jak poprzednio –

$$(R.)^{-1} = \text{ev}_e.$$

Tożsamość (1.5.5) jest w oczywisty sposób spełniona. Pozostaje już tylko przekonać się, że jakobiator jawnie skośnie symetrycznego i dwu-R-liniowego odwzorowania  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$  znika tożsamościowo. Czynimy to w bezpośrednim rachunku, w którym wykorzystujemy prostą tożsamość

$$L_{[X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}} \equiv L_{\text{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}]_G)} = [L_{X_1}, L_{X_2}]_G.$$

Oto więc posiłkując się Stw. 102, wyznaczamy

$$\begin{aligned} & \text{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1, X_2, X_3) \\ &= [L_{[X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}}, L_{X_3}]_G(e) + [L_{[X_3, X_1]_{\mathfrak{g}}}, L_{X_2}]_G(e) + [L_{[X_2, X_3]_{\mathfrak{g}}}, L_{X_1}]_G(e) \\ &= [[L_{X_1}, L_{X_2}]_G, L_{X_3}]_G(e) + [[L_{X_3}, L_{X_1}]_G, L_{X_2}]_G(e) + [[L_{X_2}, L_{X_3}]_G, L_{X_1}]_G(e) \\ &\equiv \text{Jac}_G(L_{X_1}, L_{X_2}, L_{X_3})(e) = 0_{\mathfrak{g}}, \end{aligned}$$

co kończy dowód stwierdzenia.  $\square$

**DEFINICJA 89.** Przyjmijmy zapis Stw. 123 i jego dowodu, przy czym założymy dodatkowo, że  $N := \dim G < \infty$ . Wybierzmy w przestrzeni wektorowej  $\mathfrak{g}$  dowolną bazę  $\mathcal{T} := \{t_A\}_{A \in \overline{1, N}}$ , a wówczas **stałe struktury algebry Liego** Lie  $G$  w bazie  $\mathcal{T}$  to liczby  $f_{ABC} = -f_{BAC} \in \mathbb{R}$ ,  $A, B, C \in \overline{1, N}$  zdefiniowane przez **równania struktury algebry Liego** Lie  $G$

$$[t_A, t_B] = f_{ABC} \triangleright t_C, \quad A, B \in \overline{1, N}.$$

W konsekwencji znikania jakobiatora na Lie  $G$  spełniają one tożsamościowo dwu-liniowe relacje

$$f_{ABD} f_{DCE} + f_{CAD} f_{DBE} + f_{BCD} f_{DAE} = 0, \quad A, B, C, E \in \overline{1, N},$$

zwane **tożsamościami Jacobiego dla stałych struktury** Lie  $G$ . Elementy bazy  $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu  $\mathfrak{X}(G)$  będącej  $L$ -wzgl.  $R$ -obrazem bazy  $\mathcal{T}$  będziemy oznaczać symbolem

$$L_A(\cdot) \equiv \mathbb{T}_{e\ell}(t_A)$$

wzgl.

$$R_A(\cdot) \equiv T_{e\phi} \cdot (t_A).$$

▲

**TWIERDZENIE 1.5.2 (Funktorialność Lie).** *Przyjmijmy zapis Def. 88 i Stw. 123. Przyporządkowanie grupom Liego ich algebr Liego rozszerza się kanonicznie do funktora*

$$\text{Lie} : \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}.$$

o składowej morfizmowej

$$\begin{aligned} \text{Lie} & : \text{Mor } \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}} \\ & : \left( G_1 \xrightarrow{\chi} G_2 \right) \longmapsto \left( \text{Lie } G_1 \xrightarrow{\chi_*^{e_1}} \text{Lie } G_2 \right). \end{aligned}$$

■

Dowód: Odwzorowanie  $\chi_*^{e_1}$  jest dobrze określone, pozostaje zatem jedynie wykazać, że jest ono homomorfizmem algebr Liego. Punktem wyjścia będzie dla nas następująca tożsamość funkcjonalna, słuszna dla dowolnego elementu  $g_1 \in G$ :

$$\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi = \chi \circ \ell_{g_1}.$$

Na jej podstawie obliczamy, dla dowolnych: funkcji  $f \in C^1(G_2; \mathbb{R})$  oraz wektora  $X \in \mathfrak{g}_1$ ,

$$\begin{aligned} \chi_*^{g_1}(L_X(g_1))(f) & \equiv L_X(g_1) \circ \chi^*(f) \equiv X \circ \ell_{g_1}^* \circ \chi^*(f) = X \circ (\chi \circ \ell_{g_1})^*(f) \\ & = X \circ (\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi)^*(f) = (X \circ \chi^*) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \\ & \equiv (\chi_*^{e_1} X) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \equiv L_{\chi_*^{e_1} X}(\chi(g_1))(f), \end{aligned}$$

co pozwala skonstatować, że para pól wektorowych  $(L_X, L_{\chi_*^{e_1} X})$  jest w relacji określonej przez  $\chi$  w rozumieniu Def. 74. To pozwala odwołać się do Stw. 104, w świetle którego dla dowolnych wektorów  $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$  zachodzi pożądana tożsamość

$$\begin{aligned} [\chi_*^{e_1} X_1, \chi_*^{e_1} X_2]_{\mathfrak{g}_2} & \equiv [L_{\chi_*^{e_1} X_1}, L_{\chi_*^{e_1} X_2}]_{G_2}(e_2) = [L_{\chi_*^{e_1} X_1}, L_{\chi_*^{e_1} X_2}]_{G_2} \circ \chi(e_1) \\ & = \chi_*^{e_1} [L_{X_1}, L_{X_2}]_{G_1}(e_1) \equiv \chi_*^{e_1} [X_1, X_2]_{\mathfrak{g}_1}. \end{aligned}$$

□

**STWIERDZENIE 124.** *Pola lewo- i prawoniezmiennicze na dowolnej grupie Liego są zupełne w rozumieniu Def. 76.*

■

Dowód: Rozważmy gładką krzywą całkową  $\gamma : ]a, b[ \longrightarrow G$  przez  $\gamma(t_0) = g_0 \in G$  w  $t_0 \in ]a, b[$  pola lewoniezmienniczego  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(G)$ , tj. rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$D\gamma(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)), \quad t \in ]a, b[, \quad \gamma(t_0) = g_0$$

Wyberzmy (dowolnie) czasy pośrednie  $t_1, t_2$  spełniające warunki  $a < t_1 < t_2 < b$  i oznaczmy  $\Delta t := t_2 - t_1 > 0$ . Krzywą  $\gamma$  będziemy teraz dowolnie przedłużać

wykorzystując przechodność działania lewego regularnego na  $G$ , która pozwala nam wskazać  $g_{21} := \gamma(t_2) \cdot \gamma(t_1)^{-1}$ . Zdefiniujmy zatem ścieżkę

$$\gamma_{\Delta t} : ]a + \Delta t, b + \Delta t[ \longrightarrow G : t \longmapsto \ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t).$$

Jest ona rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$D\gamma_{\Delta t}(t) = T_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ D\gamma(t - \Delta t), \quad t \in ]a + \Delta t, b + \Delta t[, \quad \gamma_{\Delta t}(t_2) = \gamma(t_2),$$

a ponieważ  $t - \Delta t \in ]a, b[$  dla dowolnego czasu  $t \in ]a + \Delta t, b + \Delta t[$ , przeto – wobec lewowiezmienniczości pola  $\mathcal{V}$  –

$$D\gamma_{\Delta t}(t) = T_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ \mathcal{V}(\gamma(t - \Delta t)) = \mathcal{V}(\ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t)) \equiv \mathcal{V}(\gamma_{\Delta t}(t)).$$

Widzimy więc, że także  $\gamma_{\Delta t}$  jest gładką krzywą całkową pola  $\mathcal{V}$ , stąd też – na mocy Stw. 1.4.11 – na niepustym przedziale  $\Delta I := ]a + \Delta t, b[ \ni t_2$  zachodzi równość

$$\gamma_{\Delta t} \upharpoonright_{\Delta I} = \gamma \upharpoonright_{\Delta I}$$

i otrzymujemy gładkie przedłużenie  $\tilde{\gamma}$  krzywej  $\gamma$  do  $]a, b + \Delta t[$  w postaci

$$\tilde{\gamma} : ]a, b + \Delta t[ \longrightarrow G : \begin{cases} \gamma(t) & \text{dla } t \in ]a, b[ \\ \gamma_{\Delta t}(t) & \text{dla } t \in ]a + \Delta t, b + \Delta t[ \end{cases}.$$

Dokonując iteracji powyższej procedury, możemy gładko przedłużyć wyjściową krzywą w sposób nieograniczony od góry, tj. do przedziału  $]a, \infty[$ . Podobny argument pokazuje, że jest ona także przedłużalna wstecz, tj. do  $] - \infty, b[$ , ostatecznie więc stwierdzamy, że  $\gamma$  przedłuża się gładko do  $\mathbb{R}$ , co wobec dowolności  $g_0$  (wszak pole  $\mathcal{V}$  jest określone na całej rozmaitości  $G$ ) daje nam postulowaną tezę dla pól lewowiezmiennicznych. Dowód w przypadku pól prawowiezmiennicznych przebiega w pełni analogicznie.  $\square$

**STWIERDZENIE 125.** *Przyjmijmy zapis Def. 76 i 77 oraz Stw. 123 i niechaj  $X \in \mathfrak{g}$ . Jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów grupy Liego  $G$  stowarzyszone z polami: lewowiezmiennicznym  $L_X$ ,*

$$\mathcal{L}_t^X(\cdot_2) \equiv \Phi_{L_X}(\cdot_1, \cdot_2) : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G : (t, g) \longmapsto \Phi_{L_X}(t, g) \equiv \mathcal{L}_t^X(g),$$

*oraz prawowiezmiennicznym  $R_X$ ,*

$$\mathcal{R}_t^X(\cdot_2) \equiv \Phi_{R_X}(\cdot_1, \cdot_2) : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G : (t, g) \longmapsto \Phi_{R_X}(t, g) \equiv \mathcal{R}_t^X(g),$$

*przyjmując postać, odpowiednio,*

$$(1.5.6) \quad \mathcal{L}_t^X = \wp_{\mathcal{L}_t^X(e)}, \quad \mathcal{R}_t^X = \ell_{\mathcal{R}_t^X(e)}.$$

■

*Dowód:* O tym, że potoki zupełnych (i globalnie gładkich) pól lewo- i prawowiezmiennicznych zadają jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów  $G$ , przesądza Tw. 1.4.20. Pozostaje sprawdzić słuszność tożsamości (1.5.6). Obliczamy, dla dowolnego  $g \in G$ ,

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathcal{L}_t^X(g) = L_X(g) = T_e \ell_g(L_X(e)) \equiv T_e \ell_g\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathcal{L}_t^X(e)\right) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e),$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy ze Stw. 86. Ścieżki  $\mathcal{L}_t^X(g)$  i  $\ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e)$ , przecinające się w chwili  $t = 0$ ,

$$\ell_g \circ \mathcal{L}_0^X(e) = \ell_g(e) = g \cdot e = g \equiv \mathcal{L}_0^X(g),$$

są zatem współstyczne w tejże chwili, a wektorem stycznym jest wartość pola lewnieźmienniczego  $L_X$  w  $g$ . Obie też są krzywymi całkowymi pola  $L_X$ , oto bowiem dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$  zachodzi – wprost z definicji –

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_t^X(g) = L_X \circ \mathcal{L}_t^X(g),$$

a także – wobec lewnieźmienniczości  $L_X$  –

$$\frac{d}{dt} \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e) = \mathbb{T}_{\mathcal{L}_t^X(e)} \ell_g(L_X \circ \mathcal{L}_t^X(e)) = L_X \circ \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e).$$

Na mocy Stw. 105 ścieżki te są tożsame. Analogicznie dowodzimy drugiej równości w Równ. (1.5.6).  $\square$

W dalszej części zajmujemy się zatem wyróżnionymi ścieżkami  $\mathcal{L}_t^X(e)$  oraz  $\mathcal{R}_t^X(e)$ .

STWIERDZENIE 126. *Przyjmijmy zapis Stw. 125. Gładkie ścieżki*

$$\lambda_X \equiv \mathcal{L}_t^X(e) : \mathbb{R} \longrightarrow G, \quad \rho_X \equiv \mathcal{R}_t^X(e) : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

spełniają tożsamości

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} : \left( \lambda_{t \triangleright X}(1) = \lambda_X(t) \quad \wedge \quad \rho_{t \triangleright X}(1) = \rho_X(t) \right).$$

■

*Dowód:* W świetle Stw. 105 krzywa  $\lambda_X$  jest jednoznacznie określona przez warunki

$$\lambda_X(0) = e \quad \wedge \quad \forall_{t \in \mathbb{R}} : \frac{d}{dt} \lambda_X(t) = L_X \circ \lambda_X(t) \equiv \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(t)}(X).$$

Z drugiego z nich wyprowadzamy tożsamość

$$\forall_{s, t \in \mathbb{R}} : \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}(X) = \frac{d}{d(st)} \lambda_X(st) = \frac{1}{s} \cdot \frac{d}{dt} \lambda_X(st),$$

czyli też równoważną jej (wobec  $\mathbb{R}$ -liniowości  $\mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}$ )

$$\forall_{s, t \in \mathbb{R}} : \frac{d}{dt} \lambda_X(st) = \mathbb{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}(s \triangleright X),$$

Zdefiniujemy rodzinę ścieżek

$$\gamma_s : \mathbb{R} \longrightarrow G : t \longmapsto \lambda_X(st), \quad s \in \mathbb{R},$$

a wówczas powyższy warunek możemy zapisać w postaci

$$\forall_{s, t \in \mathbb{R}} : \frac{d}{dt} \gamma_s(t) = \mathbb{T}_e \ell_{\gamma_s(t)}(s \triangleright X),$$

przy czym też

$$\gamma_s(0) \equiv \lambda_X(0) = e,$$

stwierdzamy zatem równość

$$\forall_{s \in \mathbb{R}} : \gamma_s = \lambda_{s \triangleright X},$$

skąd ostatecznie wniosek

$$\lambda_{s \triangleright X}(t) = \gamma_s(t) \equiv \lambda_X(st),$$

czyli także – w szczególności

$$\lambda_{s \triangleright X}(1) = \lambda_X(s).$$

Dowód dla ścieżek wykreślanych przez pola prawonieźmiennicze przebiega w pełni analogicznie.  $\square$

STWIERDZENIE 127. *Przyjmijmy zapis Stw. 126. Gładkie ścieżki  $\lambda_X$  i  $\rho_X$  są homomorfizmami addytywnej grupy Liego  $\mathbb{R}$  (z naturalną strukturą różniczkową) w  $\mathfrak{G}$ , spełniającymi warunek początkowy*

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_X(t) = X = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \rho_X(t).$$

*I odwrotnie, każdy homomorfizm grup Liego*

$$\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{G}$$

*spełniający warunek początkowy*

$$(1.5.7) \quad \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) = X \in \mathfrak{g}$$

*jest postaci*

$$\lambda_X = \chi = \rho_X.$$

*W szczególności więc ścieżki  $\lambda_X$  i  $\rho_X$  są tożsame.* ■

Dowód: Jedynym, co wymaga sprawdzenia w przypadku ścieżek  $\gamma \in \{\lambda_X, \rho_X\}$ , jest warunek homomorfizmu

$$\forall s, t \in \mathbb{R} : \gamma(s+t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t).$$

Zacniemy od  $\gamma = \lambda_X$ . Ażeby udowodnić powyższą tożsamość, musimy przekonać się o tożsamości ścieżek  $\lambda_X$  i  $\gamma_s := \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s + \cdot)$  przy ustalonym (dowolnie)  $s$ . W tym celu obliczamy – korzystając przy tym wprost z definicji ścieżki  $\gamma$  oraz z lewoniezmienniczości  $L_X$  –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma_s(t) &= T_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left( \frac{d}{dt} \lambda_X(t+s) \right) \equiv T_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left( \frac{d}{d(s+t)} \lambda_X(s+t) \right) \\ &= T_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} (L_X \circ \lambda_X(s+t)) = L_X \circ \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s+t) \\ &\equiv L_X \circ \gamma_s(t), \end{aligned}$$

skąd wniosek, że ścieżka  $\gamma_s$  jest krzywą całkową pola  $L_X$  tak jak  $\lambda_X$ , a nadto

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma_s(t) = L_X \circ \gamma_s(0) = L_X(e) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma(t)$$

i

$$\gamma_s(0) = e = \gamma(0),$$

zatem są to rozwiązania zagadnienia początkowego (dla tego samego pola wektorowego) przy tych samych warunkach początkowych, co w świetle Stw. 105 przesądza o ich postulowanej tożsamości. W przypadku  $\gamma = \rho_X$  powtarzamy rozumowanie dla  $\tilde{\gamma}_s := \ell_{\rho_X(s)^{-1}} \circ \rho_X(s + \cdot)$ .

Niechaj teraz  $\chi$  będzie homomorfizmem spełniającym warunek początkowy (1.5.7). Różniczkując relację funkcjonalną wyrażającą homomorficzność  $\chi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \chi(s) &\equiv \frac{d}{d\xi} \upharpoonright_{\xi=s} \chi(\xi) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(s+t) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \ell_{\chi(s)} \circ \chi(t) \\ &= T_{\chi(0)} \ell_{\chi(s)} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) \right) = T_e \ell_{\chi(s)} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) \right) \\ &\equiv L_{\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t)} \circ \chi(s), \end{aligned}$$

stwierdzamy, że  $\chi$  jest krzywą całkową przez  $e = \chi(0)$  (równość ta, użyta w powyższym rachunku, jest konsekwencją homomorficzności  $\chi$ ) lewoniezmienniczego pola



wektorowego będącego obrazem wektora  $\frac{d}{dt}\upharpoonright_{t=0}\chi(t)$  względem izomorfizmu  $L$ . ze Stw. 123. Powtarzając to rozumowanie w odniesieniu do relacji

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\chi(t) &\equiv \frac{d}{d\xi}\upharpoonright_{\xi=t}\chi(\xi) = \frac{d}{ds}\upharpoonright_{s=0}\chi(s+t) = \frac{d}{ds}\upharpoonright_{s=0}\rho_{\chi(t)} \circ \chi(s) \\ &= T_{\chi(0)}\rho_{\chi(t)}\left(\frac{d}{ds}\upharpoonright_{s=0}\chi(s)\right) = T_e\rho_{\chi(t)}\left(\frac{d}{dt}\upharpoonright_{s=0}\chi(s)\right) \\ &\equiv R_{\frac{d}{ds}\upharpoonright_{s=0}\chi(s)} \circ \chi(t),\end{aligned}$$

uzyskujemy ostatnią brakującą część tezy.  $\square$

STWIERDZENIE 128. *Przyjmijmy zapis Stw. 126. Odwzorowanie*

$$\lambda : \mathfrak{g} \times \mathbb{R} \longrightarrow G : (X, t) \longmapsto \lambda_X(t)$$

*jest gładkie.*

■

*Dowód:* Gładkość zależności  $\lambda$  od drugiego argumentu wynika wprost z Tw. 105, oto bowiem dla ustalonego  $X$  ścieżka  $\lambda_X$  jest krzywą całkową gładkiego pola  $L_X$ . Pozostaje zatem wykazać gładkość zależności  $\lambda$  od pierwszego argumentu. W tym celu przedstawimy  $\lambda_X$  jako krzywą całkową gładkiego pola wektorowego na  $\mathfrak{g} \times G$  o danych początkowych  $(X, e)$ , co pozwoli nam wywnioskować postulowaną gładkość wprost z tegoż Tw. 105. Będziemy przy tym – jak zazwyczaj – utożsamiać  $\text{Der}_0 G$  z  $T_e G$ . Rozważmy zatem pole wektorowe (jawnie gładkie)

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &: \mathfrak{g} \times G \longrightarrow T(\mathfrak{g} \times G) \\ &: (X, g) \longmapsto (0_{\mathfrak{g}}, T_e \ell_g(X)) \equiv (0_{\mathfrak{g}}, L_X(g)) \in \mathfrak{g} \oplus T_e \ell_g(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus T_g G \\ &\equiv T_{(X, g)}(\mathfrak{g} \times G)\end{aligned}$$

Jego potok  $\Phi_{\mathcal{V}}$  spełnia równanie

$$\frac{d}{dt}\Phi_{\mathcal{V}}(t; t_0, (X_0, g_0)) = \mathcal{V}(\Phi_{\mathcal{V}}(t; t_0, (X_0, g_0))),$$

w którego zapisie  $(X_0, g_0)$  jest warunkiem początkowym (w czasie  $t_0$ ),

$$\Phi_{\mathcal{V}}(t_0; t_0, (X_0, g_0)) = (X_0, g_0).$$

Ustalmy warunek początkowy  $(X_0, g_0) := (X, e)$  dla  $t_0 := 0$ . Rzutując powyższe równanie na drugą składową (tj. na  $G$ ), w której odbywa się nietrywialna ewolucja, otrzymujemy równość

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e)) &= \text{pr}_2 \circ \frac{d}{dt}\Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e)) = \text{pr}_2 \circ \mathcal{V}(\Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))) \\ &= L_{\text{pr}_1 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))}(\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))) \\ &= L_X(\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))),\end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika wprost z konstrukcji  $\mathcal{V}$  (w swej pierwszej składowej warunek początkowy pozostaje niezmienny wobec trywialności tejże składowej pola  $\mathcal{V}$ ). Otrzymana równość pozwala zidentyfikować  $\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e))$  jako (jedyną) krzywą całkową pola  $L_X$  wychodzącą z punktu  $g_0 = e$ , czyli

$$\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e)) = \lambda_X(\cdot),$$

co stanowi właśnie zapowiadzaną wcześniej reinterpretację tejże krzywej całkowej pola  $L_X$ .  $\square$

DEFINICJA 90. Przyjmijmy zapis Stw. 128. Odwzorowanie

$$\exp \equiv \exp^G := \lambda.(1) : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

określamy mianem **odwzorowania eksponencjalnego na  $G$** .  $\blacktriangle$

STWIERDZENIE 129. *Przyjmijmy zapis Def. 90. Istnieją otoczenia otwarte:  $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$  wektora  $0_{\mathfrak{g}}$  w  $\mathfrak{g}$  oraz  $\mathcal{O}_e$  elementu  $e$  w  $G$  takie, że odwzorowanie  $\exp|_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}$  jest dyfeomorfizmem klasy  $C^\infty$  na  $\mathcal{O}_e$ .*  $\blacksquare$

Dowód: Obliczymy odwzorowanie styczne do  $\exp$  w  $0_{\mathfrak{g}}$  na wektorze  $X \in \mathfrak{g} \equiv T_{0_{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}$ , odwołując się po drodze do Stw. 126. Znajdujemy

$$T_{0_{\mathfrak{g}}}\exp(X) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright X) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{t \triangleright X}(1) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_X(t) = X,$$

czyli

$$T_{0_{\mathfrak{g}}}\exp = \text{id}_{\mathfrak{g}}.$$

Teza dowodzonego stwierdzenia wynika teraz wprost z Tw. 1.4.7.  $\square$

STWIERDZENIE 130 (Naturalność odwzorowania eksponencjalnego). *Przyjmijmy zapis Def. 90 oraz Tw. 1.5.2 i niechaj  $\chi : G_1 \longrightarrow G_2$  będzie homomorfizmem grup Liego między grupami Liego  $G_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Poniższy diagram jest przemienny*

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G_1 & \xrightarrow{\text{Lie } \chi} & \text{Lie } G_2 \\ \exp^{G_1} \downarrow & & \downarrow \exp^{G_2} \\ G_1 & \xrightarrow{\chi} & G_2 \end{array} .$$

Dowód: Rozważmy ścieżkę gładką

$$\gamma := \chi \circ \lambda_X : \mathbb{R} \longrightarrow G_2$$

przez

$$\gamma(0) \equiv \chi \circ \lambda_X(0) = \chi(e_1) = e_2.$$

Na podstawie bezpośredniego rachunku (wykorzystującego definicję ścieżki  $\lambda_X$  oraz lewoniezmienniczość  $L_X$ , jak również Tw. 86)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \gamma(t) &= T_{\lambda_X(t)} \chi \left( \frac{d}{dt} \lambda_X(t) \right) = T_{\lambda_X(t)} \chi (L_X \circ \lambda_X(t)) = T_{\lambda_X(t)} \chi \circ T_{e_1} \ell_{\lambda_X(t)}^1(X) \\ &= T_{e_1} (\chi \circ \ell_{\lambda_X(t)}^1)(X) = T_{e_1} (\ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1 \circ \chi)(X) = T_{\chi(e_1)} \ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1 (T_{e_1} \chi(X)) \\ &= T_{e_2} \ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1 (T_{e_1} \chi(X)) \equiv T_{e_2} \ell_{\gamma(t)}^1 (\text{Lie } \chi(X)) \equiv L_{\text{Lie } \chi(X)} \circ \gamma(t) \end{aligned}$$

i wreszcie

$$\gamma(0) = e_2 \equiv \lambda_{\text{Lie } \chi(X)}(0),$$

konstatujemy na gruncie Stw. 105, że  $\gamma$  jest spełniona tożsamość

$$\chi \circ \lambda_X \equiv \gamma = \lambda_{\text{Lie } \chi(X)},$$

co w chwili  $t = 1$  daje pożądaną równość

$$\chi \circ \exp^{\mathbb{G}^1}(X) \equiv \chi \circ \lambda_X(1) = \lambda_{\text{Lie } \chi(X)}(1) \equiv \exp^{\mathbb{G}^2} \circ \text{Lie } \chi(X).$$

□

STWIERDZENIE 131. *Przyjmijmy zapis Def. 89 i niech  $((\mathbb{T}_e \text{Ad})_A^B)_{A, B \in \overline{1, \dim \mathbb{G}}}$  o będzie macierzą o wartościach w  $C^\infty(\mathbb{G}, \mathbb{R})$  określoną równaniami*

$$\mathbb{T}_e \text{Ad}(t_A) =: (\mathbb{T}_e \text{Ad})_A^B \triangleright t_B, \quad A \in \overline{1, \dim \mathbb{G}}.$$

*Pola wektorowe  $L_A$  i  $R_A$ ,  $A \in \overline{1, \dim \mathbb{G}}$  spełniają relacje (zapisane dla dowolnych  $A, B \in \overline{1, \dim \mathbb{G}}$ )*

$$[L_A, L_B] = f_{ABC} \triangleright L_C, \quad [R_A, R_B] = -f_{ABC} \triangleright R_C, \quad [L_A, R_B] = 0.$$

*Ponadto prawdziwe są tożsamości:*

$$(1.5.8) \quad L_A(\cdot) = (\mathbb{T}_e \text{Ad})_A^B \triangleright R_B(\cdot)$$

oraz

$$\text{Inv}_* L_A = -R_A, \quad \text{Inv}_* R_A = -L_A,$$

a także – dla dowolnego elementu  $g \in \mathbb{G}$  –

$$\wp_{g*} L_A = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv}(g)})_A^B \triangleright L_B, \quad \ell_{g*} R_A = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B$$

■

Dowód: Pierwsza równość wynika wprost z definicji komutatora w  $\text{Lie } \mathbb{G}$ , oto bowiem wobec lewniezmienniczości komutatora pól lewniezmiennicznych zachodzi

$$\begin{aligned} f_{ABC} L_C(\cdot) &= f_{ABC} \mathbb{T}_e \ell(L_C(e)) \equiv f_{ABC} \mathbb{T}_e \ell(t_C) = \mathbb{T}_e \ell([t_A, t_B]) \\ &\equiv \mathbb{T}_e \ell([L_A, L_B](e)) = [L_A, L_B](\cdot). \end{aligned}$$

Komutator bazowego pola lewniezmiennicznego z takimż polem prawniezmiennicznym obliczamy na dowolnej funkcji  $f \in C^1(\mathbb{G}, \mathbb{R})$  w dowolnym punkcie  $g \in \mathbb{G}$ , korzystając przy tym ze Stw. 125,

$$\begin{aligned} [L_A, R_B](f)(g) &\equiv L_A(R_B(f))(g) - R_B(L_A(f))(g) \\ &\equiv L_A\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\right)(g) - R_B\left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\right)(g) \\ &\equiv \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\right) \circ \mathcal{L}_s^{t_A}(g) - \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\right) \circ \mathcal{R}_t^{t_B}(g) \\ &= \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f(\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot (g \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e))) - \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f((\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot g) \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e))\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wreszcie też wyznaczamy wprost, w dowolnym punkcie  $g \in \mathbb{G}$ ,

$$\begin{aligned} L_A(g) &= \mathbb{T}_e \ell_g(L_A(e)) \equiv \mathbb{T}_e \ell_g(t_A) = \mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_e \ell_g(t_A) \\ &= \mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_e \text{Ad}_g(t_A) \equiv (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_g(t_B) \end{aligned}$$

$$\equiv (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_g(R_B(e)) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B(g).$$

Jest też – w świetle Uwagi 27, a dla dowolnego  $g \in G$  –

$$\begin{aligned} \text{Inv}_* L_A(g) &\equiv \mathbb{T}_{g^{-1}} \text{Inv}(L_A(g^{-1})) = \mathbb{T}_{g^{-1}} \text{Inv} \circ \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}}(t_A) \\ &= -\mathbb{T}_e \wp_g \circ \mathbb{T}_{g^{-1}} \ell_g \circ \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}}(t_A) = -\mathbb{T}_e \wp_g(t_A) \equiv -R_A(g), \end{aligned}$$

a stąd już wprost wynika

$$\text{Inv}_* R_A = -\text{Inv}_* \circ \text{Inv}_* L_A = -(\text{Inv} \circ \text{Inv})_* L_A = -L_A.$$

Pierwsza z tych tożsamości pozwala łatwo udowodnić drugą równość wypisaną w tezie stwierdzenia w odwołaniu do Stw. 103 oraz zweryfikowanej wcześniej równości pierwszej,

$$-f_{ABC} R_C = f_{ABC} \text{Inv}_* L_C = \text{Inv}_*([L_A, L_B]) = [\text{Inv}_* L_A, \text{Inv}_* L_B] \equiv [R_A, R_B].$$

Sprawdzamy także – dla dowolnego  $h \in G$  –

$$\begin{aligned} (\wp_g * L_A)(h) &\equiv \mathbb{T}_{\wp_{g^{-1}}(h)} \wp_g(L_A \circ \wp_{g^{-1}}(h)) = \mathbb{T}_{h g^{-1}} \wp_g \circ \mathbb{T}_e \ell_{h g^{-1}}(t_A) \\ &= \mathbb{T}_e \ell_h \circ \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv}(g)})_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \ell_h(t_B) \\ &= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv}(g)})_A^B \triangleright L_B(h) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} (\ell_g * R_A)(h) &\equiv \mathbb{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)} \ell_g(R_A \circ \ell_{g^{-1}}(h)) = \mathbb{T}_{g^{-1}h} \ell_g \circ \mathbb{T}_e \wp_{g^{-1}h}(t_A) \\ &= \mathbb{T}_e(\ell_g \circ \wp_h \circ \wp_{g^{-1}})(t_A) = \mathbb{T}_e(\wp_h \circ \text{Ad}_g)(t_A) \\ &= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright \mathbb{T}_e \wp_h(t_B) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B(h). \end{aligned}$$

□

UWAGA 28. Powyższe stwierdzenie orzeka, że algebry pól lewo- i prawoniezmiennicznych są wzajem antyizomorficznymi komutującymi podalgebrami Liego w algebrze Liego (gładkich) pól wektorowych na  $G$ , przy czym  $((\mathbb{T}_e \text{Ad}_g)_A^B)_{A, B \in \overline{1, \dim G}}$  w dowolnym punkcie  $g \in G$  jest macierzą przejścia pomiędzy lewo- i prawoniezmienniczną bazą stycznej do grupy w tym punkcie. Tożsamości, w których pojawia się pchnięcie wzdłuż  $\text{Inv}$ , stanowią stycznościowy (w  $e$ ) wariant relacji między lewym i prawym działaniem regularnym w grupie i grupie przeciwnej. Ostatnie dwie tożsamości w tezie stwierdzenia określają własności współzmienniczości względem – odpowiednio – prawych i lewych translacji (pchnięć) pól lewo- i prawoniezmiennicznych.

∧

DEFINICJA 91. Przyjmijmy zapis Def. 40, 78 oraz 89 i niechaj  $\{\theta_L^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$  i  $\{\theta_R^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$  będą bazami  $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu  $\Omega^1(G)$  dualnymi do baz – odpowiednio –  $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$  i  $\{R_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$   $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu  $\mathfrak{X}(G)$ ,

$$L_A \lrcorner \theta_L^B = \delta_A^B = R_A \lrcorner \theta_R^B, \quad A, B \in \overline{1, \dim G}.$$

Pole 1-form o wartościach w  $\mathfrak{g}$  postaci

$$\theta_L := \theta_L^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nosi miano **kanonicznego pola 1-form lewoniemiennicznych** lub **lewoniemiennicznej formy Maurera–Cartana na  $G$** . Analogicznie, pole 1-form

$$\theta_R := \theta_R^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nazywamy **kanonicznym polem 1-form prawoniemiennicznych** lub **prawoniemienniczną formą Maurera–Cartana na  $G$** . ▲

UWAGA 29. Warto odnotować, że formy Maurera–Cartana wraz z odpowiednimi polami niemiennicznymi na grupie dają nam do ręki wygodną reprezentację operatora różniczki zewnętrznej (de Rhama), oto bowiem dla dowolnej funkcji  $f \in C^1(G, \mathbb{R})$  i w dowolnym punkcie  $g \in G$  zachodzą tożsamości:

$$df(g) = L_A(f)(g) \triangleright \theta_L^A(g) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \mathcal{L}_t^{t_A})(g) \triangleright \theta_L^A(g)$$

oraz

$$df(g) = R_A(f)(g) \triangleright \theta_R^A(g) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \mathcal{R}_t^{t_A})(g) \triangleright \theta_R^A(g).$$

▬

STWIERDZENIE 132. *Przyjmijmy zapis Def. 81 i 91 oraz Stw. 131. Formy Maurera–Cartana są – odpowiednio – lewo- i prawoniemienniczne,*

$$(\ell_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = \theta_L, \quad (\wp_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = \theta_R,$$

a ponadto spełniają tożsamości:

$$(1.5.9) \quad \theta_R = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}) \circ \theta_L$$

i

$$(1.5.10) \quad (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = -\theta_R, \quad (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = -\theta_L$$

oraz – dla dowolnego elementu  $g \in G$  –

$$(\wp_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_L = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \theta_L, \quad (\ell_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}})\theta_R = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_g) \circ \theta_R.$$

■

*Dowód:* W dowodzie wszystkich relacji wykorzystujemy bazowy charakter układów  $\{\theta_H^A\}_{A \in \{L, R\}}$ ,  $H \in \{L, R\}$  (w dowolnym punkcie  $G$ ) oraz ich dualność względem odpowiedniego układu pól niemiennicznych. I tak z równości, słusznej dla dowolnych  $g, h \in G$ ,

$$(L_A \lrcorner \ell_g^* \theta_L^B)(h) = \theta_L^B(\ell_g(h)) \circ T_h \ell_g(L_A(h)) = \theta_L^B(gh)(L_A(gh)) = \delta_A^B$$

wywdzimy wniosek:

$$\ell_g^* \theta_L^B(h) = \theta_L^B(h),$$

czyli

$$\ell_g^* \theta_L^B = \theta_L^B.$$

Analogicznie dowodzimy prawoniezmienniczości 1-form  $\theta_R^B$ . W następnej kolejności przywołujemy Równ. (1.5.8) i na tej podstawie obliczamy

$$L_A \lrcorner \theta_R^B = (\mathbb{T}_e \text{Ad.})_A^C \triangleright R_C \lrcorner \theta_R^B = (\mathbb{T}_e \text{Ad.})_A^C \delta_C^B = (\mathbb{T}_e \text{Ad.})_A^B,$$

skąd odczytujemy Równ. (1.5.9). W dowolnym punkcie  $g \in G$  jest też na mocy Uwagi 27 spełniona relacja

$$\begin{aligned} R_A \lrcorner \text{Inv}^* \theta_L^B(g) &= \theta_L^B(g^{-1}) \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(R_A(g)) = \theta_L^B(g^{-1}) \circ \mathbb{T}_g \text{Inv} \circ \mathbb{T}_e \wp_g(t_A) \\ &= -\theta_L^B(g^{-1}) \circ \mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}}(t_A) \equiv -\theta_L^B(g^{-1})(L_A(g)) = -\delta_A^B, \end{aligned}$$

zatem

$$\text{Inv}^* \theta_L^B = -\theta_R^B,$$

czyli także

$$\text{Inv}^* \theta_R^B = -\theta_L^B.$$

Wreszcie na koniec obliczamy – dla dowolnych  $g, h \in G$  –

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner (\wp_g^* \theta_L^B)(h) &= \theta_L^B(hg) \circ \mathbb{T}_h \wp_g(L_A(h)) = \theta_L^B(hg) \circ \mathbb{T}_h \wp_g \circ \mathbb{T}_e \ell_h(t_A) \\ &= \theta_L^B(hg) \circ \mathbb{T}_e \ell_{hg} \circ \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \theta_L^B(hg) \circ \mathbb{T}_e \ell_{hg}(t_C) \\ &= (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \theta_L^B(hg)(L_C(hg)) = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^C \delta_C^B = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \end{aligned}$$

i na tej podstawie wnioskujemy, że

$$\wp_g^* \theta_L^B = (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \theta_L^A.$$

Dowód ostatniej tożsamości przebiega w pełni analogicznie.  $\square$

**DEFINICJA 92.** Przyjmijmy zapis Def. 78 oraz Stw. 123, ustalmy (dowolnie)  $k \in \mathbb{N}^*$  i niechaj  $(M, \mathcal{A})$  będzie  $C^k$ -rozmainością,  $G$  zaś – grupą Liego. **Pochodna logarytmiczna lewostronna** na  $C^l(M, G)$ ,  $1 < l \leq k$  to odwzorowanie

$$\delta_L \log : C^l(M, G) \longrightarrow \Omega_{(l-1)}^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

określone wzorem

$$\delta_L \log f(x)(v_x) := \mathbb{T}_{f(x)} \ell_{f(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x f(v_x),$$

słusznym dla dowolnych: punktu  $x \in M$ , wektora  $v_x \in \mathbb{T}_x M$  oraz funkcji  $f \in C^l(M, G)$ . Podobnie, **pochodna logarytmiczna prawostronna** na  $C^l(M, G)$ ,  $1 < l \leq k$  to odwzorowanie

$$\delta_R \log : C^l(M, G) \longrightarrow \Omega_{(l-1)}^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

zadane w postaci

$$\delta_R \log f(x)(v_x) := \mathbb{T}_{f(x)} \wp_{f(x)^{-1}} \circ \mathbb{T}_x f(v_x).$$

$\blacktriangle$

**STWIERDZENIE 133.** Przyjmijmy zapis Def. 92. Dla dowolnych  $f_1, f_2 \in C^l(M, G)$  (wymnożonych punktowo) i w każdym punkcie  $x \in M$  prawdziwe są następujące tożsamości

$$\delta_L \log(f_1 \cdot f_2)(x) = \delta_L \log f_2(x) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{f_2(x)^{-1}})(\delta_L \log f_1(x)),$$

$$\delta_R \log(f_1 \cdot f_2)(x) = \delta_R \log f_1(x) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1(x)})(\delta_R \log f_2(x)).$$

■

*Dowód:* Dowodzimy pierwszej tożsamości. Dowód drugiej z nich przebiega analogicznie. Wprost na podstawie definicji, a w odwołaniu do Równ. (1.5.2), obliczamy

$$\begin{aligned} & \delta_L \log(f_1 \cdot f_2)(x) \\ &= T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1} \cdot f_1(x)^{-1}} \circ T_x(f_1 \cdot f_2) \\ &= T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} (\ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \ell_{f_1(x)^{-1}}) \circ T_x(m \circ (f_1, f_2)) \\ &= T_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ T_{(f_1(x), f_2(x))} m \circ T_x(f_1, f_2) \\ &= T_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ (T_{f_2(x)} \ell_{f_1(x)} \circ T_x f_2 + T_{f_1(x)} \ell_{f_2(x)} \circ T_x f_1) \\ &= T_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ T_x f_2 + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_2(x)^{-1}}) \circ T_{f_1(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ T_x f_1. \end{aligned}$$

□

STWIERDZENIE 134. *Przyjmijmy zapis Def. 92 i niechaj  $f_1, f_2 \in C^l(M, G)$ , a wówczas prawdziwe są zdania:*

$$\delta_L \log f_1 = \delta_L \log f_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists_{g \in G} : f_2 = \ell_g \circ f_1$$

oraz

$$\delta_R \log f_1 = \delta_R \log f_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists_{g \in G} : f_2 = \varrho_g \circ f_1.$$

■

*Dowód:* Wynikanie  $\Leftarrow$  jest oczywiste, a już z pewnością staje się takim po przeanalizowaniu dowodu wynikania przeciwnego. To udowodnimy dla pochodnej lewostronnej. Dowód dla pochodnej prawostronnej jest w pełni analogiczny. Oto więc, stosując pierwszą z tożsamości ze Stw. 133, otrzymujemy

$$\delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \delta_L \log(\text{Inv} \circ f_1) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_2,$$

a ponieważ na podstawie tej samej tożsamości stwierdzamy też równość

$$0 \equiv \delta_L \log(f_1 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \delta_L \log(\text{Inv} \circ f_1) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1,$$

przeto wobec założonej równości obu pochodnych lewostronnych

$$\begin{aligned} \delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) &= -(\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_2 \\ &= -(\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Przywołując definicję pochodnej logarytmicznej, przepisujemy powyższe w postaci

$$0 = \delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = T_{f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}} \ell_{f_1(\cdot) \cdot f_2(\cdot)^{-1}} \circ T_{(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1})},$$

albo równoważnej

$$T_{(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1})} = 0,$$

która implikuje równość

$$\forall_{x \in M} \forall_{V \in \mathbb{T}_x M} : V(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}) = 0,$$

czyli

$$\forall_{x \in M} : f_2(x) \cdot f_1(x)^{-1} = \text{const} \in G,$$

co jest właśnie postulowaną tezą.  $\square$

STWIERDZENIE 135. W zapisie Def. 91 i 92 słuszne są tożsamości

$$\theta_L \equiv \delta_L \log \text{id}_G, \quad \theta_R = \delta_R \log \text{id}_G.$$

■

*Dowód:* Bez trudu sprawdzamy, dla dowolnego  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner \delta_L \log \text{id}_G(g) &\equiv \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \text{id}_G(L_A(g)) = \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \text{id}_{\mathbb{T}_g G}(L_A(g)) \\ &= \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_g(L_A(e)) = L_A(e) \equiv t_A, \end{aligned}$$

co wobec bazowego charakteru układu  $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ . Dowód w przypadku pochodnej prawostronnej przebiega analogicznie.  $\square$

STWIERDZENIE 136. Przyjmijmy zapis Def. 81, 91 i Przykł. 7 (4). Formy Maurera–Cartana spełniają – dla dowolnych elementów  $g, h \in G$  – tożsamości

$$\begin{aligned} m^* \theta_L(g, h) &= \theta_L(h) + (\text{id}_{\mathbb{T}^* G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g), \\ m^* \theta_R(g, h) &= \theta_R(g) + (\text{id}_{\mathbb{T}^* G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_g) \circ \theta_R(h). \end{aligned}$$

■

*Dowód:* Na mocy Stw. 135 (odczytanego w połączeniu z Def. 92), a w odwołaniu do Równ. (1.5.2) stwierdzamy, co następuje:

$$\begin{aligned} \theta_L(g \cdot h) &\equiv m^* \theta_L(g, h) = m^* \circ \mathbb{T}_{g \cdot h} \ell_{(g \cdot h)^{-1}} = \mathbb{T}_{g \cdot h} \ell_{(g \cdot h)^{-1}} \circ \mathbb{T}_{(g \cdot h)} m \\ &= \mathbb{T}_{gh}(\ell_{h^{-1} \cdot g^{-1}}) \circ (\mathbb{T}_g \wp_h \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \text{pr}_2) \\ &\equiv \mathbb{T}_g(\text{Ad}_{h^{-1}} \circ \ell_{g^{-1}}) \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_{h^{-1}} \circ \text{pr}_2 \\ &= \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_{h^{-1}} \circ \text{pr}_2 \\ &\equiv (\text{id}_{\mathbb{T}^* G} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g) + \theta_L(h). \end{aligned}$$

Dowód drugiej tożsamości przebiega w pełni analogicznie.  $\square$

LEMAT 1.5.3. Przyjmijmy zapis Stw. 126. Niechaj  $H \subset G$  będzie grupą domkniętą grupy Liego  $G$  w topologii podprzestrzeni i niech  $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{g}$  będzie ciągiem wektorów w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$  tejże grupy, o granicy  $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathfrak{g}$ , a nadto niech  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  będzie ciągiem liczbowym zbieżnym do  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ , przy czym  $\lambda_{X_n}(t_n) \in H$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wówczas

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} : \lambda_X(t) \in H.$$

■



Dowód: Dla ustalonego (dowolnie)  $t \in \mathbb{R}$  rozważmy ciąg

$$N : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto E\left(\frac{t}{t_n}\right),$$

gdzie  $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$  jest cechą (funkcją *entier*). Jako że  $\frac{t}{t_n} - 1 < N_n \leq \frac{t}{t_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , przeto – na mocy Twierdzenia o trzech ciągach, a wobec założenia poczynionego w odniesieniu do  $t$ . –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n = t,$$

wobec czego także

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n \triangleright X_n = t \triangleright X.$$

Na podstawie Stw. 126 oraz 129 (więc ciągłości  $\exp$ ), jak również Stw. 124 i Równ. (1.4.39) wyznaczamy

$$\begin{aligned} \lambda_X(t) &= \lambda_{t \triangleright X}(1) \equiv \exp(t \triangleright X) \equiv \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n \triangleright X_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(t_n \cdot N_n \triangleright X_n) \\ &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \cdot N_n \triangleright X_n}(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \triangleright X_n}(N_n) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n; 0, e) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(1; N_n - 1, \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 1; 0, e)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 1; 0, e) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(1; N_n - 2, \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 2; 0, e)) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 2; 0, e) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1)^2 = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1)^{N_n}, \end{aligned}$$

a ponieważ  $H \ni \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1)^{N_n}$  jest domknięta, przeto – zgodnie z tezą stwierdzenia – także

$$\lambda_X(t) \in \bar{H} \equiv H.$$

□

**TWIERDZENIE 1.5.4** (Cartana o podgrupie domkniętej). *Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.*

■

Dowód: Niechaj  $H \subset G$  będzie podgrupą domkniętą w topologii podprzestrzeni i niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego  $G$ . Skonstruujemy bezpośrednio lokalną mapę podrozmaitości na otoczeniu otwartym punktu  $e \in H \subset G$ , a następnie utworzymy atlas podrozmaitości przesuując ową mapę do każdego z punktów podgrupy. W tym celu rozważmy podzbiór

$$\mathfrak{h} := \{ D\gamma(0) \mid \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, H) \subset C^\infty(\mathbb{R}, G) \wedge \gamma(0) = e \} \subset \mathfrak{g}.$$

Dla dowolnej pary ścieżek  $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, H)$  spełniających warunki  $\gamma_\alpha(0) = e$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i dla dowolnych  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  definiujemy ścieżkę złożoną

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow H : t \longmapsto \gamma_1(t_1 \cdot t) \cdot \gamma_2(t_2 \cdot t),$$

po czym obliczamy

$$D\gamma(0) = t_1 \triangleright D\gamma_1(0) + t_2 \triangleright D\gamma_2(0).$$

Wektor styczny do  $\gamma$  w  $t = 0$  należy do  $\mathfrak{h}$  (wprost z definicji), widzimy zatem, że dowolna  $\mathbb{R}$ -liniowa kombinacja elementów zbioru  $\mathfrak{h}$  jest w nim zawarta, czyli – innymi słowy –  $\mathfrak{h}$  jest podprzestrzenią  $\mathbb{R}$ -liniową przestrzeni  $\mathfrak{g}$ . W następnej kolejności dowodzimy tożsamości

$$(1.5.11) \quad \mathfrak{h} = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \in \mathbb{H} \}.$$

Zawieranie  $\supseteq$  jest oczywiste, rozważmy przeto dowolny wektor  $X := D\gamma(0) \in \mathfrak{h}$  określony przez pewną ścieżkę  $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{H})$  i zdefiniujmy, dla dostatecznie małego  $\varepsilon > 0$  (na tyle, by ścieżka  $\gamma(\cdot) - \varepsilon, \varepsilon[\cdot)$  była zawarta w dyfeomorficznym obrazie otoczenia  $\mathcal{U}_0$  wektora  $0 \in \mathfrak{g}$  względem odwzorowania  $\exp$ , zgodnie ze Stw. 129), ścieżkę wektorów

$$\xi : ] - \varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow \mathfrak{g} : t \longmapsto \exp \upharpoonright_{\mathcal{U}_0}^{-1} \circ \gamma(t).$$

Otrzymujemy, przywoławszy po drodze Równ. (1.5.2),

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} \ni X &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma(t) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp \circ \xi(t) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(\xi(0) + t \triangleright D\xi(0) + \mathcal{O}(t^2)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0) + \mathcal{O}(t^2)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\exp(t \triangleright D\xi(0)) \cdot \exp(\mathcal{O}(t^2))) \\ &= T_{e^r} \exp(\mathcal{O}(t^2)) \upharpoonright_{t=0} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \right) \\ &\quad + T_{e^l} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \upharpoonright_{t=0} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(\mathcal{O}(t^2)) \right) \\ &= T_{e^r} e \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \right) + T_{e^l} e(0_{\mathfrak{g}}) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{t \triangleright D\xi(0)}(1), \end{aligned}$$

czyli – w świetle Stw. 126 –

$$\mathfrak{h} \ni X = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{D\xi(0)}(t) = D\xi(0).$$

Możemy zatem zapisać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \triangleright \xi\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathfrak{h}.$$

Zdefiniujmy ciągi

$$X_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{g} : n \longmapsto n \triangleright \xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right), \quad t_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : n \longmapsto \frac{1}{n},$$

Na mocy Stw. 126 zachodzi relacja

$$\lambda_{X_n}(t_n) = \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \equiv \lambda_{\xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right)}(1) \equiv \exp \circ \xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right) = \gamma\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right) \in \mathbb{H},$$

możemy więc przywołać Lemat 1.5.3, aby stwierdzić, że

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \equiv \lambda_{D\xi(0)}(t) = \lambda_{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n}(t) \in \mathbb{H},$$

co dowodzi inkluzji

$$\mathfrak{h} \subseteq \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \in \mathbb{H} \}.$$

Tym sposobem zidentyfikowaliśmy algebrę Liego podgrupy  $\mathbb{H}$ . Ta wraz z dowolnym jej dopełnieniem prostym  $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ ,

$$(1.5.12) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

w przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej  $\mathfrak{g}$  (dopełnienie to nie jest w ogólności podalgebrą Liego algebry  $\mathfrak{g}$ ) stanowi poszukiwany model lokalnej mapy podrozmaitości na otoczeniu  $e$  w  $\mathbb{H} \subset G$ . Ażeby się o tym przekonać, pokażemy najpierw, że istnieje otoczenie

otwarte  $\mathcal{M}$  wektora  $0_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{m}$  o własności  $\exp(\mathcal{M}) \cap \mathbf{H} = \{e\}$ . Istotnie, gdyby tak nie było, można byłoby wybrać ciąg wektorów  $Y_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$  zbieżny do  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0_{\mathfrak{g}}$  i o własności  $\exp(Y_n) \in \mathbf{H}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wtedy jednak – wybrawszy (dowolnie) normę  $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  na  $\mathfrak{m}$  ciągłą w topologii na  $\mathfrak{g}$  (zatem np. wzięwszy normę euklidesową indukującą naturalną topologię na  $\mathfrak{g}$ ) – uzyskalibyśmy ciąg wektorów

$$v_n : \mathbb{N} \rightarrow \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m} : n \mapsto \|Y_n\|_{\mathfrak{g}}^{-1} \triangleright Y_n,$$

z którego wobec zwartości sfery  $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$  moglibyśmy następnie wybrać podciąg zbieżny  $v_n$  o granicy  $v := \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k} \in \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$ , więc też położywszy

$$\tau_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : n \mapsto \|Y_n\|_{\mathfrak{g}},$$

i sprawdziliśmy relacje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|0_{\mathfrak{g}}\|_{\mathfrak{g}} = 0,$$

$$\lambda_{v_n}(\tau_n) = \lambda_{\|Y_n\|_{\mathfrak{g}} \triangleright v_n}(1) = \lambda_{Y_n}(1) \in \exp(\mathfrak{h}) = \mathbf{H},$$

moglibyśmy ponownie skorzystać z Lematu 1.5.3, dostając

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_v(t) \in \mathbf{H},$$

czyli – w świetle równości (1.5.11) –  $v \in \mathfrak{h}$ , a zatem – wobec rozkładu (1.5.12) – sprzeczność z wcześniejszym wynikiem  $v \in \mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ . Mając pożądane otoczenie  $\mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$ , wybierzmy następnie takie otoczenia otwarte:  $\mathcal{O}_{\mathfrak{h}}$  wektora  $0_{\mathfrak{g}}$  w  $\mathfrak{h}$  oraz  $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$  wektora  $0_{\mathfrak{g}}$  w  $\mathfrak{m}$ , a także  $\mathcal{O}_e$  elementu  $e$  w  $\mathbf{G}$ , iżby odwzorowanie

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathcal{O}_e : (X, Y) \mapsto \exp(X) \cdot \exp(Y)$$

było dyfeomorfizmem. O tym, że wybór taki jest możliwy, przesądza analiza rozszerzonego odwzorowania

$$\tilde{\varphi} : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \rightarrow \mathbf{G} : (X, Y) \mapsto \exp(X) \cdot \exp(Y).$$

Jego styczna w  $(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$  to

$$D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}}) : \mathbb{T}_{(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}) \equiv \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{T}_{\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})}\mathbf{G} = \mathbb{T}_e\mathbf{G} \equiv \mathfrak{g} : (x, y) \mapsto x + y,$$

co w świetle Stw. 126 oraz Równ. (1.5.2) wynika wprost z rachunku

$$\begin{aligned} D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})(x, y) &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright x) \cdot \exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright y)) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\lambda_{t \triangleright x}(1) \cdot \lambda_{t \triangleright y}(1)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\lambda_x(t) \cdot \lambda_y(t)) \\ &= \mathbb{T}_e r_{\lambda_y(0)} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_x(t) \right) + \mathbb{T}_e l_{\lambda_x(0)} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_y(t) \right) \\ &= \mathbb{T}_e r_e(x) + \mathbb{T}_e l_e(y) = x + y \end{aligned}$$

i dowodzi izomorficznego charakteru  $D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$  (wszak  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ ), który pozwala odnieść do  $\tilde{\varphi}$  Tw. 1.4.7. Niechaj teraz  $h \in \mathcal{O}_e \cap \mathbf{H}$ , a wtedy  $h = \exp(X) \cdot \exp(Y)$  dla pewnych  $(X, Y) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$ , ale też  $\exp(X) \in \exp(\mathfrak{h}) = \mathbf{H}$ , więc  $\exp(Y) = \exp(X)^{-1} \cdot h \in \mathbf{H} \cdot (\mathcal{O}_e \cap \mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$ , co wobec założenia  $Y \in \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M}$  oznacza, że  $Y = 0_{\mathfrak{g}}$ , czyli  $h = \exp(X) \in \exp(\mathcal{O}_{\mathfrak{h}})$ . Jest przeto  $\kappa_e \equiv \varphi^{-1}$  mapą na otoczeniu  $\mathcal{O}_e$  elementu neutralnego w  $\mathbf{G}$ , a przy tym

$$\mathbf{H} \cap \mathcal{O}_e = \kappa_e^{-1}(\{ (X, 0_{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \mid X \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \}).$$

Mapę na otoczeniu punktu  $h \in H$  definiujemy jako

$$\kappa_h := \kappa \circ l_{h^{-1}} : l_h(\mathcal{O}_e) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_h \times \mathcal{O}_m$$

(podzbiór  $l_h(\mathcal{O}_e)$  jest otwarty jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego  $\mathcal{O}_e$ ). Uzyskujemy tym sposobem atlas podrozumności  $\{\kappa_h\}_{h \in H}$  dla  $H \subset G$ , w którym operacje grupowe są gładkie jako ograniczenia operacji z  $G$ .

I odwrotnie, niech  $H \subset G$  będzie podgrupą i podrozumnością grupy Liego  $G$ . Operacje grupowe na  $H$  są stosownymi złożeniami tychże operacji na  $G$  (z założenia gładkich) z kanonicznymi gładkimi włożeniami  $\iota_H : H \twoheadrightarrow \iota_H(H) \subset G$  i ich odwrotnościami  $\iota_H^{-1} : \iota_H(H) \twoheadrightarrow H$ ,

$$m_H \equiv \iota_H^{-1} \circ m_G \circ (\iota_H \times \iota_H), \quad \text{Inv}_H = \iota_H^{-1} \circ \text{Inv}_G \circ \iota_H,$$

i jako takie są gładkie. Jest zatem  $H$  podgrupą Liego. Pozostaje pokazać, że jest ona domknięta. W tym celu rozważmy dowolny punkt  $g \in \bar{H}$  z domknięcia  $\bar{H}$  podgrupy  $H$ , wraz z odnośnym ciągiem  $h_n : \mathbb{N} \rightarrow H$  doń zbieżnym,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = g$ . Niechaj  $\mathcal{O}_e \in \mathcal{T}(G)$  będzie dziedziną lokalnej mapy podrozumności  $\kappa$  na otoczeniu  $e \in \iota_H(H)$ , a  $\mathcal{U}_e \in \mathcal{T}(G)$  – pewnym podotoczeniem  $\mathcal{O}_e \supset \mathcal{U}_e$  o własności  $\bar{\mathcal{U}}_e \subset \mathcal{O}_e$  (wystarczy wybrać  $\mathcal{U}_e$  jako przeciwobraz względem  $\kappa$  dostatecznie małej kuli w  $\mathbb{R}^{\dim G}$  wokół  $\kappa(e)$ ). Przywoławszy Lemat 1.5.1, ustalmy (dowolnie) otoczenie otwarte  $\mathcal{O}$  elementu neutralnego  $e \in G$  o własności  $m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)(\mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e$ , po czym rozważmy ciąg

$$g_n := g^{-1} \cdot h_n : \mathbb{N} \rightarrow G : n \mapsto g^{-1} \cdot h_n$$

o granicy (obliczonej z wykorzystaniem ciągłości mnożenia)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = e.$$

Prawie wszystkie jego wyrazy są zawarte w  $\mathcal{O}$ , a zatem – dla dostatecznie dużych  $m, n \in \mathbb{N}$  –

$$h_n^{-1} \cdot h_m = g_n^{-1} \cdot g_m \equiv f(g_n, g_m) \in f(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e.$$

Przy tym dla ustalonego  $n$  otrzymujemy – wobec ciągłości mnożenia –

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_n^{-1} \cdot h_m = h_n^{-1} \cdot g,$$

a ponieważ granica ciągu punktów z  $\mathcal{U}_e$  należy do  $\bar{\mathcal{U}}_e \subset \mathcal{O}_e$ , przeto także  $h_n^{-1} \cdot g \in \mathcal{O}_e$ . Przy tym w dziedzinie  $\mathcal{O}_e$  mapy podrozumności  $\kappa$  przecięcie  $H \cap \mathcal{O}_e$  jest homeomorficznym przeciwobrazem względem  $\kappa$  dopełnienia (w  $\kappa(\mathcal{O}_e) \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\dim G})$ ) sumy mnogościowej pary zbiorów otwartych złożonych z punktów o – odpowiednio – ściśle dodatnich i ściśle ujemnych ostatnich  $\dim G - \dim H$  współrzędnych (opisujących kierunki transwersalne do obrazu  $\kappa(H \cap \mathcal{O}_e) = \mathcal{V} \times \{(0, 0, \dots, 0)\}$ ,  $\mathcal{V} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\dim H})$ ), co oznacza, że podzbiór  $H \cap \mathcal{O}_e$  jest domknięty w  $\mathcal{O}_e$ . Ilekroć zatem mamy do czynienia z ciągiem punktów w  $H \cap \mathcal{O}_e$  zbieżnym w  $\mathcal{O}_e$ , a takim jest  $h_n^{-1} \cdot h_n$ , granica jego leży także w  $H \cap \mathcal{O}_e$ , czyli w szczególności

$$h_n^{-1} \cdot g \in H \cap \mathcal{O}_e \subset H,$$

więc też  $g \in H$ , to zaś przesądza o postulowanej równości

$$\bar{H} = H.$$

□

PRZYKŁAD(Y) 28.

- (1) Grupa (pseudo)ortogonalna  $O_{\mathbb{R}}(p, q)$  z Przykł. 14 (1) jest (jako zbiór) przeciwobrazem  $\tau^{-1}(\{\mathbf{0}_n\})$  podzbioru domkniętego  $\{\mathbf{0}_n\} \subset \mathbb{R}(p+q)$  względem odwzorowania (jawnie ciągłego)

$$\tau : \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(p+q) \longrightarrow \mathbb{R}(p+q) : A \longmapsto A^T \boxplus \mathbf{1}_{p,q} \boxminus A - \mathbf{1}_{p,q},$$

zapisanego przy użyciu macierzy

$$\mathbf{1}_{p,q} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_q),$$

jest przeto podgrupą domkniętą grupy Liego  $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(p+q)$  z Przykł. 27 (4), czyli też (pod)grupą Liego. Grupa ta ma wyróżnioną podgrupę Liego

$$\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) \equiv \det_{(p+q)}^{-1}(\{1\}),$$

zwaną grupą specjalną ortogonalną.

W przypadku  $pq = 0$  ta ostatnia podgrupa zadaje rozkład grupy ortogonalnej na składowe spójne

$$O_{\mathbb{R}}(p, q) = \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) \sqcup P_{e_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q),$$

w którego zapisie

$$P_{e_1} : \mathbb{R}^{x^p} \circlearrowleft : (v^1, v^2, \dots, v^p) \longmapsto (-v^1, v^2, \dots, v^p)$$

jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu  $v^1 = 0$ , por.: Def. 26.

W przypadku  $pq \neq 0$  podgrupa  $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q)$  rozkłada się na składowe spójne

$$\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) = \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup P_{e_1} \cdot P_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q),$$

w którym  $P_{e_{p+1}}$  jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu  $v^{p+1} = 0$ , a (pod)grupę Liego będącą składową spójną jedności  $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q)$ , zwaną **grupą specjalną ortogonalną ortochroniczną**, tworzą macierze zachowujące zarówno orientację podprzestrzeni  $\mathbb{R}^{x^p} \times \{\mathbf{0}_q\} \subset \mathbb{R}^{p,q}$ , jak i orientację podprzestrzeni  $\{\mathbf{0}_p\} \times \mathbb{R}^{x^q} \subset \mathbb{R}^{p,q}$  (należy zwrócić uwagę, że przekształcenia ortogonalne zachowują każdą z tych podprzestrzeni, a to z racji określoności formy kwadratowej  $\delta_{\mathbb{E}}^{(p,q)}$  w ograniczeniu do każdej z nich). Ostatecznie otrzymujemy rozkład pełnej grupy ortogonalnej na składowe spójne w postaci

$$O_{\mathbb{R}}(p, q) = \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup P_{e_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup P_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup P_{e_1} \cdot P_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, q). \quad (1.5.13)$$

✓

DEFINICJA 93. Przyjmijmy zapis Def. 12 oraz 86. Parę  $((X, \mathcal{T}(X)), \lambda)$  złożoną z przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  oraz działania lewostronnego grupy topologicznej  $G$  nazywamy **przestrzenią z działaniem topologicznym lewostronnym grupy  $G$**  (albo  **$G$ -przestrzenią topologiczną lewostronną**), jeśli działanie  $\lambda$  jest ciągle. Analogicznie definiujemy **przestrzeń z działaniem topologicznym prawostronnym** (albo  **$G$ -przestrzeń topologiczną prawostronną**)  $G$ . Ciągłe odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie)  $(G)$ -ekwiwariantne między przestrzeniami z działaniem topologicznym lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania topologicznego lewostronnie** (wzgl.

**prawostronnie**) (G-)ekwiwariantnego. Przestrzenie z lewostronnym działaniem topologicznym grupy topologicznej  $G$  wraz z odnośnymi odwzorowaniami lewostronnie G-ekwiwariantnymi tworzą **kategorię przestrzeni z lewostronnym działaniem topologicznym grupy  $G$**  (albo **kategorię lewostronnych G-przestrzeni topologicznych**), którą oznaczamy symbolem

$$\mathbf{Top}_G.$$

Zastępując w powyższej definicji przestrzeń topologiczną  $(X, \mathcal{T}(X))$  rozmaitością różniczkowalną  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  klasy  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  i grupę topologiczną  $G$  grupą Liego (oznaczaną tym samym symbolem), określenie zaś „topologiczny” – określeniem „gładki” (w rozumieniu: klasy  $C^k$ ) otrzymujemy, odpowiednio: **rozmaitość z działaniem gładkim lewostronnym** (albo **G-rozmaitość gładką lewostronną**) wzgl. **prawostronnym** (albo **G-rozmaitość gładką prawostronną**), **odwzorowanie gładkie lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) (G-)ekwiwariantne. Rozmaitości różniczkowalne klasy  $C^k$  z lewostronnym działaniem gładkim grupy Liego  $G$  wraz z odnośnymi odwzorowaniami lewostronnie G-ekwiwariantnymi tworzą **kategorię rozmaitości z lewostronnym działaniem gładkim  $G$**  (albo **kategorię lewostronnych G-rozmaitości gładkich**), którą oznaczamy symbolem

$$\mathbf{Man}_G^{(k)}.$$

Wszystkie (pozostałe) pojęcia z Def. 13 i 14 oraz Przykł. 7 (1), (4) i (5) przenoszą się do kategorii  $\mathbf{Top}_G$  i  $\mathbf{Man}_G^{(k)}$ , jeśli tylko założyć dodatkowo, że odnośne odwzorowania są – odpowiednio – ciągłe lub różniczkowalne klasy  $C^k$ . W przypadku grup topologicznych i Liego będziemy też stosować wcześniej wprowadzone oznaczenie dla zbioru odwzorowań G-ekwiwariantnych między ustalonymi dwiema rozmaitościami z działaniem grupy  $G$ ,

$$\mathrm{Hom}_G(X_1, X_2) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Man}_G^{(k)}}(X_1, X_2).$$

▲

DEFINICJA 94. Przyjmijmy zapis Def. 93 oraz Stw. 123 i niechaj  $((M, \widehat{\mathcal{A}}), \lambda)$  będzie rozmaitością z działaniem gładkim (lewostronnym) grupy Liego  $G$  o algebrze Liego  $\mathfrak{g}$ . **Pole wektorowe fundamentalne lewostronne** na  $M$  to obraz dowolnego elementu  $X \in \mathfrak{g}$  względem odwzorowania

$$\mathcal{K}_{\cdot 1}(\cdot 2) \equiv \mathbb{T}_{(e, \cdot 2)}\lambda(\cdot 1, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_{\cdot 2}M}) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M) : X \longmapsto \mathbb{T}_{(e, \cdot 2)}\lambda(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_{\cdot 2}M}) \equiv \mathcal{K}_X(\cdot 2),$$

przy czym wartość otrzymanego tą drogą pola wektorowego w dowolnym punkcie  $x \in M$  to

$$\mathcal{K}_X(x) \equiv \mathbb{T}_{(e, \cdot 2)}\lambda(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_{\cdot 2}M})(x) \equiv \mathbb{T}_{(e, x)}\lambda(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_xM}) \in \mathbb{T}_xM.$$

**Pole wektorowe fundamentalne prawostronne** definiujemy analogicznie.

▲

UWAGA 30. Ze względów tak praktycznych, jak i historycznych warto poświęcić chwilę na wyprowadzenie formuły określającej działanie pola fundamentalnego na przestrzeni funkcji (klasy  $C^1$ ) na rozmaitości  $M$ . W tym celu ustalmy (dowolnie) funkcję  $f \in C^1(M, \mathbb{R})$  i policzmy w punkcie  $x \in M$ , przywołując po drodze

Def. 76 i 90 oraz Stw. 126,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_X(f)(x) &\equiv \mathbb{T}_x f(\mathcal{K}_X(x)) = \mathbb{T}_x f \circ \mathbb{T}_{(e,x)} \lambda(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_x M}) = \mathbb{T}_{(e,x)}(f \circ \lambda)(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_x M}) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \lambda)(\mathcal{L}_t^X(e), \Phi_0(t, x)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\mathcal{L}_t^X(e) \triangleright \Phi_0(t, x)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f((e \cdot \exp(t \triangleright X)) \triangleright x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\exp(t \triangleright X) \triangleright x).\end{aligned}$$

W szczególności odnosząc powyższy rachunek do funkcji współrzędniowych na otoczeniu  $x$ , otrzymujemy jawną reprezentację pola fundamentalnego w postaci

$$\mathcal{K}_X(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathcal{L}_t^X(e) \triangleright x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp(t \triangleright X) \triangleright x).$$

▮

STWIERDZENIE 137. *Przyjmijmy zapis Def. 73 i 94. Odwzorowanie  $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  jest  $G$ -ekwivariantnym antyhomomorfizmem algebr Liego, tj. dla dowolnych  $X, Y \in \mathfrak{g}$  i  $g \in G$  zachodzą tożsamości:*

$$\lambda_g * \mathcal{K}_X = \mathcal{K}_{\mathbb{T}_e \text{Ad}_g(X)}$$

oraz

$$[\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M = -\mathcal{K}_{[X, Y]_{\mathfrak{g}}}.$$

■

*Dowód:* Pierwszej z postulowanych tożsamości bronimy w bezpośrednim rachunku, wykorzystującym oczywistą relację

$$\lambda_g \circ \lambda = \lambda \circ (\text{Ad}_g \times \lambda_g),$$

a prowadzonym w dowolnym punkcie  $x \in M$ ,

$$\begin{aligned}\lambda_g * \mathcal{K}_X(x) &\equiv \lambda_g^{(\lambda_{g^{-1}}(x))} \mathcal{K}_X \circ \lambda_{g^{-1}}(x) \equiv \mathbb{T}_{g^{-1} \triangleright x} \lambda_g \circ \mathbb{T}_{(e, g^{-1} \triangleright x)} \lambda(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_{g^{-1} \triangleright x} M}) \\ &= \mathbb{T}_{(e, g^{-1} \triangleright x)} (\lambda_g \circ \lambda)(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_{g^{-1} \triangleright x} M}) \\ &= \mathbb{T}_{(e, g^{-1} \triangleright x)} (\lambda \circ (\text{Ad}_g \times \lambda_g))(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_{g^{-1} \triangleright x} M}) \\ &= \mathbb{T}_{e, x} \lambda(\mathbb{T}_e \text{Ad}_g(X), \mathbb{T}_{g^{-1} \triangleright x} \lambda_g(\mathbf{0}_{\mathbb{T}_{g^{-1} \triangleright x} M})) = \mathbb{T}_{e, x} \lambda(\mathbb{T}_e \text{Ad}_g(X), \mathbf{0}_{\mathbb{T}_x M}) \\ &\equiv \mathcal{K}_{\mathbb{T}_e \text{Ad}_g(X)}(x).\end{aligned}$$

Celem udowodnienia drugiej homomorficznego charakteru odwzorowania  $\mathcal{K}$  sprawdzamy, że pola wektorowe  $R_X \oplus \mathbf{0}_{\mathbb{T}M} \in \mathfrak{X}(G) \oplus \mathfrak{X}(M) \equiv \mathfrak{X}(G \times M)$  (gdzie  $\mathbf{0}_{\mathbb{T}M}$  jest cięciem zerowym  $\mathbb{T}M$ , patrz: Def. 67) i  $\mathcal{K}_X$  są w relacji określonej przez odwzorowanie  $\lambda$  w rozumieniu Def. 74. Istotnie, uwzględniając tożsamość

$$\lambda \circ (\wp_g \times \text{id}_M) = \lambda \circ (\text{id}_G \times \lambda_g),$$

słuszną dla dowolnego elementu  $g \in G$ , obliczamy – dla dowolnych  $(g, x) \in G \times M$

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{(g,x)} \lambda((R_X \oplus \mathbf{0}_{\mathbb{T}M})(g, x)) &= \mathbb{T}_{(g,x)} \lambda \circ (\mathbb{T}_e \wp_g \times \text{id}_{\mathbb{T}_x M})(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_x M}) \\ &= \mathbb{T}_{(e,x)} (\lambda \circ (\wp_g \times \text{id}_M))(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_x M}) = \mathbb{T}_{(e,x)} (\lambda \circ (\text{id}_G \times \lambda_g))(X, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_x M})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{T}_{(e, g \triangleright x)} \lambda \circ \mathbb{T}_{(e, x)} (\text{id}_G \times \lambda_g) (X, 0_{\mathbb{T}_x M}) = \mathbb{T}_{(e, g \triangleright x)} \lambda (\text{id}_{\mathbb{T}_e G} (X), \mathbb{T}_x \lambda_g (0_{\mathbb{T}_x M})) \\
&= \mathbb{T}_{(e, g \triangleright x)} \lambda (X, 0_{\mathbb{T}_{g \triangleright x} M}) \equiv \mathcal{K}_X \circ \lambda (g, x).
\end{aligned}$$

W świetle Stw. 104 oraz 131 możemy przeto zapisać

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M(x) = [\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M \circ \lambda(e, x) \\
&= \mathbb{T}_{(e, x)} \lambda ([R_X \oplus \mathbf{0}_{\mathbb{T}M}, R_Y \oplus \mathbf{0}_{\mathbb{T}M}]_{G \times M}(e, x)) \\
&= \mathbb{T}_{(e, x)} \lambda ([R_X, R_Y]_G(e), \mathbf{0}_{\mathbb{T}M}(x)) \equiv \mathbb{T}_{(e, x)} \lambda - ([X, Y]_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathbb{T}_x M}) \equiv -\mathcal{K}_{[X, Y]_{\mathfrak{g}}}(x).
\end{aligned}$$

□

**STWIERDZENIE 138.** *Przyjmijmy zapis Def. 93. Stabilizator  $G_x$  punktu  $x \in X$  przestrzeni  $X$  z działaniem topologicznym grupy topologicznej  $G$  jest podgrupą domkniętą w  $G$ , a przy tym stabilizatory punktów z tej samej  $G$ -orbity są podgrupami wzajem sprzężonymi,*

$$\forall_{(g, x) \in G \times X} : G_{g \triangleright x} = g G_x g^{-1}.$$

■

*Dowód:* Domkniętość stabilizatora punktu  $x \in X$  wynika wprost z ciągłości działania  $\lambda$  w drugim argumentcie, domkniętości  $\{x\} \subset X$  oraz tożsamości

$$G_x \equiv \lambda(\cdot, x)^{-1}(\{x\}).$$

Zachodzi ponadto, dla dowolnego elementu  $h \in G$ ,

$$h \in G_{g \triangleright x} \iff (hg) \triangleright x = h \triangleright (g \triangleright x) = g \triangleright x \iff g^{-1}hg \in G_x.$$

□

**TWIERDZENIE 1.5.5** (O rzędzie odwzorowania ekwiwariantnego). *Przyjmijmy zapis Def. 63 oraz 93. Niechaj  $((M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha), \lambda^\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą rozmaitościami z działaniem gładkim (lewostronnym) grupy Liego  $G$ , przy czym zakładamy dodatkowo, że  $\lambda^1$  jest przechodnie w rozumieniu Def. 14, i niech  $F : M_1 \rightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem gładkim (lewostronnie)  $G$ -ekwiwariantnym. Wówczas  $F$  ma stały rząd, w szczególności zaś przeciwobrazy punktów w  $M_2$  względem  $F$  są domkniętymi podrozmaitościami włożonymi w  $M_1$ .*

■

*Dowód:* Wobec przechodniości działania  $G$  na rozmaitości  $M_1$ , dla każdej pary punktów  $x_1, x_2 \in M_1$  istnieje element  $g_{21} \in G$  o własności  $x_2 = \lambda_{g_{21}}^1(x_1)$ , przy czym z racji  $G$ -ekwiwariantności  $F$  zachodzi tożsamość funkcjonalna

$$F \circ \lambda_{g_{21}}^1 = \lambda_{g_{21}}^2 \circ F,$$

a zatem także tożsamość

$$\mathbb{T}_{m_1}(F \circ \lambda_{g_{21}}^1) = \mathbb{T}_{m_1}(\lambda_{g_{21}}^2 \circ F),$$

którą możemy przepisać w postaci

$$\mathbb{T}_{m_2} F \circ \mathbb{T}_{m_1} \lambda_{g_{21}}^1 = \mathbb{T}_{F(m_1)} \lambda_{g_{21}}^2 \circ \mathbb{T}_{m_1} F.$$



Z racji dyfeomorficznego charakteru odwzorowań  $\lambda^\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  (przesądzającego o odwracalności odwzorowań do nich stycznych) z powyższej tożsamości wywodzimy wniosek o tożsamości rzędów:

$$\text{rk } T_{m_2} F = \text{rk } T_{m_1} F,$$

który w konsekwencji przechodniości  $\lambda^1$  możemy rozciągnąć na całą dziedzinę  $F$ .  $\square$

DEFINICJA 95. Przyjmijmy zapis Def. 93. Działanie  $\lambda : G \times X \rightarrow X$  grupy topologicznej  $G$  na przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  nazywamy **właściwym**, ilekroć cechę tę, rozumianą jak w Def. 59, ma odwzorowanie

$$(1.5.14) \quad \Lambda := (\lambda, \text{pr}_2) : G \times X \rightarrow X \times X : (g, x) \mapsto (g \triangleright x, x).$$

▲

STWIERDZENIE 139. *Przyjmijmy zapis Def. 95. Działanie  $\lambda : G \times X \rightarrow X$  grupy topologicznej  $G$  na przestrzeni Hausdorffa  $(X, \mathcal{T}(X))$  jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podzbioru zwartego  $\mathcal{K} \subset X$  podzbiór*

$$G(\mathcal{K}) := \{ g \in G \mid \lambda_g(\mathcal{K}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset \}$$

jest zwarty.

■

*Dowód:* Załóżmy najpierw, że działanie  $\lambda$  jest właściwe, tj. przeciwobraz dowolnego podzbioru zwartego w  $X \times X$  względem odwzorowania  $\Lambda$  (z Def. 95) jest zwarty. Niechaj  $\mathcal{K} \subset X$  będzie wybranym (dowolnie) podzbiorem zwartym, a wtedy podzbiór

$$\begin{aligned} G(\mathcal{K}) &\equiv \{ g \in G \mid \exists_{x \in \mathcal{K}} : g \triangleright x \in \mathcal{K} \} \equiv \{ g \in G \mid \exists_{x \in X} : \Lambda(g, x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \} \\ &= \text{pr}_2(\Lambda^{-1}(\mathcal{K} \times \mathcal{K})) \end{aligned}$$

jest zwarty jako ciągły obraz (rzut kanoniczny  $\text{pr}_2$  jest odwzorowaniem ciągłym) przeciwobrazu kwadratu kartezjańskiego zbioru zwartego (czyli zbioru zwartego w topologii produktowej) względem odwzorowania właściwego  $\Lambda$ .

I odwrotnie, niechaj podzbiór  $G(\mathcal{K})$  będzie zwarty dla dowolnego podzbioru zwartego  $\mathcal{K} \subset X$ . Rozważmy dowolny podzbiór zwarty  $\tilde{\mathcal{K}} \subset X \times X$ . Jego ciągle obrazy  $\text{pr}_\alpha(\tilde{\mathcal{K}}) \subset X$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  są zwarte, przeto własność tę ma także ich suma mnogościowa,  $\mathcal{K}_{12} \equiv \text{pr}_1(\tilde{\mathcal{K}}) \cup \text{pr}_2(\tilde{\mathcal{K}}) \subset X$ . Przy tym oczywiście ilekroć  $(g, x) \in G \times X$  spełnia warunek  $\Lambda(g, x) \in \tilde{\mathcal{K}}$ , to tym bardziej para ta spełnia warunek  $\Lambda(g, x) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$ , oto bowiem relacja  $(x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{K}}$  implikuje relacje  $x_1 \in \text{pr}_1(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$  oraz  $x_2 \in \text{pr}_2(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$ , więc też  $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$ , zatem ostatecznie

$$\Lambda^{-1}(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \Lambda^{-1}(\mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}) \equiv \{ (g, x) \in G \times \mathcal{K}_{12} \mid g \triangleright x \in \mathcal{K}_{12} \} \subset G(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12},$$

co w świetle Stw. 67 przesądza o zwartości  $\Lambda^{-1}(\tilde{\mathcal{K}})$ . Istotnie, podzbiór ten jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc – na mocy Stw. 67 (a wobec hausdorffowości  $X$ , która jest dziedziczona przez  $X \times X$ ) – domkniętego podzbioru  $\tilde{\mathcal{K}}$ , a ponieważ – jak pokazaliśmy – jest podzbiorem (pod)przestrzeni zwartej  $G(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12}$  (iloczynowi kartezjańskiemu zbiorów zwartych), przeto jest – znów na mocy Stw. 67 – także zwarty.  $\square$

STWIERDZENIE 140. *Przyjmijmy zapis Def. 95. Działanie  $\lambda : G \times X \rightarrow X$  grupy topologicznej  $G$  na lokalnie przewartej przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy ze zbieżności dowolnego ciągu punktów*

$$\lambda(g, x) : \mathbb{N} \rightarrow M : n \mapsto g_n \triangleright x_n,$$

*określonego dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  oraz dowolnego ciągu elementów  $g : \mathbb{N} \rightarrow G$ , wynika zbieżność pewnego podciągu ciągu  $g$ .*

■

*Dowód:* Załóżmy najpierw, że odwzorowanie  $\Lambda$  jest właściwe i niechaj  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  oraz  $g : \mathbb{N} \rightarrow G$  będą ciągami o własnościach

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X, \quad y := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \triangleright x_n \in X.$$

Korzystając z założenia o lokalnej przwartości  $X$ , wybierzmy dowolne zbiory przewarto  $\mathcal{U} \ni x$  oraz  $\mathcal{V} \ni y$  zawierające punkty  $x$  i – odpowiednio –  $y$  wraz z pewnymi ich otoczeniami (otwartymi). Zbieżność  $x$  do  $x$  (wzgl.  $\lambda(g, x)$  do  $y$ ) oznacza, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są zawarte w  $\mathcal{U}$  (wzgl.  $\mathcal{V}$ ), więc tym bardziej w zwartym zbiorze  $\bar{\mathcal{U}}$  (wzgl.  $\bar{\mathcal{V}}$ ), to jednak oznacza, że prawie wszystkie wyrazy ciągu  $\Lambda(g, x) : \mathbb{N} \rightarrow X \times X : n \mapsto (g_n \triangleright x_n, x_n)$  są zawarte w zwartym podzbiorze  $\bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{V}}$ , a zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu  $(g, x) : \mathbb{N} \rightarrow G \times X : n \mapsto (g_n, x_n)$  są zawarte w podzbiorze  $\Lambda^{-1}(\bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{V}})$ , który wobec właściwego charakteru  $\Lambda$  jest zwarty. Ta cecha  $\Lambda^{-1}(\bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{V}})$  przesądza o istnieniu podciągu zbieżnego ciągu  $(g, x)$ , co w szczególności implikuje zbieżność odnośnego podciągu ciągu  $g$ .

I odwrotnie, załóżmy, że spełniona jest implikacja z końca tezy dowodzonego stwierdzenia. Ustalmy podzbiór zwarty  $\mathcal{K} \subset X \times X$  i wybierzmy dowolny ciąg  $(g, x)$  (j/w) w zbiorze  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ . Jego obraz w  $X \times X$  względem  $\Lambda$  jest zawarty w zwartym podzbiorze  $\mathcal{K}$ , można zeń przeto wybrać podciąg zbieżny, którego przeciwobraz przecina się z ciągiem wyjściowym  $(g, x)$  definiując (pod)ciąg, o którym mowa we wspomnianej wcześniej implikacji. Tym sposobem otrzymujemy podciąg  $(g, x)$  w  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K}) \subset G \times X$  zbieżny w  $G \times X$  w topologii produktowej, a ponieważ zbiór  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$  jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc też – na mocy Stw. 67 i z racji hausdorffowskości  $X \times X$  (będącej pochodną hausdorffowskości  $X$ ) – domkniętego podzbioru  $\mathcal{K}$ , przeto granica tego zbieżnego podciągu leży w  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ , co ostatecznie dowodzi zwartości  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$  i tym samym przekonuje, że  $\Lambda$  jest odwzorowaniem właściwym. □

STWIERDZENIE 141. *Działanie topologiczne zwartej grupy topologicznej na dowolnej rozmaitości różniczkowalnej jest właściwe.*

■

*Dowód:* Każdy ciąg elementów grupy ma podciąg zbieżny z racji zwartości grupy, teza wynika zatem wprost ze Stw. 140. □

STWIERDZENIE 142. *Działanie dowolnej podgrupy domkniętej dowolnej grupy Liego stanowiące ograniczenie do podgrupy działania regularnego prawego (wzgl. lewego) grupy na sobie jest właściwe.*

■

*Dowód:* Zastosujemy kryterium ze Stw. 140. Niechaj  $g : \mathbb{N} \rightarrow G$  będzie ciągiem zbieżnym,  $h : \mathbb{N} \rightarrow G$  zaś – takim, dla którego ciąg  $g \cdot h : \mathbb{N} \rightarrow G : n \mapsto g_n \cdot h_n$

jest zbieżny. Wobec ciągłości operacji grupowych w  $G$  zbieżnym jest wówczas także ciąg  $(\text{Inv} \circ g) \cdot (g \cdot h) = h$ .  $\square$

LEMAT 1.5.6. *Przyjmijmy zapis Def. 93 i niechaj  $((X, \mathcal{T}(X)), \lambda)$  będzie przestrzenią z działaniem topologicznym grupy topologicznej  $G$ . Rzut kanoniczny*

$$\pi_{X/G} : X \longrightarrow X/G$$

na przestrzeń orbit

$$X/G := \{ G \triangleright x \mid x \in X \}$$

jest odwzorowaniem otwartym, w rozumieniu Def. 55, względem topologii ilorazowej na  $X/G$ .  $\blacksquare$

Dowód: Rozważmy zbiór otwarty  $\mathcal{O} \subset X$ . Jego obraz  $\pi_{X/G}(\mathcal{O})$  jest – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej – otwarty w  $X/G$ , jeśli przeciwobraz tego ostatniego,

$$\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(\mathcal{O})) = \{ \lambda(g, x) \mid (g, x) \in G \times \mathcal{O} \} \equiv G \triangleright \mathcal{O}$$

jest otwarty w  $X$ . Tak jednak jest w istocie, oto bowiem zbiór ten jest sumą mnogościową

$$G \triangleright \mathcal{O} = \bigcup_{g \in G} \lambda_g(\mathcal{O})$$

obrazów zbioru otwartego  $\mathcal{O}$  względem automorfizmów  $\lambda_g$  przestrzeni  $X$ , czyli zbiorów otwartych.  $\square$

TWIERDZENIE 1.5.7 (O rozmaitości ilorazowej). *Przyjmijmy notację Def. 14 i 95 oraz Lemat 1.5.6. Ilekroć działanie grupy Liego  $G$  na  $C^\infty$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  jest gładkie, swobodne i właściwe, przestrzeń orbit  $M/G$  jest rozmaitością topologiczną wymiaru  $\dim M - \dim G$  i istnieje na niej jedyna struktura gładka, względem której rzut kanoniczny  $\pi_{M/G}$  jest gładką submersją. Przestrzeń orbit z ową wyróżnioną strukturą rozmaitości nosi miano **rozmaitości ilorazowej**.  $\blacksquare$*

Dowód: Zaczniemy od zidentyfikowania struktury rozmaitości topologicznej na zbiorze orbit  $M/G$ . Topologia  $M/G$  jest topologią ilorazową indukowaną z  $M$ : zbiór  $\mathcal{O} \subset M/G$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego przeciwobraz  $\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O})$  jest otwarty w  $M$ . Jest to topologia Hausdorffa. Istotnie, wykorzystajmy relację równoważności  $\mathcal{R}_\lambda$  na  $M$ , jaką jest przynależność do tej samej orbity działania  $G$ ,

$$\mathcal{R}_\lambda = \Lambda(G \times M) \subset M \times M,$$

gdzie  $\Lambda$  jest odwzorowaniem zdefiniowanym w Równ. 1.5.14. Relacja ta zadaje rozkład  $M$  na wzajem rozłączne (w świetle Stw. 2) orbity działania grupy  $G$ . Niechaj  $x$  i  $y$  będą punktami w  $M$ , których obrazy  $\pi_{M/G}(x)$  i  $\pi_{M/G}(y)$  są dwoma różnymi punktami w przestrzeni orbit, tj.  $\pi_{M/G}(x) \neq \pi_{M/G}(y)$ , a wtedy  $(x_1, x_2) \notin \mathcal{R}_\lambda$ , a ponieważ podzbiór  $\mathcal{R}_\lambda \subset M \times M$  jest w świetle Stw. 68 domknięty w topologii produktowej na  $M \times M$  jako ciągły obraz zbioru domkniętego  $G \times M$  względem odwzorowania właściwego  $\Lambda$ , przeto istnieje otoczenie otwarte  $\mathcal{O}_{(x_1, x_2)} \ni (x_1, x_2)$  o własności  $\mathcal{O}_{(x_1, x_2)} \cap \mathcal{R}_\lambda = \emptyset$ . Wprost na mocy definicji topologii produktowej otoczenie takie

jest sumą mnogościową pewnej rodziny iloczynów kartezjańskich podzbiorów otwartych w  $M$ , wybierając zatem dowolny z nich – powiedzmy  $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}(M)$  – otrzymujemy relacje  $\mathcal{O}_\alpha \ni x_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  oraz  $(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \cap \mathcal{R}_\lambda = \emptyset$ , a zatem także  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_\alpha) \ni \pi_{M/G}(x_\alpha)$ , przy czym koniecznie  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_1) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$ , w przeciwnym bowiem razie istniałyby punkty  $y_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  należące do wspólnej orbity działania  $G$ , a zatem także  $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_\lambda \cap (\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ , co przeczyłoby rozłączności  $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$  i  $\mathcal{R}_\lambda$ . W konsekwencji Lematu 1.5.6 zbioru  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_\alpha)$  są otwartymi otoczeniami punktów  $\pi_{M/G}(x_\alpha)$  w przestrzeni orbit.

W następnej kolejności dokonamy rozkładu rozmaitości  $M$  na włożone weń gładko orbity działania grupy  $G$ , po czym stowarzyszymy z tym rozkładem stosowne lokalne mapy, w których współrzędne kartografujące kierunki transwersalne do (bliskich sobie) orbit zostaną ostatecznie wykorzystane w konstrukcji atlasu przestrzeni orbit. Punktem wyjścia do tak zakreślonej taktyki jest upewnienie się, że orbity działania grupy są w istocie podrozmaitościami gładko włożonymi w  $M$ . W tym celu rozważymy odwzorowanie gładkie, określone dla dowolnego (ustalonego) punktu  $x \in M$

$$\Omega_x \equiv \lambda(\cdot, x) : G \longrightarrow M : g \longmapsto \lambda(g, x),$$

o oczywistej własności

$$\Omega_x(G) = G \triangleright x.$$

Odwzorowanie to jest jawnie  $G$ -ekwiwariantne,

$$\forall_{g \in G} : \Omega_x \circ \ell_g = \lambda_g \circ \Omega_x,$$

tj. splata ze sobą działania  $G$ : lewe regularne na sobie oraz  $\lambda$  na  $M$ , a ponieważ pierwsze z tych działań jest przechodnie, przeto możemy odnieść do  $\Omega_x$  tezę Tw. 1.5.5, wnioskując o stałości rzędu tego odwzorowania. Ponadto jest ono injekcją, oto bowiem równość

$$g_2 \triangleright x = \Omega_x(g_2) = \Omega_x(g_1) = g_1 \triangleright x \iff (g_2^{-1} \cdot g_1) \triangleright x = x$$

oznacza – wobec założenia dotyczącego charakteru działania  $\lambda$  – równość

$$g_2^{-1} \cdot g_1 = e \iff g_2 = g_1.$$

To jednak w połączeniu z wcześniejszą konkluzją, a w odwołaniu do Stw. 113, pozwala stwierdzić, że  $\Omega_x$  jest immersją. Przy tym ilekroć  $\mathcal{K} \subset M$  jest zwarty, więc też – w świetle Stw. 67 – domknięty, jego przeciwobraz  $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$  jest domknięty w  $G$  wobec ciągłości  $\Omega_x$ , a ponieważ dla dowolnego należącego doń elementu  $g$  zachodzi relacja  $g \triangleright x \in \mathcal{K}$ , czyli też

$$g \triangleright (\mathcal{K} \cup \{x\}) \cap (\mathcal{K} \cup \{x\}) = (g \triangleright \mathcal{K} \cup \{g \triangleright x\}) \cap (\mathcal{K} \cup \{x\}) \supset \{g \triangleright x\} \neq \emptyset,$$

co implikuje jego zawieranie się

$$\Omega_x^{-1}(\mathcal{K}) \subset G(\mathcal{K} \cup \{x\})$$

w zbiorze  $G(\mathcal{K} \cup \{x\})$ , który jest zwarty na mocy Stw. 139, przeto  $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$  jest zwarty w zgodzie z Stw. 67. To zaś oznacza, że  $\Omega_x$  jest odwzorowaniem właściwym, a zatem ostatecznie – w konsekwencji poprzednich ustaleń i Stw. 114 – gładkim włożeniem.

Wybermy (dowolnie) punkt  $x \in M$ , a wraz z nim jego przeciwobraz  $g_x \in G$  względem  $\Omega_x$ , i lokalne mapy:  $\kappa_{g_x} : \mathcal{O}_{g_x} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times D}$ ,  $D = \dim G$  na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_{g_x}$  elementu  $g_x$  w  $G$  oraz  $\kappa_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$ ,  $N = \dim M$

na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x$  w  $M$ , w których lokalna prezentacja włożenia  $\Omega_x$  przybiera postać kanoniczną opisaną w Stw. 110, czyli

$$G \triangleright \{x\} \cap \mathcal{O}_x = \kappa_x^{-1}(\mathcal{U}_x \times \{\mathbf{0}_n\}),$$

gdzie  $\mathcal{U}_x \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^D)$  jest homeomorficznym obrazem fragmentu orbity  $x$  zawartego w  $\mathcal{O}_x$ . Niechaj

$$\Delta_x := \kappa_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times \mathbb{R}^N)$$

będzie podrozmaitością  $\mathcal{O}_x$  transwersalną do (fragmentu) rzeczonyj orbity  $G \triangleright \{x\}$ , wyznaczającą rozkład przestrzeni stycznej

$$\mathbb{T}_x M = \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x,$$

w którym wobec immersywności  $\Omega_x$  identyfikujemy

$$(1.5.15) \quad \mathbb{T}_e \Omega_x(\mathbb{T}_e G) \equiv \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \subset \mathbb{T}_x M.$$

Oznaczmy dalej

$$\delta_x := \lambda|_{G \times \Delta_x} : G \times \Delta_x \longrightarrow M.$$

Wykażemy, że  $\delta$  jest dyfeomorfizmem na pewnym otoczeniu punktu  $(e, x) \in G \times \Delta_x$ . W tym celu wykorzystamy gładkie włożenie

$$\iota_x : G \longrightarrow G \times \Delta_x : g \longmapsto (g, x)$$

do rozłożenia odwzorowania  $\Omega_x$  wedle schematu

$$\Omega_x = \delta_x \circ \iota_x,$$

a zatem także – stycznego do niego:

$$\mathbb{T}_e \Omega_x = \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_e \iota_x.$$

Zważywszy Równ. (1.5.15), konstatujemy prawdziwość relacji

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) &\equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_e G \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x) \supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_e G \oplus \{0_{\mathbb{T}_x \Delta_x}\}) \\ &\equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_e \iota_x(\mathbb{T}_e G) = \mathbb{T}_e \Omega_x(\mathbb{T}_e G) = \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}). \end{aligned}$$

Wprowadźmy dalej gładkie włożenie

$$\iota_e : \Delta_x \longrightarrow G \times \Delta_x : y \longmapsto (e, y)$$

podrozmaitości transwersalnej do (lokalnego fragmentu) orbity  $G \triangleright \{x\}$ , aby móc rozłożyć gładkie włożenie  $J_{\Delta_x} : \Delta_x \longrightarrow M$  w postaci

$$J_{\Delta_x} = \delta_x \circ \iota_e$$

i – co za tym idzie – styczne do niego:

$$\mathbb{T}_y J_{\Delta_x} = \mathbb{T}_{(e,y)} \delta_x \circ \mathbb{T}_y \iota_e.$$

Wobec oczywistej równości

$$\mathbb{T}_x \iota_e(\mathbb{T}_x \Delta_x) = \{0_{\mathbb{T}_e G}\} \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x$$

otrzymujemy tym razem relację

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) &\supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\{0_{\mathbb{T}_e G}\} \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x) \equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_x \iota_e(\mathbb{T}_x \Delta_x) \\ &= \mathbb{T}_x J_{\Delta_x}(\mathbb{T}_x \Delta_x) \equiv \mathbb{T}_x \Delta_x \subset \mathbb{T}_x M, \end{aligned}$$

ostatecznie zatem stwierdzamy, że

$$\mathbb{T}_{(e,x)}\delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(\mathbb{G} \times \Delta_x)) \supset \mathbb{T}_x(\mathbb{G} \triangleright \{x\}) \oplus \mathbb{T}_x\Delta_x \equiv \mathbb{T}_xM,$$

skoro zaś zarazem

$$\mathbb{T}_xM \supset \mathbb{T}_{(e,x)}\delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(\mathbb{G} \times \Delta_x)),$$

to nieuchronnie

$$\mathbb{T}_{(e,x)}\delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(\mathbb{G} \times \Delta_x)) = \mathbb{T}_xM,$$

co dowodzi surjektywności  $\mathbb{T}_{(e,x)}\delta_x$ , a ponieważ jest też – wobec ustalonej wcześniej immersywności  $\Omega_x$  –

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{(e,x)}(\mathbb{G} \times \Delta_x) &\equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_e\mathbb{G} + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x\Delta_x \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x(\mathbb{G} \triangleright \{x\}) + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x\Delta_x \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_xM, \end{aligned}$$

przeto  $\mathbb{T}_{(e,x)}\delta_x$  jawi się bijekcją. Na tym etapie możemy już odwołać się do Tw. 1.4.7, aby orzec istnienie pewnego otoczenia otwartego  $\mathcal{V}_x$  punktu  $(e, x) \in \mathbb{G} \times \Delta_x$  odwzorowywanego dyfeomorficznie przez (ograniczenie)  $\delta_x$  w pewne otoczenie otwarte  $\tilde{\mathcal{O}}_x$  punktu  $x \in M$ . Biorąc pod uwagę naturę topologii (produktowej) na  $\mathbb{G} \times \Delta_x$  (wedle schematu myślowego wyłożonego na początku niniejszego dowodu w uzasadnieniu hausdorffowskości topologii ilorazowej na przestrzeni orbit), upewniamy się, że pierwsze z tych otoczeń można wybrać w postaci produktowej  $\mathcal{V}_x = \mathcal{W}_e \times \mathcal{W}_x$ , przy czym z każdego z otoczeń:  $\mathcal{W}_a$ ,  $a \in \{e, [x]\}$  można wyjąć przewzarte przeciwobrazy pewnych kul otwartych  $B^D(\tilde{\kappa}_e(e) = \mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \equiv \tilde{\kappa}_e(\tilde{\mathcal{W}}_e)$ ,  $\varepsilon_e > 0$  oraz – odpowiednio –  $B^{N-D}(\tilde{\kappa}_x(x) = \mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \equiv \tilde{\kappa}_x(\tilde{\mathcal{W}}_x)$ ,  $\varepsilon_x > 0$  względem lokalnych map  $\tilde{\kappa}_e : \mathcal{W}_e \rightarrow \mathbb{R}^D$  oraz – odpowiednio –  $\tilde{\kappa}_x : \mathcal{W}_x \rightarrow \mathbb{R}^{\times N-D}$ . W dalszej części naszej analizy skupimy uwagę na otoczeniu produktowym  $\tilde{\mathcal{V}}_x \equiv \tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x$ .

W następnej kolejności pokażemy, że otoczenie  $\tilde{\mathcal{W}}_x \subset \Delta_x$  można wybrać na tyle małym, ażeby każda orbita działania  $\mathbb{G}$  przecinała je w co najwyżej jednym punkcie. Załóżmy przeciwnie i rozważmy przeliczalną bazę otoczeń  $x$  w  $\tilde{\mathcal{W}}_x$  złożoną z przeciwobrazów względem  $\tilde{\kappa}_x$  rodziny kul otwartych  $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n)$ ,  $r_n := \frac{1}{E(\varepsilon_x^{-1})+n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . W każdym z przeciwobrazów  $\mathcal{B}_n \equiv \tilde{\kappa}_x^{-1}(B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n))$  tkwi para punktów  $x_n$  oraz  $y_n \neq x_n$  należących do tej samej orbity, tj. spełniających warunek  $y_n = g_n \triangleright x_n$  dla pewnego elementu  $g_n \in \mathbb{G}$ . Przy tym wobec założonej postaci bazy otoczeń oba ciągi punktów w (prezwartym)  $\tilde{\mathcal{W}}_x$  zbiegają do  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n \triangleright x_n),$$

a zatem – w świetle Stw. 140, a z racji właściwego charakteru  $\lambda$  – ciąg  $g$  zdefiniowany przez parę ciągów  $(x, y)$  zawiera podciąg  $g_n$  zbieżny do pewnego elementu  $g \in \mathbb{G}$ . Ciągłość działania  $\lambda$  pozwala nam zatem zapisać ciąg równości

$$g \triangleright x \equiv \lambda\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k}, x_{n_k})\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x,$$

a ponieważ mamy do czynienia z działaniem wolnym, przeto nieodzownie  $g = e$ . Jednakowoż dla dostatecznie dużych wartości  $k \in \mathbb{N}$  zachodzi  $g_{n_k} \in \tilde{\mathcal{W}}_e$ , przy czym  $g_{n_k} \neq e$  (wszak  $y_{n_k} \neq x_{n_k}$ ) więc też

$$\lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) = y_{n_k} = \lambda(e, y_{n_k}),$$

co z racji injektywności  $\delta_x \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x} \equiv \lambda \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x}$  implikuje równość

$$(g_{n_k}, x_{n_k}) = (e, y_{n_k}),$$

prowadzącą do jawnej sprzeczności. Otoczenie  $\widetilde{\mathcal{W}}_x$  o postulowanej cesze zawsze zatem istnieje.

Rozważmy teraz złożenie dyfeomorfizmów

$$\begin{aligned} \phi_x &:= (\widetilde{\kappa}_e \times \widetilde{\kappa}_x) \circ (\delta_x \upharpoonright_{\widetilde{\mathcal{V}}_x})^{-1} : \widetilde{\mathcal{O}}_x \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathcal{V}}_x \equiv \widetilde{\mathcal{W}}_e \times \widetilde{\mathcal{W}}_x \\ &\xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x). \end{aligned}$$

Pokażemy, że określa on lokalną mapę zgodną z działaniem grupy  $G$  w tym naturalnym sensie, że orbity tegoż działania są w tej mapie hiperpłaszczyznami parametryzowanymi przez pierwszych  $D$  współrzędnych. Zaczniemy od tego, że wobec otwartości zarówno swojej dziedziny, jak i przeciwdziedziny dyfeomorfizm  $\phi_x$  dopuszcza postulowaną interpretację, pozostaje więc jedynie upewnić się co do słuszności naszych oczekiwań dotyczących opisu fragmentów orbit zawartych w jego dziedzinie. Mamy

$$\begin{aligned} \phi_x^{-1} : \quad & B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{O}}_x \\ & : (\xi, \zeta) \longmapsto \delta_x(\widetilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)) \equiv \lambda(\widetilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)), \end{aligned}$$

bez trudu przeto stwierdzamy, że dowolna hiperpowierzchnia  $\zeta = \zeta_* = \text{const}$  jest zawarta w pojedynczej orbicie, oto bowiem jej dyfeomorficzny przeciwobraz w  $M$  względem  $\phi_x$  spełnia relację

$$\phi_x^{-1}(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \{\zeta_*\}) \equiv \lambda(\widetilde{\mathcal{W}}_e \times \{\widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}) \subset \lambda(G \times \{\widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}) \equiv G \triangleright \{\widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}.$$

Rozumowanie to pokazuje, że dowolna orbita  $G \triangleright \{y\}$ ,  $y \in M$  przecina  $\widetilde{\mathcal{O}}_x$  wzdłuż sumy mnogościowej (fragmentów) hiperpowierzchni o opisie współrzędniowym  $\zeta = \zeta_i = \text{const}$ ,  $i \in I_y$  dla pewnego zbioru indeksów  $I_y$ . Otoczenie  $\widetilde{\mathcal{W}}_x$  zostało jednak wybrane tak, iżby dowolna orbita przecinała je w *co najwyżej jednym* punkcie, wobec czego  $|I_y| \leq 1$ . Lokalna mapa  $\phi_x$  jest zatem – w istocie – zgodna z działaniem  $G$  w określonym wyżej znaczeniu i może być wykorzystana w kartografowaniu przestrzeni orbit na otoczeniu punktu  $\pi_{M/G}(x) \equiv [x]$ .

Skonstruujemy teraz lokalną mapę na otoczeniu  $\pi_{M/G}(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$  punktu  $[x]$ , pamiętając, że otwartość zbioru  $\pi_{M/G}(\widetilde{\mathcal{O}}_x) \ni [x]$  w topologii ilorazowej jest zapewniona przez otwartość rzutu kanonicznego  $\pi_{M/G}$ , stwierdzoną w Lemacie 1.5.6. Oznaczmy lokalne cięcie przez  $x$  w poprzek orbit zawartych w  $\widetilde{\mathcal{O}}_x$  symbolem

$$\widetilde{\Delta}_x := \phi_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x))$$

i zauważmy, że ograniczenie rzutu kanonicznego

$$\pi_{M/G} \upharpoonright_{\widetilde{\Delta}_x} : \widetilde{\Delta}_x \longrightarrow \pi_{M/G}(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$$

jest bijekcją w świetle założeń poczynionych w odniesieniu do charakteru przecięć orbit działania  $G$  z  $\widetilde{\mathcal{O}}_x$  oraz z racji potwierdzonej zgodności mapy  $\phi_x$  z tymże działaniem. Przy tym ilekroć  $\mathcal{W} \subset \widetilde{\Delta}_x$  jest podzbiorem otwartym, jego obraz w przestrzeni orbit

$$\begin{aligned} \pi_{M/G}(\mathcal{W}) &\equiv \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})) \\ &= \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1}(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})) \end{aligned}$$

jest w oczywisty sposób otwarty jako obraz względem złożenia odwzorowań otwartych zbioru  $B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})$  otwartego w topologii produktowej – wszak

$\phi_x$  jest homeomorfizmem, więc też odwzorowaniem otwartym, a rzut na drugą składową danego przezeń zbioru  $\phi_x(\mathcal{W})$  otwartego w topologii produktowej, czyli będącego sumą mnogościową iloczynów kartezjańskich zbiorów otwartych, jest także sumą rzutów tychże iloczynów na drugą składową, więc także zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^{\times N-D}$ . Koniec końców odwzorowanie ograniczone  $\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x}$  jest zatem homeomorfizmem, którego ciągłą odwrotność będziemy oznaczać symbolem

$$\sigma_{[x]} := (\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x})^{-1} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Delta}_x.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \psi_{[x]} := \text{pr}_2 \circ \phi_x \circ \sigma_{[x]} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) &\xrightarrow{\cong} \tilde{\Delta}_x \xrightarrow{\cong} \{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \\ &\longrightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x), \end{aligned}$$

które – jak łatwo widać – jest homeomorfizmem otoczenia otwartego  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$  na kulę otwartą  $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \subset \mathbb{R}^{\times N-D}$ , czyli – innymi słowy – lokalną mapą klasy  $C^0$ . Należy przy tym podkreślić, że lokalna prezentacja rzutu kanonicznego określona przez lokalną mapę  $\phi_x$  na  $\tilde{\mathcal{O}}_x$  oraz stowarzyszoną z nią lokalną mapę  $\psi_{[x]}$  na  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$  przyjmuje prostą postać

$$\psi_{[x]} \circ \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1} : B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \rightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x),$$

o jawnie submersywnym charakterze. Odwzorowanie  $\sigma_{[x]}$  ma zatem naturalną interpretację ciecica lokalnego submersji  $\pi_{M/G}$  w rozumieniu Stw. 116. Jeśli więc zaindukujemy strukturę rozmierności na  $M/G$  z tej na rozmierności  $M$  (j/w) przy użyciu podatlasu na  $M$  utworzonego przez wszystkie możliwe mapy lokalne na  $M$  zgodne z działaniem  $G$  i wszystkie ciecica lokalne rzutu kanonicznego nad obrazami – względem tegoż ciecica – ich dziedzin, to dla zakończenia dowodu twierdzenia pozostanie nam jedynie wykazać gładkości odwzorowań przejścia między mapami określonymi na przecinających się niepusto otoczeniach w przestrzeni orbit, a na koniec – jedności tak otrzymanej struktury gładkiej.

Niechaj zatem  $\psi_{[x_\alpha]} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_\alpha}) \rightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema lokalnymi mapami spełniającymi warunek  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_1}) \cap \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \neq \emptyset$ , a stowarzyszonymi z lokalnymi mapami  $\phi_{x_\alpha} : \tilde{\mathcal{O}}_{x_\alpha} \rightarrow B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e; \alpha}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_n; \varepsilon_{x_\alpha})$ . Przecinanie się rzutów  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_\alpha})$  otoczeń  $\tilde{\mathcal{O}}_{x_\alpha}$  odnośnych punktów  $x_\alpha$  oznacza, że są w tych otoczeniach punkty  $y_\alpha \in \tilde{\mathcal{O}}_{x_\alpha}$  należące do tej samej orbity, tj.  $y_2 = g_{21} \triangleright y_1$  dla pewnego elementu  $g_{21} \in G$ , możemy zatem bez straty ogólności (dokonawszy – jeśli trzeba – trywialnego przesunięcia w przeciwdziedzinach obu map  $\phi_{x_\alpha}$ ) przyjąć, że  $y_\alpha = x_\alpha$  i jest spełniony warunek

$$x_2 = g_{21} \triangleright x_1.$$

Załóżmy najpierw, że  $g_{21} = e$ , a wtedy możemy wprost rozpatrzyć odwzorowanie przejścia między mapami  $\phi_{x_1} = (\xi_1, \zeta_1)$  i  $\phi_{x_2} = (\xi_2, \zeta_2)$  na zbiorze  $\mathcal{O}_{12} := \tilde{\mathcal{O}}_{x_1} \cap \tilde{\mathcal{O}}_{x_2}$ . Jako że przecięcia dowolnej orbity z każdym z otoczeń odpowiadają stałej i jedynej wartości  $\zeta_1$  oraz takież wartości  $\zeta_2$ , przeto gładkie (wprost na mocy konstrukcji) odwzorowanie przejścia między obiema mapami jest postaci

$$\begin{aligned} \phi_{x_2} \circ (\phi_{x_1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{12}})^{-1} : \phi_{x_1}(\mathcal{O}_{12}) &\rightarrow \phi_{x_2}(\mathcal{O}_{12}) \\ : (\xi_1(y), \zeta_1(y)) &\mapsto (F_1 \circ (\xi_1, \zeta_1), F_2 \circ \zeta_1)(y), \end{aligned}$$



gdzie  $F_1$  i  $F_2$  są pewnymi odwzorowaniami gładkimi. W szczególności więc otrzymujemy relację

$$\zeta_2(y) = F_2 \circ \zeta_1(y), \quad y \in \mathcal{O}_{12},$$

z której odczytujemy jawnie gładką postać odwzorowania przejścia między mapami indukowanymi:

$$\begin{aligned} & \psi_{[x_2]} \circ (\psi_{[x_1]} \upharpoonright_{\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12})})^{-1} \\ : & \psi_{[x_1]} \circ \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12}) \rightsquigarrow \psi_{[x_2]} \circ \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12}) \\ : & \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ (\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_{x_1}})^{-1}(\pi_{M/G}(y)) \equiv \zeta_1(y) \longmapsto \zeta_2(y) = F_2(\zeta_1(y)). \end{aligned}$$

W przypadku  $g_{21} \neq e$  nie możemy wprawdzie *a priori* rozważać odwzorowań przejścia między mapami  $\phi_{x_1}$  i  $\phi_{x_2}$  na  $\mathcal{O}_{12}$  (zbiór ten może być w szczególności pusty), ale możemy zastąpić mapę lokalną  $\phi_{x_2}$  oraz cięcie lokalne  $\sigma_{[x_2]}$  użyte w definicji mapy lokalnej  $\psi_{[x_2]}$  na  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{x_2})$  innymi z tego samego podatlasu na  $M$  i – odpowiednio – zbioru cięć lokalnych rzutu kanonicznego, indukujących mapy lokalne na przestrzeni orbit, które wspólnie wyznaczają tę samą mapę lokalną  $\psi_{[x_2]}$  na  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{x_2})$ , ale jednocześnie przeprowadzają punkt z jej dziedziny przez zbiór otwarty w nakryciu  $M$  przecinający się z  $\mathcal{O}_{x_1}$  w pewnym otoczeniu otwartym  $x_1$ , co sprowadza nas do poprzednio zweryfikowanego przypadku. Otóż więc użyjmy automorfizmu  $\lambda_{g_{21}}$ , aby zdefiniować odwzorowanie

$$\phi_{x_1}^{21} := \phi_{x_2} \circ \lambda_{g_{21}} : \lambda_{g_{21}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \rightsquigarrow B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e;2}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_2})$$

na otwartym (wprost z konstrukcji) otoczeniu  $\lambda_{g_{21}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$  punktu  $x_1$ . Jako że automorfizm  $\lambda_{g_{21}}$  przeprowadza orbity na orbity,  $\phi_{x_1}^{21}$  jest mapą lokalną zgodną z działaniem  $G$ . Definicję tę uzupełniamy stosowną definicją lokalnego cięcia rzutu kanonicznego nad  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$ ,

$$\sigma_{[x_2]}^{21} := \lambda_{g_{21}}^{-1} \circ \sigma_{[x_2]}.$$

Ta ostatnia ma sens, gdyż

$$\pi_{M/G} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \pi_{M/G} \circ \sigma_{[x_2]} = \text{id}_{\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})},$$

a przy tym zgodnie z zapowiedzią odtwarza, w połączeniu z nową mapą lokalną, wyjściową mapę lokalną na  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$ , o czym przekonuje bezpośredni rachunek:

$$\psi_{[x_2]}^{21} := \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1}^{21} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \lambda_{g_{21}} \circ \lambda_{g_{21}}^{-1} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} \equiv \psi_{[x_2]}.$$

To kończy dowód istnienia struktury gładkiej, o której jest mowa w tezie twierdzenia. Należy jeszcze wykazać struktury tej jedyność.

W tym celu rozważmy dowolne dwie takie struktury na tej samej przestrzeni orbit  $M/G$ , oznaczając odnośnie jej kopie indeksem:  $(M/G)_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  dla wygodnego odróżnienia. Wprost na mocy poczynionego założenia rzut kanoniczny  $\pi_{M/G} : M \twoheadrightarrow (M/G)_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  jest w obu przypadkach gładką surjektywną

submersją, można zatem odnieść do niego tezę Stw. 117, i to na dwa sposoby: możemy oto zapisać trywialny diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & (M/G)_2 \\ & \nearrow^{\pi_{M/G}} & \uparrow^{\text{id}_{M/G}} \\ M & \xrightarrow{\pi_{M/G}} & (M/G)_1 \end{array} ,$$

w którym traktujemy  $\pi_{M/G} : M \rightarrow (M/G)_1$  jako submersję,  $\pi_{M/G} : M \rightarrow (M/G)_2$  zaś (to samo odwzorowanie) – jako odwzorowanie referencyjne, którego gładkość przesądza o gładkości  $\text{id}_{M/G}$ ; możemy też zamienić miejscami (i rolami)  $(M/G)_1$  i  $(M/G)_2$ , co prowadzi do wniosku, że także wtedy, gdy traktujemy  $\text{id}_{M/G}$  jako odwzorowanie z  $(M/G)_2$  w  $(M/G)_1$ , jest ono gładkie, co jest równoznaczne z równoważnością obu struktur różniczkowych.  $\square$

**UWAGA 31.** Często przyjmuje się, że nośnik struktury rozmaitości topologicznej powinien spełniać drugi aksjomat przeliczalności. Bez trudu przekonujemy się, że przestrzeń orbit  $M/G$  ma tę cechę, oto bowiem obraz dowolnej skończonej lub przeliczalnie nieskończonej bazy  $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_n\}_{n \in I \subset \mathbb{N}}$  topologii  $M$  względem rzutu kanonicznego na przestrzeń orbit,  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}) = \{\pi_{M/G}(\mathcal{O}_n)\}_{n \in I \subset \mathbb{N}}$ , jest – w świetle Lematu 1.5.6 – odpowiednią bazą topologii (ilorazowej)  $M/G$ . Istotnie,  $\pi_{M/G}(\mathcal{O})$  jest pokryciem otwartym  $M/G$ , a ponadto dla dowolnej pary elementów tej rodziny  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}), \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}), n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  o niepustym przecięciu  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni G \triangleright x, x \in M$  istnieje element  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \subset \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2})$  o własności  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \ni G \triangleright x$ . W rzeczy samej, z relacji  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni G \triangleright x$  wynika istnienie punktów  $x_\alpha \in \mathcal{O}_{n_\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}$  oraz elementu grupy  $g_{21} \in G$  spełniających relację  $x_2 = g_{21} \triangleright x_1$ , wobec czego zbiór  $\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})$  ma niepuste przecięcie z  $\mathcal{O}_{n_2}$ , a ponieważ jest otwarty (jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego), przeto jest sumą mnogościową pewnej rodziny elementów bazy  $\mathcal{O}$ . Przynajmniej jeden element tej rodziny – oznaczmy go  $\mathcal{O}_{n_{12}}$  – przecina się niepusto z  $\mathcal{O}_{n_2}$ , a zatem – wprost na mocy definicji bazy topologii – istnieje element  $\mathcal{O}_{n_{122}} \in \mathcal{O}$  spełniający warunek

$$\mathcal{O}_{n_{122}} \subset \mathcal{O}_{n_{12}} \cap \mathcal{O}_{n_2} \subset \lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2} ,$$

z którego wynika już pożądaný warunek

$$\begin{aligned} \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{122}}) &\subset \pi_{M/G}(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2}) \subset \pi_{M/G}(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \\ &= \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) . \end{aligned}$$

Wreszcie na koniec zauważmy, że dla dowolnego zbioru otwartego  $\mathcal{O} \subset M/G$  zachodzi – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej oraz wobec bazowego charakteru  $\mathcal{O}$  – tożsamość

$$\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{n_i} ,$$

w której  $I \subset \mathbb{N}$  jest pewnym zbiorem indeksów. Wobec powyższego otrzymujemy równość

$$\pi_{M/G}(\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O})) = \pi_{M/G}(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{n_i}) = \bigcup_{i \in I} \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_i}) ,$$

która przesądza o bazowym charakterze  $\pi_{M/G}(\mathcal{O})$ .

$\bar{\lambda}$

**TWIERDZENIE 1.5.8.** *Przyjmijmy zapis Lematu 1.5.6 oraz Przykł. 1 (7) i niechaj  $G$  będzie grupą Liego,  $H \subseteq G$  zaś – jej podgrupą domkniętą. Istnieje dokładnie jedna struktura rozmaitości gładkiej na przestrzeni ilorazowej  $G/H$  z topologią ilorazową zaindukowaną z  $G$ , względem której rzut kanoniczny  $\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H$  jest surjektywną submersją. Naturalne lewe działanie*

$$(1.5.16) \quad [\ell]. : G \times (G/H) \rightarrow G/H : (\tilde{g}, gH) \mapsto (\tilde{g} \cdot g)H$$

jest gładkie względem tej struktury. Gładka rozmaitość  $G/H$  z działaniem grupy  $G$  określona tym sposobem nosi miano **gładkiej przestrzeni jednorodnej**  $G$ .

■

Dowód: Rozważmy działanie  $\varphi : G \times H \rightarrow G : (g, h) \mapsto g \cdot h$  podgrupy  $H \subset G$  na grupie  $G$  otrzymane w wyniku ograniczenia do tejże podgrupy prawego działania regularnego  $G$  na sobie. Jest ono jawnie swobodne, a przy tym możemy je zapisać jako superpozycję

$$\varphi = m \circ (\text{id}_G \times j_H)$$

odwzorowań gładkich (przy czym gładkość kanonicznego włożenia  $j_H : H \rightarrow G$  wynika wprost z Tw. 1.5.4), zatem jest też gładkie. W świetle Stw. 142 jest ono również właściwe, możemy więc odnieść do pary  $(G, H)$  tezę Tw. 1.5.7, konstatając prawdziwość pierwszej części tezy twierdzenia dowodzonego. Pozostaje zatem wykazać gładkość działania  $[\lambda]$ . Zauważmy, że działanie to domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & G/H \\ & \nearrow \pi_{G/H} \circ m & \uparrow [\lambda] \\ G \times G & \xrightarrow{\text{id}_G \times \pi_{M/G}} & G \times (G/H)_1 \end{array} ,$$

w którym w świetle dowiedzionej części tezy oraz oczywistej submersywności mnożenia grupowego  $m$  superpozycja  $\pi_{G/H} \circ m$  jest submersją, co pozwala zastosować Stw. 117, aby wywnioskować gładkość  $[\lambda]$  z gładkości produktu  $\text{id}_G \times \pi_{M/G}$ , wynikającej ze stwierdzonej wcześniej gładkości  $\pi_{G/H}$ . □

## Grupoidy topologiczne i obiekty symplecjalne

### 1. Grupoidy i ich działanie

DEFINICJA 96. **Grupoid topologiczny** to obiekt grupoidowy

$$\mathcal{G} = (\text{Obj } \mathcal{G}, \text{Mor } \mathcal{G}, s, t, \text{Id.}, \text{Inv.}, \circ)$$

w kategorii **Top** w rozumieniu Def. 52. Jego obiekt obiektów  $\text{Obj } \mathcal{G}$  określamy mianem **przestrzeni obiektów**, a obiekt morfizmów  $\text{Mor } \mathcal{G}$  – mianem **przestrzeni morfizmów** (lub **przestrzeni strzałek**). Morfizmy strukturalne: początku ( $s$ ), końca ( $t$ ), identyzacji ( $\text{Id.}$ ), odwrotności ( $\text{Inv.}$ ) i złożenia ( $\circ$ ) noszą przydomki – odpowiednio – **odwzorowania początku**, **odwzorowania końca**, **odwzorowania jedności**, **odwzorowania odwrotności**, oraz **odwzorowania mnożenia**. **Podgrupoid topologiczny** grupoidu topologicznego  $\mathcal{G}$  to dowolny grupoid topologiczny  $(\text{Obj } \mathcal{H}, \text{Mor } \mathcal{H}, s \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{H}}, t \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{H}}, \text{Id.} \upharpoonright_{\text{Obj } \mathcal{H}}, \text{Inv.} \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{H}}, \circ \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{H} \times_{\text{Obj } \mathcal{H}} \text{Mor } \mathcal{H}})$  o przestrzeniach: obiektów i strzałek będących podprzestrzeniami (topologicznymi) odnośnych przestrzeni grupoidu  $\mathcal{G}$ , czyli  $\text{Obj } \mathcal{H} \subset \text{Obj } \mathcal{G}$  i  $\text{Mor } \mathcal{H} \subset \text{Mor } \mathcal{G}$ . **Morfizm grupoidów topologicznych** to homomorfizm wewnętrzny w kategorii **Top** pomiędzy tymi grupoidami, także w rozumieniu Def. 52, czyli taki, którego składowe: obiektowa  $\chi_0$  i morfizmowa  $\chi_1$  są odwzorowaniami ciągłymi. Grupoidy topologiczne wraz z morfizmami grupoidów topologicznych między nimi tworzą **kategorię grupoidów topologicznych**, którą będziemy oznaczać symbolem

**TopGrpd.**

**Grupoid Liego** definiujemy, podobnie, jako obiekt grupoidowy w kategorii  $\mathbf{Man}^{(\infty)}$ , tj. taki, którego obiekty obiektów i morfizmów są różniczkowalnymi klasy  $C^\infty$ , a morfizmy strukturalne – odwzorowaniami gładkimi klasy  $C^\infty$ , przy czym zakładamy dodatkowo, że odwzorowania początku i końca są surjektywnymi submersjami. **Podgrupoid Liego** grupoidu Liego  $\mathcal{G}$  to dowolny grupoid Liego  $(\text{Obj } \mathcal{H}, \text{Mor } \mathcal{H}, s \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{H}}, t \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{H}}, \text{Id.} \upharpoonright_{\text{Obj } \mathcal{H}}, \text{Inv.} \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{H}}, \circ \upharpoonright_{\text{Mor } \mathcal{H} \times_{\text{Obj } \mathcal{H}} \text{Mor } \mathcal{H}})$  o rozmaitościach: obiektów i strzałek będących podrozmaitościami włożonymi odnośnych rozmaitości grupoidu  $\mathcal{G}$ , czyli  $\text{Obj } \mathcal{H} \subset \text{Obj } \mathcal{G}$  i  $\text{Mor } \mathcal{H} \subset \text{Mor } \mathcal{G}$ . **Morfizm grupoidów Liego** to homomorfizm wewnętrzny w kategorii  $\mathbf{Man}^{(\infty)}$  pomiędzy nimi, tj. taki, którego składowe: obiektowa i morfizmowa są gładkie. Grupoidy Liego wraz z morfizmami grupoidów Liego między nimi tworzą **kategorię grupoidów Liego**, którą będziemy oznaczać symbolem

**LieGrpd.**

▲

PRZYKŁAD(Y) 29.

- (1) Niechaj  $X$  będzie dowolnym zbiorem. **Grupoid par** ze zbioru  $X$  to grupoid

$$(X, X \times X, \text{pr}_2, \text{pr}_1, \Delta_{X,2}, \tau, \circ)$$

o odwzorowaniach początku i końca danych jako rzuty kanoniczne na drugą i – odpowiednio – pierwszą składową produktu kartezjańskiego, odwzorowaniu jedności w postaci

$$\Delta_{X,2} : X \longrightarrow X \times X : x \longmapsto (x, x),$$

odwzorowaniu odwrotności określonym jako transpozycja,

$$\tau : X \times X \curvearrowright : (x, y) \longmapsto (y, x),$$

i odwzorowaniu mnożenia w postaci

$$\circ : (X \times X)_{\text{pr}_2 \times \text{pr}_1} (X \times X) \longrightarrow X \times X : ((y, z), (y, x)) \longmapsto (z, x).$$

- (2) Niechaj  $G$  będzie grupą Liego i niech  $((M, \widehat{\mathcal{A}}), \lambda)$  będzie rozmaitością (klasy  $C^\infty$ ) z działaniem gładkim  $\lambda : G \times M \longrightarrow M$ . **Grupoid działania** stowarzyszony z  $G$ -rozmaitością  $M$  to grupoid Liego

$$(M, G \times M, \text{pr}_2, \lambda, (e, \cdot), \text{Inv}, \circ),$$

zwyczajowo oznaczany jako

$$G \times M : G \times M \xrightarrow[t]{s} M,$$

o odwzorowaniu jedności w postaci

$$\text{Id} \equiv (e, \cdot) : M \longrightarrow G \times M : m \longmapsto (e, m),$$

odwzorowaniu odwrotności danym wzorem

$$\text{Inv} : G \times M \curvearrowright : (g, m) \longmapsto (g^{-1}, \lambda(g, m)) \equiv (g, m)^{-1}$$

oraz odwzorowaniu mnożenia w postaci

$$\circ : (G \times M)_{\text{pr}_2 \times \lambda} (G \times M) \longrightarrow G \times M : ((h, \lambda(g, x)), (g, x)) \longmapsto (h \cdot g, x).$$

✓

DEFINICJA 97. Przyjmijmy zapis Def. 96 i niechaj  $\mathcal{G}$  będzie grupoidem. **Zbiór z działaniem lewostronnym grupoidu  $\mathcal{G}$**  (albo  $\mathcal{G}$ -zbiór lewostronny) to trójka  $(X, \mu, \lambda)$  złożona ze zbioru  $X$  oraz pary odwzorowań:

- $\mu : X \longrightarrow \text{Obj } \mathcal{G}$ , zwanego **momentem działania grupoidu**;
- $\lambda : \text{Mor } \mathcal{G}_s \times_\mu X \longrightarrow X : (\vec{g}, x) \longmapsto \lambda(\vec{g}, x) \equiv \vec{g}.x$ , zwanego **działaniem**,

spełniających – dla dowolnych  $(\vec{g}, \vec{h}, x) \in \text{Mor } \mathcal{G}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{G}_s \times_\mu X$  – następujące warunki:

$$(\text{LGr1}) \quad \mu(\vec{g}.x) = t(\vec{g});$$

$$(\text{LGr2}) \quad \text{Id}_{\mu(x)}.x = x;$$

$$(\text{LGr3}) \quad \vec{g}.(\vec{h}.x) = (\vec{g} \circ \vec{h}).x.$$

Niechaj  $\mathcal{G}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwoma grupoidami i niech  $(X_\alpha, \mu_\alpha, \lambda_\alpha)$  będą odnośnymi  $\mathcal{G}_\alpha$ -zbiorami lewostronnymi. **Morfizm zbiorów z działaniem lewostronnym grupoidu** pomiędzy tymi ostatnimi to para

$$(\Theta, (\chi_0, \chi_1))$$

złożona z odwzorowania

$$\Theta : X_1 \longrightarrow X_2$$

oraz morfizmu grupoidów

$$(\chi_0, \chi_1) : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2,$$

które czynią poniższy diagram przemiennym:

$$(1.6.1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Mor } \mathcal{G}_{1s_1 \times \mu_1} X_1 & \xrightarrow{\chi_1 \times \Theta} & \text{Mor } \mathcal{G}_{2s_2 \times \mu_2} X_2 \\ \lambda_1 \downarrow & & \downarrow \lambda_2 \\ X_1 & \xrightarrow{\Theta} & X_2 \\ \mu_1 \downarrow & & \downarrow \mu_2 \\ \text{Obj } \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\chi_0} & \text{Obj } \mathcal{G}_2 \end{array} .$$

Zbiory z działaniem lewostronnym grupoidu  $\mathcal{G}$  wraz z odnośnymi morfizmami o składowej grupoidowej  $(\chi_0, \chi_1) = (\text{id}_{\text{Obj } \mathcal{G}}, \text{id}_{\text{Mor } \mathcal{G}})$  tworzą **kategorię zbiorów z działaniem lewostronnym grupoidu  $\mathcal{G}$**  (albo **kategorię  $\mathcal{G}$ -zbiorów lewostronnych**), którą oznaczamy symbolem

$$\text{LSet}_{\mathcal{G}} .$$

**Zbiór z działaniem prawostronnym grupoidu  $\mathcal{G}$**  (albo  **$\mathcal{G}$ -zbiór prawostronny**) to trójka  $(X, \mu, \rho)$  złożona ze zbioru  $X$  oraz pary odwzorowań:

- momentu działania  $\mu : X \longrightarrow \text{Obj } \mathcal{G}$ ;
- działania  $\rho : X_{\mu \times t} \text{Mor } \mathcal{G} \longrightarrow X : (x, \vec{g}) \mapsto \rho(x, \vec{g}) \equiv x \cdot \vec{g}$

spełniających – dla dowolnych  $(x, \vec{g}, \vec{h}) \in X_{\mu \times t} \text{Mor } \mathcal{G}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{G}$  – następujące warunki:

- (RGr1)  $\mu(x \cdot \vec{g}) = s(\vec{g})$ ;
- (RGr2)  $x \cdot \text{Id}_{\mu(x)} = x$ ;
- (RGr3)  $(x \cdot \vec{g}) \cdot \vec{h} = x \cdot (\vec{g} \circ \vec{h})$ .

Niechaj  $\mathcal{G}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwoma grupoidami i niech  $(X_\alpha, \mu_\alpha, \rho_\alpha)$  będą odnośnymi  $\mathcal{G}_\alpha$ -zbiorami prawostronnymi. **Morfizm zbiorów z działaniem prawostronnym grupoidu** pomiędzy tymi ostatnimi to para

$$(\Theta, (\chi_0, \chi_1))$$

złożona z odwzorowania

$$\Theta : X_1 \longrightarrow X_2$$

oraz morfizmu grupoidów

$$(\chi_0, \chi_1) : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2,$$

które czynią poniższy diagram przemiennym:

$$(1.6.2) \quad \begin{array}{ccc} X_{1\mu_1 \times t_1} \text{Mor } \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\Theta \times \chi_1} & X_{2\mu_2 \times t_2} \text{Mor } \mathcal{G}_2 \\ \rho_1 \downarrow & & \downarrow \rho_2 \\ X_1 & \xrightarrow{\Theta} & X_2 \\ \mu_1 \downarrow & & \downarrow \mu_2 \\ \text{Obj } \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\chi_0} & \text{Obj } \mathcal{G}_2 \end{array} .$$

Zbiory z działaniem prawostronnym grupoidu  $\mathcal{G}$  wraz z odnośnymi morfizmami o składowej grupoidowej  $(\chi_0, \chi_1) = (\text{id}_{\text{Obj } \mathcal{G}}, \text{id}_{\text{Mor } \mathcal{G}})$  tworzą **kategorię zbiorów z działaniem prawostronnym grupoidu  $\mathcal{G}$**  (albo **kategorię  $\mathcal{G}$ -zbiorów prawostronnych**), którą oznaczamy symbolem

$$\text{RSet}_{\mathcal{G}} .$$

Jeśli zamiast zbioru  $X$  wziąć przestrzeń topologiczną  $(X, \mathcal{T}(X))$ , zakładając dodatkowo, że  $\mathcal{G}$  jest grupoidem topologicznym, a odwzorowania  $\mu$  i  $\lambda$  (wzgl.  $\rho$ ) są ciągłe, to mamy do czynienia **przestrzeń z działaniem topologicznym lewostronnym** (wzgl. **prawostronnym**) **grupoidu  $\mathcal{G}$**  (albo  **$\mathcal{G}$ -przestrzeń lewostronną** (wzgl. **prawostronną**)). Narzucając warunek ciągłości na odwzorowanie  $\Theta$  zdefiniowane powyżej oraz na obie składowe funktora  $\Phi$ , otrzymujemy definicję **morfizmu przestrzeni z lewostronnym** (wzgl. **prawostronnym**) **działaniem topologicznym grupoidu**. Przestrzenie z lewostronnym (wzgl. prawostronnym) działaniem topologicznym grupoidu  $\mathcal{G}$  wraz z odnośnymi morfizmami tworzą **kategorię przestrzeni z działaniem lewostronnym** (wzgl. **prawostronnym**) **grupoidu  $\mathcal{G}$**  (albo **kategorię  $\mathcal{G}$ -zbiorów lewostronnych** (wzgl. **prawostronnych**)), którą oznaczamy symbolem

$$\text{LTop}_{\mathcal{G}} ,$$

wzgl.

$$\text{RTop}_{\mathcal{G}} .$$

Wreszcie zastępując w ostatniej definicji zbiór  $(X, \mathcal{T}(X))$  rozmaitością różniczkowalną  $(M, \mathcal{A})$  klasy  $C^\infty$  i grupoid topologiczny  $\mathcal{G}$  grupoidem Liego (oznaczany tym samym symbolem), określenie zaś „topologiczny” – określeniem „gładki” (w rozumieniu: klasy  $C^\infty$ ) otrzymujemy, odpowiednio: **rozmaitość z działaniem gładkim lewostronnym** (albo  **$\mathcal{G}$ -rozmaitość gładką lewostronną**) wzgl. **prawostronnym** (albo  **$\mathcal{G}$ -rozmaitość gładką prawostronną**) **grupoidu  $\mathcal{G}$** , **morfizm rozmaitości z lewostronnym** (wzgl. **prawostronnym**) **działaniem gładkim**. Rozmaitości różniczkowalne klasy  $C^\infty$  z lewostronnym (wzgl. prawostronnym) działaniem gładkim grupoidu Liego  $\mathcal{G}$  wraz z odnośnymi morfizmami  $\mathcal{G}$ -rozmaitości lewostronnych (wzgl. prawostronnych) tworzą **kategorię rozmaitości z lewostronnym** (wzgl. **prawostronnym**) **działaniem gładkim  $\mathcal{G}$**  (albo **kategorię  $\mathcal{G}$ -rozmaitości lewostronnych** (wzgl. **prawostronnych**) **gładkich**), którą oznaczamy symbolem

$$\text{LMan}_{\mathcal{G}}^{(\infty)} ,$$

wzgl.

$$\mathbf{RMan}_{\mathcal{G}}^{(\infty)}.$$

▲

DEFINICJA 98. Przyjmijmy zapis Def. 97 i niechaj  $(X, \mu, \rho)$  będzie zbiorem z działaniem prawostronnym grupoidu  $\mathcal{G}$ . Działanie  $\rho$  nazywamy

- **swobodnym** (lub **wolnym**), jeśli dla dowolnych  $(x, \vec{g}) \in X_{\mu \times t} \text{Mor } \mathcal{G}$  słuszną jest następująca implikacja

$$x \cdot \vec{g} = x \quad \implies \quad \vec{g} = \text{Id}_{\mu(x)},$$

tak że – w szczególności – **grupa izotropii obiektu**  $x \in \text{Obj } \mathcal{G}$ ,

$$\mathcal{G}_x = s^{-1}(\{x\}) \cap t^{-1}(\{x\}),$$

działa swobodnie (w rozumieniu Def. 14) na włóknie  $\mu^{-1}(\{x\})$ ;

- **przechodnim** (lub **tranzytywnym**), jeśli dla dowolnych dwóch punktów  $x_1, x_2 \in X$  istnieje strzałka  $\vec{g} \in \text{Mor } \mathcal{G}$  o własności

$$x_2 = x \cdot \vec{g}.$$

Analogiczne pojęcia można wprowadzić w przypadku zbioru z działaniem lewostronnym.

▲

PRZYKŁAD(Y) 30.

**Działanie regularne lewostronne** grupoidu  $\mathcal{G}$  na jego zbiorze morfizmów  $\text{Mor } \mathcal{G}$  określone przez odwzorowanie mnożenia

$$L : \text{Mor } \mathcal{G}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{G} \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{G} : (\vec{h}, \vec{g}) \longmapsto \vec{h} \circ \vec{g} \equiv L_{\vec{h}}(\vec{g})$$

indukuje na zbiorze (wzgl. przestrzeni topologicznej lub rozmaitości gładkiej)  $\text{Mor } \mathcal{G}$  strukturę zbioru z działaniem (wzgl. przestrzeni z działaniem topologicznym lub rozmaitości z działaniem gładkim) lewostronnym grupoidu  $\mathcal{G}$ . Podobnie **działanie regularne prawostronne** tegoż grupoidu na  $\text{Mor } \mathcal{G}$  zadane wzorem

$$R : \text{Mor } \mathcal{G}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{G} \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{G} : (\vec{g}, \vec{h}) \longmapsto \vec{g} \circ \vec{h} \equiv R_{\vec{h}}(\vec{g})$$

indukuje na zbiorze (wzgl. przestrzeni topologicznej lub rozmaitości gładkiej)  $\text{Mor } \mathcal{G}$  strukturę zbioru z działaniem (wzgl. przestrzeni z działaniem topologicznym lub rozmaitości z działaniem gładkim) prawostronnym grupoidu  $\mathcal{G}$ .

✓

## 2. Obiekty symplecjalne i nerwy kategorii

\* \* \*

**Literatura uzupełniająca:** Szczegółowe omówienie wprowadzonych tu (i wielu innych) struktur algebraicznych można znaleźć w traktatach Bourbakiego [Bou07b, Bou07a], w klasycznym kursie Langa [Lan02] oraz w doskonałej trzytomowej monografii Cohna [Coh82, Coh89, Coh91], jak również w nader przejrzystej napisanej książce Kocka [Koc03]. Warto także sięgnąć do książek Greuba [Gre81,



**Gre78**]. Podstawowe zagadnienia algebry, stanowiące punkt wyjścia do powyższych i – przede wszystkim – dalszych naszych rozważań zostały omówione ze szczegółami w skrypcie wykładowym Autora [**Sus13**]. Podążając tropem kategoryalnym nie sposób pominąć klasyczną monografię Mac Lane’a [**ML98**], nie można też przejść obojętnie obok *opus magnum* Borceux [**Bor99a**, **Bor99b**, **Bor99c**]. Rozwinięcie zawartej tu dyskusji zagadnień analitycznych zawierają: monografia Langa [**Lan93**] oraz monumentalny traktat Dieudonnégo [**Die65**]. Niezwykle wartościowym opracowaniem z zakresu geometrii różniczkowej są prace Lee [**Lee02**, **Lee09**], których lekturę warto podeprzeć dużo prostszą książką Guillemina i Pollacka [**GP74**] oraz świetną monografią niezmordowanego Langa [**Lan99**], jak również książką Michora [**Mic08**]. Geometria grup Liego została gruntownie i w ujęciu dość nowoczesnym zanalizowana w książce Hilgerta i Neeba [**HN12**], a teorię grupoidów topologicznych przybliżyła monografia Moerdijka i Mrćuna [**MM03**].

## Część 2

# Algebry – struktury ogólne

## Algebry

### 1. Aksjomatyka i podstawowe konstrukcje

Elementarna leksykalna przyzwoitość wymaga, iżby każdy kurs algebry zawierał bodaj wzmiankę o algebrach. W przypadku kursów adresowanych do fizyków – przyszłych i obecnych (przeszłych można z tej wyliczanki wyłączyć) – są po temu powody dodatkowe: oto algebry (najczęściej wyposażone w dodatkową strukturę) odgrywają kluczową rolę w kanonicznym (infinitesimalnym) opisie ciągłych symetrii układów fizycznych, w modelowaniu pól cechowania (stanowiących uogólnienie konstrukcji pola elektromagnetycznego) i pól fermionowych, w różniczkowej analizie foliacji różniczkowych (takich jak czasoprzestrzeń, czy przestrzeń stanów układu fizycznego), wreszcie też w dyskusji struktury obecnej na zbiorze operatorów na przestrzeni Hilberta układu fizycznego, jak również w funktorialnej realizacji procesów fizycznych w kategorii algebraicznej w kategoryalnym schemacie kwantowania Segala i abstrakcyjnym sformułowaniu geometrii różniczkowej, dostarczającym pola dla nader płodnych uogólnień, takich jak geometria nieprzemienne, by nazwać tylko kilka istotnych zastosowań. Pojemność definicji tych struktur, w połączeniu z jej prostotą, usprawiedliwia przeniesienie ich nazwy, oznaczającej pierwotnie<sup>1</sup> „łączenie ze sobą wzgl. w całość części rozproszonych wzgl. rozdzielonych”, na całą gałąź nowoczesnej matematyki i użycie jej przy kwalifikacji odrębnych obszarów nowoczesnej topologii, geometrii itd., w których wykorzystywane są metody tej pierwszej. Wzmocnieni tą świadomością, możemy już wysłowić

DEFINICJA 99. Przyjmijmy zapis Def. 15 oraz 40 i niech  $R \in \text{Obj AbRing}$ . **Algebra nad pierścieniem**  $R$  (albo inaczej  $R$ -**algebra**) to kolekcja  $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}, \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}})$  złożona z  $R$ -modułu  $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}, \ell_{\mathfrak{A}})$  oraz odwzorowania dwu- $R$ -liniowego

$$m_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A} : (a, b) \longmapsto a \cdot_{\mathfrak{A}} b \equiv m_{\mathfrak{A}}(a, b),$$

zwanego **mnożeniem**. Równoważnie możemy traktować mnożenie jako odwzorowanie  $R$ -liniowe

$$m_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \otimes_R \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A},$$

przeto w dalszej części wykładu będziemy obu wersji definicji używać zamiennie, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień. Podobnie, jeśli tylko struktura rozważanej algebry nie będzie budzić wątpliwości, będziemy czasami gwoli odciążenia

<sup>1</sup>Tj. ok. roku 820 n.e., kiedy to Abu Abdullah Muhammad „Pan Tablic” ibn Musa al-Chuwarizmi opublikował swe przełomowe „Kompendium rachunków drogą łączenia członów podobnych i ich wzajemnego znoszenia”, czyli „Al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dżabr wa'l-mukabala”.

zapisu używać skrótu

$$m_{\mathfrak{A}}(a, b) \equiv a.b.$$

**Algebra przeciwna** do  $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}}$  to  $R$ -algebra  $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}}^{\text{opp}}$  z mnożeniem danym wzorem

$$m_{\mathfrak{A}}^{\text{opp}} := m_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{A}}.$$

Będziemy ją oznaczać symbolem  $\mathfrak{A}^{\text{opp}}$ .

**Algebra przemienna** to taka, w której

$$m_{\mathfrak{A}} \equiv m_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{A}}.$$

**Algebra łączna** to taka, w której mnożenie jest operacją łączną.

**Algebra unitalna** (zwana także **algebrą z jednością**) to kolekcja  $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$  złożona z  $R$ -algebry  $((\mathfrak{A}, +_{\mathfrak{A}}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}), \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}}$  oraz stałej  $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$  będącej elementem neutralnym mnożenia, zwanej **jednością** lub **jedynką**.

**Podalgebra**  $\mathfrak{B}$  algebry  $\mathfrak{A}$  to taki jej podmoduł, który spełnia warunek domkniętości względem mnożenia,

$$m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}.$$

**Homomorfizm  $R$ -algebry**  $((\mathfrak{A}_1, +_{\mathfrak{A}_1}, P_{\mathfrak{A}_1}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}_1}), \ell_{\mathfrak{A}_1}), m_{\mathfrak{A}_1}$  w  $R$ -algebrę  $((\mathfrak{A}_2, +_{\mathfrak{A}_2}, P_{\mathfrak{A}_2}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}_2}), \ell_{\mathfrak{A}_2}), m_{\mathfrak{A}_2}$  to odwzorowanie  $\chi \in \text{Hom}_R(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$  o dodatkowej własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1 & \xrightarrow{m_{\mathfrak{A}_1}} & \mathfrak{A}_1 \\ \chi \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_2 & \xrightarrow{m_{\mathfrak{A}_2}} & \mathfrak{A}_2 \end{array}.$$

Homomorfizm  $R$ -algebry z jednością nazwiemy **unitalnym**, jeśli obrazem jedności w jego dziedzinie względem tego homomorfizmu jest jedność w jego przeciwdziedzinie.

Algebry nad pierścieniem  $R$  wraz z odpowiednimi homomorfizmami tworzą **kategorię algebr nad pierścieniem  $R$** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\text{Alg}_R.$$

**Kategorię  $R$ -algebr łącznych** oznaczymy symbolem

$$\text{AssAlg}_R,$$

natomiast **kategorię  $R$ -algebr unitalnych** (z unitalnymi homomorfizmami  $R$ -algebr jako morfizmami) – symbolem

$$\text{uAlg}_R.$$

Wreszcie **kategorię unitalnych  $R$ -algebr łącznych** oznaczymy symbolem

$$\text{uAssAlg}_R.$$

▲

## PRZYKŁAD(Y) 31.

- (1) Macierze kwadratowe  $\text{Mat}(n; R) \equiv R(n)$  (rozmiaru  $n \times n$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) o współczynnikach z pierścienia przemiennego  $R$  z dodawaniem po współrzędnych i takimż braniem przeciwności, a także macierzą zerową w charakterze elementu neutralnego tworzą grupę przemienną, na której jest określone naturalne działanie (po współrzędnych) pierścienia  $R$ , czyniące z rzeczony grupy moduł nad  $R$ , a nadto – mnożenie (macierzowe), nadające temu  $R$ -modułowi strukturę  $R$ -algebry (nieprzemiennej dla  $n > 1$ ), zwanej **algebrą macierzową**. Naturalną (standardową) bazę tej algebry tworzą macierze  $\{E_{ij}\}_{i,j \in \overline{1,n}}$  o wyrazach

$$(2.1.1) \quad (E_{i,j}^{(n)})_l^k = \delta_{k,i}^R \cdot \delta_{l,j}^R,$$

spełniające prostą algebrę

$$(2.1.2) \quad E_{i,j}^{(n)} \odot E_{k,l}^{(n)} = \delta_{k,j}^K \triangleright E_{i,l}^{(n)}.$$

- (2) Endomorfizmy  $\text{End}_R(G)$  modułu  $G$  nad pierścieniem przemiennym  $R$  z określonym punktowo dodawaniem i braniem przeciwności, a także endomorfizmem zerowym w charakterze elementu neutralnego tworzą grupę przemienną, na której jest określone punktowe działanie pierścienia  $R$ , czyniące z rzeczony grupy moduł nad  $R$ , a nadto – mnożenie zadawane przez superpozycję endomorfizmów, nadające temu  $R$ -modułowi strukturę  $R$ -algebry (w ogólności nieprzemiennej), zwanej **algebrą endomorfizmów**.
- (3) Dowolny pierścień jest algebrą łączną nad swym centrum.
- (4) Unitalna  $\mathbb{R}$ -algebra **kwaternionów**  $\mathbb{H}$ , czyli przestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa  $\mathbb{R}^4$  z **iloczynem Hamiltona** (zapisanym dla dowolnych  $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ )

$$\begin{aligned} m_{\mathbb{H}}((r_1, r_2, r_3, r_4), (s_1, s_2, s_3, s_4)) &\equiv (r_1, r_2, r_3, r_4) \cdot_{\mathbb{H}} (s_1, s_2, s_3, s_4) \\ &= (r_1 \cdot s_1 - r_2 \cdot s_2 - r_3 \cdot s_3 - r_4 \cdot s_4, r_1 \cdot s_2 + r_2 \cdot s_1 + r_3 \cdot s_4 - r_4 \cdot s_3, \\ &\quad r_1 \cdot s_3 - r_2 \cdot s_4 + r_3 \cdot s_1 + r_4 \cdot s_2, r_1 \cdot s_4 + r_2 \cdot s_3 - r_3 \cdot s_2 + r_4 \cdot s_1) \end{aligned}$$

o elemencie neutralnym

$$1_{\mathbb{H}} := (1, 0, 0, 0).$$

Tak jak w przypadku liczb zespolonych istnieje monomorfizm ciał

$$j_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} : r \mapsto (r, 0, 0, 0),$$

który pozwala zdefiniować działanie  $\mathbb{R} \cong j_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$  na  $\mathbb{H}$ ,

$$\ell : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : (r, q) \mapsto j_{\mathbb{R}}^{\mathbb{H}}(r) \cdot_{\mathbb{H}} q,$$

i uzasadnia zapis

$$\mathbb{H} \ni (a, b, c, d) \equiv a + bi + cj + dk.$$

Wyróżnione wektory

$$i \equiv (0, 1, 0, 0), \quad j \equiv (0, 0, 1, 0), \quad k \equiv (0, 0, 0, 1)$$

spełniają relacje

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} i \cdot_{\mathbb{H}} i &= -1 = j \cdot_{\mathbb{H}} j = k \cdot_{\mathbb{H}} k, \\ i \cdot_{\mathbb{H}} j &= k = -j \cdot_{\mathbb{H}} i, & k \cdot_{\mathbb{H}} i &= j = -i \cdot_{\mathbb{H}} k, & j \cdot_{\mathbb{H}} k &= i = -k \cdot_{\mathbb{H}} j. \end{aligned}$$

W analogii do liczb zespolonych definiujemy  $\mathbb{R}$ -liniowe, antymultiplikatywne i inwolutywne **sprzężenie kwaternionowe**

$$\cdot^* : \mathbb{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a - bi - cj - dk$$

i przy jego użyciu **normę kwaternionową**

$$\|\cdot\|_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \ni q \mapsto \sqrt{q \cdot q^*},$$

która dystrybuuje względem mnożenia,

$$\forall_{q_1, q_2 \in \mathbb{H}} : \|q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2\|_{\mathbb{H}} = \|q_1\|_{\mathbb{H}} \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}.$$

Mamy zatem oczywistą tożsamość

$$\forall_{q \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0,0)\}} : q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|_{\mathbb{H}}^2},$$

która pokazuje, że kwaterniony tworzą pierścień z dzieleniem. Można je otrzymać z uniwersalnej konstrukcji Cayleya–Dicksona zastosowanej do liczb zespolonych. Są to więc pary liczb zespolonych (czyli przestrzeń  $\mathbb{C}$ -liniowa  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \equiv \langle 1 \rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle j \rangle_{\mathbb{C}}$ ) z mnożeniem określonym przez sugestywny zapis

$$\mathbb{H} \ni a + bi + cj + dk \leftrightarrow (a + bi) \triangleright 1 + (c + di) \triangleright j \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

W tym ujęciu pojawia się naturalnie monomorfizm  $\mathbb{R}$ -algebry

$$(2.1.4) \quad j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H} : a + bi \mapsto (a + bi) \triangleright 1 + (0 + 0i) \triangleright j.$$

Warto też zauważyć, że algebra kwaternionów ma naturalną interpretację geometryczną – oto w obrazie izomorfizmu przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych

$$(2.1.5) \quad \iota_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} : a + bi + cj + dk \mapsto (a, (b, c, d))$$

iloczyn Hamiltona tłumaczy się, jak łatwo sprawdzić, na mnożenie

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}} := \iota_{\mathbb{H}} \circ m_{\mathbb{H}} \circ (\iota_{\mathbb{H}}^{-1} \times \iota_{\mathbb{H}}^{-1}) & : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3})^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} \\ & : ((r, v), (s, w)) \mapsto (r \cdot s - \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(3)}}(v, w), \end{aligned}$$

$$v \times w + r \triangleright w + s \triangleright v),$$

gdzie  $\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(3)}} : \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}$  jest standardową (euklidesową) niezwyrodniałą 2-liniową formą symetryczną (czyli iloczynem skalarnym) na  $\mathbb{R}^{\times 3}$ , symbol  $v \times w$  oznacza iloczyn wektorowy  $v$  i  $w$ , natomiast  $\triangleright$  jest kanonicznym działaniem ciała bazowego  $\mathbb{R}$  na grupie przemiennej  $\mathbb{R}^{\times 3}$ , o którym mowa w Przykł. 11 (10). Tym samym kwaterniony w zgrabnej postaci kodują pełną informację o elementarnej strukturze metrycznej i orientacji przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej  $\mathbb{R}^{\times 3}$ .

- (5) Mnożenie punktowe funkcji wraz z określonym punktowo działaniem  $\mathbb{R}$  nadaje pierścieniowi z Przykł. 3 (5) strukturę przemiennej i łącznej  $\mathbb{R}$ -algebry unitalnej.

- (6) Z każdą grupą skończoną  $G$  można stowarzyszyć  $\mathbb{C}$ -algebrę, w której nośnikiem struktury jest zbiór  $\mathbb{C}^G$  funkcji na  $G$  o wartościach zespolonych z punktową strukturą  $\mathbb{C}$ -liniową (j/w) oraz mnożeniem określonym wzorem

$$\star : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}^G : (f_1, f_2) \longmapsto \sum_{g \in G} f_1(g) \triangleright \ell_{g^{-1}}^* f_2$$

(w notacji Przykł. 7 (5)) i noszącym miano **splotu funkcji**. Algebrę tę określamy mianem **algebry grupowej nad  $G$** . Dyskusję funkcjonalności tego przyporządkowania, jak również szczegółowy opis dodatkowych własności tak określonego obiektu algebraicznego, można znaleźć w Ref. [Sus15].

- (7) Zbiór  $\mathbb{R}^3$  ze standardową strukturą przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej oraz iloczynem wektorowym jest algebrą niełączną bez jedności.
- (8) Z dowolnym zbiorem  $S$  można stowarzyszyć  $R$ -algebrę **wolną na  $S$** , daną jako  $R$ -moduł wolny (w rozumieniu Przykł. 11 (3)) na słowniku na  $S$ , czyli na zbiorze skończonych ciągów elementów  $S$ , zwanych słowami, z mnożeniem określonym jako konkatencja słów.
- (9) Dowolna  $R$ -algebra  $\mathfrak{A}$  z mnożeniem  $m_{\mathfrak{A}}$  określa algebrę przemienną o nośniku  $\mathfrak{A}$  z mnożeniem

$$\{\cdot, \cdot\}_{m_{\mathfrak{A}}} := m_{\mathfrak{A}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}} + \tau_{\mathfrak{A}}),$$

określanym mianem **antykomutatora**, jak również algebrę antyprzemienią o nośniku  $\mathfrak{A}$  z mnożeniem

$$[\cdot, \cdot]_{m_{\mathfrak{A}}} := m_{\mathfrak{A}} \circ (\text{id}_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}} - \tau_{\mathfrak{A}}),$$

określanym mianem **komutatora**.

- (10) Jądro homomorfizmu algebr jest podalgebrą jego dziedziny, obraz zaś – podalgebrą jego przeciwdziedziny.
- (11) Przecięcie wszystkich podalgebr algebry  $\mathfrak{A}$  zawierających podzbiór  $S \subset \mathfrak{A}$  zwany jest **podalgebrą generowaną przez  $S$** . Podzbiór  $S$  nazywamy w tym kontekście **zbiorem generującym**.
- (12) Podalgebra  $S' \equiv C_{\mathfrak{A}}(S)$  algebry łącznej  $\mathfrak{A}$  złożona z elementów  $\mathfrak{A}$  komutujących (czyli przemiennych) ze wszystkimi elementami podzbioru  $S \subset \mathfrak{A}$ ,

$$C_{\mathfrak{A}}(S) := \{ a \in \mathfrak{A} \mid \forall_{s \in S} : [a, s]_{m_{\mathfrak{A}}} = \mathbf{0}_{\mathfrak{A}} \},$$

jest nazywana **centralizatorem  $S$  (w  $\mathfrak{A}$ )**. Ilekroć  $S$  jest podalgebrą, to  $S \cap C_{\mathfrak{A}}(S)$  określamy mianem **centrum  $S$** . W szczególności gdy  $S = \mathfrak{A}$ , mówimy o **centrum algebry  $\mathfrak{A}$**  i piszemy  $Z(\mathfrak{A}) \equiv C_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ .

✓

Obecność jedności w algebrze pozwala ustalić

**STWIERDZENIE 143.** *Przyjmijmy zapis Def. 99 i Przykł. 31 (3), zakładając przy tym, że  $R$ -algebra  $\mathfrak{A}$  ma jedność  $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$ . Odwzorowanie*

$$\mathcal{J}_R : R \longrightarrow \mathfrak{A} : r \longmapsto r \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$$

*jest monomorfizmem  $R$ -algebr.*

■

Dowód: Oczywisty.

□

UWAGA 32. Monomorfizm, o którym mowa w Stw. 143, pozwala utożsamić pierścień bazowy  $R$  z podalgebrą przemienną  $\mathcal{J}_R(R) \subset Z(\mathfrak{A})$  (w notacji Przykł. 31 (11)), co też będziemy czynić w dalszej części wykładu.

▮

Elementarne przejście od algebry nieunitalnej do algebry unitalnej opisuje

STWIERDZENIE 144. *Przyjmijmy zapis Def. 32 i 99 oraz Przykł. 11 (2) i niechaj  $\mathfrak{A}$  będzie  $R$ -algebrą bez jedności. Na sumie prostej  $R$ -modułów  $\mathfrak{A} \oplus R$  istnieje kanoniczna struktura  $R$ -algebry unitalnej z mnożeniem*

$$\begin{aligned} m_{\mathfrak{A} \oplus R} &: (\mathfrak{A} \oplus R)^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A} \oplus R \\ &: ((a, r), (b, s)) \longmapsto (m_{\mathfrak{A}}(a, b) +_{\mathfrak{A}} r \triangleright_{\mathfrak{A}} b +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} a, r \cdot_R s) \end{aligned}$$

i jednością

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A} \oplus R} = (0, 1_R).$$

■

Dowód: Oczywisty. □

Nakreśliwszy kontekst naszych dalszych rozważań, możemy obecnie przystąpić do omówienia w tymże kontekście podstawowych konstrukcji algebraicznych napotkanych w dyskusji modułów nad pierścieniem (lub ogólniej: w kategorii przemiennej) takich jak iloraz algebraiczny, produkt i suma prosta oraz iloczyn tensorowy. Zaczniemy od koniecznej rafinacji pojęcia podalgebry.

DEFINICJA 100. Przyjmijmy zapis Def. 99 i niechaj  $\mathcal{J} \subset \mathfrak{A}$  będzie podalgebrą  $R$ -algebry  $\mathfrak{A}$ . Powiemy, że  $\mathcal{J}$  jest **ideałem lewostronnym**, jeśli spełnia warunek

$$\mathfrak{A} \cdot \mathcal{J} \subset \mathcal{J},$$

jeżeli zaś spełniony jest warunek

$$\mathcal{J} \cdot \mathfrak{A} \subset \mathcal{J},$$

to mówimy o **ideałem prawostronnym**. Ideał, który jest zarazem lewo- i prawostronny, nazywamy **ideałem obustronnym**. **Ideał minimalny (lewostronny, prawostronny lub obustronny)** to taki, który nie zawiera niezerowych podideałów właściwych (tego samego typu).

**Algebra prosta** to taka, która nie zawiera ideałów innych niż  $\{0_{\mathfrak{A}}\}$  oraz  $\mathfrak{A}$  i w której mnożenie jest nietrywialne,  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ .

▲

### PRZYKŁAD(Y) 32.

- (1) Podzbiór  $R(n)$  złożony z macierzy, których ostatni rząd tworzą same  $0_R$ , jest (nieobustronnym w ogólności) ideałem prawostronnym w algebrze z Przykł. 31 (1). Podobnie podzbiór złożony z macierzy, których ostatnią kolumnę tworzą same  $0_R$ , jest (nieobustronnym w ogólności) ideałem lewostronnym w tejże algebrze.



- (2) Zbiór funkcji przyjmujących wartość 0 w ustalonym (dowolnie) punkcie dziedziny jest ideałem (z konieczności obustronnym) w algebrze z Przykł. 31 (4). Ideałem takim jest także

$$C_{\setminus L}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) := \{ f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid \exists L > 0 \forall |x| > L : f(x) = 0 \}.$$

- (3) Jądro homomorfizmu  $R$ -algebr jest ideałem obustronnym dziedziny.  
 (4) Przecięcie wszystkich ideałów lewostronnych (wzgl. prawostronnych, wzgl. obustronnych) zawierających podzbiór  $S \subset \mathfrak{A}$  algebry  $\mathfrak{A}$  nad pierścieniem  $R$  jest ideałem lewostronnym (wzgl. prawostronnym, wzgl. obustronnym), zwanym **ideałem generowanym przez  $S$** ,

$$\mathfrak{I}_S \equiv \langle S \rangle_{\mathfrak{A}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{J} \supset S \\ \mathfrak{J} \subset \mathfrak{A} \text{ ideal}}} \mathfrak{J}.$$

✓

Ważnej egzemplifikacji pojęcia algebry prostej dostarcza

**STWIERDZENIE 145.** *Przyjmijmy zapis Def. 100 oraz Przykł. 3 (8) i Przykł. 31 (1), (2) i (4). Algebra endomorfizmów  $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  dowolnej skończonej wymiarowej przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  jest  $\mathbb{K}$ -algebrą prostą. W szczególności jest nią algebra macierzowa*

$$\mathbb{K}(n) \equiv \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x^n}), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

*Algebrami prostymi nad ciałem  $\mathbb{R}$  są także pierścienie  $R(n)$  macierzy kwadratowych wymiaru  $n$  o współczynnikach z pierścienia  $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ .*

■

Dowód: Załóżmy, że  $\mathfrak{J} \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  jest nietrywialnym ideałem obustronnym i wybierzmy zeń dowolny element  $\chi_0 \in \mathfrak{J} \setminus \{0\}$ , a wtedy istnieje  $v_0 \in V$  o własności  $\chi_0(v_0) \neq 0_V$ , który ustalamy. Wziąwszy dowolną bazę  $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ ,  $N \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$  w przestrzeni  $V$ , definiujemy endomorfizmy  $\{\chi_i\}_{i \in \overline{1, N}} \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  będące (jedynymi)  $\mathbb{K}$ -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\chi_i(e_j) := \delta_{ij}^{\mathbb{K}} \triangleright v_0,$$

a następnie – dowolne endomorfizmy  $\{\psi_i\}_{i \in \overline{1, N}} \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  spełniające warunki

$$\psi_i \circ \chi_0(v_0) := e_i,$$

co wobec niezerowości  $\chi_0(v_0)$  zawsze jest możliwe (wystarczy uzupełnić układ liniowo niezależny  $\{\chi_0(v_0)\}$  do bazy  $V$ , po czym jej elementom różnym od  $\chi_0(v_0)$  przyporządkować wektory bazy  $e_j$ ,  $j \neq i$  i ostatecznie dokonać  $\mathbb{K}$ -liniowego rozszerzenia tak określonego przyporządkowania). Rozważmy następnie dowolne odwzorowanie  $\chi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  o macierzy  $(\chi_{ij})_{i, j \in \overline{1, N}}$  względem bazy  $\mathcal{E}$ , w której obliczamy

$$\begin{aligned} \chi(e_i) &= \chi_{ij} \triangleright e_j = \chi_{ij} \triangleright \psi_j \circ \chi_0(v_0) \equiv \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0(\delta_{ki}^{\mathbb{K}} \triangleright v_0) \\ &= \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k(e_i), \end{aligned}$$

co pozwala zapisać

$$(2.1.7) \quad \chi = \chi_{kj} \triangleright \psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k.$$

Jednakowoż zachodzi

$$\psi_j \circ \chi_0 \circ \chi_k \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \circ \mathfrak{J} \circ \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \subset \mathfrak{J},$$

przeto  $\chi \in \mathfrak{I}$ , czyli  $\text{End}_{\mathbb{K}}(V) \subset \mathfrak{I}$ , a ponieważ także  $\mathfrak{I} \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ , zatem ostatecznie  $\mathfrak{I} = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ .

W przypadku  $\mathbb{R}$ -algebr  $\mathbb{K}(n)$ ,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$  dowód opiera się na rozumowaniu identycznym z powyższym, które prowadzimy w odniesieniu do lewego  $\mathbb{C}$ -modułu  $\mathbb{C}^{\times n}$  wzgl. *prawego*  $\mathbb{H}$ -modułu  $\mathbb{H}^{\times n}$  ze standardowym działaniem jak w Przykł. 11 (2). W szczególności odwzorowania

$$\mathbb{H}(n) \ni (\chi_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}} : \mathbb{H}^{\times n} \curvearrowright : (q_i)_{i \in \overline{1,n}} \mapsto (\chi_{ij} \cdot_{\mathbb{H}} q_j)_{i \in \overline{1,n}}$$

są jawnie  $\mathbb{H}$ -liniowe względem tak określonego (prawego) działania i jest  $\mathbb{H}(n) \equiv \text{End}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{\times n})$ . Omówione rozumowanie doprowadza nas ostatecznie do równości (2.1.7), która wyraża  $\chi$  jako kombinację  $\mathbb{K}$ -liniową elementów ideału  $\mathfrak{I}$ . Każdy z jej współczynników  $\chi_{ij}$  jest *rzeczywistą* kombinacją liniową liczb  $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{C}$  wzgl. liczb  $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{H}$ , które działają (punktowo) na endomorfizmy  $\psi_j$  przekształcając je w inne elementy tej samej ( $\mathbb{R}$ -)algebry  $\mathbb{K}(n)$  (można o nich myśleć jako o endomorfizmach skalarnych  $\lambda \triangleright \mathbf{1}_n$ , gdzie  $\lambda \in \mathbb{K}$  jest jedną z wyróżnionych liczb o normie jednostkowej). Koniec końców mamy zatem do czynienia z *rzeczywistą* kombinacją liniową elementów ideału, czyli z elementem ideału  $\mathbb{R}$ -algebry.  $\square$

O praktycznym znaczeniu pojęcia ideału przekonuje

STWIERDZENIE 146. *Przyjmijmy zapis Def. 100 oraz Przykł. 11 (14) i niechaj  $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$  będzie ideałem obustronnym  $R$ -algebry  $\mathfrak{A}$ . Istnieje kanoniczna struktura  $R$ -algebry na module ilorazowym  $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$  indukowana z  $\mathfrak{A}$ , z mnożeniem*

$$m_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} : \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \times \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{I} : (a +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}, b +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}) \mapsto m_{\mathfrak{A}}(a, b) +_{\mathfrak{A}} \mathfrak{I}.$$

Struktura ta nosi miano **algebry ilorazowej**. Rzut kanoniczny

$$\pi_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$$

jest epimorfizmem  $R$ -algebr, o jądrze  $\mathfrak{I}$ . Istnieje zatem wzajem jednoznaczna odpowiedniość między jądrami homomorfizmów  $R$ -algebr i ideałami obustronnymi.  $\blacksquare$

*Dowód:* Oczywisty.  $\square$

Scharakteryzujemy następnie podstawowe operacje na rodzinach algebr, poczynając od

STWIERDZENIE 147. *Przyjmijmy zapis Def. 31, 32 oraz 99 i niechaj  $\mathfrak{A} \in \text{Obj Alg}_R^{\Lambda}$  dla  $R \in \text{Obj AbRing}$ . Istnieje kanoniczna struktura  $R$ -algebry na  $R$ -module  $\mathfrak{A}^{\square} := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_{\lambda}$  zadawana przez odwzorowanie*

$$m_{\mathfrak{A}^{\square}} : \mathfrak{A}^{\square} \times \mathfrak{A}^{\square} \longrightarrow \mathfrak{A}^{\square} : (a, b) \mapsto a..b.,$$

gdzie

$$a..b. : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_{\lambda} : \lambda \mapsto m_{\mathfrak{A}_{\lambda}}(a_{\lambda}, b_{\lambda}) \in \mathfrak{A}_{\lambda}$$

oraz kanoniczna struktura  $R$ -algebry na  $R$ -module  $\mathfrak{A}^{\oplus} := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_{\lambda}$  zadawana przez odwzorowanie

$$m_{\mathfrak{A}^{\oplus}} \equiv m_{\mathfrak{A}^{\square}} \upharpoonright_{\mathfrak{A}^{\oplus} \times \mathfrak{A}^{\oplus}} : \mathfrak{A}^{\oplus} \times \mathfrak{A}^{\oplus} \longrightarrow \mathfrak{A}^{\oplus}.$$

Pierwszą z tych struktur tę określamy mianem **produktu algebr z rodziny  $\mathfrak{A}$** , a drugą – mianem **sumy prostej algebr z rodziny  $\mathfrak{A}$** . Ilekroć elementy  $\mathfrak{A}$  są łączne (wzgl. przemienne, wzgl. unitalne), także  $\mathfrak{A}^{\square} \supset \mathfrak{A}^{\oplus}$  mają tę własność.

■

Dowód: Trywialny. □

Obecność mnożenia w algebrze pozwala na podniesienie wniosków ze Stw. 33 do kategorii algebr poprzez naturalną specjalizację Def. 34, którą precyzuje

DEFINICJA 101. Przyjmijmy zapis Def. 99, zakładając przy tym, że  $\mathfrak{A}$  jest  $R$ -algebrą łączną, oraz Przykł. 31 (11). **Idempotent** to taki jej element  $P \in \mathfrak{A}$ , który spełnia relację

$$P^2 = P.$$

Wyznacza on podalgebrę

$$\mathfrak{A}_P := P.\mathfrak{A}.P,$$

zwaną **algebrą  $P$ -zredukowaną**. Ilekroć  $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}_P = 1$ , idempotent  $P$  określamy mianem **minimalnego**. **Idempotent centralny** to taki, który należy do centrum algebry  $Z(\mathfrak{A})$ .

**Unipotent** to taki element  $\Omega \in \mathfrak{A}$  łącznej algebry unitalnej  $\mathfrak{A}$ , który spełnia relację

$$\Omega^2 = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}.$$

Nazywamy go **centralnym**, jeśli należy do centrum algebry  $Z(\mathfrak{A})$ . ▲

Ta pozwala wysłowić pożądane

STWIERDZENIE 148. *Przyjmijmy zapis Def. 101 oraz Przykł. 31 (11). Dowlony idempotent centralny  $P \in Z(\mathfrak{A})$  wyznacza rozkład  $R$ -algebry  $\mathfrak{A}$  na sumę prostą podalgebr*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_P \oplus \tilde{\mathfrak{A}}_P,$$

w której dopełnienie proste

$$\tilde{\mathfrak{A}}_P := \{ a - P.a.P \mid a \in \mathfrak{A} \} \equiv \{ a - P.a \mid a \in \mathfrak{A} \}$$

algebry  $P$ -zredukowanej  $\mathfrak{A}_P$  jest algebrą  $(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - P)$ -zredukowaną. W szczególności każdy unipotent centralny  $\Omega \in Z(\mathfrak{A})$  w algebrze unitalnej  $\mathfrak{A}$  nad pierścieniem  $R$ , w którym  $2_R := 1_R + 1_R$  jest elementem odwracalnym, wyznacza rozkład  $\mathfrak{A}$  na sumę prostą podalgebr

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_+ \oplus \mathfrak{A}_-,$$

której składniki

$$\mathfrak{A}_{\pm} := P_{\Omega}^{\pm}.\mathfrak{A},$$

zapisane w terminach idempotentów centralnych

$$P_{\Omega}^+ := 2_R^{-1} \triangleright (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} + \Omega), \quad P_{\Omega}^- := 2_R^{-1} \triangleright (\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - \Omega) \equiv \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - P_{\Omega}^+,$$

są tożsame – odpowiednio – z algebrami zredukowanymi

$$\mathfrak{A}_{\pm} := \mathfrak{A}_{P_{\Omega}^{\pm}} \equiv \tilde{\mathfrak{A}}_{P_{\Omega}^{\mp}}.$$

■

Dowód: Idempotent centralny  $P$  wyznacza endomorfizm  $R$ -algebry

$$\pi_P : \mathfrak{A}_P \circlearrowleft : a \mapsto P.a.P \equiv P.a \equiv a.P,$$

który jest rzutem definiującym zupełną rodzinę rzutów komplementarnych  $\{\pi_P, \text{id}_{\mathfrak{A}} - \pi_P\}$  (będących także endomorfizmami  $R$ -algebry), stosuje się tu zatem bezpośrednio Stw. 33.  $\square$

Możemy także prosto opisać szczególną naturę ideałów minimalnych w algebrach prostych, z której przyjdzie nam korzystać niebawem.

**STWIERDZENIE 149.** *Przyjmijmy zapis Def. 100 i niechaj  $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$  będzie minimalnym ideałem lewostronnym (wzgl. prawostronnym) w łącznej algebrze  $\mathfrak{A}$ . Jeśli  $\mathfrak{J}\mathfrak{J} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ , to istnieje idempotent  $P \in \mathfrak{J}$  o własności  $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}.P$  (wzgl.  $\mathfrak{J} = P.\mathfrak{A}$ ).*  $\blacksquare$

Dowód: Rozważmy przypadek ideału lewostronnego. Przypadek ideału prawostronnego rozpatruje się w pełni analogicznie. Skoro  $\mathfrak{J}\mathfrak{J} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ , to istnieje  $a \in \mathfrak{J}$  o własności  $\mathfrak{J}.a \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ , a ponieważ  $\mathfrak{J}.a \subset \mathfrak{J}$  jako ideał lewostronny algebry  $\mathfrak{A}$ , przeto koniecznie  $\mathfrak{J}.a = \mathfrak{J}$  wobec minimalności  $\mathfrak{J}$ . To jednak pociąga za sobą istnienie wyróżnionego wektora  $P \in \mathfrak{J}$  o własności  $P.a = a$ , przy czym  $P \neq 0_{\mathfrak{A}}$ , gdyż  $a \neq 0_{\mathfrak{A}}$ . Ponadto  $(P^2 - P).a = 0_{\mathfrak{A}}$ , zatem  $P^2 - P \in \{b \in \mathfrak{J} \mid b.a = 0_{\mathfrak{A}}\} \equiv \mathfrak{L}_a$ , ale  $\mathfrak{L}_a$  jest ideałem lewostronnym zawartym w  $\mathfrak{J}$  i spełniającym warunek  $\mathfrak{L}_a \neq \mathfrak{J}$  (wszak  $P \in \mathfrak{J}$ , gdy tymczasem  $P.a = a \neq 0_{\mathfrak{A}}$ ), czyli  $\mathfrak{L}_a = \{0_{\mathfrak{A}}\}$ , to jednak oznacza, że  $P^2 = P$ . Wreszcie też ponieważ  $\mathfrak{A}.P \subset \mathfrak{J}$  jako ideał lewostronny, a przy tym  $\mathfrak{A}.P \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$  (wszak  $\mathfrak{A}.P \ni P.P = P \neq 0_{\mathfrak{A}}$ ), zatem koniecznie  $\mathfrak{A}.P = \mathfrak{J}$   $\square$

W następnej kolejności indukujemy strukturę algebry na iloczynie tensorowym algebr.

**STWIERDZENIE 150.** *Przyjmijmy zapis Def. 40 oraz 99 i niechaj  $\mathfrak{A}_{\alpha} \in \text{Obj } \mathbf{Alg}_R$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  dla  $R \in \text{Obj } \mathbf{AbRing}$ . Istnieje kanoniczna struktura  $R$ -algebry na  $R$ -module  $\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2$  zadawana przez odwzorowanie*

$$m_{\otimes} = (m_{\mathfrak{A}_1} \otimes m_{\mathfrak{A}_2}) \circ \iota_{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2} : (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \longrightarrow \mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2,$$

w którym  $\iota$  jest superpozycją kanonicznych izomorfizmów  $R$ -modułów opisanych w Tw. 1.2.7 i 1.2.8,

$$\begin{aligned} \iota_{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2} : (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) &\xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2)}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R (\mathfrak{A}_2 \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2)) \\ &\xrightarrow{\text{id}_{\mathfrak{A}_1} \otimes \sigma_{\mathfrak{A}_2, \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2)}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R ((\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2) \otimes_R \mathfrak{A}_2) \\ &\xrightarrow{\text{id}_{\mathfrak{A}_1} \otimes \alpha_{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2}} \mathfrak{A}_1 \otimes_R (\mathfrak{A}_1 \otimes_R (\mathfrak{A}_2 \otimes_R \mathfrak{A}_2)) \\ &\xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2 \otimes_R \mathfrak{A}_2}^{-1}} (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_1) \otimes_R (\mathfrak{A}_2 \otimes_R \mathfrak{A}_2). \end{aligned}$$

Struktura ta nosi miano **standardowego iloczynu tensorowego  $R$ -algebr**. Ilekroć obie tensorowane  $R$ -algebry są łączne wzgl. przemienne, wzgl. unitalne, ich standardowy iloczyn tensorowy także ma tę cechę.  $\blacksquare$

Dowód: Wystarczy zauważyć, że obrazem pary  $a_1 \otimes_R a_2, b_1 \otimes_R b_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2$  względem  $m_\otimes$  jest

$$m_\otimes((a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R (b_1 \otimes_R b_2)) = m_{\mathfrak{A}_1}(a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(b_1 \otimes_R b_2). \quad (2.1.8)$$

Wszelkie pożądane własności tak zdefiniowanego mnożenia są natychmiastowymi konsekwencjami odnośnych własności  $m_{\mathfrak{A}_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ .  $\square$

Jako corollarium powyższego stwierdzenia otrzymujemy

**STWIERDZENIE 151.** *Przyjmijmy zapis Def. 41 oraz Stw. 150 i niechaj  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \text{Obj Alg}_R$ , a nadto niech  $\chi_\alpha \in \text{Hom}_{\text{Alg}_R}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Odwzorowanie  $\chi_1 \otimes \chi_2$  jest homomorfizmem  $R$ -algebr.*  $\blacksquare$

Dowód: Wprost z konstrukcji  $\chi_1 \otimes \chi_2$  jest homomorfizmem  $R$ -modułów. Jego dystrybutywność względem mnożenia  $m_\otimes$  jest prostą konsekwencją Równ. (2.1.8).  $\square$

Z połączenia powyższego z tezą Tw. 1.2.9 wynika wprost

**STWIERDZENIE 152.** *Przyjmijmy zapis Tw. 1.2.9 oraz Stw. 146 i 150, niechaj też  $\mathfrak{I}_\alpha \subset \mathfrak{A}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą ideałami obustronnymi. Kanoniczny izomorfizm  $R$ -modułów*

$$\mathfrak{A}_1/\mathfrak{I}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2/\mathfrak{I}_2 \cong (\mathfrak{A}_1 \otimes_R \mathfrak{A}_2)/T(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2)$$

*jest izomorfizmem  $R$ -algebr.*  $\blacksquare$

Wreszcie też, postępując podobnie jak w przypadku przestrzeni wektorowych (wzgl. kwadratowych), udokumentujemy przydatność iloczynu tensorowego na przykładzie relacji między algebraami rzeczywistymi, zespolonymi i kwaternionowymi.

**DEFINICJA 102.** Przyjmijmy zapis Def. 45 oraz Stw. 150 i niech  $\mathfrak{A} \in \text{Obj Alg}_R$ . **Kompleksyfikacja** algebry rzeczywistej to funktor kowariantny

$$(\cdot)^{\mathbb{C}} : \text{Alg}_R \longrightarrow \text{Alg}_{\mathbb{C}}$$

stanowiący rozszerzenie (w duchu Def. 45) funktora określonego na kategorii przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych, przy czym istotą rozszerzenia jest odwzorowanie mnożenia  $m_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \otimes_R \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$  w mnożenie  $m_\otimes : (\mathfrak{A} \otimes_R \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathfrak{A} \otimes_R \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{A} \otimes_R \mathbb{C}$ , o którym mowa w Stw. 150.  $\blacktriangle$

Na zakończenie dyskusji ogólnej przyjrzymy się bliżej kilku wybranym  $\mathbb{R}$ -algebrom unitalnym, których analiza pozwoli nam zilustrować (niemal wszystkie) podstawowe konstrukcje omówione powyżej, a zarazem będzie stanowić ważny przyczynek do przyszłej klasyfikacji rzeczywistych algebr Clifforda. Oto więc dowodzimy

**STWIERDZENIE 153.** *Przyjmijmy zapis Stw. 147 i 150 oraz Przykł. 31 (1). Istnieją unitalne izomorfizmy  $R$ -algebr:*

- (i)  $\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}} : \mathbb{R}(m) \otimes_R \mathbb{K}(n) \cong \mathbb{K}(m \cdot n);$
- (ii)  $\mathbb{C} \otimes_R \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C};$
- (iii)  $\mathbb{C} \otimes_R \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2);$

(iv)  $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$ . ■

Dowód:

Ad (i) W szczególnym przypadku  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  izomorfizm przybiera postać

$$E_{i,j}^{(m)} \otimes_{\mathbb{R}} E_{k,l}^{(n)} \mapsto E_{n(i-1)+k, n(j-1)+l}^{(m \cdot n)}, \quad i, j \in \overline{1, m}, \quad k, l \in \overline{1, n}$$

na bazie standardowej z Przykł. 31 (1). Z kolei dla  $n = 1$  jest on postaci

$$E_{i,j}^{(m)} \otimes_{\mathbb{R}} k \mapsto k \triangleright \tilde{J}_{\mathbb{R}}(E_{i,j}^{(m)}), \quad i, j \in \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{K},$$

także na naturalnej bazie i w konwencji, w której  $\tilde{J}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}(m) \rightarrow \mathbb{K}(m)$  jest kanonicznym podniesieniem monomorfizmu  $J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : r \mapsto (r, 0)$  (wzgl.  $J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} : r \mapsto (r, 0, 0, 0)$ ) do przestrzeni  $\mathbb{R}(m) \equiv \mathbb{R}^{m^2}$  (oraz  $\mathbb{C}(m) \equiv \mathbb{C}^{m^2}$  wzgl.  $\mathbb{H}(m) \equiv \mathbb{H}^{m^2}$ ). Uzyskane tym sposobem izomorfizmy

$$\mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n) \cong \mathbb{R}(m \cdot n), \quad \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(m)$$

pozwalają wyprowadzić izomorfizm w postaci najogólniejszej (w odwołaniu do Tw. 1.2.8)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}(n) &\cong \mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}) \\ &\cong (\mathbb{R}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \\ &\cong \mathbb{R}(m \cdot n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(m \cdot n). \end{aligned}$$

Ad (ii) Izomorfizm stanowi (jedyne)  $\mathbb{R}$ -liniowe rozszerzenie przyporządkowania baz

$$1 \otimes_{\mathbb{R}} 1 \mapsto (1, 1), \quad 1 \otimes_{\mathbb{R}} i \mapsto (-i, i), \quad i \otimes_{\mathbb{R}} 1 \mapsto (i, i), \quad i \otimes_{\mathbb{R}} i \mapsto (1, -1).$$

Ad (iii) Na gruncie związanej dyskusji konstrukcji Cayleya–Dicksona przedstawionej w Przykł. 31 (4) możemy dokonać utożsamienia przestrzeni  $\mathbb{C}$ -liniowych

$$\mathbb{H} \equiv \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

W tym ujęciu algebra kwaternionów zyskuje naturalną strukturę  $\mathbb{C}$ -modułu z działaniem

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ : \quad (x + yi, (a + bi) \triangleright 1 + (c + di) \triangleright j) &\longmapsto ((x + yi) \cdot_{\mathbb{C}} (a + bi)) \triangleright 1 \\ &\quad + ((x + yi) \cdot_{\mathbb{C}} (c + di)) \triangleright j. \end{aligned}$$

Wobec powyższego możemy również utożsamić odnośne ( $\mathbb{C}$ -, więc też  $\mathbb{R}$ -)algebry endomorfizmów

$$\mu_{\mathbb{C}} : \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}(2).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie (por. Równ. (2.1.4))

$$\Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}(2) : (z, q) \mapsto \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q^*) \circ m_{\mathbb{H}}(J_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z), \cdot)) \equiv \Phi_{z,q},$$

gdzie

$$m_{\mathbb{H}}(\cdot, q^*) \circ m_{\mathbb{H}}(J_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z), \cdot) : \mathbb{H} \curvearrowright : q_0 \mapsto J_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z) \cdot_{\mathbb{H}} q_0 \cdot_{\mathbb{H}} q^*.$$

Będąc jawnie dwu- $\mathbb{R}$ -liniowym, indukuje ono (jedyne) odwzorowanie

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}(2)$$

o własności

$$\forall_{(z,q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}} : \tilde{\Phi}(z \otimes_{\mathbb{R}} q) = \Phi_{z,q},$$

przy czym dla dowolnej pary  $(z_1, q_1), (z_2, q_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$  zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} & \tilde{\Phi}(z_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_1) \circ \tilde{\Phi}(z_2 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) \\ & \equiv \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot)) \circ \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ & = \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot) \circ m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ & = \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1), \cdot) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ & = \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_1^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1) \cdot_{\mathbb{H}} j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_2), \cdot)) \\ & = \mu_{\mathbb{C}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, (q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2)^*) \circ m_{\mathbb{H}}(j_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2), \cdot)) \\ & \equiv \tilde{\Phi}((z_1 \cdot_{\mathbb{C}} z_2) \otimes_{\mathbb{R}} (q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2)) = \tilde{\Phi} \circ m_{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}}(z_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_1, z_2 \otimes_{\mathbb{R}} q_2), \end{aligned}$$

mamy przeto do czynienia z homomorfizmem  $\mathbb{R}$ -algebry. W bezpośrednim rachunku sprawdzamy, że przeprowadza on naturalną bazę swej dziedziny w bazę przeciwdziedziny,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (0,-1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 1, 0)) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) \\ (-1,0) & (0,0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 0, 1)) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,-1) \\ (0,-1) & (0,0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1, 0, 0)) &= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (-1,0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 1, 0)) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) \\ (0,-1) & (0,0) \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi}((0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 0, 0, 1)) &= \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

co oznacza, że jest (pożądanym) izomorfizmem.

Ad (iv) Tym razem potraktujemy kwaterniony jako elementy  $\mathbb{R}$ -algebry

$$\iota_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} : q \equiv a + bi + cj + dk \longmapsto (a, (b, c, d)) \equiv (\underline{q}, \vec{q}),$$

w zgodzie z Równ. (2.1.5), wykorzystując monomorfizm  $\mathbb{R}$ -algebry

$$j_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3} : r \longmapsto (r, (0, 0, 0))$$

do wyindukowania na  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$  działania

$$\ell := m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}} \circ (j_1 \times \text{id}_{\mathbb{R}^{\times 3}}) : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$$

$$: (r, (s, v)) \mapsto (r \cdot s, r \triangleright v).$$

Istnienie izomorfizmu  $\mathbb{R}$ -algebr (będącego w szczególności izomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych) pozwala utożsamić odnośne ( $\mathbb{R}$ -)algebry endomorfizmów

$$\mu_{\mathbb{R}} : \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}) \cong \mathbb{R}(4).$$

Definiujemy odwzorowanie

$$\Psi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}(4) : (q_1, q_2) \mapsto \mu_{\mathbb{R}}(m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(q_1, \cdot)) \equiv \Psi_{q_1, q_2},$$

gdzie

$$m_{\mathbb{H}}(\cdot, q_2^*) \circ m_{\mathbb{H}}(q_1, \cdot) : \mathbb{H} \circlearrowleft : \tilde{q} \mapsto q_1 \cdot_{\mathbb{H}} \tilde{q} \cdot_{\mathbb{H}} q_2^*,$$

które z racji swej dwu- $\mathbb{R}$ -liniowości indukuje (jedyne) odwzorowanie

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}(4)$$

o własności

$$\forall (q_1, q_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} : \tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \Psi_{q_1, q_2},$$

przy czym z tych samych powodów co w przypadku odwzorowania  $\tilde{\Psi}$  z dowodu punktu (iii) odwzorowanie indukowane  $\tilde{\Psi}$  jawi się homomorfizmem  $\mathbb{R}$ -algebr. Dowód jego bijektywności można z powodzeniem przeprowadzić według schematuz punktu poprzedniego, my jednak – gwoli rozbudowania arsenału formalnego – pójdziemy drogą odmienną. Jej początek wyznacza wskazanie na obu rozważanych przestrzeniach  $\mathbb{R}$ -liniowych,  $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$  i  $\mathbb{R}(4)$ , niezwyrodniałych form kwadratowych:

$$Q_{\otimes} := m_{\mathbb{R}} \circ (\delta_{\mathbb{H}} \otimes \delta_{\mathbb{H}}) : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R},$$

gdzie

$$\delta_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R} : q \mapsto q \cdot_{\mathbb{H}} q^* \equiv \|q\|_{\mathbb{H}}^2,$$

więc też

$$Q_{\otimes}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \|q_1\|_{\mathbb{H}}^2 \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}^2 = \|q_1 \cdot_{\mathbb{H}} q_2\|_{\mathbb{H}}^2,$$

oraz

$$Q_{\text{Mat}} : \mathbb{R}(4) \longrightarrow \mathbb{R} : M \mapsto \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(M^{\text{T}} \odot M),$$

gdzie  $(\cdot)^{\text{T}}$  jest transpozycją macierzy,  $\text{tr}_{(4)}$  zaś – śladem macierzowym na  $\mathbb{R}(4)$ . W następnym kroku zbadamy izometryczne własności homomorfizmu  $\tilde{\Psi}$ . W tym celu policzymy bezpośrednio transpozycję  $\tilde{\Psi}_{q_1, q_2}^{\text{T}}$ , czyli – innymi słowy – sprzężenie endomorfizmu  $\Psi_{q_1, q_2}$  względem standardowego euklidesowego iloczynu skalarowego

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}} : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3})^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} : ((r, v), (s, w)) \mapsto r \cdot s + \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(3)}}(v, w),$$

por.: Równ. (2.1.6), przy czym wygodnie będzie przepisać macierz poddawaną transpozycji w postaci

$$\Psi_{q_1, q_2} \equiv r_{(q_2, -\bar{q}_2)} \odot l_{(q_1, \bar{q}_1)},$$

gdzie użyliśmy skrótowego zapisu

$$l_{(q_1, \bar{q}_1)} := m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}}((q_1, \bar{q}_1), \cdot), \quad r_{(q_2, -\bar{q}_2)} := m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}}(\cdot, (q_2, -\bar{q}_2)).$$



Teraz już bez trudu wyznaczamy – dla dowolnych  $(r, v), (s, w) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$ , a korzystając z interpretacji geometrycznej wyrażenia  $\Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \vec{q}_1 \times w)$  jako (zorientowanej) objętości równoległoscianu rozpiętego na trójce wektorów  $(v, \vec{q}_1, w)$ , tożsamego z równoległoscianem rozpiętym na trójce  $(w, v, \vec{q}_1)$

$$\begin{aligned} \left\langle (r, v) | l_{(\underline{q}_1, \vec{q}_1)}(s, w) \right\rangle_E &= \left\langle (r, v) | (\underline{q}_1 \cdot s - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\vec{q}_1, w), \vec{q}_1 \times w + \underline{q}_1 \triangleright w + s \triangleright \vec{q}_1) \right\rangle_E \\ &= r \cdot (\underline{q}_1 \cdot s) - r \cdot \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\vec{q}_1, w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \vec{q}_1 \times w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \underline{q}_1 \triangleright w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, s \triangleright \vec{q}_1) \\ &= (\underline{q}_1 \cdot r) \cdot s - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(-\vec{q}_1, v) \cdot s + \Phi_{\delta_E^{(3)}}((-\vec{q}_1) \times v, w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\underline{q}_1 \triangleright v, w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(r \triangleright (-\vec{q}_1), w) \\ &= \left\langle (\underline{q}_1 \cdot r - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(-\vec{q}_1, v), (-\vec{q}_1) \times v + \underline{q}_1 \triangleright v + r \triangleright (-\vec{q}_1)) | (s, w) \right\rangle_E \\ &\equiv \left\langle l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)}(r, v) | (s, w) \right\rangle_E, \end{aligned}$$

czyli też – wobec niezwyrodnienia rozpatrywanego iloczynu skalarnego na  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$  –

$$l_{(\underline{q}_1, \vec{q}_1)}^T = l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)},$$

oraz, analogicznie,

$$\begin{aligned} \left\langle (r, v) | r_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)}(s, w) \right\rangle_E &= \left\langle (r, v) | (s \cdot \underline{q}_2 - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(w, -\vec{q}_2), w \times (-\vec{q}_2) + s \triangleright (-\vec{q}_2) + \underline{q}_2 \triangleright w) \right\rangle_E \\ &= r \cdot (s \cdot \underline{q}_2) - r \cdot \Phi_{\delta_E^{(3)}}(w, -\vec{q}_2) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, w \times (-\vec{q}_2)) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, s \triangleright (-\vec{q}_2)) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \underline{q}_2 \triangleright w) \\ &= (r \cdot \underline{q}_2) \cdot s - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \vec{q}_2) \cdot s + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v \times \vec{q}_2, w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(r \triangleright \vec{q}_2, w) + \Phi_{\delta_E^{(3)}}(\underline{q}_2 \triangleright v, w) \\ &= \left\langle (r \cdot \underline{q}_2 - \Phi_{\delta_E^{(3)}}(v, \vec{q}_2), v \times \vec{q}_2 + r \triangleright \vec{q}_2 + \underline{q}_2 \triangleright v) | (s, w) \right\rangle_E \\ &\equiv \left\langle r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)}(r, v) | (s, w) \right\rangle_E, \end{aligned}$$

przeto

$$r_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)}^T = r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)},$$

Koniec końców, biorąc pod uwagę powyższe wyniki oraz przemienność obu czynników macierzy  $\Psi_{q_1, q_2}$ , wyznaczamy

$$\Psi_{q_1, q_2}^T \equiv l_{(\underline{q}_1, \vec{q}_1)}^T \odot r_{(\underline{q}_2, -\vec{q}_2)}^T = l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)} \odot r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)} = r_{(\underline{q}_2, \vec{q}_2)} \odot l_{(\underline{q}_1, -\vec{q}_1)} \equiv \Psi_{q_1^*, q_2^*}$$

i na tej podstawie także

$$\begin{aligned} \Phi_{Q_{\text{Mat}}}(\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2), \tilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\Psi_{q_1, q_2}^T \odot \Psi_{q_3, q_4}) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi}(q_1^* \otimes_{\mathbb{R}} q_2^*) \odot \tilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi} \circ m_{\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}}(q_1^* \otimes_{\mathbb{R}} q_2^*, q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi}(q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4)). \end{aligned}$$

Rachunek pomocniczy, poprowadzony w bazie standardowej  $\{E_0 := (1, 0), E_k := (0, e_k)\}_{k \in \{1, 2, 3\}}$  przestrzeni  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$  i dwoistej do niej  $\{E_l^*\}_{l \in \{0, 1, 2, 3\}}$ ,

w bezpośrednim odwołaniu do Def. 43 oraz Uwagi 7 i z uwzględnieniem relacji  $v \times e_k \in \langle e_l \rangle_{\mathbb{R}}^{l \in \{1,2,3\} \setminus \{k\}}$ ,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{(4)}(\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2)) &= \mathrm{tr}_{(4)}(r_{(\underline{q}_2, -\bar{q}_2)} \odot l_{(\underline{q}_1, \bar{q}_1)}) \equiv \sum_{l=0}^3 E_l^*((\underline{q}_1, \bar{q}_1) \cdot E_l(\underline{q}_2, -\bar{q}_2)) \\
&= E_1^*((\underline{q}_1, \bar{q}_1) \cdot (\underline{q}_2, -\bar{q}_2)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^3 (0, e_k^*)((\underline{q}_1, \bar{q}_1) \cdot (\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(e_k, \bar{q}_2), -e_k \times \bar{q}_2 + \underline{q}_2 \triangleright e_k)) \\
&= \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 + \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \\
&\quad + \sum_{k=1}^3 e_k^*(-\bar{q}_1 \times (e_k \times \bar{q}_2) + \underline{q}_2 \triangleright (\bar{q}_1 \times e_k) - \underline{q}_1 \triangleright (e_k \times \bar{q}_2) \\
&\quad \quad \quad + \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \triangleright e_k + \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(e_k, \bar{q}_2) \triangleright \bar{q}_1) \\
&= \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^3 e_k^*(e_k)\right) + \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \\
&\quad + \sum_{k=1}^3 \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(e_k, \bar{q}_2) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(e_k, \bar{q}_1) - \sum_{k=1}^3 e_k^*(\bar{q}_1 \times (e_k \times \bar{q}_2)) \\
&= 4\underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 + 2\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \\
&\quad - \sum_{k=1}^3 e_k^*(\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \triangleright e_k - \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}}^{(3)}(\bar{q}_1, e_k) \triangleright \bar{q}_2) \\
&= 4\underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \equiv 4\Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1, 1) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2, 1),
\end{aligned}$$

pozwała ostatecznie zapisać

$$\begin{aligned}
\Phi_{Q_{\mathrm{Mat}}}(\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2), \tilde{\Psi}(q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4)) &= \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3, 1) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4, 1) \\
&= \frac{1}{2} \left( (q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3) \cdot 1^* + 1 \cdot (q_1^* \cdot_{\mathbb{H}} q_3)^* \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{2} \left( (q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4) \cdot 1^* + 1 \cdot (q_2^* \cdot_{\mathbb{H}} q_4)^* \right) \\
&\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_1, q_3) \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{H}}}(q_2, q_4) \\
&\equiv \Phi_{Q_{\otimes}}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2, q_3 \otimes_{\mathbb{R}} q_4).
\end{aligned}$$

Jest zatem  $\tilde{\Psi}$  izometrią, przeto także – wobec niezwyrodnienia obu form kwadratowych – injekcją, oto bowiem równość  $\tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = \mathbf{0}_4$  implikuje

$$\|q_1\|_{\mathbb{H}}^2 \cdot \|q_2\|_{\mathbb{H}}^2 = Q_{\otimes}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) = Q_{\mathrm{Mat}} \circ \tilde{\Psi}(q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2) \equiv Q_{\mathrm{Mat}}(\mathbf{0}_4) = 0,$$

a wtedy  $q_1 = 0$  lub  $q_2 = 0$ , więc zawsze  $q_1 \otimes_{\mathbb{R}} q_2 = 0$ . Porównanie wymiarów rzeczywistych dziedziny i przeciwdziedziny  $\tilde{\Psi}$  na gruncie Stw. 48,

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) = (\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}))^2 = 4^2 = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}(4)),$$

przesądza o tym, że jest on izomorfizmem. □

Zebrawszy podstawowe operacje na algebrach i ich rodzinach, możemy przystąpić do zwięzłego opisu elementarnych konstrukcji i dodatkowej struktury na algebrach, jakie napotkamy w naszej dalszej eksploracji fizykalnie istotnych obiektów tego rodzaju. Opis ten stanowi doskonałą, choć też – siłą rzeczy – wysoce niekompletną, ilustrację bogactwa, jakie kryje w sobie krótkie słowo „algebra”.

## 2. Algebra tensorowa modułu

Nasz przegląd algebr zaczniemy od podstawowej konstrukcji algebraicznej przezrzucającej naturalny pomost logiczny między kategorią modułów nad pierścieniem (przemiennym) i algebr nad tym samym pierścieniem. Konstrukcja ta leży u podstaw konstrukcji (pochodzącej od V.A. Focka) przestrzeni stanów kwantowych układu o dowolnej liczbie identycznych obiektów elementarnych (np. cząstek) z przestrzeni stanów kwantowych pojedynczego obiektu, stanowi punkt wyjścia do modelowania tak istotnych fizykalnie struktur jak algebry tensorów symetrycznych i skończone symetrycznych (istotne w geometrii różniczkowej, więc także w teorii względności), uniwersalne algebry obwiednie (odgrywające ważną rolę w zaawansowanej teorii grup i algebr Liego oraz grup kwantowych, zatem także w opisie symetrii układów fizykalnych), czy wreszcie algebry Clifforda (zajmujące centralną pozycję w teorii spinorów modelujących lokalnie pola fermionowe).

DEFINICJA 103. Przyjmijmy zapis Def. 32, 42 oraz 44 i niechaj  $R \in \text{Obj AbRing}$  oraz  $G \in \text{Obj Mod}_R$ . **Algebra tensorowa  $R$ -modułu  $G$**  to  $R$ -algebra utworzona przez  $R$ -moduł

$$\bigotimes_R G := R \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} G^{\otimes_R n} \cong \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} G^{\otimes_R N}, \quad G^{\otimes_R n} := \underbrace{G \otimes_R G \otimes_R \cdots \otimes_R G}_{n \text{ razy}},$$

będący sumą prostą **potęg tensorowych modułu  $G^{\otimes_R N}$** , wyposażony w mnożenie

$$m : \bigotimes_R G \otimes_R \bigotimes_R G \longrightarrow \bigotimes_R G,$$

które w ograniczeniu do (przeciwoobrazu) iloczynów tensorowych poszczególnych potęg tensorowych  $G$  (względem kanonicznych izomorfizmów z Tw. 1.2.10),

$$\forall_{N_1, N_2 \in \mathbb{N}} : m_{N_1, N_2} \equiv m|_{G^{\otimes_R N_1} \otimes_R G^{\otimes_R N_2}} : G^{\otimes_R N_1} \otimes_R G^{\otimes_R N_2} \longrightarrow G^{\otimes_R (N_1 + N_2)}$$

$$\subset \bigotimes_R G,$$

jest określone przez kanoniczne izomorfizmy stanowiące naturalne uogólnienie tych z Tw. 1.2.8 i 45, przyjmujące na tensorach prostych postać

$$m_{0, N_2}(r \otimes_R (g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2})) = (r \triangleright g_1) \otimes_R g_2 \otimes_R g_3 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2},$$

$$m_{N_1, 0}((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1}) \otimes_R r) = (r \triangleright g_1) \otimes_R g_2 \otimes_R g_3 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_2},$$

oraz

$$\begin{aligned} & m_{n_1, n_2}((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1}) \otimes_R (h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2})) \\ &= g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_{N_1} \otimes_R h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \cdots \otimes_R h_{n_2}. \end{aligned}$$

▲

Jak łatwo widać

STWIERDZENIE 154. *Przyjmijmy zapis Def. 103. Algebra tensorowa  $\otimes_R G$  jest łączną  $R$ -algebrą unitalną, przy czym jednością jest w niej element*

$$1_{\otimes_R G} = 1_R \in G^{\otimes_R 0} \subset \otimes_R G.$$

■

*Dowód:* Wynika wprost z definicji. □

W świetle dyskusji otwierającej Rozdz. 1.2 kojąco na świadomość działa poniższe

TWIERDZENIE 2.1.1. *Przyjmijmy zapis Def. 103. Para  $(\otimes_R G, J_G)$ , w której  $J_G : G \rightarrow \otimes_R G$  jest kanonicznym włożeniem składnika prostego  $G \equiv G^{\otimes_R 1}$ , jest strukturą inicjalną dla warunku tautologicznego  $P_{G; \text{id}_{\text{Mod}_R}, F_2} \equiv 1$  na  $\text{Obj } \mathbf{uAlg}_R \times \text{Mor } \mathbf{Mod}_R$ , w którego zapisie  $F_2 : \mathbf{uAlg}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  jest funktorem zapominania.*

■

*Dowód:* Mamy pokazać, że dla dowolnej  $R$ -algebry unitalnej  $\mathfrak{A}$  o niepustej klasie  $\text{Hom}_R(G, \mathfrak{A}) \ni \varphi$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathbf{uAlg}_R}(\otimes_R G, \mathfrak{A})$  o własności wyrażanej przez diagram przemienny (w  $\mathbf{Mod}_R$ )

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{A} \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \tilde{\varphi} \\ G & \xrightarrow{J_G} & \otimes_R G \end{array} .$$

Zauważmy najspierw, że rzeczzone odwzorowanie – o ile istnieje – jest jedyne. Istotnie, na mocy definicji mnożenia w  $\otimes_R G$  dowolny tensor prosty można zapisać w postaci (zastępując symbol mnożenia w algebrze tensorowej symbolem  $\cdot$  i korzystając z jego łączności)

$$G^{\otimes_R n} \ni g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n = J_G(g_1) \cdot J_G(g_2) \cdots J_G(g_n),$$

więc  $\tilde{\varphi}$  jako homomorfizm  $R$ -algebr ewaluuje się na nim następująco:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n) &= \tilde{\varphi}(J_G(g_1) \cdot J_G(g_2) \cdots J_G(g_n)) \\ &= \tilde{\varphi} \circ J_G(g_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi} \circ J_G(g_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi} \circ J_G(g_n) \\ &= \varphi(g_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_n), \end{aligned}$$

tj. w sposób jednoznacznie określony przez  $\varphi$ , a nadto dla dowolnego  $r \in R \equiv G^{\otimes_R 0}$  zachodzi – wobec  $R$ -liniowości i unitalności  $\tilde{\varphi}$  –

$$\tilde{\varphi}(r) \equiv \tilde{\varphi}(r \triangleright_R 1_R) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(1_R) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} 1_{\mathfrak{A}},$$

tj. znowu w sposób jednoznacznie określony, ponieważ zaś  $\otimes_R G$  jest rozpięty nad  $R$  na tensorach prostych i  $1_R$ , przeto  $\tilde{\varphi}$  jest jednoznacznie zdeterminowany przez swe własności. Pozostaje go skonstruować.

W tym celu skorzystamy z uniwersalności  $\otimes_R$  – oto więc każde z odwzorowań (indeksowanych przez liczby  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ )

$$\varphi_n : G^{\times n} \rightarrow \mathfrak{A} : (g_1, g_2, \dots, g_n) \mapsto \varphi(g_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(g_n)$$

jest jawnie wielo-śród- $R$ -liniowe, a zatem odpowiada mu (jedyne) odwzorowanie  $R$ -liniowe

$$\tilde{\varphi}_n : G^{\otimes_R n} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

o własności

$$\forall_{g_1, g_2, \dots, g_n \in G} : \tilde{\varphi}_n(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \dots \otimes_R g_n) = \varphi_n(g_1, g_2, \dots, g_n).$$

Uzupełniwszy rodzinę odwzorowań  $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  o element

$$\tilde{\varphi}_0 : G^{\otimes_R 0} \equiv R \longrightarrow \mathfrak{A} : r \longmapsto r \triangleright_{\mathfrak{A}} 1_{\mathfrak{A}},$$

otrzymujemy pożądane odwzorowanie ( $R$ -liniowe wprost z definicji)

$$\tilde{\varphi} := \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} \tilde{\varphi}_N : \bigotimes_R G \longrightarrow \mathfrak{A},$$

o czym przekonują proste obserwacje:

$$\tilde{\varphi} \circ j_G = \tilde{\varphi}_1 \equiv \varphi, \quad \tilde{\varphi}(1_{\bigotimes_R G}) \equiv \tilde{\varphi}(1_R) = \tilde{\varphi}_0(1_R) = 1_{\mathfrak{A}}$$

oraz – dla dowolnych  $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  i  $g_1, g_2, \dots, g_{n_1}, h_1, h_2, \dots, h_{n_2} \in G$  –

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}((g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \dots \otimes_R g_{n_1}) \cdot (h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \dots \otimes_R h_{n_2})) \\ & \equiv \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \dots \otimes_R g_{n_1} \otimes_R h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \dots \otimes_R h_{n_2}) \\ & = \varphi_{n_1+n_2}(g_1, g_2, \dots, g_{n_1}, h_1, h_2, \dots, h_{n_2}) \\ & \equiv \varphi_{n_1}(g_1, g_2, \dots, g_{n_1}) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi_{n_2}(h_1, h_2, \dots, h_{n_2}) \\ & = \tilde{\varphi}(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \dots \otimes_R g_{n_1}) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R \dots \otimes_R h_{n_2}). \end{aligned}$$

□

Niniejszą elementarną dyskusję algebry tensorowej modułu najzgrabniej uzupełnia i podsumowuje

**TWIERDZENIE 2.1.2.** *Przyjmijmy zapis Def. 103. Przyporządkowanie*

$$\text{Obj } \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{uAssAlg}_R : G \longmapsto \bigotimes_R G$$

*rozszerza się kanonicznie do pełnego funktora kowariantnego*

$$\bigotimes_R : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{uAssAlg}_R.$$

■

Dowód: Wystarczy zauważyć, że dla  $G_1, G_2 \in \text{Obj } \mathbf{Mod}_R$  dowolny  $\chi \in \text{Hom}_R(G_1, G_2)$  określa odwzorowanie  $R$ -liniowe

$$j_{G_2} \circ \chi : G_1 \longrightarrow \bigotimes_R G_2,$$

które jednoznacznie rozszerza się do homomorfizmu algebr

$$\bigotimes_R \chi : \bigotimes_R G_1 \longrightarrow \bigotimes_R G_2$$

o własności

$$\bigotimes_R \chi \circ j_{G_1} = j_{G_2} \circ \chi,$$

którą możemy zapisać w postaci diagramu przemiennego

$$\begin{array}{ccc} \otimes_R G_1 & \xrightarrow{\otimes_R \chi} & \otimes_R G_2 \\ \uparrow J_{G_1} & & \uparrow J_{G_2} \\ G_1 & \xrightarrow{\chi} & G_2 \end{array} .$$

Przy tym na tensorach prostych

$$\bigotimes_R \chi(g_1 \otimes_R g_2 \otimes_R \cdots \otimes_R g_n) = \chi(g_1) \otimes_R \chi(g_2) \otimes_R \cdots \otimes_R \chi(g_n).$$

□

### 3. Algebry z gradacją

Przejdziemy następnie od omówienia algebr z wyróżnionym rozkładem na sumy proste podmodułów, uzgodnionym w naturalny sposób z operacjami określonymi na algebrze. Oto więc mamy

DEFINICJA 104. Przyjmijmy zapis Def. 4 oraz 99 i niechaj  $R \in \text{Obj AbRing}$  oraz  $\mathfrak{A} \in \text{Obj Alg}_R$ . Niech też  $(\Delta, +_\Delta, \bullet \rightarrow 0_\Delta)$  będzie monoidem przemiennym.  $\Delta$ -gradacja na  $\mathfrak{A}$  to rozkład  $\mathfrak{A}$  na sumę prostą podmodułów (nad  $R$ )

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathfrak{A}_\delta$$

o własności

$$(2.1.9) \quad \forall_{\delta_1, \delta_2 \in \Delta} : m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_{\delta_1}, \mathfrak{A}_{\delta_2}) \subset \mathfrak{A}_{\delta_1 +_\Delta \delta_2}.$$

**Algebra (nad  $R$ ) z  $\Delta$ -gradacją** to taka, na której jest określona  $\Delta$ -gradacja. Element  $\delta \in \Delta$  określamy mianem  $\Delta$ -stopnia podmodułu  $\mathfrak{A}_\delta$ , używając oznaczenia

$$\mathfrak{A}_\delta = \text{deg}^{-1}(\{\delta\}),$$

elementy zaś podmodułu  $\mathfrak{A}_\delta$  nazywamy **elementami jednorodnymi stopnia  $\delta$** . W szczególności element  $0_{\mathfrak{A}}$  jest jednorodny *dowolnego* stopnia.

**Podalgebra  $\Delta$ -gradowana** algebry z  $\Delta$ -gradacją  $\mathfrak{A}$  to taka jej podalgebra  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ , która jest **podmodulem z  $\Delta$ -gradacją**, tj. ma postać

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathfrak{B}_\delta, \quad \mathfrak{B}_\delta = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}_\delta.$$

W szczególności **ideał  $\Delta$ -gradowany** to podalgebra  $\Delta$ -gradowana  $\mathfrak{J} = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathfrak{J}_\delta \subset \mathfrak{A}$  o własności (zapisanej dla dowolnych  $\lambda, \delta \in \Delta$ )

- $m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{J}_\delta) \subset \mathfrak{J}_{\lambda +_\Delta \delta}$  (**lewostronny**), wzgl.
- $m_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{J}_\delta, \mathfrak{A}_\lambda) \subset \mathfrak{J}_{\lambda +_\Delta \delta}$  (**prawostronny**), wzgl.
- obu powyższych (**obustronny**).

**Homomorfizm stopnia  $D$**   $R$ -algebry z  $\Delta$ -gradacją  $\mathfrak{A}^{(1)}$  w  $R$ -algebrę z  $\Delta$ -gradacją  $\mathfrak{A}^{(2)}$  to odwzorowanie  $\chi \in \text{Hom}_{\text{Alg}_R}(\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)})$  o własności

$$\forall_{\delta \in \Delta} : \chi(\mathfrak{A}_\delta^{(1)}) \subset \mathfrak{A}_{\delta +_\Delta D}^{(2)}.$$

**Homomorfizm algebr z  $\Delta$ -gradacją** (albo inaczej  $\Delta$ -gradowany) to dowolny ich homomorfizm stopnia  $0_\Delta$ .

Algebry nad  $R$  z  $\Delta$ -gradacją (i odnośnymi homomorfizmami stopnia  $0_\Delta$ ) tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem  $\text{Alg}_R^{\Delta\text{-grad}}$ .



UWAGA 33. Powód, dla którego na homomorfizmy algebr z  $\Delta$ -gradacją nakładamy dodatkowy warunek  $D = 0_\Delta$ , ilustruje prosty argument: oto z jednej strony

$$\chi \circ m_{\mathfrak{A}^{(1)}}(\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)}, \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(1)}) \subset \chi(\mathfrak{A}_{\delta_1 + \Delta \delta_2}^{(1)}) \subset \mathfrak{A}_{\delta_1 + \Delta \delta_2 + \Delta D}^{(2)},$$

a z drugiej

$$\begin{aligned} \chi \circ m_{\mathfrak{A}^{(1)}}(\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)}, \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(1)}) &= m_{\mathfrak{A}^{(2)}}(\chi(\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)}), \chi(\mathfrak{A}_{\delta_2}^{(1)})) \subset m_{\mathfrak{A}^{(2)}}(\mathfrak{A}_{\delta_1 + \Delta D}^{(2)}, \mathfrak{A}_{\delta_2 + \Delta D}^{(2)}) \\ &\subset \mathfrak{A}_{\delta_1 + \Delta \delta_2 + \Delta D + \Delta D}^{(2)}. \end{aligned}$$



PRZYKŁAD(Y) 33.

- (1) Pierścień wielomianów z Przykł. 3 (7) niesie naturalną strukturę algebry (przemiennej, unitalnej) nad  $\mathbb{K}$  o  $\mathbb{N}$ -gradacji zadawanej przez stopień wielomianu (wielomian zerowy jest w tym ujęciu elementem każdego stopnia), patrz: [Sus13, Def. 27], przy czym składową jednorodną stopnia  $n$  tworzą jednorodny stopnia  $n$  (w tym wielomian zerowy). Operator całkowania  $\int_{0\mathbb{K}}^t$  (zdefiniowany w oczywisty sposób) jest endomorfizmem stopnia 1.
- (2) Zastępując ciało  $\mathbb{R}$  ciałem  $\mathbb{C}$  (w roli dziedziny i przeciwdziedziny funkcji) i kładąc  $S \equiv \mathbb{C}$  w Przykł. 31 otrzymujemy unitalną  $\mathbb{C}$ -algebrę przemiennej  $C(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ . Wybór dowolnego elementu  $\omega_n \in \sqrt[n]{1} \setminus \{1\}$  (dla dowolnego  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ) określa na  $C(\mathbb{C}; \mathbb{C})$   $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -gradację, względem której elementami jednorodnymi stopnia  $[k]_n$  są funkcje  $f_k$  spełniające warunek

$$\forall z \in \mathbb{C} : f_k(\omega_n \cdot z) = \omega_n^k \cdot f_k(z).$$

Dowolna funkcja  $f \in C(\mathbb{C}; \mathbb{C})$  ma (jednoznaczny) rozkład

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} f_k, \quad f_k : \mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{-kl} \cdot f(\omega_n^l \cdot z).$$

W szczególności dla  $n = 2$  otrzymujemy w ten sposób rozkład  $C(\mathbb{C}; \mathbb{C})$  na sumę prostą podmodułów złożonych z funkcji parzystych i nieparzystych, odpowiednio.

Jeśli funkcje ciągłe zastąpić gładkimi, to operator różniczkowania zyskuje interpretację endomorfizmu stopnia  $[n-1]_n$ .

- (3) Algebra tensorowa modułu  $G$  nad pierścieniem przemiennej  $R$  jest  $R$ -algebrą z  $\mathbb{N}$ -gradacją określoną wprost przez definicję tejże algebry,

$$\deg \upharpoonright_{G^{\otimes_R n}} = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Elementy składowej jednorodnej  $G^{\otimes_R n}$  określamy mianem **tensorów stopnia  $n$** .



Jako proste konsekwencje powyższej definicji otrzymujemy

STWIERDZENIE 155. *Przyjmijmy zapis Def. 104, przy czym założymy, że wszystkie elementy monoidu  $\Delta$  są upraszczalne (w rozumieniu Def. 4). W unitalnej  $R$ -algebrze z  $\Delta$ -gradacją*

- (i)  $\deg(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) = 0_{\Delta}$ ;
- (ii) *odwrotność  $a^{-1}$  dowolnego elementu  $a \in \mathfrak{A}_{\delta}$  (wzgl.  $m_{\mathfrak{A}}$ ), o ile istnieje, ma stopień  $\deg(a^{-1}) = -\delta$ , gdzie  $-\delta$  jest elementem monoidu spełniającym równość  $-\delta +_{\Delta} \delta = 0_{\Delta}$ ,*

■

Dowód:

Ad (i) Niechaj  $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \sum_{\delta \in \Delta} e_{\delta}$  będzie rozkładem jedności na elementy jednorodne. Wówczas dla dowolnego elementu jednorodnego  $a \in \mathfrak{A}_{\lambda}$  otrzymujemy tożsamość

$$a = a \cdot_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \equiv \sum_{\delta \in \Delta} a \cdot_{\mathfrak{A}} e_{\delta},$$

która wobec jednoznaczności rozkładu na elementy jednorodne i Równ. (2.1.9) implikuje równość

$$a = a \cdot_{\mathfrak{A}} e_{0_{\Delta}}.$$

Ta, będąc spełnioną dla dowolnego elementu jednorodnego, jest z racji  $R$ -liniowości mnożenia spełniana przez wszystkie elementy algebry, a zatem w szczególności przez jedność, co wobec neutralności tej ostatniej daje pożądaną równość

$$\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot_{\mathfrak{A}} e_{0_{\Delta}} = e_{0_{\Delta}} \in \mathfrak{A}_{0_{\Delta}}.$$

Ad (ii) Niechaj  $a^{-1} = \sum_{\lambda \in \Delta} \alpha_{\lambda}$  będzie rozkładem na elementy jednorodne, a wtedy na mocy poprzednio udowodnionego i jednoznaczności rozkładu oraz Równ. (2.1.9)

$$\mathfrak{A}_{0_{\Delta}} \ni \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = a \cdot_{\mathfrak{A}} a^{-1} \equiv \sum_{\lambda \in \Delta} a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{\lambda} = a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta},$$

a stąd już

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} (a \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta}) \equiv (a^{-1} \cdot_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot_{\mathfrak{A}} \alpha_{-\delta} = \alpha_{-\delta} \in \mathfrak{A}_{-\delta}.$$

□

Ilekoć monoid  $\Delta$  zadający gradację algebry zawiera elementy, które nie są upraszczalne, teza Stw. 155 nie musi być spełniona. Naturalność wymienionych w niej warunków skłania do uzupełnienia Def. 104 o

DEFINICJA 105. Przyjmijmy zapis Def. 104. **Algebra unitalna (nad  $R$ ) z  $\Delta$ -gradacją** to algebra unitalna  $\mathfrak{A}$ , na której jest określona  $\Delta$ -gradacja o własności  $\deg(\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) = 0_{\Delta}$ . Algebry unitalne nad  $R$  z  $\Delta$ -gradacją (i odnośnymi homomorfizmami stopnia  $0_{\Delta}$ ) tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem  $\mathbf{uAlg}_R^{\Delta\text{-grad}}$ .

▲

Odnotujmy jeszcze, że konstrukcja ilorazowa przenosi się do kategorii z gradacją w naturalny sposób.



STWIERDZENIE 156. *Przyjmijmy zapis Stw. 146 oraz Def. 104 i niechaj  $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$  będzie obustronnym ideałem  $\Delta$ -gradowanym  $R$ -algebry z  $\Delta$ -gradacją  $\mathfrak{A}$ . Algebra ilorazowa  $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$  dziedziczy z  $\mathfrak{A}$  kanoniczną  $\Delta$ -gradację, względem której rzut kanoniczny*

$$\pi_{\mathfrak{A}/\mathfrak{J}} : \mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$$

*jest homomorfizmem algebr z  $\Delta$ -gradacją.*

■

*Dowód:* Trywialny. □

Mamy też, nie mniej oczywiste,

TWIERDZENIE 2.1.3 (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie (dla algebr z gradacją)). *Przyjmijmy zapis Stw. 156 oraz Def. 19 i niechaj  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \text{Obj Alg}_R^{\Delta\text{-grad}}$  oraz  $\chi \in \text{Hom}_{\text{Alg}_R^{\Delta\text{-grad}}}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ . Wówczas  $\text{Ker } \chi \subset \mathfrak{A}_1$  jest obustronnym ideałem  $\Delta$ -gradowanym, natomiast  $\text{Im } \chi \subset \mathfrak{A}_2$  jest podalgebrą  $\Delta$ -gradowaną. Kanoniczny izomorfizm  $R$ -modułów*

$$\mathfrak{A}/\text{Ker } \chi \xrightarrow{\cong} \text{Im } \chi$$

*jest izomorfizmem algebr z  $\Delta$ -gradacją.*

■

*Dowód:* Oczywisty. □

Na zakończenie części poświęconej algebróm z gradacją uzgodnimy konstrukcję iloczynu tensorowego z gradacją (tensorowanych algebr). Przy tym, miast rozpatrywać ogólną teorię iloczynu na module tensorowym (uwzględniającą struktury odmienne od tej wskazanej w Stw. 150), wyłożoną w Ref. [Bou07b], skupimy się na dwóch szczególnych przypadkach, które napotkamy w dalszej części kursu poświęconej algebróm Clifforda. W pierwszej kolejności wysłowimy oczekiwane

STWIERDZENIE 157. *Przyjmijmy zapis Stw. 150 oraz Def. 104 i niechaj  $\mathfrak{A}^{(A)} \in \text{Obj Alg}_R^{\Delta\text{-grad}}$ ,  $A \in \{1, 2\}$ . Standardowy iloczyn tensorowy  $R$ -algebr  $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$  niesie naturalną strukturę  $R$ -algebry z  $\Delta$ -gradacją określaną przez kanoniczny izomorfizm  $R$ -algebr*

$$\iota : \mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\delta \in \Delta} \bigoplus_{\substack{\delta_1, \delta_2 \in \Delta \\ \delta_1 + \Delta \delta_2 = \delta}} (\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(2)}),$$

*patrz: Tw. 1.2.10, tj. składowa jednorodna  $\Delta$ -stopnia  $\delta$  jest przeciwobrazem względem tegoż izomorfizmu składnika prostego o indeksie  $\delta$ ,*

$$(\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)})_{\delta} = \iota^{-1} \left( \bigoplus_{\substack{\delta_1, \delta_2 \in \Delta \\ \delta_1 + \Delta \delta_2 = \delta}} (\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(2)}) \right).$$

*Tak określona  $\Delta$ -gradacja nosi miano  $\Delta$ -gradacji totalnej.*

■

*Dowód:* Oczywisty. □

W szczególnym przypadku  $\Delta \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$  istnieje istotna alternatywa dla standardowej struktury algebry na iloczynie tensorowym algebr z  $\Delta$ -gradacją. Opisuje ją

DEFINICJA 106. Przyjmijmy zapis Stw. 150 oraz Def. 104 i niechaj  $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)} \in \text{Obj Alg}_R^{\Delta\text{-grad}}$  dla  $\Delta \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$  (ze standardową strukturą pierścienia z Przykł. 3 (2) wzgl. (3)). **Skośny iloczyn tensorowy  $R$ -algebr z  $\Delta$ -gradacją** (zwany także **super-iloczynem tensorowy  $R$ -algebr z  $\Delta$ -gradacją**) to iloczyn tensorowy odnośnych  $R$ -modułów wyposażony w mnożenie

$$m_{\widehat{\otimes}} \equiv \widehat{\cdot} : (\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}) \otimes_R (\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}) \longrightarrow \mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)},$$

które na jednorodnych składowych w  $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$  będących przeciwobrazami (sum)  $R$ -modułów  $\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(2)}$  względem izomorfizmu  $\iota$  ze Stw. 157 przyjmuje postać

$$m_{\widehat{\otimes}} \uparrow_{\iota^{-1}(\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(2)})} := (-1)^{\delta_1 \cdot \Delta \delta_2} m_{\otimes} \uparrow_{\iota^{-1}(\mathfrak{A}_{\delta_1}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}_{\delta_2}^{(2)})}.$$

Tak określoną  $R$ -algebrę (z  $\Delta$ -gradacją) o nośniku  $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$  oznaczamy symbolem

$$\mathfrak{A}^{(1)} \widehat{\otimes}_R \mathfrak{A}^{(2)}.$$

▲

Jak łatwo widać,

STWIERDZENIE 158. *Przyjmijmy zapis Def. 106. Ilekroć obie tensorowane  $R$ -algebry są łączne wzgl. unitalne (w rozumieniu Def. 105), ich skośny iloczyn tensorowy także ma tę cechę.*

■

Dowód: O słuszności tezy przekonuje nas prosty rachunek, wykonany dla dowolnych  $(a_\alpha, b_\alpha) \in \mathfrak{A}_{1\lambda_\alpha} \times \mathfrak{A}_{2\mu_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$m_{\widehat{\otimes}}(m_{\widehat{\otimes}}((a_1 \otimes_R b_1) \otimes_R (a_2 \otimes_R b_2)) \otimes_R (a_3 \otimes_R b_3)) = (-1)^{\mu_1 \cdot \Delta \lambda_2 + \Delta(\mu_1 + \Delta \mu_2) \cdot \Delta \lambda_3}$$

$$\cdot m_{\mathfrak{A}_1}(m_{\mathfrak{A}_1}(a_1 \otimes_R a_2) \otimes_R a_3) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(m_{\mathfrak{A}_2}(b_1 \otimes_R b_2) \otimes_R b_3),$$

$$m_{\widehat{\otimes}}((a_1 \otimes_R b_1) \otimes_R m_{\widehat{\otimes}}((a_2 \otimes_R b_2) \otimes_R (a_3 \otimes_R b_3))) = (-1)^{\mu_2 \cdot \Delta \lambda_3 + \Delta \mu_1 \cdot \Delta(\lambda_2 + \Delta \lambda_3)}$$

$$\cdot m_{\mathfrak{A}^{(1)}}(a_1 \otimes_R m_{\mathfrak{A}_1}(a_2 \otimes_R a_3)) \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(b_1 \otimes_R m_{\mathfrak{A}_2}(b_2 \otimes_R b_3)),$$

w którym

$$(-1)^{\mu_1 \cdot \Delta \lambda_2 + \Delta(\mu_1 + \Delta \mu_2) \cdot \Delta \lambda_3} = (-1)^{\mu_2 \cdot \Delta \lambda_3 + \Delta \mu_1 \cdot \Delta(\lambda_2 + \Delta \lambda_3)},$$

oraz teza (i) Stw. 155, która gwarantuje neutralność  $1_{\mathfrak{A}_1} \otimes_R 1_{\mathfrak{A}_2} \in (\mathfrak{A}_1 \widehat{\otimes}_R \mathfrak{A}_2)_{0_\Delta}$  w przypadku algebr unitalnych. □

#### 4. Algebry różniczkowe

#### 5. Algebry Frobeniusa

#### 6. Algebry Liego

#### 7. Algebroidy

#### 8. Superalgebry Liego

## Elementy teorii reprezentacji algebr

### 1. Pojęcia podstawowe

Algebry i struktury pochodne niosące nietrywialną informację fizykalną (jak choćby tę o symetriach stanów i procesów przyrodniczych, czy wreszcie o samej ewolucji stanów) ujawniają swą obecność w opisie obiektów i zjawisk bądź to bezpośrednio (o czym wspomnieliśmy na początku poprzedniego rozdziału), bądź też za pośrednictwem struktur generycznych stowarzyszonych z wyborem algebraicznego zbioru-modelu owych zjawisk i podlegających im obiektów – najbardziej oczywiste przykłady takich wyborów to: konstrukcja algebry (Poissona–)Liego funkcji gładkich na rozmaitości symplektycznej (z nawiasem Poissona określonym przez formę symplektyczną) wykorzystywana do opisu stanów klasycznego układu fizycznego, z którą stowarzyszona jest pojemna struktura algebry Liego symplektycznych pól wektorowych na tejże rozmaitości, oraz konstrukcja przestrzeni Hilberta wykorzystywana do opisu stanów kwantowego układu fizycznego, z którą stowarzyszona jest nie mniej pojemna struktura  $(C^*)$ -algebry ograniczonych operatorów liniowych. W tym drugim przypadku relacje konstytutywne rzeczonych algebr są spełniane przez pewien podzbiór elementów struktury generycznej i określają relacje równoważności na zbiorze-modelu będącym jej nośnikiem. Relacje te porządkują elementy zbioru-modelu według kryterium przynależności do ich klas abstrakcji, co zwykle zyskuje interpretację w terminach „opisów równoważnych”, „rodzajów/rodzin obiektów elementarnych”, „multipletów symetrii” lub „sektorów nadwyboru” w zbiorze-modelu zjawisk i obiektów. Abstrakcyjnego aparatu konstrukcji i analizy takiego „zapośredniczonego” schematu manifestacji algebr o znaczeniu fizycznym dostarcza teoria reprezentacji algebr, którą zajmujemy się w niniejszym rozdziale. Zaczynamy zatem od podstawowej

DEFINICJA 107. Przyjmijmy zapis Def. 22 i 99 oraz Przykł. 3 (4), 31 (2) i (12). Niechaj  $((\mathfrak{A} + \mathfrak{A}, P_{\mathfrak{A}}, \bullet \mapsto \mathbf{0}_{\mathfrak{A}}, \ell_{\mathfrak{A}}), m_{\mathfrak{A}})$  będzie unitalną algebrą łączną nad pierścieniem przemiennym  $R_1$ ,  $((G, +_G, P_G, \bullet \mapsto 0_G), \ell_G)$  zaś – modulem lewostronnym nad pierścieniem  $R_2$ , przy czym zakładamy, że oba pierścienie wiąże relacja  $\mathcal{Z}(R_2) \supseteq R_1$ . **Reprezentacja** (typu  $R_1$ ) algebry  $\mathfrak{A}$  na module  $G$  to unitalny homomorfizm  $R_1$ -algebr

$$\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(G),$$

przy czym struktura  $R_1$ -algebry na  $\text{End}_{R_2}(G)$  jest tutaj indukowana przez włożenie kanoniczne  $\mathcal{J}_{R_1} : R_1 \rightarrow R_2$ . Modul  $G$  określamy w tym wypadku mianem **nośnika reprezentacji**. Kiedy jest on wolny, definiujemy **wymiar reprezentacji** jako rząd modułu  $G$  i zapisujemy

$$\dim \rho \equiv \text{rk}_{R_2} G.$$

Jeśli  $\rho$  jest monomorfizmem, mówimy o reprezentacji **wiernej**. Centralizator obrazu reprezentacji,

$$C_{\text{End}_{R_2}(G)}(\rho(\mathfrak{A})) \subset \text{End}_{R_2}(G),$$

nazywamy **maksymalną podalgebrą komutującą** reprezentacji.

**Podmoduł  $\rho$ -niezmienniczy** to podmoduł  $H \subseteq G$  o własności

$$\forall_{a \in \mathfrak{A}} : \rho(a)(H) \subset H.$$

Wyznacza on **podreprezentację** reprezentacji  $\rho$ , czyli reprezentację algebry  $\mathfrak{A}$  na podmodule  $H$  daną w postaci

$$\rho_{(H)} : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{R_2}(H) : a \longmapsto (j_H \upharpoonright_{\text{Im } j_H})^{-1} \circ \rho(a) \circ j_H.$$

Ilekoć pierścień bazowy  $R_2 = \mathbb{K}$  jest ciałem, mówimy o **podprzestrzeni  $\rho$ -niezmienniczej**. Reprezentacja, której jedynymi przestrzeniami niezmienniczymi są  $G$  (cały nośnik) i  $\{0_G\}$ , nosi miano **nieprzywiedlnej**. Reprezentacja, która nie jest nieprzywiedlna, jest określana jako **przywiedlna**. Reprezentacja, której nośnik rozkłada się na sumę prostą przestrzeni niezmienniczych, to reprezentacja **półprosta**. Wreszcie taką, której nośnik nie rozkłada się na sumę prostą *nietrywialnych* przestrzeni niezmienniczych, nazywamy **nierozkładalną**.

Dla dowolnej pary reprezentacji  $\rho_\alpha : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_R(G_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  algebry  $\mathfrak{A}$ , **homomorfizm reprezentacji**, zwany także **splataczem reprezentacji**, to odwzorowanie  $\chi \in \text{Hom}_{R_2}(G_1, G_2)$  spełniające warunek

$$\forall_{a \in \mathfrak{A}} : \rho_2(a) \circ \chi = \chi \circ \rho_1(a).$$

Ilekoć splatacz  $\chi$  jest izomorfizmem, mówimy o **równoważności reprezentacji**  $\rho_1$  i  $\rho_2$ , którą zapisujemy symbolem

$$\rho_2 \sim \rho_1.$$

Reprezentacje  $R_1$ -algebry  $\mathfrak{A}$  na  $R_2$ -modułach lewostronnych wraz z odpowiednimi splataczami tworzą kategorię, którą będziemy oznaczać symbolem  $\mathbf{Rep}_{R_1 \in R_2}(\mathfrak{A})$ . ▲

**UWAGA 34.** Każda reprezentacja nieprzywiedlna jest w oczywisty sposób nierozkładalna. O tym, że w ogólności jest to wynikanie jendokierunkowe, przekonuje analiza prostego przykładu: Oto przestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa  $\mathbb{R}^{\times 2}$  jest nośnikiem nierozkładalnej, lecz przywiedlnej reprezentacji unitalnej  $\mathbb{R}$ -algebry łącznej  $\mathbb{R}[\cdot]$  określonej (jednoznacznie) przez przyporządkowanie generatorowi  $t \in \mathbb{R}[\cdot]$  (zmiennej) macierzy

$$\rho(t) := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedyną podprzestrzenią  $\rho$ -niezmienniczą jest tutaj  $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ , przy czym podprzestrzeń ta nie ma (prostego)  $\rho$ -niezmienniczego dopełnienia w  $\mathbb{R}^{\times 2}$ , co wynika z rachunku

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \triangleright \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

▬

PRZYKŁAD(Y) 34.

- (1) **Reprezentacja trywialna**  $R$ -algebry  $\mathfrak{A}$  na  $R$ -module  $G$  to taka, która spełnia warunek  $\forall_{a \in \mathfrak{A} \setminus \{1_{\mathfrak{A}}\}} : \rho(a) = 0$ .
- (2) **Reprezentacja lewa regularna**  $R$ -algebry  $\mathfrak{A}$  na  $R$ -module  $\mathfrak{A}$  to  $l : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{A}) : a \mapsto m_{\mathfrak{A}}(a, \cdot)$ . Analogicznie definiujemy **reprezentację prawą regularną**. Ilekroć  $\mathfrak{A}$  jest unitalna, reprezentacje te są wierne.
- (3) **Reprezentacja zredukowana względem ideału** lewostronnego (wzgl. prawostronnego)  $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$   $R$ -algebry  $\mathfrak{A}$  na  $R$ -module  $\mathfrak{I}$  to odwzorowanie  $l^{\mathfrak{I}} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{I})$  indukowane przez reprezentację lewą (wzgl. prawą) regularną wskutek ograniczenia wyjściowego  $R$ -modułu  $\mathfrak{A}$  do jego podmodułu  $\mathfrak{I}$ . Reprezentacja ta jest w oczywisty sposób nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathfrak{I}$  jest minimalny, tj. gdy  $\mathfrak{I}$  nie zawiera podideałów innych niż  $\{0_{\mathfrak{A}}\}$  oraz  $\mathfrak{I}$ .
- (4) Wybór bazy w  $R$ -module  $G$  rzędu  $\text{rk}_R G = N \in \mathbb{N}$  określa reprezentację macierzową  $\text{End}_R(G) \rightsquigarrow \text{End}_R(R^{\times N}) \cong \mathbb{R}(N)$ .
- (5) Reprezentacje ciała  $\mathbb{K}$  traktowanego jako unitalna  $\mathbb{Z}$ -algebra to przestrzenie  $\mathbb{K}$ -liniowe.

✓

Naturalne operacje na modułach i algebrach nad pierścieniem przemennym są dziedziczone przez reprezentacje, czemu daje wyraz

DEFINICJA 108. Przyjmijmy zapis Def. 16 i 107 oraz Stw. 147 i 150. Niechaj  $\rho_{\alpha} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{R_2}(G_{\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą reprezentacjami  $R_1$ -algebry  $\mathfrak{A}$  na  $R_2$ -modułach lewostronnych  $G_{\alpha}$ . **Suma prosta reprezentacji**  $\rho_{\alpha}$  to reprezentacja

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_R(G_1) \oplus \text{End}_R(G_2) : a \mapsto \rho_1(a) \oplus \rho_2(a).$$

**Iloczyn tensorowy reprezentacji**  $\rho_{\alpha}$  to reprezentacja

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{R_2}(G_1) \otimes_{R_1} \text{End}_{R_2}(G_2) : a \mapsto \rho_1(a) \otimes_{R_1} \rho_2(a).$$

Niechaj teraz  $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{R_2}(G)$  będzie reprezentacją  $R_1$ -algebry  $\mathfrak{A}$  na  $R_2$ -module  $G$ , przy czym zakładamy (dla uproszczenia), że także  $R_2$  jest pierścieniem przemennym. **Reprezentacja dwoista** (lub **dualna**) do  $\rho$  to reprezentacja

$$\rho^* : \mathfrak{A}^{\text{opp}} \rightarrow \text{End}_{R_2}(G^*) : a \mapsto \rho(a)^*,$$

gdzie

$$\rho(a)^* : G^* \curvearrowright : \varphi \mapsto \varphi \circ \rho(a).$$

▲

Mając na uwadze przyszłe konkretne zastosowania fizykalne teorii reprezentacji, uzupełnimy dotychczasową jej dyskusję o elementy nawiązujące bezpośrednio do konstrukcji przedstawionych w Def. 45 i 102. Oto więc mamy

DEFINICJA 109. Przyjmijmy zapis Def. 107 oraz Przykł. 31 (4) i niechaj  $\mathfrak{A}$  będzie algebrą nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Jej reprezentację nazwiemy **reprezentacją typu  $R$**  dla  $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$  (tj. **rzeczywistego**, **zespólonego** lub – odpowiednio – **kwaternionowego**), jeśli jej przeciwdziedzina jest  $\mathbb{R}$ -algebra endomorfizmów  $\text{End}_{R^{\text{opp}}}(G)$  modułu prawostronnego  $G$  nad pierścieniem  $R$ , tj.

$$\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{R^{\text{opp}}}(G).$$



Równoważnego opisu reprezentacji typu  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  i  $\mathbb{H}$  dostarcza oczywiste, lecz zarazem wygodne

**STWIERDZENIE 159.** *Przyjmijmy zapis Def. 109, Stw. 55 oraz Przykł. 31 (12). Reprezentacja zespolona  $\mathbb{R}$ -algebry  $\mathfrak{A}$  to taka jej reprezentacja rzeczywista, której maksymalna podalgebra komutująca spełnia warunek*

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(G)}(\rho(\mathfrak{A})) \supset (\text{id}_G, I)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}.$$

*Reprezentacja kwaternionowa  $\mathbb{R}$ -algebry  $\mathfrak{A}$  to taka jej reprezentacja rzeczywista, której maksymalna podalgebra komutująca spełnia warunek*

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(G)}(\rho(\mathfrak{A})) \supset (\text{id}_G, I, J, K)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}.$$



*Dowód:* Bezpośrednia konsekwencja Def. 109 oraz Stw. 55, podparta istnieniem monomorfizmów  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ . □

O dodatkowych mechanizmach indukcji zespolonych reprezentacji algebr rzeczywistych i ich kompleksyfikacji opowiada

**STWIERDZENIE 160.** *Przyjmijmy zapis Def. 102 oraz 109. Niechaj  $\mathfrak{A} \in \text{Obj Alg}_{\mathbb{R}}$  oraz  $V \in \text{Obj Vect}_{\mathbb{C}}$  i  $W \in \text{Obj Mod}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}$ . Dowolna reprezentacja zespolona  $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  kanonicznie indukuje reprezentację*

$$\rho^{\mathbb{C}} : \mathfrak{A}^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

*stanowiącą jedyne  $\mathbb{C}$ -liniowe rozszerzenie przyporządkowania*

$$\rho^{\mathbb{C}}(a \otimes_{\mathbb{R}} z) := \rho(a) \circ \ell_z \equiv \ell_z \circ \rho(a),$$

*zapisanego dla dowolnych  $(a, z) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{C}$ . Ponadto dowolna reprezentacja kwaternionowa  $\tilde{\rho} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{H}^{\text{opp}}}(W)$  kanonicznie (tożsamościowo) indukuje reprezentację zespoloną*

$$\tilde{\rho} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W).$$



*Dowód:* Trywialny. □

Powracając do dyskusji ogólnych własności reprezentacji algebr unitalnych, wypowiemy obecnie wynik strukturalny o fundamentalnym znaczeniu dla całej teorii reprezentacji, mimo całą swą trywialność.

**STWIERDZENIE 161** (Lematy Schura). *Przyjmijmy zapis Def. 107 i niechaj  $\rho_{\alpha} : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_{\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema reprezentacjami  $\mathbb{K}$ -algebry  $\mathfrak{A}$  na odnośnych przestrzeniach wektorowych  $V_{\alpha}$  nad ciałem  $\mathbb{K}$ , odwzorowanie  $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  zaś – homomorfizmem reprezentacji. Wówczas  $\text{Ker } \chi$  jest podprzestrzenią  $\rho_1$ -niezmienniczą przestrzeni  $V_1$ , a  $\text{Im } \chi$  jest podprzestrzenią  $\rho_2$ -niezmienniczą przestrzeni  $V_2$ . Ilekroć  $\rho_1$  jest nieprzywiedlna, zachodzi alternatywa*

$$\text{Ker } \chi = V_1 \quad \vee \quad \text{Ker } \chi = \{0_{V_1}\},$$

*kiedy natomiast to  $\rho_2$  jest nieprzywiedlna, zachodzi alternatywa*

$$\text{Im } \chi = \{0_{V_2}\} \quad \vee \quad \text{Im } \chi = V_2.$$

■

Dowód: Oczywiście. □

Jego natychmiastową konsekwencją jest

STWIERDZENIE 162 (Lemat Schura nad ciałem algebraicznie domkniętym). *Przyjmijmy zapis Def. 107 i niechaj  $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  będzie nieprzywiedlną reprezentacją  $\mathbb{K}$ -algebry unitalnej  $\mathfrak{A}$  na przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem algebraicznie domkniętym  $\mathbb{K}$ , odwzorowanie  $\chi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  zaś – endomorfizmem reprezentacji  $\rho$ . Wówczas istnieje skalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  spełniający warunek*

$$\chi = \lambda \triangleright \text{id}_V.$$

■

Dowód: Algebraiczna domkniętość  $\mathbb{K}$  przesądza o istnieniu skalaru  $\lambda \in \text{Sp}(\chi)$ , którego możemy użyć do zdefiniowania endomorfizmu

$$\chi_\lambda := \chi - \lambda \triangleright \text{id}_V$$

reprezentacji  $\rho$ . Niech  $w_\chi \in \mathbb{K}[t]$  będzie wielomianem charakterystycznym  $\chi$ , a  $P_{w_\chi} : \mathbb{K} \curvearrowright$  – funkcją wielomianową z nim stowarzyszoną. Wobec tożsamości  $\det(\chi_\lambda) \equiv P_{w_\chi}(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$  stwierdzamy, że  $\chi_\lambda$  nie jest monomorfizmem, co w świetle Stw. 161 implikuje postulowaną tożsamość  $\chi_\lambda = 0$ . □

Na gruncie dotychczasowych rozważań natury ogólnej możemy obecnie przystąpić do szczegółowej dyskusji reprezentacji algebr, które napotkamy w dalszej części kursu.

## 2. Reprezentacje algebr prostych

Jednym z wyróżników algebr prostych pośród innych obiektów kategorii  $\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$  jest szczególna prostota ich teorii reprezentacji, która pozwoli nam z czasem przeprowadzić wyczerpującą analizę reprezentacji algebr odgrywających istotną rolę w matematycznym modelowaniu zjawisk z udziałem pól fermionowych, czyli rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda. Świadczenia rzeczonyj prostoty dostarcza poniższe

TWIERDZENIE 2.2.1. *Wszystkie wierne reprezentacje nieprzywiedlne skończonego wymiarowej algebry prostej są wzajem równoważne.*

■

Dowód: Niechaj  $\mathfrak{A} \in \text{Obj } \mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$  będzie algebrą prostą skończonego wymiaru. W przypadku  $\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$  dowód jest banalny, załóżmy zatem, że  $\mathfrak{A}$  jest nietrywialna. Zaczniemy od skonstruowania wyróżnionej reprezentacji referencyjnej. W tym celu wybierzmy dowolny minimalny (niezerowy) ideał lewostronny  $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ , którego istnienie zapewnia skończoność wymiaru  $\mathfrak{A}$  (wystarczy zacząć jego poszukiwania od ideału  $\mathfrak{A}$ , w którym w następnym kroku wybieramy dowolny nietrywialny podideał lewostronny, o ile takowy istnieje, i procedurę powtarzamy (co najwyżej  $(\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{A} - 2)$ -krotnie)), i rozważmy reprezentację  $l^{\mathfrak{I}}$  zredukowaną względem  $\mathfrak{I}$  (w rozumieniu Przykł. 34 (3)). Reprezentacja ta jest nieprzywiedlna z racji minimalności  $\mathfrak{I}$ , pozostaje zatem zbadać jej wierność. Jeśli  $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}$ , to  $\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{I} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$  wprost na mocy założenia, a zatem możemy zastosować tezę Stw. 149, która pozwala stwierdzić, że  $\mathfrak{I} = \mathfrak{A} \cdot P \equiv \mathfrak{I} \cdot P$  dla pewnego idempotentu  $P \in \mathfrak{I} \equiv \mathfrak{A}$ . Załóżmy, że  $l^{\mathfrak{I}}$  nie jest

wierna, tj.  $\text{Ker } l^{\mathcal{J}} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ , a wtedy nieodzownie  $\text{Ker } l^{\mathcal{J}} = \mathfrak{A}$ , gdyż  $\text{Ker } l^{\mathcal{J}}$  jest ideałem obustronnym. Wobec łączności mnożenia w  $\mathfrak{A}$ , to daje nam

$$l^{\mathcal{J}} : \mathfrak{A} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J} : (a, b.P) \longmapsto a.(b.P) \equiv (a.b).P = 0_{\mathfrak{A}},$$

przy czym  $a.b \in \mathfrak{A} \equiv \mathcal{J}$ , przeto w świetle argumentacji analogicznej do tej z dowodu Stw. 149 (a wobec  $P \neq 0_{\mathfrak{A}}$ ) konstatujemy, że  $\forall_{a,b \in \mathfrak{A}} : a.b = 0_{\mathfrak{A}}$ , w sprzeczności z założeniem o prostocie  $\mathfrak{A}$ . Pozostaje jeszcze rozpatrzyć przypadek  $\mathcal{J} \not\subseteq \mathfrak{A}$ . I w tym przypadku założymy, że  $\text{Ker } l^{\mathcal{J}} = \mathfrak{A}$ . Wobec niezerowości  $\mathcal{J}$  możemy wybrać  $x \in \mathcal{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$ , z którym następnie stowarzyszamy ideał prawostronny  $x.\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$ . Poczynione założenie przesądza o tym, że jest to ideał obustronny, oto bowiem

$$\forall_{a \in \mathfrak{A}} : a.(x.\mathfrak{A}) = (a.x).\mathfrak{A} \equiv l_a^{\mathcal{J}}(x).\mathfrak{A} = 0_{\mathfrak{A}}.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\} \subset x.\mathfrak{A}.$$

Wobec prostoty  $\mathfrak{A}$  wnioskujemy, że albo  $x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$ , albo też  $x.\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ . Jeśli  $x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$ , to bez trudu stwierdzamy, że także  $\langle x \rangle_{\mathbb{K}}$  jest ideałem obustronnym, gdyż

$$\forall_{(a,\lambda) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{K}} : a.(\lambda \triangleright x) = \lambda \triangleright (a.x) \equiv \lambda \triangleright l_a^{\mathcal{J}}(x) = \lambda \triangleright 0_{\mathfrak{A}} = 0_{\mathfrak{A}}$$

oraz

$$\forall_{(a,\lambda) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{K}} : (\lambda \triangleright x).a = \lambda \triangleright (x.a) \in x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\},$$

a ponieważ  $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$  (wszak  $x \neq 0_{\mathfrak{A}}$ ), przeto koniecznie  $\langle x \rangle_{\mathbb{K}} = \mathfrak{A}$ . Wtedy jednak zachodzi równość  $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \equiv \langle x \rangle_{\mathbb{K}}.\mathfrak{A} = x.\mathfrak{A} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$ , co jest w sprzeczności z założeniem o prostocie  $\mathfrak{A}$ . Jeżeli natomiast  $x.\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ , to

$$\forall_{a,b=x.c \in \mathfrak{A}} : a.b \equiv a.(x.c) = (a.x).c \equiv l_a^{\mathcal{J}}(x).c = 0_{\mathfrak{A}}.c = 0_{\mathfrak{A}},$$

znów w sprzeczności z założeniem  $\mathfrak{A}.\mathfrak{A} \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ . Ostatecznie więc nieodzownie  $\text{Ker } l^{\mathcal{J}} = \{0_{\mathfrak{A}}\}$ , czyli mamy do czynienia z wierną i – jak pokazaliśmy wcześniej – nieprzywiedlną reprezentacją  $l^{\mathcal{J}}$ .

Niechaj teraz  $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  będzie wierną reprezentacją nieprzywiedlną na przestrzeni wektorowej  $V$ . Wierność  $\rho$  oznacza, że  $\forall_{a \in \mathcal{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}} : \rho(a) \neq 0$ , czyli

$$\forall_{a \in \mathcal{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}} \exists_{v \in V} : \rho(a)(v) \neq 0_V.$$

Ustalmy  $a_0 \in \mathcal{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$  oraz odnośny wektor  $v_0 \in V$  (o powyższej własności) i zdefiniujmy odwzorowanie (jawnie)  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\chi_0 : \mathcal{J} \longrightarrow V : a \longmapsto \rho(a)(v_0).$$

Odwzorowanie to spełnia – dla dowolnych  $(a, b) \in \mathfrak{A} \times (\mathcal{J} \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\})$  – warunek

$$\chi_0 \circ l_a^{\mathcal{J}}(b) \equiv \chi_0(a \cdot_{\mathfrak{A}} b) \equiv \rho(a \cdot_{\mathfrak{A}} b)(v_0) = \rho(a) \circ \rho(b)(v_0) \equiv \rho(a) \circ \chi_0(b),$$

tj. splata ze sobą nieprzywiedlne reprezentacje  $\mathfrak{A}$ : reprezentację zredukowaną względem  $\mathcal{J}$  oraz  $\rho$ , patrz: Przykł. 34 (3). Ponieważ jednak zarówno  $\text{Ker } \chi_0 \neq \mathcal{J}$  (gdyż  $\chi_0(a_0) \neq 0_V$ ), jak i  $\text{Im } \chi_0 \neq \{0_V\}$  (z tego samego powodu), przeto – na mocy Stw. 161 –  $\chi_0$  jest izomorfizmem. Na tej podstawie wnioskujemy, że każda wierna reprezentacja nieprzywiedlna  $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  jest równoważna reprezentacji zredukowanej  $l^{\mathcal{J}}$  względem dowolnego (minimalnego) ideału lewostronnego  $\mathcal{J} \subset \mathfrak{A}$ .  $\square$

Jego treść uzupełnia w nader istotny sposób

**STWIERDZENIE 163.** *Wszystkie nietrywialne reprezentacje unitalnej algebry prostej są wiernie.*  $\blacksquare$



*Dowód:* Niechaj  $\mathfrak{A} \in \text{Obj } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$  będzie algebrą prostą,  $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  zaś – jej reprezentacją, przy czym zakładamy, że  $\text{Ker } \rho \neq \{0_{\mathfrak{A}}\}$ . Wybierzmy dowolny element  $a \in \text{Ker } \rho \setminus \{0_{\mathfrak{A}}\}$  i wygenerujmy zeń ideał obustronny

$$\langle a \rangle_{\mathfrak{A}} := \left\{ \sum_{i=1}^N b_i \cdot_{\mathfrak{A}} a \cdot_{\mathfrak{A}} c_i \mid b_i, c_i \in \mathfrak{A}, i \in \overline{1, N}, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ideał ów zawiera  $a \neq 0_{\mathfrak{A}}$ , gdyż  $a \equiv \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \cdot a \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$ , a zatem z racji prostoty  $\mathfrak{A}$  zachodzi równość  $\langle a \rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ , która jednak pociąga za sobą tożsamość (zapisaną symbolicznie)

$$\rho(\mathfrak{A}) \equiv \rho(\mathfrak{A} \cdot a \cdot \mathfrak{A}) = \rho(\mathfrak{A}) \circ \rho(a) \circ \rho(\mathfrak{A}) = 0,$$

więc też trywialność  $\rho$ . □

Z połączenia obu poprzednich wyników wyprowadzamy

**COROLLARIUM 8.** *Wszystkie nietrywialne reprezentacje nieprzywiedlne unitalnej algebry prostej są wzajem równoważne.* ■

W kontekście Stw. 147 i Def. 108 rodzi się naturalne pytanie o konsekwencje, jakie powyższe rozważania niosą dla teorii reprezentacji algebr będących sumami prostymi unitalnych algebr prostych (czyli szczególnymi przypadkami tzw. **algebr półprostych**), przy czym – jak niemal zawsze w niniejszym kursie – ostatecznej sankcji logicznej dla tego pytania dostarczają istotne fizyczne zastosowania owych algebr (patrz: Rozdz. 3.2). Ilościowej odpowiedzi na nie udziela

**STWIERDZENIE 164.** *Przyjmijmy zapis Def. 108 i 100 oraz Stw. 147. Niechaj  $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in \overline{1, N}} \subset \text{Obj } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$  będzie rodziną unitalnych algebr prostych nad ciałem  $\mathbb{K}$  o odnośnych nietrywialnych reprezentacjach nieprzywiedlnych  $\{\rho_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ , o których mowa w Cor. 8. Dowolna nietrywialna reprezentacja nieprzywiedlna algebry  $\bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i$  jest równoważna jednej z reprezentacji*

$$\rho_n := \bigoplus_{i=1}^N n_i \rho_i,$$

$$n. \equiv (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}.$$
■

*Dowód:* Niechaj  $\rho : \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  będzie nietrywialną reprezentacją nieprzywiedlną. Rozważmy kanoniczne włożenia  $j_{\mathfrak{A}_i} : \mathfrak{A}_i \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i$ . Bez trudu przekonujemy się, że endomorfizmy

$$\pi_i := \rho \circ j_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i}), \quad i \in \overline{1, N}$$

tworzą zupełną rodzinę rzutów komplementarnych na  $V$  w rozumieniu Def. 34, zatem na mocy Stw. 33 zadają rozkład

$$V = \bigoplus_{i=1}^N V_i, \quad V_i := \pi_i(V),$$

którego składnik prosty  $V_i$  jest nośnikiem reprezentacji

$$\rho_i := \rho \circ j_{\mathfrak{A}_i} : \mathfrak{A}_i \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$$

o własności

$$\forall_{j \in \overline{1, N} \setminus \{i\}} : \rho_j(\mathfrak{A}_j)(V_i) \equiv \rho_j(\mathfrak{A}_j) \circ \rho \circ j_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})(V) = \rho(j_{\mathfrak{A}_j}(\mathfrak{A}_j) \cdot_{\mathfrak{A}} j_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i}))(V)$$

$$= \rho(\{0_{\mathfrak{A}}\})(V) = \{0_V\},$$

która pozwala zapisać

$$\begin{aligned} \rho(\mathfrak{A})(V_i) &\equiv \rho\left(\bigoplus_{j=1}^N J_{\mathfrak{A}_j}(\mathfrak{A}_j)\right) \circ J_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i})(V) = \rho(J_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_i) \cdot_{\mathfrak{A}} J_{\mathfrak{A}_i}(1_{\mathfrak{A}_i}))(V) \\ &= \rho \circ J_{\mathfrak{A}_i}(\mathfrak{A}_i)(V_i) \equiv \rho_i(\mathfrak{A}_i)(V_i). \end{aligned}$$

czyli – innymi słowy –

$$\rho \equiv \bigoplus_{i=1}^N \rho_i \circ \text{pr}_i,$$

gdzie  $\text{pr}_i : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_i$  jest rzutem kanonicznym na składową. I odwrotnie, rodzina reprezentacji  $\rho_i : \mathfrak{A}_i \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_i)$ ,  $i \in \overline{1, N}$  zadaje reprezentację

$$\rho := \bigoplus_{i=1}^N J_{V_i} \circ \rho_i \circ \text{pr}_i : \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{A}_i \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{i=1}^N V_i\right)$$

sumy prostej algebr  $\mathfrak{A}_i$  na (zewnątrznej) sumie prostej przestrzeni  $V_i$ . Wobec prostego charakteru rozkładu  $\rho$  na składowe jest jasnym, że nietrywialność i nieprzywiedność  $\rho$  wymaga, iżby wszystkie poza jedną z podreprezentacji  $\tilde{\rho}_i := (J_{V_i} \circ \rho_i \circ \text{pr}_i)$  były trywialne, a do tego – iżby sama nietrywialna  $\tilde{\rho}_i$  była nieprzywiedna, co w świetle Cor. 8 jest równoznaczne z dowodzoną tezą.  $\square$

Możemy już teraz przystąpić do konstruktywnego opisu (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych wyróżnionych algebr macierzowych  $\mathbb{K}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  wspomnianych w tezie Stw. 145, które napotkamy w dalszej części wykładu.

**TWIERDZENIE 2.2.2.** *Przyjmijmy zapis Def. 107. Wszystkie nietrywialne reprezentacje nieprzywiedne dowolnej z  $\mathbb{K}$ -algebr  $R(n)$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , o których mowa w Stw. 145 ( $\mathbb{K}$  dowolne, gdy  $R = \mathbb{K}$  jest ciałem, wzgl.  $\mathbb{K} = \mathbb{R} \subset R$ , gdy  $R \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ ), są równoważne odnośnie **reprezentacji definiującej***

$$\rho_{\text{def}} := \text{id}_{\text{End}_{R^{\text{opp}}}(R^{\times n})}.$$

*Ponadto dowolna skończenie wymiarowa nietrywialna reprezentacja algebry  $\mathbb{K}(n)$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  jest równoważna skończonej sumie prostej kopii tejże reprezentacji definiującej.* ■

Dowód: Zauważmy przede wszystkim, że reprezentacja  $\rho_{\text{def}}$  jest nietrywialna i nieprzywiedna, gdyż  $\rho_{\text{def}}(\mathbf{1}_n) = \mathbf{1}_n \neq \mathbf{0}_n$  oraz

$$\forall_{\substack{v \in R^{\times n} \setminus \{0\} \\ w \in R^{\times n}}} \exists_{a \in R(n)} : w = a \odot v.$$

Istotnie, dowolny wektor  $v \neq 0_{R^{\times n}}$  ma różną od zera jedną ze składowych  $v^i \neq 0$  w bazie standardowej  $\mathcal{E} \equiv \{e_i\}_{i \in \overline{1, n}}$  z Przykł. 13 (5), można zatem dla ustalonego  $w = w^i \triangleright e_i$  wybrać  $a$  w postaci

$$a := \frac{w^i}{v^i} \triangleright E_{j, \bar{i}}^{(n)}$$

gdzie  $\{E_{i, j}^{(n)}\}_{i, j \in \overline{1, n}}$  jest bazą standardową pierścienia  $R(n)$  wskazaną w Przykł. 31 (1) i gdzie kreska nad indeksem  $i$  oznacza, że nie jest on wysumowany. Pierwsza część dowodzonej tezy jest zatem bezpośrednią konsekwencją Cor. 8.

Niech dalej  $\rho : \mathbb{K}(n) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  będzie reprezentacją  $\mathbb{K}$ -algebry  $\mathbb{K}(n)$  na pewnej przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $V$ . Łatwo sprawdzamy, że endomorfizmy tej ostatniej dane wzorami

$$\pi_i := \rho(E_{i,i}^{(n)})$$

tworzą zupełną rodzinę rzutów komplementarnych na  $V$ , oto bowiem na mocy Równ. (2.1.1) i (2.1.2) zachodzi

$$\pi_i \circ \pi_j \equiv \rho(E_{i,i}^{(n)} \odot E_{j,j}^{(n)}) = \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho(E_{i,j}^{(n)}) = \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho(E_{i,i}^{(n)}) \equiv \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \triangleright \pi_i$$

oraz

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \equiv \rho\left(\sum_{i=1}^n E_{i,i}^{(n)}\right) = \rho(\mathbf{1}_n) = \text{id}_V.$$

To jednak jest w świetle Stw. 33 równoznaczne z istnieniem rozkładu

$$V = \bigoplus_{i=1}^n \pi_i(V).$$

Rozważmy odwzorowania  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\tau_{1 \rightarrow k} := \rho(E_{k,1}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_1(V)} : \pi_1(V) \longrightarrow V$$

o własności

$$\tau_{1 \rightarrow k} \circ \pi_1 \equiv \rho(E_{k,1}^{(n)} \odot E_{1,1}^{(n)}) = \rho(E_{k,k}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)}) \equiv \pi_k \circ \tau_{1 \rightarrow k},$$

która implikuje relacje

$$\text{Im } \tau_{1 \rightarrow k} \subset \pi_k(V).$$

Zdefiniowawszy odwzorowania  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\tau_{k \rightarrow 1} := \rho(E_{1,k}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_k(V)} : \pi_k(V) \longrightarrow V$$

o własności

$$\tau_{k \rightarrow 1} \circ \pi_k \equiv \rho(E_{1,k}^{(n)} \odot E_{k,k}^{(n)}) = \rho(E_{1,1}^{(n)} \odot E_{1,k}^{(n)}) \equiv \pi_1 \circ \tau_{k \rightarrow 1},$$

z której wynikają relacje

$$\text{Im } \tau_{k \rightarrow 1} \subset \pi_1(V),$$

stwierdzamy bez trudu, że odwzorowania  $\tau_{k \rightarrow 1}$  są obustronnymi odwrotnościami odwzorowań  $\tau_{1 \rightarrow k}$ ,

$$\tau_{1 \rightarrow k} \circ \tau_{k \rightarrow 1} \equiv \rho(E_{k,1}^{(n)} \odot E_{1,k}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_k(V)} = \rho(E_{k,k}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_k(V)} \equiv \pi_k \upharpoonright_{\pi_k(V)} = \text{id}_{\pi_k(V)},$$

$$\tau_{k \rightarrow 1} \circ \tau_{1 \rightarrow k} \equiv \rho(E_{1,k}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_1(V)} = \rho(E_{1,1}^{(n)}) \upharpoonright_{\pi_1(V)} \equiv \pi_1 \upharpoonright_{\pi_1(V)} = \text{id}_{\pi_1(V)},$$

co daje nam do ręki rodzinę izomorfizmów podprzestrzeni

$$\tau_{k \rightarrow 1} : \pi_k(V) \xrightarrow{\cong} \pi_1(V), \quad k \in \overline{1, n}.$$

Określmy następnie odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$T \equiv (\pi_1, \tau_{1 \rightarrow 2}, \tau_{1 \rightarrow 3}, \dots, \tau_{1 \rightarrow n}) : \pi_1(V) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n V$$

i oznaczmy – dla dowolnego wektora  $v \in \pi_1(V)$  –

$$(\tau_1^v, \tau_2^v, \dots, \tau_n^v) := T(v).$$

Łatwo sprawdzamy, że przestrzeń  $\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \subset V$  jest dla dowolnego  $v \neq 0_V$  podprzestrzenią  $\rho$ -niezmienniczą – istotnie, układ  $\mathcal{T} := \{\tau_k^v\}_{k \in \overline{1, n}}$  jest jawnie  $\mathbb{K}$ -liniowo niezależny (wszak jego elementy, będące izomorficznymi obrazami wektora niezerowego, należą do parami różnych składników prostych  $V$ ), a przy tym wprost na mocy definicji rozpinają przestrzeń  $\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}}$ , jest zatem jej bazą, w niej zaś stwierdzamy – dla dowolnej macierzy  $M = M_{ij} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \in \mathbb{K}(n)$  –

$$\begin{aligned} \rho(M)(\tau_k^v) &= M_{ij} \triangleright \rho(E_{i,j}^{(n)} \odot E_{k,1}^{(n)})(v) = M_{ij} \cdot \delta_{j,k}^{\mathbb{K}} \triangleright \rho(E_{i,1}^{(n)})(v) \\ &\equiv M_{i,k} \triangleright \tau_i^v \in \langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Przy tym zauważamy, że także w przypadku reprezentacji definiującej  $\rho_{\text{def}}$  są – w bazie standardowej  $\mathcal{E}$  przestrzeni  $\mathbb{K}^{\times n}$  – spełnione równości

$$\rho_{\text{def}}(M)(e_k) = M_{ij} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \odot e_k = M_{ij} \cdot \delta_{j,k}^{\mathbb{K}} \triangleright e_i \equiv M_{i,k} \triangleright e_i,$$

więc odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\iota_v : \langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$$

będące rozszerzeniem przyporządkowania baz

$$\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}} \ni \tau_i^v \longmapsto e_i \in \mathbb{K}^{\times n}, \quad i \in \overline{1, n}$$

jest równoważnością reprezentacji

$$\rho \upharpoonright_{\langle T(v) \rangle_{\mathbb{K}}} \sim \rho_{\text{def}}.$$

Uwzględniając powyższe, wybierzmy w  $\pi_1(V)$  dowolną bazę  $\{v_i \equiv \tau_1^{v_i}\}_{i \in \overline{1, D}}$ ,  $D \equiv \dim_{\mathbb{K}} \pi_1(V)$ , a wówczas układy wektorów  $\{\tau_k^{v_i}\}_{i \in \overline{1, D}} \subset \pi_k(V)$ ,  $k \in \overline{1, n}$  są – jako izomorficzne obrazy układu bazowego – bazami w odnośnych składnikach  $\pi_k(V) \subset V$ , co w sumie daje nam rozkład (por.: Stw. 34)

$$V = \bigoplus_{k=1}^n \pi_k(V) = \bigoplus_{k=1}^n \bigoplus_{i=1}^D \langle \tau_k^{v_i} \rangle_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{i=1}^D \bigoplus_{k=1}^n \langle \tau_k^{v_i} \rangle_{\mathbb{K}} \equiv \bigoplus_{i=1}^D \langle T(v_i) \rangle_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^D \iota_{v_i}} \bigoplus_{i=1}^D \mathbb{K}^{\times n},$$

a wraz z nim – postulowaną równoważność

$$\rho \sim \bigoplus_{i=1}^D \rho_{\text{def}}.$$

□

Powyższe twierdzenie stanowi zwieńczenie naszej wyczerpującej analizy teorii reprezentacji algebr prostych – jej fizykalnie istotne zastosowania przyniesie Rozdz. 3.3. Jednocześnie tworzy ono naturalny kontekst, w którym możliwe jest lepsze zrozumienie sensu Stw. 159. Oto więc mamy

**STWIERDZENIE 165.** *Przyjmijmy zapis Tw. 2.2.2 i ustalmy (dowolnie)  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Prawdziwe są następujące zdania:*

- (i) *Reprezentacja definiująca  $\mathbb{R}$ -algebry  $\mathbb{R}(n)$  jest rzeczywista i nie jest zespolona, więc tym bardziej nie jest też kwaternionowa.*
- (ii) *Reprezentacja definiująca  $\mathbb{R}$ -algebry  $\mathbb{C}(n)$  jest zespolona i nie jest kwaternionowa.*
- (iii) *Reprezentacja definiująca  $\mathbb{R}$ -algebry  $\mathbb{H}(n)$  jest kwaternionowa.*

■

*Dowód:* Punktem wyjścia do udowodnienia tezy stwierdzenia jest zrozumienie strukturalnej różnicy między odwzorowaniem  $\mathbb{R}$ -liniowym i odwzorowaniem  $R^{\text{opp}}$ -liniowym na  $R^{\times n}$  dla pierścienia z dzieleniem  $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ , w którym pierścień  $\mathbb{R}$  jest zanurzony poprzez monomorfizm

$$j_R : \mathbb{R} \rightarrow R \cong \mathbb{R}^{\times N} : r \mapsto (r, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N-1 \text{ razy}}),$$

gdzie  $N = 1$  dla  $R = \mathbb{R}$ ,  $N = 2$  dla  $R = \mathbb{C}$  i  $N = 4$  dla  $R = \mathbb{H}$ . Biorąc pod uwagę to zanurzenie, zapiszemy

$$R^{\times n} \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}^{\times N} \cong \mathbb{R}^{\times n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times N},$$

a wtedy

$$\text{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n}) \cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N).$$

Dalej zauważmy, że należące do  $R$  współczynniki rozkładu dowolnej macierzy  $M = E_{i,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} M_{ij} \in \mathbb{R}(n)$  w bazie standardowej z Przykł. 31 (1) należy przy powyższym rozkładzie rozumieć jako macierze

$$M_{ij} = \sum_{a=1}^N M_{ij}^a \triangleright I_a^R \in \mathbb{R}(N)$$

o współczynnikach rzeczywistych  $M_{i,j}^k$ , rozpięte na generatorach  $I_a^R \in \mathbb{R}(N)$  realizujących działanie (poprzez mnożenie) elementów bazy standardowej  $1$  (w przypadku  $R = \mathbb{R}$ ) wzgl.  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  (w przypadku  $R = \mathbb{C}$ ) wzgl.  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1)$  (w przypadku  $R = \mathbb{H}$ ) na  $\mathbb{R}^{\times N} \cong R$ . Widzimy zatem, że

$$\mathbb{R}(n) \cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \bigoplus_{a=1}^N \langle I_a^R \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N) \cong \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{\times n}).$$

Bez trudu znajdujemy jawną postać wyróżnionych macierzy  $I_a^R$  (z której wynika ich liniowa niezależność) w bezpośrednim rachunku,

$$1 \cdot_{\mathbb{R}} a = a \quad \Longrightarrow \quad I_1^{\mathbb{R}} = 1,$$

$$(1, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (a, b) = (a, b) \quad \Longrightarrow \quad I_1^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \tilde{\sigma}_0,$$

$$(0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} (a, b) = (-b, a) \quad \Longrightarrow \quad I_1^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \tilde{\sigma}_2,$$

$$(1, 0, 0, 0) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (a, b, c, d) \quad \Longrightarrow \quad I_1^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0,$$

$$(0, 1, 0, 0) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (-b, a, -d, c) \quad \Longrightarrow \quad I_2^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2,$$

$$(0, 0, 1, 0) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (-c, d, a, -b) \quad \Longrightarrow \quad I_3^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} i \triangleright \tilde{\sigma}_3,$$

$$(0, 0, 0, 1) \cdot_{\mathbb{H}} (a, b, c, d) = (-c, d, a, -b) \quad \Longrightarrow \quad I_4^{\mathbb{H}} = \tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} i \triangleright \tilde{\sigma}_1,$$

przy czym  $\tilde{\sigma}_\mu$ ,  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$  są osławionymi **macierzami Pauliego** (w matematycznie raczej niż fizycznie umotywowanej konwencji<sup>1</sup>) o prostych regułach (anty-)komutacji

$$[\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j] = 2\varepsilon_{ijk} \triangleright \tilde{\sigma}_k, \quad \{\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_j\} = -2\delta_{i,j} \triangleright \tilde{\sigma}_0,$$

zapisanych przy użyciu **symbolu Levi-Civitty**

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} \text{sign}(\sigma), & \text{gdy } (i, j, k) = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) \text{ dla } \sigma \in \mathfrak{S}_{\{1,2,3\}} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

Na tym etapie możemy już wygodnie przeformułować pytanie o postać centralizatora  $C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(R^{*n})}(R(n))$  – w wybranej przez nas wygodnej prezentacji  $\text{End}_{\mathbb{R}}(R^{*n})$  tworzą go macierze

$$C = C_{ij,ab} \triangleright E_{i,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} E_{a,b}^{(N)} \in \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N)$$

przemienne ze wszystkimi generatorami wiernego obrazu  $R(n)$  w  $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(N)$ , tj. spełniające układ warunków

$$(2.2.1) \quad \forall_{(i,j,a) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N}} : [C, E_{i,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} I_a^R] = \mathbf{0}_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{0}_N.$$

Wykorzystując algebrę (2.1.2), możemy przepisać powyższe warunki w postaci

$$\forall_{(i,j,a) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N}} : C_{ki,bc} \triangleright E_{k,j}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} E_{b,c}^{(N)} \odot I_a^R = C_{jk,bc} \triangleright E_{i,k}^{(n)} \otimes_{\mathbb{R}} I_a^R \odot E_{b,c}^{(N)}.$$

Dla  $a = 1$ , a wobec liniowej niezależności wektorów  $E_{b,c}^{(N)}$  wnioskujemy na tej podstawie, że

$$\forall_{(i,j,b,c) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N} \times \overline{1,N}} : C_{ki,bc} \triangleright E_{k,j}^{(n)} = C_{jk,bc} \triangleright E_{i,k}^{(n)}.$$

Łatwo widać, że obecność dowolnego niezerowego wyrazu  $C_{ki,bc}$  o indeksach  $k \neq i$  prowadziłaby do sprzeczności, gdyż oznaczałaby, że wektor  $E_{k,j}^{(n)}$  należy do powłoki  $\mathbb{R}$ -liniowej wektorów  $E_{l,m}^{(n)}$ ,  $l \neq k$ , stwierdzamy więc, że niechybnie

$$\forall_{(i,j,a,b) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n} \times \overline{1,N} \times \overline{1,N}} : C_{ij,ab} = \delta_{i,j} c_{ab}$$

dla pewnych liczb  $c_{ab} \in \mathbb{R}$ , czyli – innymi słowy – że

$$C = \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} c$$

dla pewnej macierzy  $c \in \mathbb{R}(N)$ , która w świetle (2.2.1) spełnia układ warunków przemienności

$$(2.2.2) \quad \forall_{a \in \overline{2,N}} : [c, I_a^R] = \mathbf{0}_N.$$

To pozwala zapisać równość

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{*n})}(\mathbb{R}(n)) = (\mathbf{1}_n)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R},$$

co kończy dowód punktu (i).

W przypadku  $R = \mathbb{C}$  mamy do czynienia z macierzą

$$c := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$$

o własności

$$\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

<sup>1</sup>Macierze  $\tilde{\sigma}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  stanowią bazę algebry Liego  $\mathfrak{su}_2$ , którą w zgodzie z tradycją matematyczną wybieramy w postaci skośnie hermitowskiej.

a zatem

$$c = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

i ostatecznie

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)}(\mathbb{C}(n)) = \langle \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0, \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2 \rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C},$$

co pokazuje słuszność punktu (ii). Odnotujmy na marginesie, że  $\mathbb{R}$ -liniowy endomorfizm  $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2$  przestrzeni  $\mathbb{C}^n$  realizuje działanie skalara  $(0, 1)$ , tj. – w zapisie Stw. 55 – jest strukturą zespoloną na  $\mathbb{C}^n$ , co pozwala nadać nowy (i równoważny poprzedniemu) sens pojęciu endomorfizmu  $\mathbb{C}$ -liniowego tejże przestrzeni: oto macierze  $\mathbb{C}(n)$  są przemienne z tymi i tylko tymi odwzorowaniami  $\mathbb{R}$ -liniowymi na  $\mathbb{C}^n$ , które realizują działanie ciała  $\mathbb{C}$ .

Przechodząc do ostatniego przypadku,  $R = \mathbb{H}$ , zapisujemy macierz  $c$  w postaci

$$c := \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}, \quad A, B, \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}(2),$$

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}, \quad \Gamma := \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad \Delta := \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix},$$

po czym nakładamy po kolei warunki z (2.2.2). Z warunku dla  $a = 2$  wyprowadzamy zależność

$$\forall_{x \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}} : (x_3, x_4) = (-x_2, x_1),$$

a z warunku dla  $a = 3$  – relacje

$$\Gamma = -B^T, \quad \Delta = A^T.$$

Warunek dla  $a = 4$  jest teraz spełniony tożsamościowo i koniec końców otrzymujemy oczekiwaną równość

$$C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^n)}(\mathbb{H}(n))$$

$$= \langle \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{\sigma}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_3 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0), \mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2) \rangle_{\mathbb{R}},$$

przy czym raz jeszcze przekonujemy się, że wyróżnione  $\mathbb{R}$ -liniowy endomorfizmy  $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_3 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2)$ ,  $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (\tilde{\sigma}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_0)$  i  $\mathbf{1}_n \otimes_{\mathbb{R}} (i \triangleright \tilde{\sigma}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{\sigma}_2)$  realizują na  $\mathbb{H}^n$  naturalne działanie *prawostronne* (czyli z prawej strony – patrz: Def. 45) elementów – odpowiednio –  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  i  $(0, 0, 0, 1)$  pierścienia bazowego  $\mathbb{H}$ , więc definiują nań strukturę kwaternionową w rozumieniu Stw. 55. Macierze  $\mathbb{H}(n)$  (po raz wtóry) zyskują interpretację endomorfizmów utworzonej w ten sposób kwaternionowej przestrzeni wektorowej jako wyróżnione odwzorowania  $\mathbb{R}$ -liniowe na  $\mathbb{H}^n$ , które są przemienne wyłącznie z odwzorowaniami  $\mathbb{R}$ -liniowymi na  $\mathbb{H}^n$  realizującymi (prawostronne) działanie pierścienia  $\mathbb{H}$ .  $\square$

## Część 3

# Algebry Clifforda i spinory



## Ogólne struktury

### 1. Motywacja

W relatywistycznej teorii pola konfiguracje (nad płaską czasoprzestrzenią  $\mathbb{R}^{3,1}$ ) pola skalarnego  $\phi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{C}$ , którego wzbudzenie elementarne ma masę (spoczynkową)  $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , są opisywane równaniem Kleina–Gordona

$$(\square + m^2)\phi = 0,$$

w którym  $\square$  jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu, zwanym d’Alembertem i przybierającym w standardowych współrzędnych kartezjańskich  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  i metryce Minkowskiego

$$\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes_{\mathbb{R}} dx^\nu = dx^0 \otimes_{\mathbb{R}} dx^0 - \delta_{ij} dx^i \otimes_{\mathbb{R}} dx^j$$

znajomą postać

$$\square = \eta^{-1\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \equiv \partial_t^2 - \Delta, \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Struktura powyższego wyrażenia podpowiada jego naturalną interpretację: jest to wynik obliczenia formy kwadratowej  $Q$  o sygnaturze  $(3, 1)$  na wyróżnionym elemencie modułu wolnego  $\langle E \rangle_R$  rozpiętego na (dowolnym) zbiorze 4-elementowym  $E := \{e^0, e^1, e^2, e^3\}$  nad pierścieniem  $R = \mathbb{C}[\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3]$  operatorów różniczkowych na  $C^\infty(\mathbb{R}^{1,3}; \mathbb{C})$  o współczynnikach rzeczywistych, przy czym przyjmujemy, że forma dwuliniowa  $\beta_Q$  na  $\langle E \rangle_R$  stowarzyszona (poprzez formułę polaryzacyjną) z formą kwadratową  $Q$  spełnia warunek

$$\beta_Q(e^\mu, e^\nu) = \eta^{-1\mu\nu}.$$

Rzeczonym elementem jest tutaj

$$\mathcal{D} : E \rightarrow \mathbb{C}[\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3] : e^\mu \mapsto \partial_\mu,$$

a wyjściowe równanie możemy przepisać jako

$$(Q(\mathcal{D}) + m^2)\phi = 0.$$

Zapis ten prowadzi nas do pytania: Czy istnieje unitalna  $R$ -algebra  $\mathfrak{A}$ , w którą moduł  $\langle E \rangle_R$  odwzorowywałby się  $R$ -liniowo  $\gamma : \langle E \rangle_R \rightarrow \mathfrak{A}$  tak, iżby obraz elementu  $\mathcal{D}$  spełniał warunek

$$\gamma(\mathcal{D})^2 = Q(\mathcal{D}) \triangleright 1_{\mathfrak{A}},$$

tj. iżby obraz ten był swego rodzaju pierwiastkiem kwadratowym d’Alembertanu? Sens fizyczny tak postawionego pytania ujawnia następująca obserwacja: Oto gdyby algebrę takową udało się skonstruować, to wówczas stosowny jej moduł funkcjonalny  $\tilde{S} := C^\infty(\mathbb{R}^{3,1}; \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} S$ ,  $S \in \text{Obj Vect}_{\mathbb{C}}$  (czyli przestrzeń reprezentacji, będącej unitalnym homomorfizmem  $R$ -algebr  $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}_R(\tilde{S})$ ) dostarczyłby nam nowych

rozwiązań  $\psi \in \tilde{S}$  wyjściowego zagadnienia teoriopolowego, o ile tylko potrafilibyśmy dobrać zależność funkcjonalną tak, iżby spełniony był warunek

$$\rho(\gamma(\mathcal{D}))(\psi) = \varepsilon \text{im} \triangleright \psi, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Rzecz jasna, odrębnym pytaniem byłoby to o istnienie w Naturze pól o tak określonej dynamice. Okazuje się, że odpowiedzi na oba pytania są twierdzące (choć ta dotycząca konstrukcji algebry  $\mathfrak{A}$  oraz jej modułów funkcjonalnych nad czasoprzestrzenią wymaga istotnego strukturalnego doprecyzowania wyjściowego pytania) i prowadzą do konstrukcji operatora Diraca  $\gamma(\mathcal{D})$  realizowanego na cięciach tzw. wiązki spinorowej nad czasoprzestrzenią (modelujących pola fermionowe), o których więcej powiemy już wkrótce, a prowadzą poprzez algebraiczną konstrukcję algebry unitalnej, w której możliwa jest linearyzacja (czyli „wyciągnięcie pierwiastka kwadratowego z”) formy kwadratowej o ustalonej sygnaturze. Naszą dyskusję zaczniemy od wnikliwego zbadania tejże konstrukcji algebraicznej.

## 2. Konstrukcja uniwersalna i funktor Cliff

Na wstępie natrafiamy na

DEFINICJA 110. Przyjmijmy zapis Def. 24 oraz 99 i niechaj  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q)$  będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem  $\mathbb{K}$ ,  $\mathfrak{A}$  zaś  $\mathbb{K}$ -algebrą unitalną. Odwzorowanie  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathfrak{A})$  określimy mianem **odwzorowania Clifforda**, jeśli spełnia warunek

$$\forall v \in V : \varphi(v) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v) = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}.$$

Odwzorowania Clifforda określone na ustalonej przestrzeni kwadratowej tworzą kategorię  $\mathcal{C}_{(V, Q)}$ , której obiektami są pary  $(\mathfrak{A}, \varphi)$  złożone z  $\mathfrak{A} \in \text{Obj } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$  i odwzorowania Clifforda  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathfrak{A})$ , morfizmami zaś – dla ustalonych obiektów  $(\mathfrak{A}_\alpha, \varphi_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , utworzonych przez  $\mathfrak{A}_\alpha \in \text{Obj } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}$  i odwzorowania Clifforda  $\varphi_\alpha : V \rightarrow \mathfrak{A}_\alpha$  – odwzorowania

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{(V, Q)}}((\mathfrak{A}_1, \varphi_1), (\mathfrak{A}_2, \varphi_2)) = \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}}}(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \mid \varphi_2 = \chi \circ \varphi_1 \}.$$

▲

Ta pozwala nam sformułować fundamentalną

DEFINICJA 111. Przyjmijmy zapis Def. 110. **Algebra Clifforda przestrzeni kwadratowej**  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q)$  to struktura inicjalna

$$(\text{Cliff}(V, Q), j_V^C)$$

dla warunku

$$P_{(V, Q); F_1, F_2}((\mathfrak{A}, \varphi)) = „\varphi : V \rightarrow \mathfrak{A} \text{ jest odwzorowaniem Clifforda}”$$

na  $\text{Obj } \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}} \times \text{Mor } \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ , w którego zapisie  $F_1 : \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  oraz  $F_2 : \mathbf{uAlg}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  to funktory zapominania. Składowe tej struktury to  $\mathbb{K}$ -algebra  $\text{Cliff}(V, Q)$  z jednością  $e^C \equiv \mathbf{1}_{\text{Cliff}(V, Q)}$  oraz odwzorowanie Clifforda

$$j_V^C : V \rightarrow \text{Cliff}(V, Q)$$

które będziemy określać mianem **kanonicznego odwzorowania Clifforda**.

▲

UWAGA 35. W dalszej części wykładu będziemy używać pojęcia „algebra Clifforda” w odniesieniu do unitalnej  $\mathbb{K}$ -algebry  $\text{Cliff}(V, Q)$ , o której mówi powyższa definicja. Ponadto, o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień, mnożenie i dodawanie w algebrze Clifforda będziemy oznaczać symbolami pozbawionymi indeksów:  $\cdot$  i  $+$ , odpowiednio.

▮

W analogii do konstrukcji iloczynu tensorowego możemy sformułować wygodne

STWIERDZENIE 166. *Przyjmijmy zapis Def. 111. Niechaj  $(\mathfrak{A}, \varphi) \in \text{Obj } C_{(V, Q)}$ . Poniższe zdania logiczne są równoważne.*

- (i)  $((\text{Cliff}(V, Q), j_V^C), j_V^C)$  jest algebrą Clifforda przestrzeni kwadratowej  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q)$ .
- (ii)  $\text{Cliff}(V, Q)$  jest generowana (jako  $\mathbb{K}$ -algebra) przez elementy  $\text{Im } j_V^C$ , tj.

$$\text{Cliff}(V, Q) = \langle \text{Im } j_V^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

a ponadto dla każdej pary  $(\mathfrak{A}, \varphi) \in \text{Obj } C_{(V, Q)}$  jest określone odwzorowanie  $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{C_{(V, Q)}}((C, j_V^C), (\mathfrak{A}, \varphi))$ , tj. takie, które czyni przemiennym diagram

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{A} \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \tilde{\varphi} \\ V & \xrightarrow{j_V^C} & \text{Cliff}(V, Q) \end{array} .$$

▮

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Stw. 40. □

Prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 3.1.1. *Przyjmijmy zapis Def. 111. Algebra Clifforda dowolnej przestrzeni kwadratowej nad dowolnym ciałem  $\mathbb{K}$  istnieje i jest określona jednoznacznie z dokładnością do jedynego unitalnego izomorfizmu  $\mathbb{K}$ -algebr.*

▮

Dowód: W algebrze tensorowej  $\otimes_{\mathbb{K}} V$  przestrzeni kwadratowej  $(V, Q)$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  definiujemy ideał obustronny

$$\mathfrak{I}_Q := \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \mid v \in V \rangle_{\otimes_{\mathbb{K}} V},$$

co pozwala nam określić – na gruncie Stw. 146 – algebrę ilorazową

$$(3.1.1) \quad \text{Cliff}(V, Q) := \otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q$$

wraz z odwzorowaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym (opuszczamy indeks  $\otimes_{\mathbb{K}}$  gwoli przejrzystości)

$$j_V^C \equiv \pi_{\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_Q} \circ j_1 : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) : v \longmapsto v + \mathfrak{I}_Q.$$

Zauważmy, że dla dowolnego wektora  $v \in V$  spełniona jest – wobec obustronności  $\mathfrak{I}_Q$  – tożsamość

$$j_V^C(v)^2 \equiv (v + \mathfrak{I}_Q) \otimes_{\mathbb{K}} (v + \mathfrak{I}_Q) = v \otimes_{\mathbb{K}} v + v \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{I}_Q + \mathfrak{I}_Q \otimes_{\mathbb{K}} v + \mathfrak{I}_Q \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{I}_Q$$

$$\begin{aligned}
&= v \otimes_{\mathbb{K}} v + \mathfrak{J}_Q = Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} + (v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) + \mathfrak{J}_Q = Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} + \mathfrak{J}_Q \\
&\equiv Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{J}_Q},
\end{aligned}$$

czyli  $j_V^{\mathbb{C}}$  jest odwzorowaniem Clifforda, a ponieważ algebra  $\otimes_{\mathbb{K}} V$  jest generowana (jako  $\mathbb{K}$ -algebra) przez  $j_1(V) \subset \otimes_{\mathbb{K}} V$  i rzut kanoniczny  $\pi_{\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{J}_Q}$  jest epimorfizmem, przeto  $j_V^{\mathbb{C}}$  generuje  $\text{Cliff}(V, Q)$  (jako  $\mathbb{K}$ -algebrę). Dla zakończenia dowodu musimy jeszcze stowarzyszyć unitalny homomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr  $\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(V, Q) \rightarrow \mathfrak{A}$  z dowolnym odwzorowaniem Clifforda  $\varphi : V \rightarrow \mathfrak{A}$ . W tym celu stwierdzamy najpierw, że to ostatnie definiuje – w świetle Tw. 2.1.2 – (jedyne) unitalny homomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\varphi} : \otimes_{\mathbb{K}} V \rightarrow \mathfrak{A}$$

o własności

$$\forall_{v_i \in V, i \in \overline{1, N}, N \in \mathbb{N}} : \tilde{\varphi}(v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2 \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_N) = \varphi(v_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v_2) \cdot_{\mathfrak{A}} \cdots \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(v_N),$$

a ten spełnia – dla dowolnego  $v \in V$  – tożsamość

$$\tilde{\varphi}(v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) = \varphi(v)^2 - Q(v) \triangleright \tilde{\varphi}(1_{\mathbb{K}}) = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{0}_{\mathfrak{A}},$$

skąd wniosek, że

$$\mathfrak{J}_Q \subset \ker \tilde{\varphi},$$

zatem  $\tilde{\varphi}$  kanonicznie indukuje unitalny homomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\underline{\tilde{\varphi}} : \otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{J}_Q \rightarrow \mathfrak{A} : \tau + \mathfrak{J}_Q \mapsto \tilde{\varphi}(\tau).$$

Przy tym – dla dowolnego  $v \in V$  –

$$\underline{\tilde{\varphi}} \circ j_V^{\mathbb{C}}(v) = \underline{\tilde{\varphi}}(j_1(v) + \mathfrak{J}_Q) = \underline{\tilde{\varphi}} \circ j_1(v) = \varphi(v),$$

możemy przeto położyć

$$\tilde{\varphi} := \underline{\tilde{\varphi}}.$$

□

Na marginesie dotychczasowej dyskusji poczynimy następującą przydatną obserwację.

**LEMAT 3.1.2.** *Przyjmijmy zapis użyty w dowodzie Tw. 3.1.1, zakładając przy tym, że  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ , i zdefiniujmy*

$$\mathfrak{J}_{\Phi_Q} := \langle v \otimes_{\mathbb{K}} w + w \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v, w) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \mid v, w \in V \rangle_{\otimes_{\mathbb{K}} V},$$

a wówczas zachodzi tożsamość

$$\mathfrak{J}_{\Phi_Q} = \mathfrak{J}_Q.$$

■

*Dowód:* Z jednej strony – dla dowolnych  $v, w \in V$ , a wobec Def. 24 – zachodzi równość

$$\begin{aligned}
v \otimes_{\mathbb{K}} w + w \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v, w) \triangleright 1_{\mathbb{K}} &= (v +_V w) \otimes_{\mathbb{K}} (v +_V w) - Q(v +_V w) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \\
&\quad - (v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) - (w \otimes_{\mathbb{K}} w - Q(w) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) \in \mathfrak{J}_Q,
\end{aligned}$$

więc

$$\mathfrak{J}_{\Phi_Q} \subset \mathfrak{J}_Q,$$

z drugiej zaś trywialnie

$$v \otimes_{\mathbb{K}} v - Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} \equiv 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (v \otimes_{\mathbb{K}} v + v \otimes_{\mathbb{K}} v - 2\Phi_Q(v, v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}) \in \mathfrak{J}_{\Phi_Q},$$

więc

$$\mathfrak{J}_Q \subset \mathfrak{J}_{\Phi_Q}.$$

□

Konstrukcja algebr Clifforda jest osadzona w kategorii przestrzeni wektorowych z dodatkową strukturą, jaką jest forma kwadratowa. Naturalnym więc jest oczekiwać, że homomorfizmy przestrzeni kwadratowych podnoszą się do (unitalnych) homomorfizmów algebr Clifforda (choć nie ma powodów uważać, że są to jedyne (unitalne) homomorfizmy  $\mathbb{K}$ -algebr pomiędzy algebraami Clifforda). O tym, że tak jest w istocie, mówi

**TWIERDZENIE 3.1.3.** *Przyporządkowanie algebr Clifforda przestrzeniom kwadratowym nad danym ciałem ma charakter funktorialny, tj. istnieje funktor kowariantny (patrz: Przykł. 15 (2))*

$$\text{Cliff} : \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}}.$$

■

*Dowód:* Wobec wcześniejszych naszych ustaleń pozostaje wykazać, że dla dowolnych  $((V_{\alpha}, +_{\alpha}, P_{\alpha}, \bullet \longmapsto 0_{\alpha}), \ell_{\alpha}), Q_{\alpha}) \in \text{Obj } \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  każda izometria  $\chi : V_1 \longrightarrow V_2$  indukuje unitalny homomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr  $\text{Cliff}(\chi)$  o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$(3.1.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi)} & \text{Cliff}(V_2, Q_2) \\ \text{Cliff} \uparrow & & \uparrow \text{Cliff} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi} & V_2 \end{array},$$

w szczególności zaś

$$(3.1.3) \quad \text{Cliff}(\text{id}_V) = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)},$$

a nadto że dla dowolnych dwóch izometrii  $\chi_{\alpha} : V_{\alpha} \longrightarrow V_{\alpha+1}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  zachodzi tożsamość

$$\text{Cliff}(\chi_2 \circ \chi_1) = \text{Cliff}(\chi_2) \circ \text{Cliff}(\chi_1).$$

W tym celu rozważmy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\widehat{\chi} := J_{V_2}^C \circ \chi : V_1 \longrightarrow \text{Cliff}(V_2, Q_2).$$

Łatwo widać, że spełnia ono warunek Clifforda, a to z racji cliffordowskości odwzorowania kanonicznego  $J_{V_2}^C$  oraz izometrycznego charakteru  $\chi$ ,

$$\forall_{v_1 \in V_1} : \widehat{\chi}(v_1)^2 \equiv J_{V_2}^C(\chi(v))^2 = Q_2(\chi(v)) \triangleright e_2^C = Q_1(v) \triangleright e_2^C.$$

Uniwersalność algebry Clifforda przesądza zatem o istnieniu jedynego unitalnego homomorfizmu  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\text{Cliff}(\chi) : \text{Cliff}(V_1, Q_1) \longrightarrow \text{Cliff}(V_2, Q_2)$$

o własności

$$\text{Cliff}(\chi) \circ J_{V_1}^C = \widehat{\chi} \equiv J_{V_2}^C \circ \chi,$$

ta ostatnia jednak wyraża właśnie przemienność Diag. (3.1.2). Zauważmy przy tym, że odwzorowanie  $\text{Cliff}(\chi)$  jest określone jednoznacznie, oto bowiem dowolne dwa podniesienia  $\text{Cliff}(\chi)_1$  i  $\text{Cliff}(\chi)_2$  pokrywają się wprost na mocy założenia na zbiorze  $\text{Im } \mathcal{J}_{V_1}^C$  generującym ich dziedzinę,

$$\text{Cliff}(\chi)_2 \circ \mathcal{J}_{V_1}^C = \mathcal{J}_{V_2}^C \circ \chi = \text{Cliff}(\chi)_1 \circ \mathcal{J}_{V_1}^C.$$

Dokonując konkatenacji diagramów przemiennych odpowiadających podniesieniom  $\text{Cliff}(\chi_\alpha)$  izometrii  $\chi_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ ,

$$\begin{array}{ccccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi_1)} & \text{Cliff}(V_2, Q_2) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi_2)} & \text{Cliff}(V_3, Q_3) \\ \uparrow \text{Cliff} & & \uparrow \text{Cliff} & & \uparrow \text{Cliff} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi_1} & V_2 & \xrightarrow{\chi_2} & V_3 \end{array},$$

otrzymujemy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\chi_2) \circ \text{Cliff}(\chi_1)} & \text{Cliff}(V_3, Q_3) \\ \uparrow \text{Cliff} & & \uparrow \text{Cliff} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi_2 \circ \chi_1} & V_3 \end{array}.$$

Zważywszy jednoznaczność podniesienia, stwierdzamy zatem, że superpozycja podniesień  $\text{Cliff}(\chi_2) \circ \text{Cliff}(\chi_1)$  jest jedynym podniesieniem superpozycji izometrii  $\chi_2 \circ \chi_1$ , co jest wnioskiem pożądanym. Ten sam argument pozwala zidentyfikować funkcjonalny obraz izometrii identycznościowej  $\text{id}_V$  zgodnie z Równ. (3.1.3).  $\square$

Konstruktywny dowód istnienia algebry Clifforda daje nam do ręki prosty algorytm budowania jej modelu w bezpiecznym środowisku algebry tensorowej. Ażeby przekonać się o jego praktyczności i zarazem wyprowadzić modele algebr Clifforda o fundamentalnym znaczeniu w klasyfikacji wszystkich rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, z którą zmierzmy się już wkrótce, prześledzimy ów algorytm skrupulatnie w odniesieniu do kilku wybranych przestrzeni kwadratowych o szczególnie prostej postaci formy kwadratowej.

PRZYKŁAD(Y) 35. (Struktury)

- (1) Algebra Clifforda przestrzeni  $\mathbb{R}^{1,0}$ . Zaczniemy od wypisania algebry tensorowej przestrzeni  $\mathbb{R}$ , korzystając przy tym ze Stw. 45,

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} n} \cong \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}.$$

Wyodrębnione z powyższej sumy prostej pierwsze dwa jej składniki  $\mathbb{R}$  to – odpowiednio – ciało bazowe  $\mathbb{R}$  oraz sama przestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa  $\mathbb{R}$ , pozostałe natomiast to kolejne potęgi tensorowe tej ostatniej, które po redukcji z użyciem kanonicznych izomorfizmów także sprowadzają się do  $\mathbb{R}$ . Ażeby odróżnić od siebie dwa pierwsze kanonicznie składniki, wprowadzimy indeksy:

$$(3.1.4) \quad \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} n}.$$

Przy zejściu do algebry ilorazowej dokonujemy następujących utożsamień (na bazie):

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \\
&= \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} 1_{(1)}) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(1_{(1)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(1)} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{(1)}, \\
\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 4} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
&= \kappa_{(0)}^{-1}(1 \triangleright_{(0)} 1_{(0)}) \equiv \kappa_{(0)}^{-1}(1_{(0)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(0)}]{\cong} \mathbb{R}^{(0)} \quad \text{itd.},
\end{aligned}$$

tak że koniec końców dostajemy, dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)}, \quad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{(1)},$$

skąd też

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{J}_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}.$$

Pozostaje w tym momencie ustalić postać iloczynu elementów przestrzeni ilorazowej – tu wystarczy uwzględniając dwuliniowość tegoż iloczynu rachunek na reprezentantach klas (*modulo*  $\mathcal{J}_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}}$ ) w algebrze tensorowej, w której mnożenie sprowadza się do tensorowania, a następnie narzucenie wskazanych wyżej utożsamień. Oto więc dla dowolnych par  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)} \cong \mathbb{R}^{\times 2}$  obliczamy

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \cdot_{\otimes_{\mathbb{R}}} (x_2, y_2) &\equiv (x_1, y_1) \otimes_{\mathbb{R}} (x_2, y_2) \\
&= x_1 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} x_2 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} + x_1 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} y_2 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \\
&\quad + y_1 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} x_2 \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} + y_1 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} y_2 \triangleright_{(1)} 1_{\mathbb{R}^{(1)}} \\
&= (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\sim (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \cdot \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \\
&= (x_1 \cdot x_2) \triangleright \kappa_{(0)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright \kappa_{(1)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
&\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright ({}_{(1)}\kappa^{-1}(1_{\mathbb{R}^{(1)}} \cdot 1) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}
\end{aligned}$$

i na tej podstawie wyprowadzamy

$$m_{\mathbb{R}^{\times 2}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2).$$

Określmy izomorfizm przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych

$$C : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto (x + y, x - y).$$

Łatwo sprawdzamy, że obrazem powyższego „egzotycznego” mnożenia względem tego izomorfizmu,

$$m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} := C \circ m_{\mathbb{R}^{\times 2}} \circ (C^{-1} \times C^{-1}) : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

jest standardowe mnożenie w sumie prostej algebr  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} m_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= C\left(\frac{1}{2} \triangleright (x_1 + y_1, x_1 - y_1) \cdot_{\mathbb{R}^{\times 2}} \frac{1}{2} \triangleright (x_2 + y_2, x_2 - y_2)\right) \\ &\equiv \frac{1}{4} \triangleright C\left((x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) + (x_1 - y_1) \cdot (x_2 - y_2),\right. \\ &\quad \left.(x_1 + y_1) \cdot (x_2 - y_2) + (x_1 - y_1) \cdot (x_2 + y_2)\right) \\ &= \frac{1}{2} \triangleright C(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2). \end{aligned}$$

Ostatecznie więc możemy zapisać

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,0}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

domyślnie mając na uwadze standardową strukturę sumy prostej  $\mathbb{R}$ -algebr na  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

- (2) Algebra Clifforda przestrzeni  $\mathbb{R}^{0,1}$ . Tym razem przejście od rozkładu (3.1.4) do struktury ilorazowej wymaga utożsamień

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = -1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\ \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} = -1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \\ &= \kappa_{(1)}^{-1}(-1 \triangleright_{(1)} 1_{(1)}) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(-1_{(1)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(1)} \\ &\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{(1)}, \\ \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 4} \ni 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(1)} &\sim \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \delta_E^{(0,1)}(1_{(1)}) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\ &= \kappa_{(0)}^{-1}(1 \triangleright_{(0)} 1_{(0)}) \equiv \kappa_{(0)}^{-1}(1_{(0)}) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\ &\xrightarrow[\kappa_{(0)}]{\cong} \mathbb{R}^{(0)} \quad \text{itd.}, \end{aligned}$$

tak samo więc jak w poprzednim przypadku dostajemy, dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)}, \quad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{(1)},$$

a dalej

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{J}_{\delta_E^{(0,1)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}.$$

Postać iloczynu w otrzymanej tu algebrze odczytujemy z rachunku (którego początek jest identyczny jak poprzednio)

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}} (x_2, y_2) &= (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\ &\quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sim (x_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(0)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
& \quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright (1_{\mathbb{R}^{(1)}} \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (y_1 \cdot y_2) \cdot \delta_E^{(0,1)}(1) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}} \\
& = (x_1 \cdot x_2) \triangleright \kappa_{(0)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(0)}}) + (x_1 \cdot y_2) \triangleright \kappa_{(1)}^{-1}(1 \cdot 1_{\mathbb{R}^{(1)}}) \\
& \quad + (y_1 \cdot x_2) \triangleright {}_{(1)}\kappa^{-1}(1_{\mathbb{R}^{(1)}} \cdot 1) - (y_1 \cdot y_2) \triangleright_{(0)} 1_{\mathbb{R}^{(0)}},
\end{aligned}$$

który prowadzi do łatwo rozpoznawalnej struktury

$$(x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{R}^{\times 2}} (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2).$$

Tym sposobem identyfikujemy

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,1}) \cong \mathbb{C}.$$

(3) Algebra Clifforda przestrzeni  $\mathbb{R}^{2,0}$ . W algebrze tensorowej tej przestrzeni

$$(3.1.5) \quad \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2,0} = \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} n}$$

utożsamiamy (na bazie):

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 2} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = 1 \cdot 1_{(0)} \equiv 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) & \sim \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
& = \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (1, 0)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
& \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) & \sim \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\
& = \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (0, 1)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
& \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) & \sim (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
& = {}_{(1)}\kappa^{-1}((0, 1) \triangleleft_{(1)} 1) \equiv {}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
& \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) & \sim \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\
& = \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (0, 1)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
& \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},
\end{aligned}$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = 1_{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_{(1)}^{-1}(1 \triangleright_{(1)} (1, 0)) \equiv \kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \\
&\xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &\sim (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} = (1, 2) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} \\
&= {}_{(1)}\kappa^{-1}((1, 0) \triangleleft_{(1)} 1) \equiv {}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \\
&\xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.},
\end{aligned}$$

a ponieważ także

$$\begin{aligned}
(1, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 1) &= (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) + (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) + (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0), \\
&\text{więc dalej utożsamiamy} \\
(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &= (1, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 1) - (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
&\sim \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(1, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
&= (2 - 1 - 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) &\sim -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
&\sim -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \\
&= -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} = -{}_{(1)}\kappa^{-1}((0, 1) \triangleleft_{(1)} 1) \\
&\equiv -{}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) &\sim -(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\
&\sim -(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} \delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} \\
&= -(1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} 1_{(0)} = -{}_{(1)}\kappa^{-1}((1, 0) \triangleleft_{(1)} 1) \\
&\equiv -{}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

Biorąc to wszystko pod uwagę, stwierdzamy, że dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 2k} \sim \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{(1)}, \quad \mathbb{R}^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 2k+1} \sim \mathbb{R}^{\times 2},$$

gdzie

$$\mathbb{R}^{(1)} = \langle (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \rangle_{\mathbb{R}},$$

a zatem ostatecznie

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{J}_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2,0)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}.$$

Przy tym z tożsamości

$$(a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1, 0) + a_3 \triangleright (0, 1) + a_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1))$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} (b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1, 0) + b_3 \triangleright (0, 1) + b_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\
& \sim (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) \triangleright 1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3) \triangleright (1, 0) \\
& \quad + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) \triangleright (0, 1) \\
& \quad + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1),
\end{aligned}$$

wyznaczonych w odwołaniu do powyższych relacji, wyprowadzamy izomorfizm

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0}) \cong \mathbb{R}(2),$$

który na bazie przybiera postać

$$(1, (1, 0), (0, 1), (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \mapsto \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Istotnie, mamy

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} a_1+a_2 & a_3+a_4 \\ a_3-a_4 & a_1-a_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1+b_2 & b_3+b_4 \\ b_3-b_4 & b_1-b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1+a_2) \cdot (b_1+b_2) + (a_3+a_4) \cdot (b_3-b_4) & (a_1+a_2) \cdot (b_3+b_4) + (a_3+a_4) \cdot (b_1-b_2) \\ (a_3-a_4) \cdot (b_1+b_2) + (a_1-a_2) \cdot (b_3-b_4) & (a_3-a_4) \cdot (b_3+b_4) + (a_1-a_2) \cdot (b_1-b_2) \end{pmatrix} \\
& \equiv \begin{pmatrix} (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3) & (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \\ (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) & (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(4) Algebra Clifforda przestrzeni  $\mathbb{R}^{0,2}$ . W tym przypadku przejście od algebry tensorowej (3.1.5) do stosownej algebry ilorazowej realizują utożsamienia (na bazie):

$$\begin{aligned}
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^2}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^2}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -({}_1)\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[({}_1)\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2}, \\
& (\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -({}_1)\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[({}_1)\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.},
\end{aligned}$$

a nadto

$$\begin{aligned}
& (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim \delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}(1, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - \delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\
& \quad = (-2 + 1 + 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)
\end{aligned}$$

oraz

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3}} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim ({}_1)\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[({}_1)\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim {}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.}$$

Jak poprzednio, wyłania się rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{J}_{\delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}$$

ze strukturą iloczynu wyznaczoną z rachunku

$$\begin{aligned} & (a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1, 0) + a_3 \triangleright (0, 1) + a_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ & \cdot \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} (b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1, 0) + b_3 \triangleright (0, 1) + b_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ & \sim (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 - a_3 \cdot b_3 - a_4 \cdot b_4) \triangleright 1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_4 - a_4 \cdot b_3) \triangleright (1, 0) \\ & \quad + (a_1 \cdot b_3 - a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 + a_4 \cdot b_2) \triangleright (0, 1) \\ & \quad + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), \end{aligned}$$

w której rozpoznajemy bez trudu obraz iloczynu Hamiltona z Przykł. 31 (4) względem izomorfizmu

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2}) \cong \mathbb{H},$$

przybierającego na bazie postać

$$(1, (1, 0), (0, 1), (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \mapsto (1, i, j, k).$$

(5) Algebra Clifforda przestrzeni  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Konstrukcja algebry ilorazowej prowadzi poprzez utożsamienia (na bazie):

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^2} 2} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim 1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^2} 2} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -1_{(0)} \in \mathbb{R}^{(0)},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim \kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim \kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim {}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -\kappa_{(1)}^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{(0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2} \xrightarrow[\kappa_{(1)}]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim -{}_{(1)}\kappa^{-1}(1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.},$$

a nadto

$$\begin{aligned} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) & \sim -\delta_{\mathbb{E}}^{(1,1)}(1, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} + \delta_{\mathbb{E}}^{(1,1)}(1, 0) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} + \delta_{\mathbb{E}}^{(1,1)}(0, 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \\ & = (-0 + 1 - 1) \triangleright_{(0)} 1_{(0)} - (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) = -(0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \end{aligned}$$

oraz

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}^3} 3} \ni (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \sim -{}_{(1)}\kappa^{-1}(0, 1) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[{}_{(1)}\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2},$$

$$(\mathbb{R}^{\times 2})^{\otimes_{\mathbb{R}} 3} \ni (0, 1) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \sim_{(1)\kappa^{-1}} (1, 0) \in \mathbb{R}^{\times 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{(0)} \xrightarrow[(1)\kappa]{\cong} \mathbb{R}^{\times 2} \quad \text{itd.}$$

I tym razem uzyskujemy rozkład

$$\bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} / \mathcal{J}_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,1)}} \cong \mathbb{R}^{(0)} \oplus \mathbb{R}^{\times 2} \oplus \mathbb{R}^{(1)}$$

ze strukturą iloczynu określaną przez utożsamienie

$$\begin{aligned} & (a_1 \triangleright 1 + a_2 \triangleright (1, 0) + a_3 \triangleright (0, 1) + a_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ & \cdot_{\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\times 2}} (b_1 \triangleright 1 + b_2 \triangleright (1, 0) + b_3 \triangleright (0, 1) + b_4 \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ \sim & (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 - a_3 \cdot b_3 + a_4 \cdot b_4) \triangleright 1 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_4 - a_4 \cdot b_3) \triangleright (1, 0) \\ & + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_1 - a_4 \cdot b_2) \triangleright (0, 1) \\ & + (a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1) \triangleright (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), \end{aligned}$$

z której odczytujemy izomorfizm

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,1}) \cong \mathbb{R}(2),$$

przybierający na bazie postać

$$(1, (1, 0), (0, 1), (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \mapsto \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

którą bez trudu potwierdzamy w rachunku analogicznym do tego z punktu (3).

- (6) Algebra Clifforda przestrzeni  $(\mathbb{C}, \delta_{\mathbb{E}})$ , gdzie  $\delta_{\mathbb{E}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2$  jest euklidesową formą kwadratową. Postępując identycznie jak w punkcie (1), odkrywamy izomorfizm

$$\text{Cliff}(\mathbb{C}, \delta_{\mathbb{E}}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

✓

Jakkolwiek argumenty przedstawione w szczegółowej dyskusji poszczególnych przypadków są całkowicie przekonujące, to jednak nie stanowią formalnego dowodu istnienia wskazanych izomorfizmów. Traktując je jako strukturalną wskazówkę, bez trudu dowodzimy poniższego

**STWIERDZENIE 167.** *Przyjmijmy zapis Def. 111 oraz Przykł. 31 (4) i 35 (1). Istnieją kanoniczne unitalne izomorfizmy  $\mathbb{K}$ -algebr*

- (i)  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,0}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ );
- (ii)  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,1}) \cong \mathbb{C}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ );
- (iii)  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0}) \cong \mathbb{R}(2)$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ );
- (iv)  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2}) \cong \mathbb{H}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ );
- (v)  $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{1,1}) \cong \mathbb{R}(2)$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ );
- (vi)  $\text{Cliff}(\mathbb{C}, \delta_{\mathbb{E}}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

■

Dowód: Weryfikację słuszności tezy stwierdzenia opieramy na Stw. 166.

Ad (i) Przywołując postać zanurzenia wyjściowej przestrzeni wektorowej  $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^{(1)}$  w module ilorazowym z Przykł. 35 (1), rozważamy odwzorowanie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} : r \longmapsto (r, -r),$$

którego obraz generuje przeciwdziedzinę jako  $\mathbb{R}$ -algebrę,

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \langle \text{Im } J_{\mathbb{R}} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Istotnie,

$$\forall_{r,s \in \mathbb{R}} : (r, s) = \frac{1}{2}(r+s) \triangleright J_{\mathbb{R}}(1)^2 + \frac{1}{2}(r-s) \triangleright J_{\mathbb{R}}(1).$$

Niechaj teraz  $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}$  będzie odwzorowaniem Clifforda przestrzeni  $\mathbb{R}$  w dowolną unitalną  $\mathbb{R}$ -algebrę  $\mathfrak{A}$ . Jako odwzorowanie  $\mathbb{R}$ -liniowe jest ono jednoznacznie określone przez wartość przyjmowaną na wektorze  $1 \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(r) \equiv \varphi(r \triangleright 1) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(1),$$

przy czym element

$$a := \varphi(1) \in \mathfrak{A}$$

spełnia warunek

$$a^2 \equiv \varphi(1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \delta_{\mathbb{E}}^{(1,0)}(1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}.$$

Możemy zatem zdefiniować odwzorowanie jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A} : (r, s) \longmapsto \frac{1}{2}(r+s) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2}(r-s) \triangleright_{\mathfrak{A}} a,$$

o pożądanых własnościach

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{1}_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}) \equiv \tilde{\varphi}(1, 1) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} : \tilde{\varphi} \circ J_{\mathbb{R}}(r) = \tilde{\varphi}(r, -r) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} a \equiv r \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \varphi(r).$$

Na podstawie rachunków z Przykł. 35 (1) stwierdzamy, że jest to w istocie homomorfizm  $\mathbb{R}$ -algebr

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\left((x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} (x_2, y_2)\right) &= \frac{1}{2}(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2}(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \\ &= \frac{1}{2} \triangleright \left( (x_1 + y_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_1 - y_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \right) \\ &\quad \cdot_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2} \triangleright \left( (x_2 + y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_2 - y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \right) \\ &\equiv \tilde{\varphi}(x_1, y_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Ad (ii) Rozumując analogicznie jak w punkcie poprzednim, określamy odwzorowanie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$J_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : r \longmapsto (0, r)$$

o własności

$$\mathbb{C} = \langle \text{Im } J_{\mathbb{R}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

wynikającej z prostej obserwacji:

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : (x, y) = (-x) \triangleright J_{\mathbb{R}}(1) \cdot_{\mathbb{C}} J_{\mathbb{R}}(1) + y \triangleright J_{\mathbb{R}}(1).$$

Dla dowolnego  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{A}$  jak poprzednio definiujemy element

$$a := \varphi(1) \in \mathfrak{A},$$

spełniający warunek

$$a^2 \equiv \varphi(1) \cdot_{\mathfrak{A}} \varphi(1) = \delta_E^{(0,1)}(1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{A} : (x, y) \mapsto x \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y \triangleright_{\mathfrak{A}} a,$$

o pożądanym własnościach

$$\tilde{\varphi}(1, 0) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\forall_{r \in \mathbb{R}} : \tilde{\varphi} \circ J_{\mathbb{R}}(r) = \tilde{\varphi}(0, r) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} a = \varphi(r).$$

Na podstawie rachunków z Przykł. 35 (1) stwierdzamy, że jest to w istocie homomorfizm  $\mathbb{R}$ -algebr

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((x_1, y_1) \cdot_{\mathbb{C}} (x_2, y_2)) &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2) \triangleright_{\mathfrak{A}} a \\ &= (x_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} (x_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} y_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \\ &\equiv \tilde{\varphi}(x_1, y_1) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Ad (iii) Tym razem bierzemy pod uwagę odwzorowanie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$J_{\mathbb{R}^{\times 2}} : \mathbb{R}^{\times 2} \rightarrow \mathbb{R}(2) : (r, s) \mapsto \begin{pmatrix} r & s \\ s & -r \end{pmatrix}$$

o własności

$$\mathbb{R}(2) = \langle \text{Im } J_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

udokumentowanej, jak następuje:

$$\begin{aligned} \forall_{a,b,c,d \in \mathbb{R}} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{a+d}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}} (1, 0)^2 + \frac{a-d}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}} (1, 0) + \frac{b+c}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}} (0, 1) \\ &\quad + \frac{b-c}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}} (1, 0) \odot_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}} (0, 1). \end{aligned}$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda  $\varphi : \mathbb{R}^{\times 2} \rightarrow \mathfrak{A}$  definiujemy elementy

$$(A, B) := (\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A},$$

poddane więzom

$$A^2 \equiv \varphi(1, 0)^2 = \delta_E^{(2,0)}(1, 0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, \quad B^2 \equiv \varphi(0, 1)^2 = \delta_E^{(2,0)}(0, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$B \cdot_{\mathfrak{A}} A = (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B)$$

$$= \delta_E^{(2,0)}(1, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B.$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}(2) \rightarrow \mathfrak{A}$$

$$: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a+d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{a-d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} \frac{b+c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} \frac{b-c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B,$$

o oczekiwanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\tilde{\varphi} \circ J_{\mathbb{R}}(r, s) = \tilde{\varphi} \begin{pmatrix} r & s \\ s & -r \end{pmatrix} = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r, s).$$

W mozołnym, lecz poza tym całkowicie trywialnym rachunku bezpośrednim przekonujemy się, że jest to w istocie homomorfizm  $\mathbb{R}$ -algebr.

Ad (iv) Określamy odwzorowanie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$J_{\mathbb{R}^{\times 2}} : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{H} : (r, s) \longmapsto ri + sj$$

o własności

$$\mathbb{H} = \langle \text{Im } J_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

widocznej w stwierdzeniu

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : a + bi + cj + dk = -a \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(1, 0)^2 + J_{\mathbb{R}^{\times 2}}(b, c) + d \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(1, 0) \odot J_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0, 1).$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda  $\varphi : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A}$  definiujemy elementy

$$(A, B) := (\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A},$$

poddane więzom

$$A^2 \equiv \varphi(1, 0)^2 = \delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}(1, 0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, \quad B^2 \equiv \varphi(0, 1)^2 = \delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}(0, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$B \cdot_{\mathfrak{A}} A = (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B)$$

$$= \delta_{\mathbb{E}}^{(0,2)}(1, 1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B.$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

$$: a + bi + cj + dk \longmapsto a \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} b \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} c \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} d \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B,$$

o oczekiwanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(1) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\tilde{\varphi} \circ J_{\mathbb{R}}(r, s) = \tilde{\varphi}(ri + sj) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r, s).$$

Łatwo widać, że jest to w istocie homomorfizm  $\mathbb{R}$ -algebr.

Ad (v) Punktem wyjścia jest odwzorowanie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$J_{\mathbb{R}^{\times 2}} : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}(2) : (r, s) \longmapsto \begin{pmatrix} r & s \\ -s & -r \end{pmatrix}$$

o własności

$$\mathbb{R}(2) = \langle \text{Im } J_{\mathbb{R}^{\times 2}} \rangle_{\mathbb{R}},$$

udokumentowanej, jak następuje:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{a+d}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(1, 0)^2 + \frac{a-d}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(1, 0) + \frac{b-c}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(0, 1) \\ &+ \frac{b+c}{2} \triangleright_{J_{\mathbb{R}^{\times 2}}}(1, 0) \odot J_{\mathbb{R}^{\times 2}}(0, 1). \end{aligned}$$

Dla dowolnego odwzorowania Clifforda  $\varphi : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathfrak{A}$  definiujemy elementy

$$(A, B) := (\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A},$$



poddane więzom

$$\begin{aligned} A^2 &\equiv \varphi(1,0)^2 = \delta_E^{(1,1)}(1,0) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, & B^2 &\equiv \varphi(0,1)^2 = \delta_E^{(1,1)}(0,1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, \\ B \cdot_{\mathfrak{A}} A &= (A +_{\mathfrak{A}} B) \cdot_{\mathfrak{A}} (A +_{\mathfrak{A}} B) +_{\mathfrak{A}} (-A^2) +_{\mathfrak{A}} (-B^2) +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) \\ &= \delta_E^{(1,1)}(1,1) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}) +_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} (-A \cdot_{\mathfrak{A}} B) = -A \cdot_{\mathfrak{A}} B. \end{aligned}$$

a następnie definiujemy odwzorowanie jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &: \mathbb{R}(2) \longrightarrow \mathfrak{A} \\ &: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \frac{a+d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \frac{a-d}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} \frac{b-c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} B +_{\mathfrak{A}} \frac{b+c}{2} \triangleright_{\mathfrak{A}} A \cdot_{\mathfrak{A}} B, \end{aligned}$$

o oczekiwanych własnościach

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_{\mathfrak{A}},$$

$$\tilde{\varphi} \circ \mathcal{J}_{\mathbb{R}}(r, s) = \tilde{\varphi} \left( \begin{pmatrix} r & s \\ -s & -r \end{pmatrix} \right) = r \triangleright_{\mathfrak{A}} A +_{\mathfrak{A}} s \triangleright_{\mathfrak{A}} B \equiv \varphi(r, s).$$

Także i to odwzorowanie okazuje się być homomorfizmem  $\mathbb{R}$ -algebr.

Ad (vi) Dowód przebiega identycznie jak w punkcie (i).

□

### 3. Algebra zewnętrzna jako algebra Clifforda

Model algebry Clifforda stowarzyszonej z daną przestrzenią kwadratową  $(V, Q)$  wypracowany w dowodzie Tw. 3.1.1 pozwala nam postrzegać ową algebrę jako wysoce nietrywialne uogólnienie, parametryzowane przez nierównoważne struktury kwadratowe  $Q$  na  $V$ , pewnej kanonicznej konstrukcji ilorazowej związanej z samą przestrzenią  $\mathbb{K}$ -liniową  $V$ , którą obecnie opiszemy, a która odgrywa istotną rolę osobną w modelowaniu zjawisk fizykalnych. Rzeczona konstrukcja stanowi specjalizację konstrukcji ilorazowej (3.1.1) do przypadku zwyrodniałej przestrzeni kwadratowej  $(V, Q = 0)$  i daje nam

DEFINICJA 112. Przyjmijmy zapis Def. 146 oraz 103 i dowodu Tw. 3.1.1. **Algebra zewnętrzna przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $V$**  to przestrzeń ilorazowa

$$\bigwedge^{\bullet} V := \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_0, \quad \mathfrak{I}_0 = \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V},$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} \wedge &\equiv m_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{I}_0} : \bigwedge^{\bullet} V \times \bigwedge^{\bullet} V \longrightarrow \bigwedge^{\bullet} V \\ &: (\alpha + \mathfrak{I}_0, \beta + \mathfrak{I}_0) \longmapsto \alpha \otimes_{\mathbb{K}} \beta + \mathfrak{I}_0 \equiv (\alpha + \mathfrak{I}_0) \wedge (\beta + \mathfrak{I}_0), \end{aligned}$$

zwanym **iloczynem zewnętrznym**. Zapiszemy więc

$$\text{Cliff}(V, 0) \equiv \bigwedge^{\bullet} V.$$

▲

Zachodzi oczywiście

STWIERDZENIE 168. *Przyjmijmy zapis Def. 18, 104 oraz 112 i Przykł. 31 (2). Niechaj  $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$  będzie dowolną bazą przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $V$ . Algebra zewnętrzna tej ostatniej jest algebrą z  $\mathbb{Z}$ -gradacją*

$$\bigwedge^\bullet V = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigwedge^n V$$

o składowych jednorodnych

$$\bigwedge^n V := \bigoplus_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N} \langle v_{k_1} \wedge v_{k_2} \wedge \dots \wedge v_{k_n} \rangle_{\mathbb{K}}$$

rozpiętych na klasach tensorów

$$v_{k_1} \wedge v_{k_2} \wedge \dots \wedge v_{k_n} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{1, n}} \operatorname{sgn}(\sigma) v_{k_{\sigma(1)}} \otimes_{\mathbb{K}} v_{k_{\sigma(2)}} \otimes_{\mathbb{K}} \dots \otimes_{\mathbb{K}} v_{k_{\sigma(n)}} + \mathfrak{J}_0.$$

W szczególności więc

$$\forall_{n > N} : \bigwedge^n V = \mathfrak{J}_0,$$

czyli w istocie

$$\bigwedge^\bullet V = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n=1}^N \bigwedge^n V,$$

przy czym

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^n V = \binom{N}{n}.$$

■

Dowód: Prosty wniosek z procedury rzutowania na moduł ilorazowy. □

W następnej kolejności zajmiemy się szczegółowym opisem struktury algebry endomorfizmów algebry zewnętrznej, z którego przyjdzie nam skorzystać niebawem.

STWIERDZENIE 169. *Przyjmijmy zapis Def. 16 i 31 oraz Stw. 168. Algebra endomorfizmów  $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V)$  jest generowana przez endomorfizmy*

$$\mu_v : \bigwedge^\bullet V \curvearrowright : \omega \mapsto v \wedge \omega, \quad v \in V$$

oraz (jedyne)  $\mathbb{K}$ -liniowe rozszerzenia

$$\iota_\varphi \equiv \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \iota_\varphi^{(n)} : \bigwedge^\bullet V \curvearrowright, \quad \varphi \in V^*,$$

$$\iota_\varphi^{(0)} \equiv 0 : \bigwedge^0 V \longrightarrow \{0_{\mathbb{K}}\}, \quad \iota_\varphi^{(n)} : \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^{n-1} V$$

przyporządkowań określonych na elementach prostych wzorami

$$\iota_\varphi(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n) := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \varphi(v_k) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n \widehat{k}.$$

■

Dowód: Wobec skończoności wymiaru  $V$  istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowych

$$(\bigwedge^\bullet V)^* \cong \bigwedge^\bullet V^*,$$

stanowiący stosownie rozszerzoną zantysymetryzowaną wersję udowodnionego wcześniej izomorfizmu (1.2.31). W świetle Równ. (1.2.27) istnieje zatem kanoniczny izomorfizm

$$T_V : \bigwedge^\bullet V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V \xrightarrow{\cong} (\bigwedge^\bullet V)^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V),$$

który przybiera konkretną postać (na tensorach prostych, tj. dla dowolnych  $\omega \in \bigwedge^\bullet V^*$  oraz  $v \in \bigwedge^\bullet V$ )

$$T_V(\omega \otimes_{\mathbb{K}} v) : \bigwedge^\bullet V \ni w \mapsto \langle \omega, w \rangle \triangleright v,$$

gdzie  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \bigwedge^\bullet V^* \times \bigwedge^\bullet V \rightarrow \mathbb{K}$  jest dwoistością stanowiącą dwuliniowe rozszerzenie przyporządkowania określonego na elementach jednorodnych w postaci

$$\langle k, l \rangle := k \cdot_{\mathbb{K}} l, \quad k, l \in \mathbb{K},$$

$$\langle k, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle := 0_{\mathbb{K}},$$

$$\langle \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m, l \rangle := 0_{\mathbb{K}},$$

$$\langle \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle := \delta_{m,n}^{\mathbb{K}} \det_{(n)}(\varphi_i(v_j))_{i,j \in \overline{1,n}},$$

zapisanej dla dowolnych  $k, l \in \mathbb{K}$ ,  $v_j \in V$ ,  $j \in \overline{1,n}$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  oraz  $\varphi_i \in V^*$ ,  $i \in \overline{1,m}$ ,  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Zauważmy, że izomorfizmy te ograniczają się do składowych jednorodnych według schematu

$$T_V \upharpoonright_{\bigwedge^p V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^p V} : \bigwedge^p V^* \otimes_{\mathbb{K}} \bigwedge^p V \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^p V, \bigwedge^p V),$$

przy czym wyrażają się formułami

$$T_V(\omega \otimes_{\mathbb{K}} v) \equiv \tilde{\mu}_v \circ \tilde{\iota}_\omega, \quad (\omega, v) \in \bigwedge^p V^* \times \bigwedge^p V,$$

w których  $\tilde{\iota}$  jest (jedynym) homomorficznym rozszerzeniem do  $\text{Cliff}(V^*, 0) \equiv \bigwedge^\bullet V^*$  odwzorowania Clifforda

$$\iota : V^* \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V) : \varphi \mapsto \iota_\varphi$$

opisanego w treści dowodzonego twierdzenia,  $\tilde{\mu}$  zaś jest (jedynym) homomorficznym rozszerzeniem do  $\text{Cliff}(V, 0) \equiv \bigwedge^\bullet V$  odwzorowania Clifforda

$$\mu : V \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V) : v \mapsto \mu_v$$

zdefiniowanego tamże. O cliffordowskości obu odwzorowań przekonujemy się w bezpośrednim rachunku – oto więc

$$\begin{aligned} \iota_\varphi^2(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \iota_\varphi \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \varphi(v_k) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left( \sum_{\substack{l=1 \\ l < k}}^n (-1)^{l-1} + \sum_{\substack{l=1 \\ l > k}}^n (-1)^{l-2} \right) \varphi(v_k) \cdot_{\mathbb{K}} \varphi(v_l) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \\ &\equiv \left( \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l < k}}^n - \sum_{\substack{l=1 \\ l > k}}^n \sum_{k=1}^n \right) (-1)^{k+l} \varphi(v_k) \cdot_{\mathbb{K}} \varphi(v_l) \triangleright v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = \mathbf{0}_{\bigwedge^\bullet V}, \end{aligned}$$

a nadto

$$\mu_v^2(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) = v \wedge v \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \equiv \mathbf{0}_{\bigwedge^\bullet V}.$$

Przy tym w konsekwencji homomorficzności obu rozszerzeń spełnione są – dla dowolnych  $\varphi_i$  i  $v_j$  jak wyżej – tożsamości

$$\begin{aligned}\tilde{\iota}_{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_m} &= \iota_{\varphi_1} \circ \iota_{\varphi_2} \circ \dots \circ \iota_{\varphi_m}, \\ \tilde{\mu}_{v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n} &= \mu_{v_1} \circ \mu_{v_2} \circ \dots \circ \mu_{v_n}.\end{aligned}$$

Skoro jednak – na mocy Cor. 4 oraz Równ. (1.2.26), a w konwencji  $\wedge^0 V \equiv \mathbb{K}$  – istnieje kanoniczny izomorfizm przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowych

$$\begin{aligned}\text{End}_{\mathbb{K}}(\wedge^{\bullet} V) &\equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\wedge^{\bullet} V, \wedge^{\bullet} V) \equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{n=0}^N \wedge^n V, \wedge^{\bullet} V\right) \\ &\cong \bigoplus_{n=0}^N \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\wedge^n V, \wedge^{\bullet} V),\end{aligned}$$

a każdy ze składników prostej ostatniej sumy jest – jak pokazaliśmy wcześniej – generowany (jako  $\mathbb{K}$ -algebra) przez endomorfizmy wymienione w tezie dowodzonego stwierdzenia, to także każdy element  $\mathbb{K}$ -algebry  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\wedge^{\bullet} V)$  jest skończoną kombinacją  $\mathbb{K}$ -liniową skończonych kombinacji  $\mathbb{K}$ -liniowych skończonych iloczynów takowych generatorów, co dowodzi słuszności tezy.  $\square$

#### 4. Podstawowe własności strukturalne

Oswoiwszy się nieco z konstrukcją modelu algebry Clifforda, możemy obecnie przystąpić do omówienia elementarnych jej własności będących konsekwencją definicji. Zaczniemy od

**STWIERDZENIE 170.** *Przyjmijmy zapis Def. 111. Kanoniczne odwzorowanie Clifforda*

$$j_V^{\mathbb{C}} : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q)$$

*jest monomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowych.*

■

*Dowód:* Zaczniemy od prostej obserwacji ogólnej: jeśli  $j_V^{\mathbb{C}}$  ma pożądaną własność w konkretnym modelu  $\text{Cliff}(V, Q)$  (o kanonicznym odwzorowaniu Clifforda  $j_V^{\mathbb{C}}$ ) algebry Clifforda przestrzeni kwadratowej  $(V, Q)$ , to ma ją w dowolnym innym modelu  $\widetilde{\text{Cliff}}(V, Q)$  (o kanonicznym odwzorowaniu Clifforda  $\tilde{j}_V^{\mathbb{C}}$ ), a to wobec przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{\text{Cliff}}(V, Q) & \\ & \nearrow \tilde{j}_V^{\mathbb{C}} & \uparrow \iota \\ V & \xrightarrow{j_V^{\mathbb{C}}} & \text{Cliff}(V, Q) \end{array},$$

na którym  $\iota$  jest jedynym izomorfizmem modeli opisanym w Def. 111. Istotnie, diagram ten pozwala stwierdzić, że  $\tilde{j}_V^{\mathbb{C}}$  jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest nim  $j_V^{\mathbb{C}}$ . Ta konstatacja pozwoli nam sprowadzić nasze rozważania do prostego modelu wyprowadzonego w konstruktywnym dowodzie Tw. 3.1.1.

Zacznijmy od rozważenia sytuacji zwyrodniałej, w której  $\text{rk } Q = 0$ , czyli jest  $Q = 0$ . W tym przypadku mamy model omówiony w Def. 112, tj.

$$\text{Cliff}(V, 0) = \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V}$$

wraz z odwzorowaniem kanonicznym

$$j_V^{\mathbb{C}} : V \xrightarrow{j_V^{\otimes_{\mathbb{K}} 1}} \bigotimes_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{\pi_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V/\mathcal{I}_0}} \bigotimes_{\mathbb{K}} V / \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V}.$$

Niech teraz – dla pewnych  $v_1, v_2 \in V$  –

$$j_V^{\mathbb{C}}(v_2) = j_V^{\mathbb{C}}(v_1),$$

a wówczas

$$v_2 - v_1 \in \langle v \otimes_{\mathbb{K}} v \mid v \in V \rangle_{\bigotimes_{\mathbb{K}} V},$$

to jednak oznacza, że tensor stopnia  $\deg(v_2 - v_1) = 1$  jest kombinacją  $\mathbb{K}$ -liniową tensorów stopnia co najmniej 2, co wobec jednoznaczności rozkładu na składowe jednorodne w  $\bigotimes_{\mathbb{K}} V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}} n}$  oznacza<sup>1</sup>, że

$$v_2 - v_1 = 0_V,$$

skąd wniosek:

$$(3.1.6) \quad \ker j_V^{\mathbb{C}} = \{0_V\}.$$

Niechaj teraz  $\text{rk } Q = \dim_{\mathbb{K}} V$ , a wtedy  $v \in \ker j_V^{\mathbb{C}}$  implikuje

$$Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}} = j_V^{\mathbb{C}}(v)^2 = 0,$$

czyli  $v = 0_V$ , zatem i tym razem zachodzi równość (3.1.6).

Pozostaje rozpatrzyć przypadek pośredni:  $0 < \text{rk } Q < \dim_{\mathbb{K}} V$ , w którym Tw. 1.2.3 pozwala dokonać rozkładu  $Q$ -ortogonalnego

$$V = V_0 \oplus_Q V_{\neq 0}$$

na podprzestrzenie: zerową  $V_0$  o własności  $Q \upharpoonright_{V_0} = 0$  oraz niezwyrodniałą  $V_{\neq 0}$ , przy czym na mocy Stw. 33 z rozkładem tym jest stowarzyszona zupełna para komplementarnych rzutów ( $Q$ -ortogonalnych)  $\pi_0, \pi_{\neq 0}$  o własności  $V_{(\neq)0} = \text{Im } \pi_{(\neq)0}$ . W świetle wcześniejszych naszych rozważań odwzorowanie kanoniczne

$$j_{V_{\neq 0}}^{\mathbb{C}} : V_{\neq 0} \longrightarrow \text{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0}), \quad Q_{\neq 0} \equiv Q \upharpoonright_{V_{\neq 0}}$$

jest monomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowych. Możemy go użyć do skonstruowania odwzorowania  $\mathbb{K}$ -liniowego

$$\varphi_{\neq 0} := j_{V_{\neq 0}}^{\mathbb{C}} \circ \pi_{\neq 0} : V \longrightarrow \text{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0}) \equiv C_{\neq 0},$$

które spełnia warunek Clifforda (zapisany poniżej dla dowolnego  $v = v_0 \oplus v_{\neq 0} \in V_0 \oplus_Q V_{\neq 0} \equiv V$  oraz  $e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} \equiv 1_{\text{Cliff}(V_{\neq 0}, Q_{\neq 0})}$ )

$$\begin{aligned} \varphi_{\neq 0}(v)^2 &= j_{V_{\neq 0}}^{\mathbb{C}}(v_{\neq 0})^2 = Q(v_{\neq 0}) \triangleright e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} \equiv \Phi_Q(v_{\neq 0}, v_{\neq 0}) \triangleright e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} = \Phi_Q(v - v_0, v - v_0) \triangleright e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} \\ &= \Phi_Q(v, v) \triangleright e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} \equiv Q(v) \triangleright e_{\neq 0}^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

i z tej racji określa (jedyne) unitalny homomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\varphi}_{\neq 0} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow C_{\neq 0}$$

<sup>1</sup>W przypadku  $Q \neq 0$  powyższe proste rozumowanie przestaje być w równie oczywisty sposób słuszne, gdyż obecność członu  $Q(v) \triangleright 1_{\mathbb{K}}$  prowadzi do mieszania stopni.

o własności

$$\tilde{\varphi}_{\neq 0} \circ J_{V_{\neq 0}}^C = \varphi_{\neq 0}.$$

Ten ostatni wykorzystujemy w definicji odwzorowania  $\mathbb{K}$ -liniowego

$$\varphi : V \longrightarrow \bigwedge^{\bullet} V_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\neq 0} : v \longmapsto \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v).$$

Bez trudu sprawdzamy, że także ono spełnia warunek Clifforda (uzwględniając w rachunku stopnie jednorodnych czynników tensorowych),

$$\begin{aligned} \varphi(v)^2 &\equiv (\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v))^2 \\ &= (\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C) \cdot (\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + (\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C) \cdot (1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v))) \\ &\quad + (1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)) \cdot (\pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C) + (1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)) \cdot (1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v)) \\ &= (-1)^{0 \cdot 1} \pi_0(v) \wedge \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C \cdot_{C_{\neq 0}} e_{\neq 0}^C + (-1)^{0 \cdot 0} \pi_0(v) \wedge 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C \cdot_{C_{\neq 0}} \varphi_{\neq 0}(v) \\ &\quad + (-1)^{1 \cdot 1} 1_{\mathbb{K}} \wedge \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \cdot_{C_{\neq 0}} e_{\neq 0}^C + (-1)^{1 \cdot 0} 1_{\mathbb{K}} \wedge 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) \cdot_{C_{\neq 0}} \varphi_{\neq 0}(v) \\ &= 0 \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C + \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) - \pi_0(v) \otimes_{\mathbb{K}} \varphi_{\neq 0}(v) + 1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_{\neq 0}^C \\ &= Q(v) \triangleright (1_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} e_{\neq 0}^C) \equiv Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\bigwedge^{\bullet} V_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\neq 0}}. \end{aligned}$$

Istnieje zatem unitalny homomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \bigwedge^{\bullet} V_0 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\neq 0}$$

o własności

$$(3.1.7) \quad \tilde{\varphi} \circ J_V^C = \varphi,$$

a ponieważ  $\varphi$  jest injektywny, co dokumentuje poniższe wnioskowanie:

$$\begin{aligned} v \in \ker \varphi &\iff \left\{ \begin{array}{l} \pi_0(v) = 0_V \\ \varphi_{\neq 0}(v) = 0_{C_{\neq 0}} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} v = v_{\neq 0} \\ 0_{C_{\neq 0}} = \varphi_{\neq 0}(v) \equiv \varphi_{\neq 0}(v_{\neq 0}) = J_{V_{\neq 0}}^C(v_{\neq 0}) \end{array} \right\} \\ &\iff v = v_{\neq 0} = 0_V, \end{aligned}$$

przeto także  $J_V^C$  jest injekcją, oto bowiem zachodzi – na mocy Równ. (3.1.7) –

$$\ker J_V^C \subset \ker \varphi = \{0_V\}.$$

□

**UWAGA 36.** Injektywność kanonicznego odwzorowania Clifforda pozwala dokonać utożsamienia

$$J_V^C(V) \cong V,$$

co też będziemy czynić w dalszej części wykładu, pisząc – konsekwentnie – relacje definiujące algebrę Clifforda w powszechnie spotykanej postaci

$$\forall_{v, w \in V} : \{v, w\} = 2\Phi_Q(v, w) \triangleright e^C.$$

▮

W dalszej części dyskusji algebr Clifforda, w szczególności zaś w ich klasyfikacji oraz w konstrukcji ich reprezentacji centralną rolę odegrają pewne ich (anty-)automorfizmy, których omówienie wymaga od nas powrotu do analizy algebry tensorowej stanowiącej podstawę przedstawionego wcześniej modelu algebry Clifforda. Wprowadzamy zatem

DEFINICJA 113. Przyjmijmy zapis Def. 103 oraz 104 i niechaj

$$\otimes_{\mathbb{K}} V = V_{\otimes}^0 \oplus V_{\otimes}^1, \quad V_{\otimes}^l := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}} 2k+l}, \quad l \in \{0, 1\}$$

będzie naturalną  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradacją  $\mathbb{K}$ -algebry  $\otimes_{\mathbb{K}} V$ , indukującą  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradację algebry Clifforda

$$(3.1.8) \quad \text{Cliff}(V, Q) = \text{Cliff}(V, Q)^0 \oplus \text{Cliff}(V, Q)^1.$$

Ponadto niech – dla ustalonego (dowolnie)  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  –

$$\tilde{\tau}_n : V^{\otimes_{\mathbb{K}} n} \hookrightarrow$$

będzie (jedynym) odwzorowaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym indukowanym przez odwzorowanie (wielo-)śródo- $\mathbb{K}$ -liniowe (w rozumieniu Def. 42)

$$\tau_n : V^{\times n} \longrightarrow V^{\otimes_{\mathbb{K}} n} : (v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto v_n \otimes_{\mathbb{K}} v_{n-1} \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_1.$$

**Inwolucja główna** (albo inaczej **kanoniczna**) algebry Clifforda  $\text{Cliff}(V, Q)$  to automorfizm  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowany

$$J_V := \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)^0} \oplus (-\text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)^1}),$$

o (oczywistej) własności

$$J_V^2 = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)}.$$

**Antyinwolucja główna** (albo inaczej **kanoniczna**) algebry Clifforda  $\text{Cliff}(V, Q)$  to antymultiplikatywny automorfizm przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $\text{Cliff}(V, Q)$

$$T_V : \text{Cliff}(V, Q) \hookrightarrow$$

indukowany przez także odwzorowanie

$$\tilde{\tau}_V := \text{id}_{\mathbb{K}} \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \tilde{\tau}_k : \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes_{\mathbb{K}} n} \cong \otimes_{\mathbb{K}} V \hookrightarrow,$$

o (oczywistej) własności

$$\tilde{\tau}_V^2 = \text{id}_{\otimes_{\mathbb{K}} V},$$

który możemy traktować jako (multiplikatywny) izomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr  $\otimes_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{\cong} (\otimes_{\mathbb{K}} V)^{\text{opp}}$ .

▲

UWAGA 37. Podkreślmy, że składowe powyższej definicji mają sens, oto bowiem

- ideał  $\mathfrak{J}_Q$ , będąc generowanym przez elementy  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -jednorodnie podalgebry  $V_{\otimes}^0$  (tj. stopnia  $[0]_2$ ), jest ideałem  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowanym,

$$\mathfrak{J}_Q = (\mathfrak{J}_Q \cap V_{\otimes}^0) \oplus (\mathfrak{J}_Q \cap V_{\otimes}^1) \cong \mathfrak{J}_Q^0 \oplus \mathfrak{J}_Q^1,$$

skąd też rozkład

$$\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathfrak{J}_Q = (V_{\otimes}^0 \oplus V_{\otimes}^1) / (\mathfrak{J}_Q^0 \oplus \mathfrak{J}_Q^1) = V_{\otimes}^0 / \mathfrak{J}_Q^0 \oplus V_{\otimes}^1 / \mathfrak{J}_Q^1$$

który jest właśnie indukowaną  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradacją  $\text{Cliff}(V, Q)$  wykorzystaną w pierwszej części definicji;

- istnienie homomorfizmów  $\tilde{\tau}_n$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , przyjmujących na tensorach prostych postać

$$\tilde{\tau}_n(v_1 \otimes_{\mathbb{K}} v_2 \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_n) = v_n \otimes_{\mathbb{K}} v_{n-1} \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} v_1,$$

jest zagwarantowane przez uniwersalność (wielokrotnego) iloczynu tensorowego, bez trudu sprawdzamy też tożsamość

$$\begin{aligned} \forall_{\tau_1, \tau_2 \in \otimes_{\mathbb{K}} V} : \tilde{\tau}_V(\tau_1 \cdot_{\otimes_{\mathbb{K}} V} \tau_2) &\equiv \tilde{\tau}_V(\tau_1 \otimes_{\mathbb{K}} \tau_2) = \tilde{\tau}_V(\tau_2) \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\tau}_V(\tau_1) \\ &\equiv \tilde{\tau}_V(\tau_2) \cdot_{\otimes_{\mathbb{K}} V} \tilde{\tau}_V(\tau_1), \end{aligned}$$

która dowodzi antymultiplikatywnego charakteru jawnie  $\mathbb{K}$ -liniowego i bijectywnego odwzorowania  $\tilde{\tau}_V$ , a ponieważ ponadto

$$\tilde{\tau}_V(\mathcal{J}_Q) = \mathcal{J}_Q,$$

co jest następstwem zachowywania generatorów ideału przez  $\tilde{\tau}_V$ , przeto ten ostatni kanonicznie indukuje antyautomorfizm algebry ilorazowej  $\otimes_{\mathbb{K}} V / \mathcal{J}_Q$  wedle schematu

$$[\tilde{\tau}_V] : \otimes_{\mathbb{K}} V / \mathcal{J}_Q \circlearrowleft : \tau + \mathcal{J}_Q \mapsto \tilde{\tau}_V(\tau) + \mathcal{J}_Q.$$

$\bar{\lambda}$

Tytułem oswojenia nowowprowadzonych obiektów wysłowimy najpierw oczywiste

**STWIERDZENIE 171.** *Przyjmijmy zapis Def. 113. Podprzestrzenie  $\mathbb{K}$ -liniowe  $\text{Cliff}(V, Q)^k \subset \text{Cliff}(V, Q)$ ,  $k \in \{0, 1\}$  możemy przedstawić w postaci*

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 = \mathbb{K} \oplus \langle v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k} \mid v_i \in J_V^{\mathbb{C}}(V), i \in \overline{1, 2k} \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \rangle_{\mathbb{K}},$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^1 = \langle v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k+1} \mid v_j \in J_V^{\mathbb{C}}(V), j \in \overline{1, 2k+1} \ k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Spełnione są przy tym relacje

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^0 \subset \text{Cliff}(V, Q)^0,$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^1 \subset \text{Cliff}(V, Q)^1,$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^1 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^0 \subset \text{Cliff}(V, Q)^1,$$

$$\text{Cliff}(V, Q)^1 \cdot \text{Cliff}(V, Q)^1 \subset \text{Cliff}(V, Q)^0,$$

w szczególności więc  $\text{Cliff}(V, Q)^0$  jest podalgebrą. Inwolucja główna jest funktorialnym obrazem izometrii  $P_V : V \circlearrowleft : v \mapsto -v$ ,

$$J_V = \text{Cliff}(P_V),$$

i spełnia relacje

$$\text{Cliff}(V, Q)^0 = \ker P^+, \quad \text{Cliff}(V, Q)^1 = \ker P^-,$$

$$P^{\pm} := 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (\text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)} \mp J_V).$$

■



Dowód: Trywialny. □

Przyjdzie nam z czasem odwołać się także do

STWIERDZENIE 172. *Przyjmijmy zapis Def. 113. Dowolna podprzestrzeń  $\mathbb{K}$ -liniowa  $U \subset \text{Cliff}(V, Q)$  zachowywana przez  $J_V$  jest podprzestrzenią  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowaną w rozumieniu Def. 104.* ■

Dowód: Oznaczmy

$$U^k := U \cap \text{Cliff}(V, Q)^k, \quad k \in \{0, 1\}.$$

Dowolny element  $u \in U$  możemy rozłożyć, jak następuje:

$$u \equiv P^+(u) + P^-(u),$$

przy czym na mocy założenia  $J_V(U) \subset U$  jest  $P^\pm(u) \in U$ , ale też  $P^+(u) \in \text{Cliff}(V, Q)^0$  i  $P^-(u) \in \text{Cliff}(V, Q)^1$ , zatem wypisany rozkład jest w istocie rozkładem prostym na składowe  $u$  z  $U^k$ . □

Pierwszym istotnym wynikiem strukturalnym, określającym względną relację między funktorem  $\text{Cliff}$  i strukturą inicjalną, jaką jest suma prosta przestrzeni kwadratowych, jest kluczowe dla przyszłych naszych rozważań klasyfikacyjnych

TWIERDZENIE 3.1.4. *Przyjmijmy zapis Def. 36, 106 oraz 111 i niechaj  $((V_\alpha, +_\alpha, P_\alpha, \bullet \mapsto 0_\alpha), \ell_\alpha), Q_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ . Istnieje kanoniczny izomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr unitalnych z  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradacją*

$$\text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2) \cong \text{Cliff}(V_1, Q_2) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(V_2, Q_2).$$
■

Dowód: Wprowadźmy oznaczenia

$$C_\alpha := \text{Cliff}(V_\alpha, Q_\alpha), \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad C_\oplus := \text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_1 \oplus Q_2).$$

Zauważmy, że wobec funktorialności  $\text{Cliff}$  izometryczne monomorfizmy

$$J_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow V_1 \oplus V_2, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

indukują unitalne homomorfizmy  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{J}_\alpha \equiv \text{Cliff}(J_{V_\alpha}) : C_\alpha \rightarrow C_\oplus,$$

co pozwala nam zdefiniować odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$(3.1.9) \quad \chi := m_{C_\oplus} \circ (\tilde{J}_1 \otimes \tilde{J}_2) : C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2 \rightarrow C_\oplus.$$

Sprawdzamy, że  $\chi$  jest unitalnym homomorfizmem  $\mathbb{K}$ -algebr. W tym celu ustalmy (dowolnie) liczby  $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \overline{\mathbb{N}}$  i rozważmy elementy jednorodnie  $\tau_\alpha^{(1)} := v_1^\alpha . v_2^\alpha \dots . v_{p_\alpha}^\alpha \in C_1$ ,  $v_k^\alpha \in J_{V_1}^C(V_1)$ ,  $k \in \overline{1, p_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  oraz  $\tau_\beta^{(2)} := w_1^\beta . w_2^\beta \dots . w_{q_\beta}^\beta \in C_2$ ,  $w_l^\beta \in J_{V_2}^C(V_2)$ ,  $l \in \overline{1, q_\beta}$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$ , z których tworzymy tensory proste

$$\tau_1^{12} := \tau_1^{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} \tau_1^{(2)}, \quad \tau_2^{12} := \tau_2^{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} \tau_2^{(2)}.$$

Możemy następnie zapisać równość (stosując ten sam symbol  $\cdot$  dla oznaczenia mnożenia w każdej z trzech występujących tu algebr Clifforda oraz utożsamiając  $J_{V_1 \oplus V_2}^C(V_1 \oplus V_2)$  z  $V_1 \oplus V_2$ )

$$\chi(\tau_1^{12} \cdot \tau_2^{12}) = (-1)^{q_1 \cdot p_2} \chi(\tau_1^{(1)} \cdot \tau_2^{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} \tau_1^{(2)} \cdot \tau_2^{(2)})$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{q_1 \cdot p_2} \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}) \\
&= (-1)^{q_1 \cdot p_2} \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_1^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_2^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_1^{(2)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_2^{(2)}) \\
&= (-1)^{q_1 \cdot p_2} \mathcal{J}_{V_1}(v_1^1) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_2^1) \cdots \mathcal{J}_{V_1}(v_{p_1}^1) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_1^2) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_2^2) \cdots \mathcal{J}_{V_1}(v_{p_2}^2) \\
&\quad \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_1^1) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_2^1) \cdots \mathcal{J}_{V_2}(w_{q_1}^1) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_1^2) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_2^2) \cdots \mathcal{J}_{V_2}(w_{q_2}^2),
\end{aligned}$$

która wobec tożsamości

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{V_1}(v_k^2) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_l^1) + \mathcal{J}_{V_2}(w_l^1) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_k^2) = (v_k^2 \oplus 0_2) \cdot (0_1 \oplus w_l^1) + (0_1 \oplus w_l^1) \cdot (v_k^2 \oplus 0_2) \\
&= 2\Phi_{Q_1 \oplus Q_2}(v_k^2 \oplus 0_2, 0_1 \oplus w_l^1) \triangleright \mathbf{1}_{C_\oplus} \equiv 2(\Phi_{Q_1}(v_k^2, 0_1) + \Phi_{Q_2}(0_2, w_l^1)) \triangleright \mathbf{1}_{C_\oplus} = 0_{C_\oplus}
\end{aligned}$$

przepisuje się w oczekiwanej postaci

$$\begin{aligned}
\chi(\tau_1^{12}, \tau_2^{12}) &= (-1)^{2q_1 \cdot p_2} \mathcal{J}_{V_1}(v_1^1) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_2^1) \cdots \mathcal{J}_{V_1}(v_{p_1}^1) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_1^1) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_2^1) \cdots \mathcal{J}_{V_2}(w_{q_1}^1) \\
&\quad \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_1^2) \cdot \mathcal{J}_{V_1}(v_2^2) \cdots \mathcal{J}_{V_1}(v_{p_2}^2) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_1^2) \cdot \mathcal{J}_{V_2}(w_2^2) \cdots \mathcal{J}_{V_2}(w_{q_2}^2) \\
&= \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_1^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_1^{(2)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_1(\tau_2^{(1)}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\tau_2^{(2)}) \equiv \chi(\tau_1^{12}) \cdot \chi(\tau_2^{12}).
\end{aligned}$$

W świetle (wielo-)K-liniowości wszystkich napotkanych powyżej odwzorowań i operacji nasze rozumowanie uogólnia się na przypadek (super)iloczynu dowolnych elementów skośnego iloczynu tensorowego algebr  $C_1$  i  $C_2$ . Mamy też równość

$$\chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) = m_{C_\oplus}(\mathbf{1}_{C_\oplus} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_\oplus}) = \mathbf{1}_{C_\oplus},$$

pozostaje zatem pokazać, że  $\chi$  jest izomorfizmem, co uczynimy konstruując homomorfizm doń odwrotny. Rozważmy odwzorowanie K-liniowe

$$\eta : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2 : (v, w) \longmapsto v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w.$$

Spełnia ono warunek Clifforda,

$$\begin{aligned}
\eta(v, w)^2 &= (v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w)(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w) = (-1)^{0 \cdot 1} v^2 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}^2 \\
&\quad + (-1)^{0 \cdot 0} v \cdot \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} \cdot w + (-1)^{1 \cdot 1} \mathbf{1}_{C_1} \cdot v \otimes_{\mathbb{K}} w \cdot \mathbf{1}_{C_2} + (-1)^{1 \cdot 0} \mathbf{1}_{C_1}^2 \otimes_{\mathbb{K}} w^2 \\
&= Q_1(v) \triangleright \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + v \otimes_{\mathbb{K}} w - v \otimes_{\mathbb{K}} w + \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} Q_2(w) \triangleright \mathbf{1}_{C_2} \\
&= (Q_1(v) + Q_2(w)) \triangleright (\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) \equiv (Q_1 \oplus Q_2)(v, w) \triangleright \mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2},
\end{aligned}$$

a zatem rozszerza się do unitalnego homomorfizmu K-algebr

$$\tilde{\eta} : C_\oplus \longrightarrow C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2,$$

przy czym – dla dowolnego  $v \in V_1$  –

$$\tilde{\eta} \circ \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) = \tilde{\eta}(\tilde{\mathcal{J}}_1(v) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\mathbf{1}_{C_2})) = \tilde{\eta}(\mathcal{J}_1(v) \cdot \mathbf{1}_{C_\oplus}) = \tilde{\eta}(v, 0_2) = v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}$$

i – dla dowolnego  $w \in V_2$  –

$$\tilde{\eta} \circ \chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w) = \tilde{\eta}(\tilde{\mathcal{J}}_1(\mathbf{1}_{C_1}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(w)) = \tilde{\eta}(\mathbf{1}_{C_\oplus} \cdot \mathcal{J}_2(w)) = \tilde{\eta}(0_1, w) = \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w,$$

a nadto

$$\tilde{\eta} \circ \chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) = \tilde{\eta}(\tilde{\mathcal{J}}_1(\mathbf{1}_{C_1}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_2(\mathbf{1}_{C_2})) = \tilde{\eta}(\mathbf{1}_{C_\oplus}^2) = \mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2} \equiv \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2},$$

co w połączeniu z obserwacją (rozumianą jako stwierdzenie dotyczące  $\mathbb{K}$ -algebr)

$$C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2 = \langle v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}, \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w, \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} \mid (v, w) \in V_1 \times V_2 \rangle_{\mathbb{K}},$$

a wobec homomorficznego charakteru  $\chi$  i  $\tilde{\eta}$ , daje nam pożądaną wniosek:

$$\tilde{\eta} \circ \chi = \text{id}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2}.$$

Z drugiej strony otrzymujemy

$$\begin{aligned} \chi \circ \tilde{\eta}(v, w) &= \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2} + \mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w) = \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{C_2}) + \chi(\mathbf{1}_{C_1} \otimes_{\mathbb{K}} w) \\ &= j_1(v) \cdot \mathbf{1}_{C_{\oplus}} + \mathbf{1}_{C_{\oplus}} \cdot j_2(w) = j_1(v) + j_2(w) = (v, 0_2) + (0_1, w) = (v, w) \end{aligned}$$

oraz

$$\chi \circ \tilde{\eta}(\mathbf{1}_{C_{\oplus}}) = \chi(\mathbf{1}_{C_1 \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_2}) = \mathbf{1}_{C_{\oplus}},$$

co wobec tożsamości (rozumianej jako równość  $\mathbb{K}$ -algebr)

$$C_{\oplus} = \langle (v, w), \mathbf{1}_{C_{\oplus}} \mid (v, w) \in V_1 \times V_2 \rangle_{\mathbb{K}}$$

daje nam relację komplementarną wobec poprzedniej,

$$\chi \circ \tilde{\eta} = \text{id}_{C_{\oplus}}.$$

□

Jako proste, a przydatne corollarium powyższego znajdujemy

**STWIERDZENIE 173.** *Przyjmijmy zapis Tw. 3.1.3. Obrazem względem funktora Cliff injektywnej izometrii przestrzeni kwadratowych o niezwyrodniałej dziedzinie jest (unitalny) monomorfizm ich algebr Clifforda. Takimż obrazem surjektywnej izometrii przestrzeni kwadratowych jest (unitalny) epimorfizm ich algebr Clifforda. Wreszcie też obrazem bijektywnej izometrii jest (unitalny) izomorfizm ich algebr Clifforda.*

■

Dowód: Ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia, dotycząca obrazu izomorfizmu przestrzeni kwadratowych, jest bezpośrednią konsekwencją funktorialnej natury Cliff, która implikuje, że funktorialny obraz odwrotności tegoż izomorfizmu jest odwrotnością obrazu samego izomorfizmu. Zajmiemy się więc dwiema pierwszymi składowymi tej tezy. Niechaj  $((V_{\alpha}, +_{\alpha}, P_{\alpha}, \bullet \mapsto 0_{\alpha}), \ell_{\alpha}), Q_{\alpha}), \alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami kwadratowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$  i niech  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  będzie izometrycznym monomorfizmem. Ten określa (kanonicznie, na gruncie Tw. 1.1.5) izometryczny izomorfizm

$$\lambda_{\varphi} : V_1 \rightsquigarrow \text{Im } \varphi,$$

jeśli zatem napiszemy – przy założeniu niezwyrodnienia  $Q_2$  i w odwołaniu do Stw. 35 –

$$V_2 = \text{Im } \varphi \oplus_{Q_2} \text{Im } \varphi^{\perp Q_2},$$

to na podstawie Tw. 3.1.4 dostaniemy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Cliff}(V_1, Q_1) & \xrightarrow{\text{Cliff}(\varphi)} & \text{Cliff}(V_2, Q_2) \equiv \text{Cliff}(\text{Im } \varphi \oplus_{Q_2} \text{Im } \varphi^{\perp Q_2}, Q_2) \\ \text{Cliff}(\lambda_\varphi) \downarrow & & \uparrow \chi \\ \text{Cliff}(\text{Im } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi}) & \xrightarrow{\iota_1} & \text{Cliff}(\text{Im } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}}) \end{array},$$

w którym  $\text{Cliff}(\lambda_\varphi)$  jest izomorfizmem na podstawie obronionej wcześniej ostatniej składowej tezy stwierdzenia,  $\iota_1$  zaś jest monomorfizmem

$$\begin{aligned} \iota_1 &: \text{Cliff}(\text{Im } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi}) \longrightarrow \text{Cliff}(\text{Im } \varphi, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}}) \\ &: \gamma \longmapsto \gamma \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{\text{Cliff}(\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}})}. \end{aligned}$$

Przemienność diagramu sprawdzamy na generatorach  $\text{Cliff}(V_1, Q_1)$ :

$$\begin{aligned} \chi \circ \iota_1 \circ \text{Cliff}(\lambda_\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}) &= \mathbf{1}_{C_2} = \text{Cliff}(\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}), \\ \chi \circ \iota_1 \circ \text{Cliff}(\lambda_\varphi)(v) &= \chi \circ \iota_1 \circ \varphi(v) = \chi(\varphi(v) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{1}_{\text{Cliff}(\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}, Q_2 \upharpoonright_{\text{Im } \varphi^{\perp Q_2}})}) \\ &= \tilde{\mathcal{J}}_1 \circ \varphi(v) \cdot \mathbf{1}_{C_2} \equiv \text{Cliff}(\varphi)(v), \end{aligned}$$

przy czym pierwsza tożsamość wynika stąd, że wszystkie występujące w niej odwzorowania są unitalnymi homomorfizmami  $\mathbb{K}$ -algebr. Ostatecznie otrzymujemy zatem przedstawienie

$$\text{Cliff}(\varphi) = \chi \circ \iota_1 \circ \text{Cliff}(\lambda_\varphi)$$

rozpatrywanego homomorfizmu  $\text{Cliff}(\varphi)$  w postaci złożenia monomorfizmów.

Na koniec zajmijmy się przypadkiem izometrii surjektywnej, którą będziemy oznaczać dotychczasowym symbolem  $\varphi$ . Zauważmy, że obraz względem  $\text{Cliff}(\varphi)$  układu generującego  $\text{Cliff}(V_1, Q_1)$  (jako  $\mathbb{K}$ -algebrę) to

$$\{\mathbf{1}_{C_2}\} \cup \mathcal{J}_{V_2}^{\mathbb{C}}(\text{Im } \varphi) \equiv \{\mathbf{1}_{C_2}\} \cup \mathcal{J}_{V_2}^{\mathbb{C}}(V_2)$$

(wszak  $\varphi$  jest surjekcją), czyli układ generujący  $\text{Cliff}(V_2, Q_2)$ , skoro jednak  $\text{Cliff}(\varphi)$  jest unitalnym homomorfizmem  $\mathbb{K}$ -algebr, to zachodzi

$$\begin{aligned} \text{Cliff}(\varphi)(C_1) &\equiv \text{Cliff}(\varphi)(\langle \mathbf{1}_{C_1}, v \mid v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}}) = \langle \text{Cliff}(\varphi)(\mathbf{1}_{C_1}), \text{Cliff}(\varphi)(v) \mid v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}} \\ &\equiv \langle \mathbf{1}_{C_2}, \varphi(v) \mid v \in V_1 \rangle_{\mathbb{K}} = \langle \mathbf{1}_{C_2}, w \mid w \in V_2 \rangle_{\mathbb{K}} \equiv C_2. \end{aligned}$$

□

Dotychczasowe nasze rozważania przygotowały nas do przeprowadzenia szczegółowej analizy struktury algebr Clifforda skończenie wymiarowych przestrzeni kwadratowych, której zwieńczeniem będzie klasyfikacja tychże algebr w fizycznie istotnych przypadkach:  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Rzeczoną analizę zaczniemy od zbadania wymiaru i wskazania naturalnej bazy algebry Clifforda.

**STWIERDZENIE 174.** *Przyjmijmy zapis Def. 111 oraz Uwagi 35 i niechaj  $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ ,  $N = \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$  będzie bazą przestrzeni kwadratowej  $V$ . Zbiór wektorów*

$$\{e^{\mathbb{C}}, v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdots v_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N, k \in \overline{1, N}}$$

stanowi bazę algebry Clifforda  $\text{Cliff}(V, Q)$ . W szczególności więc

$$(3.1.10) \quad \dim_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(V, Q) = 2^N.$$

■

*Dowód:* Przeprowadzimy indukcję względem wymiaru  $N$ , poczynając od przypadku  $N = 1$ . Niechaj zatem  $v \in V \setminus \{0_V\}$ , a wtedy homomorfizm przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowych

$$\iota_V : V \longrightarrow \langle e, v \rangle_{\mathbb{K}} \subset \text{Cliff}(V, Q) : \lambda \triangleright v \longmapsto j_V^{\mathbb{C}}(\lambda \triangleright v) \equiv \lambda \triangleright v$$

jest odwzorowaniem Clifforda,

$$\iota_V(\lambda \triangleright v)^2 = \lambda^2 \triangleright \iota_V(v)^2 = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e^{\mathbb{C}} = Q(\lambda \triangleright v) \triangleright e^{\mathbb{C}},$$

którego obraz generuje  $\langle e, v \rangle_{\mathbb{K}}$  jako  $\mathbb{K}$ -algebrę. Ponadto dla dowolnego odwzorowania Clifforda  $\varphi : V \longrightarrow \mathfrak{A}$  jest  $\varphi(\lambda \triangleright v) = \lambda \triangleright_{\mathfrak{A}} \varphi(v)$ , więc oznaczmy  $a := \varphi(v) \in \mathfrak{A}$ , spełniający warunek  $a^2 = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$ , możemy zdefiniować odwzorowanie (jawnie unitalne i  $\mathbb{K}$ -liniowe)

$$\tilde{\varphi} : \langle e, v \rangle_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathfrak{A} : \lambda \triangleright e^{\mathbb{C}} + \mu \triangleright v \longmapsto \lambda \triangleright \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu \triangleright a,$$

przy czym

$$\tilde{\varphi} \circ \iota_V(\lambda \triangleright v) = \lambda \triangleright_{\mathfrak{A}} a = \varphi(\lambda \triangleright v),$$

a nadto

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}((\lambda_1 \triangleright e^{\mathbb{C}} + \mu_1 \triangleright v) \cdot (\lambda_2 \triangleright e^{\mathbb{C}} + \mu_2 \triangleright v)) &= \tilde{\varphi}((\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_2 +_{\mathbb{K}} \mu_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)) \triangleright e^{\mathbb{C}} \\ &\quad + (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 +_{\mathbb{K}} \lambda_2 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright v) = (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_2 +_{\mathbb{K}} \mu_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)) \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \\ &\quad +_{\mathfrak{A}} (\lambda_1 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_2 +_{\mathbb{K}} \lambda_2 \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright_{\mathfrak{A}} a = (\lambda_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} (\lambda_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \\ &\equiv \tilde{\varphi}(\lambda_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_1 \triangleright_{\mathfrak{A}} a) \cdot_{\mathfrak{A}} \tilde{\varphi}(\lambda_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} +_{\mathfrak{A}} \mu_2 \triangleright_{\mathfrak{A}} a). \end{aligned}$$

Wnioskujemy więc, na podstawie Stw. 166, że  $((\langle e^{\mathbb{C}}, v \rangle_{\mathbb{K}}, \iota_V), \iota_V)$  jest algebrą Clifforda dla  $(\langle v \rangle_{\mathbb{K}} \equiv V, Q)$  i – zgodnie z postulatem –

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}, Q) \equiv \dim_{\mathbb{K}} \langle e^{\mathbb{C}}, v \rangle_{\mathbb{K}} = 2 \equiv 2^1.$$

Założmy następnie, że dowiedziona przez nas teza jest prawdziwa dla dowolnego  $N < N_0$  ( $N_0$  ustalone), i niech  $(V, Q)$  będzie przestrzenią kwadratową nad  $\mathbb{K}$  wymiaru  $\dim_{\mathbb{K}} V = N_0$ , w której wybieramy bazę  $Q$ -ortogonalną  $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N_0}}$ , co uczyniwszy, rozkładamy  $V$  na sumę  $Q$ -ortogonalną podprzestrzeni

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_{N_0-1} \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}} \equiv V_{N_0-1} \oplus_Q \langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}},$$

wprowadzając przy tym oznaczenia  $Q_{N_0-1} \equiv Q \upharpoonright_{V_{N_0-1}}$  i  $Q_{N_0} \equiv Q \upharpoonright_{\langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}}$ . W świetle Tw. 3.1.4, a dalej – dotychczasowych ustaleń i założenia indukcyjnego możemy teraz zapisać

$$\begin{aligned} \text{Cliff}(V, Q) &\cong \text{Cliff}(V_{N_0-1}, Q_{N_0-1}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}, Q_{N_0}) \\ &\cong (\langle e_{N_0-1}^{\mathbb{C}} \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N_0-1} \langle v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdot \dots \cdot v_{i_k} \rangle_{\mathbb{K}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} (\langle e_{N_0}^{\mathbb{C}} \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}) \\ &= \langle e_{N_0-1}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{K}} e_{N_0}^{\mathbb{C}} \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_{N_0-1}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{K}} v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N_0-1} \langle v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdots v_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} e_{N_0}^C \rangle_{\mathbb{K}} \\ & \bigoplus_{k=1}^{N_0-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N_0-1} \langle v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdots v_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} v_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

gdzie  $e_{N_0-1}^C$  i  $e_{N_0}^C$  są jednościami w odnośnych algebrach Clifforda. Z powyższego wyniku wprost pożądana równość (3.1.10), a nadto – wzięwszy pod uwagę jawną postać (3.1.9) użytego tu izomorfizmu  $\mathbb{K}$ -algebr – stwierdzamy, że baza  $\text{Cliff}(V, Q)$  otrzymana jako izomorficzny obraz otrzymanej powyżej bazy algebry  $\text{Cliff}(V_{N_0-1}, Q_{N_0-1}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle e_{N_0} \rangle_{\mathbb{K}}, Q_{N_0})$  wzdłuż  $\chi$  jest postaci wskazanej w tezie dowodzonego stwierdzenia.  $\square$

W następnej kolejności wyróżnimy element algebry Clifforda, który odegra istotną rolę nie tylko w klasyfikacji niskowymiarowych rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, ale też – w dyskusji ich reprezentacji, więc i w zastosowaniach fizykalnych (w których nosi miano **operatora chiralności**).

DEFINICJA 114. Przyjmijmy zapis Def. 20, 111, 112, Przykł. 1 (2) i 2 (2) oraz Stw. 174 (przy czym zakładamy  $\text{char } \mathbb{K} = 0$ ) i niechaj

$$\xi_V : \bigwedge^{\bullet} V \xrightarrow{\cong} \text{Cliff}(V, Q)$$

będzie (jedynym)  $\mathbb{K}$ -liniowym rozszerzeniem przyporządkowania określonego na tensorach prostych ( $v_i \in V$ ,  $i \in \overline{1, N}$  są dowolne)

$$\xi_V(1_{\mathbb{K}}) := e^C,$$

$$\xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \triangleright v_{\sigma(1)} \cdot v_{\sigma(2)} \cdots v_{\sigma(k)}, \quad k \in \overline{1, N}.$$

Ponadto niech  $\Delta \in \bigwedge^N V^* \setminus \{0\}$  będzie dowolnym niezerowym wyznacznikiem na  $V$ . **Element kanoniczny** algebry Clifforda  $\text{Cliff}(V, Q)$  (**stowarzyszony z  $\Delta$** ) to wektor  $e_{\Delta} \in \text{Cliff}(V, Q)$  określony przez warunek

$$\forall_{v_1, v_2, \dots, v_N \in V} : \xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_N) =: \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \triangleright e_{\Delta}.$$

▲

UWAGA 38. Powyższa definicja ma sens, gdyż dla dowolnej bazy ortogonalnej  $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$  przestrzeni  $V$  homomorfizm  $\xi_V$  przyporządkowuje elementom odnośnej bazy  $\{1_{\mathbb{K}}, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N, k \in \overline{1, N}}$  wektory

$$\begin{aligned} \xi_V(1_{\mathbb{K}}) &= e^C, \\ \xi_V(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \triangleright e_{\sigma(1)} \cdot e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(k)} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma)^2 \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_k = e_1 \cdot e_2 \cdots e_k, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia tożsamość wynika wprost z (jednej z wielu) definicji znaku permutacji jako odwzorowania

$$\text{sgn} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{-1, 1\} : \sigma \longmapsto (-1)^{\tau(\sigma)},$$

w którego zapisie  $\tau(\sigma)$  jest liczbą czynników w (dowolnym) rozkładzie permutacji  $\sigma$  na transpozycje, oraz z relacji skośnej przemienności

$$(3.1.11) \quad \forall_{\substack{i,j \in \overline{1,N} \\ i \neq j}} : e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$$

spełnianych przez obrazy elementów bazy  $\mathcal{E}$  w  $\text{Cliff}(V, Q)$ . Tym samym odwzorowanie ( $\mathbb{K}$ -liniowe)  $\xi_V$  przeprowadza bazę dziedziny na bazę przeciwdziedziny, o której mowa w tezie Stw. 174, jest zatem izomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowych. Ponadto dla dowolnych wektorów  $v_\alpha = v_\alpha^j \triangleright e_i$ ,  $\alpha \in \overline{1, N}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N) &= v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \triangleright \xi_V(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_N}) \\ &= \frac{1}{N!} v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \triangleright \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \triangleright e_{i_{\sigma(1)}} \cdot e_{i_{\sigma(2)}} \cdots e_{i_{\sigma(N)}}, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej sumie wyrazy o indeksach  $i_j = i_k$  dla  $j \neq k$  występują w parach odpowiadających  $(\sigma, \sigma \circ \tau_{j,k})$ , których wkłady do sumy różnią się znakiem wobec relacji  $\text{sgn}(\sigma) = -\text{sgn}(\sigma \circ \tau_{j,k})$ , a zatem ostatecznie niezerowy przyczynik do tej sumy może pochodzić jedynie od tych  $N$ -tek indeksów  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$ , które stanowią permutacje (dowolne) zbioru  $\overline{1, N}$ ,

$$\begin{aligned} &\xi_V(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \triangleright e_{\sigma \circ \rho(1)} \cdot e_{\sigma \circ \rho(2)} \cdots e_{\sigma \circ \rho(N)} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma \circ \rho \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma \circ \rho) \triangleright e_{\sigma \circ \rho(1)} \cdot e_{\sigma \circ \rho(2)} \cdots e_{\sigma \circ \rho(N)} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \triangleright e_{\sigma(1)} \cdot e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(N)} \\ &\equiv \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_N \\ &\equiv \Delta_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, \dots, v_N) \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_N. \end{aligned}$$

Istotnie, wobec  $N$ -liniowości i skośnej symetrii wyznacznika oraz jego unormowania dostajemy, na mocy argumentów analogicznych do tych użytych powyżej,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{E}}(v_1, v_2, \dots, v_N) &= v_1^{i_1} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{i_2} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{i_N} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_N}) \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \cdot_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathcal{E}}(e_{\rho(1)}, e_{\rho(2)}, \dots, e_{\rho(N)}) \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)} \cdot_{\mathbb{K}} \text{sgn}(\rho) \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\rho) v_1^{\rho(1)} \cdot_{\mathbb{K}} v_2^{\rho(2)} \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} v_N^{\rho(N)}. \end{aligned}$$

Na koniec przywołujemy oczywistą równość

$$\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^N V^* = \binom{N}{N} = 1,$$

z której wyciągamy wniosek o istnieniu skalar<sup>2</sup>  $\lambda_{\Delta} \in \mathbb{K}$  spełniającego relację

$$\Delta_{\mathcal{E}} = \lambda_{\Delta} \triangleright \Delta,$$

<sup>2</sup>Łatwo widzieć, że skalar ten to  $\Delta(\mathcal{E})^{-1}$ .

więc ostatecznie

$$\xi_V(\cdot) = \Delta(\cdot) \triangleright e_\Delta,$$

gdzie wektor  $e_\Delta \in \text{Cliff}(V, Q)$  stopnia  $N$  jest dany jednoznacznie (w szczególności nie zależy od argumentu odwzorowania z lewej strony równości).

$\bar{\wedge}$

Mamy istotne

**STWIERDZENIE 175.** *Przyjmijmy zapis Def. 113 oraz 114 i niechaj  $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$  będzie dowolną bazą ortogonalną w przestrzeni kwadratowej  $V$ , a  $\Delta_{\mathcal{E}}$  – wyznacznikiem na  $V$  określonym przez tę bazę według schematu opisanego w Def. 20. Element kanoniczny stowarzyszony z  $\Delta_{\mathcal{E}}$  przyjmuje postać*

$$(3.1.12) \quad e_{\Delta_{\mathcal{E}}} = e_1 \cdot e_2 \cdots e_N.$$

Niechaj dalej  $\Delta \in \wedge^N V^* \setminus \{0\}$  będzie dowolnym (niezerowym) wyznacznikiem na  $V$  i niech  $\lambda_\Delta \in \mathbb{K}$  będzie skalarem, o którym mowa w tezie Stw. 25. Wówczas zachodzi tożsamość

$$e_\Delta^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_\Delta \triangleright e^C,$$

jeśli zatem forma kwadratowa  $Q$  jest niezwyrodniała, to element kanoniczny jest odwracalny w  $\text{Cliff}(V, Q)$ , w przeciwnym zaś razie spełnia on tożsamość

$$e_\Delta^2 = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}.$$

Ponadto

$$(3.1.13) \quad \forall \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) : e_\Delta \cdot \gamma = J_V^{N-1}(\gamma) \cdot e_\Delta.$$

■

*Dowód:* Równość (3.1.12) wynika bezpośrednio z rachunku przeprowadzonego w obrębie Uwagi 38. Jeśli teraz w formule definiującej  $\lambda_\Delta$  wypisanej w treści Stw. 25 dokonamy podstawienia  $v_i \equiv w_i := e_i$ ,  $i \in \overline{1, N}$ , to otrzymamy równość

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \cdot \mathbb{K} \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \cdot \mathbb{K} \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \det_{(N)}(\Phi(e_i, e_j))_{i, j \in \overline{1, N}} = \prod_{i=1}^N \Phi_Q(e_i, e_i) \\ &\equiv \prod_{i=1}^N Q(e_i), \end{aligned}$$

wobec czego – w świetle udowodnionej wcześniej równości (3.1.12) – dostajemy

$$\begin{aligned} e_{\Delta_{\mathcal{E}}}^2 &\equiv e_1 \cdot e_2 \cdots e_N \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots e_N = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} e_1^2 \cdot e_2^2 \cdots e_N^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i=1}^N Q(e_i) \triangleright e^C \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \triangleright e^C. \end{aligned}$$

Wobec oczywistych tożsamości

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \cdot \mathbb{K} \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E})^2 = \det_{(N)}(\Phi(e_i, e_j))_{i, j \in \overline{1, N}} = \lambda_\Delta \cdot \mathbb{K} \Delta(\mathcal{E})^2, \\ e_{\Delta_{\mathcal{E}}} &\equiv \Delta_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) \triangleright e_{\Delta_{\mathcal{E}}} = \xi_V(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_N) = \Delta(\mathcal{E}) \triangleright e_\Delta, \end{aligned}$$

słusznych dla dowolnego niezerowego wyznacznika  $\Delta$  na  $V$  (a taki spełnia warunek  $\Delta(\mathcal{E}) \neq 0_{\mathbb{K}}$ ), możemy w takim razie zapisać

$$e_\Delta^2 = \Delta(\mathcal{E})^{-2} \triangleright e_{\Delta_{\mathcal{E}}}^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathcal{E})^{-2} \triangleright (\lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \triangleright e^C)$$



$$= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathcal{E})^{-2} \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \triangleright e^C = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta} \triangleright e^C.$$

Jeśli teraz  $Q$  jest niezwyrodniała, to jak jasno wynika z rachunku otwierającego niniejszy dowód,  $\lambda_{\Delta_{\mathcal{E}}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ , zatem także  $\lambda_{\Delta} \neq 0_{\mathbb{K}}$ , a wówczas

$$e_{\Delta}^{-1} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta}^{-1} \triangleright e^C.$$

Jeśli natomiast  $Q$  jest zwyrodniała, to  $\lambda_{\Delta} = 0_{\mathbb{K}}$  i w konsekwencji  $e_{\Delta}^2 = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V,Q)}$ . W dowodzie ostatniej składowej tezy stwierdzenia wykorzystujemy ustaloną wcześniej relację między  $e_{\Delta}$  i  $e_{\Delta_{\mathcal{E}}}$  w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnego  $v = v^i \triangleright e_i \in V$  z wykorzystaniem relacji (3.1.11),

$$\begin{aligned} e_{\Delta} \cdot v &\equiv v^i \triangleright e_{\Delta} \cdot e_i = v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_N \cdot e_i \\ &= (-1)^{N-i} v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_{i-1} \cdot e_i^2 \cdot e_{i+1} \cdot e_{i+2} \cdots e_N \\ &= (-1)^{N-i} (-1)^{i-1} v^i \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_i \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots e_N \equiv (-1)^{N-1} v \cdot e_{\Delta} \\ &\equiv J_V^{N-1}(v) \cdot e_{\Delta}. \end{aligned}$$

Postulowana tożsamość jawi nam się teraz jako prosta konsekwencja powyższego (wszak  $\text{Cliff}(V, Q)$  jest generowana jako  $\mathbb{K}$ -algebra przez  $\text{Im } J_V^C$ ) oraz homomorficznego charakteru inwolucji kanonicznej.  $\square$

Dalsze nasze dociekania podporządkowane celowi nadrzędnemu, jakim jest klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda oraz ich reprezentacji, wiodą nas wprost do dyskusji centrum algebry Clifforda oraz jego super-partnera, którego opisuje

**DEFINICJA 115.** Przyjmijmy zapis Def. 113 oraz Przykł. 31 (9). **Centrum algebry Clifforda**  $\text{Cliff}(V, Q)$  to jej podalgebra

$$\begin{aligned} Z(\text{Cliff}(V, Q)) &= \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall \tilde{\gamma} \in \text{Cliff}(V, Q) : [\gamma, \tilde{\gamma}] = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \} \\ &\equiv \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall v \in V : [\gamma, v] = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \}. \end{aligned}$$

**Antycentrum algebry Clifforda**  $\text{Cliff}(V, Q)$  to jej podprzestrzeń  $\mathbb{K}$ -liniowa

$$\begin{aligned} AZ(\text{Cliff}(V, Q)) &= \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall \tilde{\gamma} \in \text{Cliff}(V, Q) : \gamma \cdot \tilde{\gamma} = J_V(\tilde{\gamma}) \cdot \gamma \} \\ &\equiv \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \forall v \in V : \{ \gamma, v \} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \}. \end{aligned}$$

▲

Najprostszego uszczegółowienia charakterystyki wprowadzonych powyżej obiektów dostarcza

**STWIERDZENIE 176.** *Przyjmijmy zapis Def. 115.  $Z(\text{Cliff}(V, Q))$  jest podalgebrą  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowaną  $\mathbb{K}$ -algebry  $\text{Cliff}(V, Q)$ , natomiast  $AZ(\text{Cliff}(V, Q))$  jest podprzestrzenią  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradowaną przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $\text{Cliff}(V, Q)$ , w rozumieniu Def. 104.*

■

Dowód: Zarówno centrum, jak i antycentrum  $\text{Cliff}(V, Q)$  są podprzestrzeniami zachowywanymi przez inwolucję kanoniczną, gdyż

$$\begin{aligned} \forall_{(v, \gamma) \in V \times Z(\text{Cliff}(V, Q))} : J_V(\gamma).v &= -J_V(\gamma).J_V(v) = -J_V(\gamma.v) = -J_V(v.\gamma) \\ &= -J_V(v).J_V(\gamma) = v.J_V(\gamma) \end{aligned}$$

i, podobnie,

$$\begin{aligned} \forall_{(v, \gamma) \in V \times AZ(\text{Cliff}(V, Q))} : J_V(\gamma).v &= -J_V(\gamma).J_V(v) = -J_V(\gamma.v) = J_V(v.\gamma) \\ &= J_V(v).J_V(\gamma) = -v.J_V(\gamma). \end{aligned}$$

Stąd też obie dziedziczą  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradację z  $\text{Cliff}(V, Q)$  na mocy Stw. 172. Przy tym centrum jest w oczywisty sposób podalgebrą  $\text{Cliff}(V, Q)$ .  $\square$

Strukturę centrum i antycentrum algebry Clifforda opisuje

**TWIERDZENIE 3.1.5.** *Przyjmijmy zapis Def. 115 (przy założeniu  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ ) i niech  $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ , a wtedy*

- (i)  $N \in 2\mathbb{N} + 1 \implies e_{\Delta} \in Z(\text{Cliff}(V, Q))$ ;
- (ii)  $N \in 2\mathbb{N} + 2 \implies e_{\Delta} \in AZ(\text{Cliff}(V, Q))$ .

Ponadto jeśli  $Q$  jest niezwyrodniała, to

$$\begin{aligned} \text{(i')} \quad N \in 2\mathbb{N} + 1 &\implies \begin{cases} Z(\text{Cliff}(V, Q)) = \langle e^{\mathbb{C}} \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}} ; \\ AZ(\text{Cliff}(V, Q)) = \{ \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \} \end{cases} ; \\ \text{(ii')} \quad N \in 2\mathbb{N} + 2 &\implies \begin{cases} Z(\text{Cliff}(V, Q)) = \langle e^{\mathbb{C}} \rangle_{\mathbb{K}} \\ AZ(\text{Cliff}(V, Q)) = \langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}} \end{cases} . \end{aligned}$$

■

Dowód: Punkty (i) i (ii) wynikają bezpośrednio z tożsamości (3.1.13). Załóżmy zatem, że  $Q$  jest formą niezwyrodniałą, i rozważmy składowe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -jednorodnie centrum i antycentrum algebry Clifforda, co możemy uczynić w odwołaniu do Stw. 176. Niechaj  $\gamma \in AZ(\text{Cliff}(V, Q))^1 \equiv AZ(\text{Cliff}(V, Q)) \cap \text{Cliff}(V, Q)^1$ , a wtedy wobec

$$\forall_{v \in V} : \gamma.v = -v.\gamma$$

zachodzi

$$(3.1.14) \quad \gamma.e_{\Delta} = (-1)^N e_{\Delta}.\gamma,$$

ale też – na mocy Równ. (3.1.13) i w świetle założenia dotyczącego parzystości  $\gamma$  –

$$e_{\Delta}.\gamma = J_V^{N-1}(\gamma).e_{\Delta} = (-1)^{N-1} \gamma.e_{\Delta},$$

więc ostatecznie

$$\gamma.e_{\Delta} = (-1)^N \cdot (-1)^{N-1} \gamma.e_{\Delta} = -\gamma.e_{\Delta},$$

co przy  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  (a takie poczyniliśmy założenie) oznacza równość

$$\gamma.e_{\Delta} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}.$$

W świetle Stw. 175 wnioskujemy zatem, że

$$\gamma \equiv \gamma.e_{\Delta}.e_{\Delta}^{-1} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}.e_{\Delta}^{-1} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)},$$

czyli dla niezwyrodniałej formy kwadratowej dostajemy

$$(3.1.15) \quad AZ(\text{Cliff}(V, Q))^1 = \{ \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)} \}.$$

Jeśli ponadto  $N \in 2\mathbb{N} + 1$ , to z porównania tożsamości (3.1.16),

$$(3.1.16) \quad \gamma \cdot e_\Delta = -e_\Delta \cdot \gamma,$$

słusznej dla dowolnego elementu antycentralnego  $\gamma \in AZ(\text{Cliff}(V, Q)) \equiv AZ(\text{Cliff}(V, Q))^0$ , z tożsamością

$$e_\Delta \cdot \gamma = J_V^{N-1}(\gamma) \cdot e_\Delta = \gamma \cdot e_\Delta$$

wyciągamy oczekiwany wniosek

$$AZ(\text{Cliff}(V, Q)) = \{\mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}\}.$$

Rozważmy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\varphi_\Delta : \text{Cliff}(V, Q) \circlearrowleft : \gamma \mapsto e_\Delta \cdot \gamma.$$

Wobec odwracalności elementu kanonicznego jest ono automorfizmem przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $\text{Cliff}(V, Q)$ , a przy tym jeśli  $\gamma \in Z(\text{Cliff}(V, Q))$ , to

$$\forall_{v \in V} : \varphi_\Delta(\gamma) \cdot v \equiv e_\Delta \cdot \gamma \cdot v = e_\Delta \cdot v \cdot \gamma = J_V^{N-1}(v) \cdot e_\Delta \cdot \gamma = (-1)^{N-1} v \cdot \varphi_\Delta(\gamma),$$

i – podobnie – jeśli  $\gamma \in AZ(\text{Cliff}(V, Q))$ , to

$$\forall_{v \in V} : \varphi_\Delta(\gamma) \cdot v \equiv e_\Delta \cdot \gamma \cdot v = -e_\Delta \cdot v \cdot \gamma = -J_V^{N-1}(v) \cdot e_\Delta \cdot \gamma = (-1)^N v \cdot \varphi_\Delta(\gamma),$$

zatem prawdziwe są następujące implikacje:

$$N \in 2\mathbb{N} + 1 \implies \begin{cases} \varphi_\Delta(Z(\text{Cliff}(V, Q))) = Z(\text{Cliff}(V, Q)) \\ \varphi_\Delta(AZ(\text{Cliff}(V, Q))) = AZ(\text{Cliff}(V, Q)) \end{cases},$$

(3.1.17)

$$N \in 2\mathbb{N} + 2 \implies \varphi_\Delta(Z(\text{Cliff}(V, Q))) = AZ(\text{Cliff}(V, Q)).$$

Jak jasno widać, uzupełnienie dyskusji struktury antycentrum w przypadku  $N \in 2\mathbb{N} + 2$  wymaga więc zrozumienia struktury centrum, czym zajmiemy się obecnie.

Zacniemy od wyznaczenia składowej parzystej centrum,  $Z(\text{Cliff}(V, Q))^0 \equiv Z(\text{Cliff}(V, Q)) \cap \text{Cliff}(V, Q)^0$ . Twierdzimy, że – niezależnie od parzystości wymiaru  $V$  – składowa ta jest rozpięta na jedności algebry,

$$(3.1.18) \quad Z(\text{Cliff}(V, Q))^0 = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

a dowód opieramy na indukcji względem tegoż wymiaru  $N$ . Słuszność postulowanej równości w przypadku  $N = 1$  staje się oczywista, gdy wziąć pod uwagę model algebry Clifforda skonstruowany w pierwszym kroku indukcyjnego dowodu Stw. 174, założymy zatem, że równość ta jest prawdziwa dla  $N < N_0$  ( $N_0$  ustalone) i niech  $\dim_{\mathbb{K}} V = N_0$ . Wybierzmy  $v \in V$  o własności  $Q(v) \neq 0$  (na co pozwala założenie o niezwyrodnieniu  $Q$ ), a wtedy – w świetle Stw. 35 – możemy dokonać rozkładu  $Q$ -ortogonalnego

$$V = \langle v \rangle_{\mathbb{K}} \oplus_Q \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q},$$

przy czym – rzecz jasna –  $\dim_{\mathbb{K}} \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q} = \dim_{\mathbb{K}} V - 1 < N_0$ . W tym momencie możemy odwołać się do Tw. 3.1.4, aby przerzucić rachunki do algebry kanonicznie izomorficznej z  $\text{Cliff}(V, Q)$ , jaką jest  $\text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}, Q \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}, Q \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}})$ , co okaże się nader wygodne. Przyjawszy dla skrótu oznaczenia  $C_v \equiv \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}, Q \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}})$  i  $C_{\perp} \equiv \text{Cliff}(\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}, Q \upharpoonright_{\langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}})$  i wybrawszy dla  $C_v$  model  $\langle e_v^C, v \rangle_{\mathbb{K}}$  jak w dowodzie

Stw. 174, rozważmy obraz dowolnego elementu  $\gamma \in Z(\text{Cliff}(V, Q))^0$  w  $C_v \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\perp}$  – ten jest postaci

$$\eta(\gamma) = e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1$$

dla pewnych  $w^k \in \text{Cliff}(V, Q)_{\perp}^1$ ,  $k \in \{0, 1\}$  (wszak suma stopni czynników tensorowych w każdym ze składników sumy ma być parzysta, bo taki jest stopień  $\gamma$ ). Podobnie dla dowolnego  $x = \lambda \triangleright_V v + y \in V$ , zapisanego w terminach  $\lambda \in \mathbb{K}$  i  $y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}$ , otrzymujemy

$$\eta(x) = e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_{\perp}^C,$$

gdzie  $e_{\perp}^C \in C_{\perp}$  jest odnośną jednością. Na podstawie powyższych wzorów obliczamy

$$\begin{aligned} \eta(\gamma.x) &= (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1) \cdot (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_{\perp}^C) \\ &= e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 \cdot y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1 \cdot y - \lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \eta(x.\gamma) &= (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} e_{\perp}^C) \cdot (e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1) \\ &= e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} y \cdot w^0 + \lambda \triangleright v \otimes_{\mathbb{K}} w^0 - v \otimes_{\mathbb{K}} y \cdot w^1 + \lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^1, \end{aligned}$$

a stąd – wobec centralności  $\gamma$  –

$$\begin{aligned} 0 &= \eta([\gamma, x]) = e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} [w^0, y] + v \otimes_{\mathbb{K}} \{w^1, y\} - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^1 \\ &= e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} ([w^0, y] - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright w^1) + v \otimes_{\mathbb{K}} \{w^1, y\}, \end{aligned}$$

co z racji liniowej niezależności składników pozwala wnioskować, że

$$\forall_{y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}} : \{w^1, y\} = \mathbf{0}_{C_{\perp}},$$

czyli – w świetle Równ. (3.1.15) –

$$w^1 \in AZ(C_{\perp}) \cap \text{Cliff}(V, Q)_{\perp}^1 \equiv AZ(C_{\perp})^1 = \{\mathbf{0}_{C_{\perp}}\},$$

a dalej – wobec tego –

$$\forall_{y \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}} : [w^0, y] = [w^0, y] - 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \triangleright w^1 = \mathbf{0}_{C_{\perp}},$$

co na gruncie założenia indukcyjnego przyprowadza nas do przekonania, że

$$w^0 \in Z(C_{\perp}) \cap \text{Cliff}(V, Q)_{\perp}^0 \equiv Z(C_{\perp})^0 = \langle e_{\perp}^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

tj.  $w^0 = \mu \triangleright e_{\perp}^C$  dla pewnego skalaru  $\mu \in \mathbb{K}$ . Koniec końców otrzymujemy

$$\gamma = \chi(e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} w^0 + v \otimes_{\mathbb{K}} w^1) = \chi(e_v^C \otimes_{\mathbb{K}} \mu \triangleright e_{\perp}^C) \equiv \mu \triangleright \chi(\mathbf{1}_{C_v \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}} C_{\perp}}) = \mu \triangleright e^C.$$

Udowodniona tym samym równość (3.1.18) pozwala dokończyć dowód twierdzenia przy użyciu obserwacji (3.1.17), oto bowiem w przypadku  $N \in 2\mathbb{N} + 2$

$$\begin{aligned} AZ(\text{Cliff}(V, Q)) &\equiv AZ(\text{Cliff}(V, Q))^0 = \varphi_{\Delta}(Z(\text{Cliff}(V, Q))^0) = \varphi_{\Delta}(\langle e^C \rangle_{\mathbb{K}}) \\ &= \langle \varphi_{\Delta}(e^C) \rangle_{\mathbb{K}} = \langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

(co wynika z Równ. (3.1.15) oraz z tego, że  $\varphi_{\Delta}$  jest parzysty), więc też – wtórnie –

$$Z(\text{Cliff}(V, Q)) = \varphi_{\Delta}(AZ(\text{Cliff}(V, Q))) = \varphi_{\Delta}(\langle e_{\Delta} \rangle_{\mathbb{K}}) = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}},$$

a w przypadku  $N \in 2\mathbb{N} + 1$

$$Z(\text{Cliff}(V, Q))^1 = \varphi_\Delta(Z(\text{Cliff}(V, Q))^0) = \langle e_\Delta \rangle_{\mathbb{K}}$$

(co wynika z faktu, że  $\varphi_\Delta$  jest nieparzysty), zatem

$$Z(\text{Cliff}(V, Q)) = Z(\text{Cliff}(V, Q))^0 \oplus Z(\text{Cliff}(V, Q))^1 = \langle e^C \rangle_{\mathbb{K}} \oplus \langle e_\Delta \rangle_{\mathbb{K}}.$$

□

Pierwszy z istotnych wyników pozwalających oswoić nieco bestiariusm algebr Clifforda przy użyciu wprowadzonych powyżej obiektów przynosi

**TWIERDZENIE 3.1.6.** *Przyjmijmy zapis Def. 114 oraz Stw. 25, zakładając przy tym, że forma kwadratowa  $Q$  na przestrzeni  $V$  wymiaru  $\dim_{\mathbb{K}} V = N < \infty$  jest niezwyrodniała. Ilekroć można wybrać wyznacznik  $\Delta \in \Lambda^N V^*$  w taki sposób, że*

$$(3.1.19) \quad \lambda_\Delta = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}},$$

czyli w szczególności  $e_\Delta^2 = e^C$ , to istnieje kanoniczny unitalny homomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\mu} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \text{Cliff}(V, -Q)$$

o własności

$$\tilde{\mu}(e_\Delta) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \triangleright (e_\Delta^-)^{N+1},$$

gdzie  $e_\Delta^-$  jest elementem kanonicznym algebry  $\text{Cliff}(V, -Q)$  stowarzyszonym z tym samym wyznacznikiem  $\Delta$  na przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $V$  będącej nośnikiem przeciwnej struktury kwadratowej  $-Q$ . W przypadku  $N \in 2\mathbb{N} + 2$  homomorfizm ten jest izomorfizmem. ■

*Dowód:* Niechaj  $\lambda_\Delta$  będzie skalarom określonym, w sposób opisany w Stw. 25, przez dowolny niezerowy wyznacznik  $\Delta$  na przestrzeni  $V$  z formą kwadratową  $Q$  i oznaczmy jako  $\lambda_\Delta^-$  skalar określony przez ten sam wyznacznik, gdy  $V$  wyposażymy w formę kwadratową  $-Q$ . Wówczas dla dowolnych układów wektorów  $v_i, w_i \in V$ ,  $i \in \overline{1, N}$  otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \lambda_\Delta^- \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \dots, w_N) &= \det_{(N)}(\Phi_{-Q}(v_i, w_j))_{i, j \in \overline{1, N}} \\ &\equiv \det_{(N)}(-\Phi_Q(v_i, w_j))_{i, j \in \overline{1, N}} = (-1)^N \det_{(N)}(\Phi_Q(v_i, w_j))_{i, j \in \overline{1, N}} \\ &= (-1)^N \lambda_\Delta \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(v_1, v_2, \dots, v_N) \cdot_{\mathbb{K}} \Delta(w_1, w_2, \dots, w_N), \end{aligned}$$

z której wynika tożsamość

$$(3.1.20) \quad \lambda_\Delta^- = (-1)^N \lambda_\Delta.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\mu : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, -Q) \equiv C_- : v \longmapsto e_\Delta^- \bullet v,$$

wprowadzając przy tym – gwoli przejrzystości zapisu dalszego rozumowania – osobny symbol  $\bullet$  na oznaczenie mnożenia w algebrze  $C_-$  (z jednością, którą oznaczymy jako  $e_-^C$ ). Przywoławszy Stw. 175 w odniesieniu do trójki  $(C_-, e_\Delta^-, \lambda_\Delta^-)$  oraz Równ. (3.1.20), stwierdzamy bez trudu, że odwzorowanie powyższe spełnia – na

mocy założenia (3.1.19) – warunek Clifforda względem struktury kwadratowej  $Q$ , oto bowiem

$$\begin{aligned}\mu(v)^2 &= e_{\Delta}^{-} \bullet v \bullet e_{\Delta}^{-} \bullet v = (e_{\Delta}^{-})^2 \bullet J_V^{N-1}(v) \bullet v = (-1)^{N-1} \cdot (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta}^{-} \triangleright v \bullet v \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}-1} \lambda_{\Delta} \triangleright ((-Q)(v) \triangleright e_{-}^C) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \lambda_{\Delta} \triangleright (Q(v) \triangleright e_{-}^C) \\ &= Q(v) \triangleright e_{-}^C.\end{aligned}$$

Rozszerza się ono zatem kanonicznie i jednoznacznie do unitalnego homomorfizmu  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\mu} : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \text{Cliff}(V, -Q)$$

o własności

$$\forall v \in V : \tilde{\mu}(v) = e_{\Delta}^{-} \bullet v.$$

Wybermy bazę  $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i \in \overline{1, N}}$  w  $V$  ortogonalną względem  $Q$ , a zatem także względem  $-Q$ . Na mocy Stw. 175 i rozumowania przeprowadzonego w jego dowodzie możemy zapisać

$$e_{\Delta} = \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_N, \quad e_{\Delta}^{-} = \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_1 \bullet e_2 \bullet \cdots \bullet e_N,$$

a w takim razie

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(e_{\Delta}) &\equiv \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright \tilde{\mu}(e_1 \cdot e_2 \cdots e_N) = \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright \mu(e_1) \bullet \mu(e_2) \bullet \cdots \bullet \mu(e_N) \\ &= \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright e_{\Delta}^{-} \bullet e_1 \bullet e_{\Delta}^{-} \bullet e_2 \bullet \cdots \bullet e_{\Delta}^{-} \bullet e_N \\ &= (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \Delta(\mathcal{E})^{-1} \triangleright (e_{\Delta}^{-})^N \bullet e_1 \bullet e_2 \bullet \cdots \bullet e_N \equiv (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} (e_{\Delta}^{-})^{N+1}.\end{aligned}$$

Niech teraz  $N = 2m \in 2\mathbb{N} + 2$ , a wtedy skalary  $\lambda_{\Delta}$  i  $\lambda_{\Delta}^{-}$  przyjmują postać

$$\lambda_{\Delta} = (-1)^m = \lambda_{\Delta}^{-}$$

i otrzymujemy

$$\tilde{\mu}(e_{\Delta}) = (-1)^m (e_{\Delta}^{-})^{2m+1},$$

co implikuje natychmiast, że odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\psi : V \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) : v \longmapsto e_{\Delta} \cdot v$$

spełnia warunek Clifforda względem struktury kwadratowej  $-Q$ ,

$$\begin{aligned}\psi(v)^2 &= e_{\Delta} \cdot v \cdot e_{\Delta} \cdot v = e_{\Delta}^2 \cdot J_V^{2m-1}(v) \cdot v = -e_{\Delta}^2 \cdot v \cdot v = (-1)^{m(2m-1)} \lambda_{\Delta} \triangleright ((-Q)(v) \triangleright e^C) \\ &= (-Q)(v) \triangleright e^C,\end{aligned}$$

więc rozszerza się kanonicznie i jednoznacznie do unitalnego homomorfizmu  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\psi} : \text{Cliff}(V, -Q) \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q)$$

o własności

$$\forall v \in V : \tilde{\psi}(v) = e_{\Delta} \cdot v.$$

Relację pomiędzy oboma homomorfizmami ustalamy na zbiorze generatorów obu algebr na podstawie rezultatów dotychczasowych dociekań. Oto więc

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\mu}(v) = \tilde{\psi}(e_{\Delta}^{-} \bullet v) = \tilde{\psi}(e_{\Delta}^{-}) \cdot \tilde{\psi}(v) = (-1)^m (e_{\Delta})^{2m+1} \cdot e_{\Delta} \cdot v \equiv (-1)^m (e_{\Delta}^2)^{m+1} \cdot v$$

$$= (-1)^m v \equiv J_V^m(v),$$

czyli w ogólności (wszak  $\tilde{\mu}$  i  $\tilde{\psi}$  to homomorfizmy  $\mathbb{K}$ -algebr)

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\mu} = J_V^m.$$

Analogicznie wyprowadzamy relację

$$\tilde{\mu} \circ \tilde{\psi} = (J_V^-)^m,$$

gdzie  $J_V^-$  jest kanoniczną inwolucją na  $C_-$ . Zważywszy oczywistą tożsamość

$$\tilde{\mu} \circ J_V = J_V^- \circ \tilde{\mu} \quad \Longleftarrow \quad J_V^-(e_\Delta^-) = (-1)^{2m} e_\Delta^- = e_\Delta^-$$

(oraz inwolutyny charakter  $J_V$  i  $J_V^-$ ), możemy zatem przepisać powyższe relacje w postaci

$$(J_V^m \circ \tilde{\psi}) \circ \tilde{\mu} = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q)}, \quad \tilde{\mu} \circ (J_V^m \circ \tilde{\psi}) = \text{id}_{\text{Cliff}(V, -Q)},$$

z których jasno wynika, że  $\tilde{\mu}$  jest izomorfizmem (o odwrotności  $J_V^m \circ \tilde{\psi}$ ).  $\square$

Kolejny arcyważny wynik artykułuje

**TWIERDZENIE 3.1.7** (O kanonicznym iloczynie tensorowym algebr Clifforda). *Przyjmijmy zapis Def. 36 oraz 114 i niechaj  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q_V$  będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem  $\mathbb{K}$  wymiaru  $\dim_{\mathbb{K}} V = 2m \in 2\mathbb{N} + 2$ , z wyróżnionym wyznacznikiem  $\Delta \in \wedge^{2m} V^*$  o stowarzyszonym elemencie kanonicznym  $e_\Delta \in \text{Cliff}(V, Q_V)$ , który spełnia warunek*

$$e_\Delta^2 = \varepsilon \triangleright e^C, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

*Wówczas dla dowolnej  $((\tilde{V}, +_{\tilde{V}}, P_{\tilde{V}}, \bullet \mapsto 0_{\tilde{V}}), \ell_{\tilde{V}}), Q_{\tilde{V}} \in \text{Obj} \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  istnieje kanoniczny unitalny homomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr*

$$\text{Cliff}(V \oplus \tilde{V}, Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}) \cong \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}).$$

■

Dowód: Rozważmy kanoniczne izometryczne włożenia

$$J_V : V \rightarrow V \oplus \tilde{V}, \quad J_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow V \oplus \tilde{V},$$

przy czym w drugim przypadku *implicite* traktujemy  $\tilde{V}$  jako nośnik struktury kwadratowej  $\varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}$ . Wobec parzystości wymiaru  $V$  tożsamość (3.1.13) implikuje

$$\forall_{v \in V} : \{e_\Delta, v\} = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q_V)}.$$

Ponadto w świetle (dowodu) Tw. 3.1.4 indukowane unitalne homomorfizmy  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{J}_V \equiv \text{Cliff}(J_V) : \text{Cliff}(V, Q_V) \longrightarrow \text{Cliff}(V \oplus \tilde{V}, Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}) \equiv C_\oplus,$$

$$\tilde{J}_{\tilde{V}} \equiv \text{Cliff}(J_{\tilde{V}}) : \text{Cliff}(\tilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}}) \longrightarrow C_\oplus$$

spełniają – dla dowolnego elementu  $\tilde{\gamma} \in \text{Cliff}(\tilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}})$  – warunek ( $\tilde{e}^C$  jest jednością w  $\text{Cliff}(\tilde{V}, \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}})$ )

$$\begin{aligned} \tilde{J}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{J}_{\tilde{V}}(\tilde{\gamma}) &\equiv m_{C_\oplus} \circ (\tilde{J}_V \otimes \tilde{J}_{\tilde{V}})(e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) \equiv \chi(e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) = \chi(e^C \cdot e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma} \cdot \tilde{e}^C) \\ &= \chi((-1)^{\deg \tilde{\gamma} \deg e_\Delta} (e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma})(e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C)) \\ &= \chi((e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma})(e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C)) = \chi(e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) \cdot \chi(e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \end{aligned}$$

$$= \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{\gamma}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta),$$

przeto odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\varphi : \tilde{V} \longrightarrow C_\oplus : v \longmapsto \tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(v)$$

spełnia warunek Clifforda,

$$\begin{aligned} \varphi(v)^2 &\equiv \tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(v) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(v) = \tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta)^2 \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(v)^2 = \tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta^2) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(v^2) \\ &= \varepsilon(\varepsilon \tilde{Q}(v)) \triangleright \mathbf{1}_\oplus = Q(v) \triangleright \mathbf{1}_\oplus, \end{aligned}$$

i z tej racji rozszerza się jednoznacznie i kanonicznie do unitalnego homomorfizmu  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}) \longrightarrow C_\oplus.$$

Przy tym – dla dowolnych  $(v, \tilde{v}) \in V \times \tilde{V}$  – zachodzi równość

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{v}) &\equiv \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) = \tilde{\mathcal{J}}_V(v \cdot e_\Delta) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) = \tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta \cdot J_V(v)) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \\ &= -\tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta \cdot v) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) = -\tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \equiv -\tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta) \cdot \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\ &= -\tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta) \cdot \chi(e^C \cdot v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} \cdot \tilde{e}^C) = -\tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta) \cdot \chi((-1)^{\deg v \cdot \deg \tilde{v}} (e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \cdot (v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C)) \\ &= \tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta) \cdot \chi(e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \cdot \chi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) = \tilde{\mathcal{J}}_V(e_\Delta) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \\ &\equiv \tilde{\varphi}(\tilde{v}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(v), \end{aligned}$$

zatem

$$\forall_{(\gamma, \tilde{\gamma}) \in \text{Cliff}(V, Q_V) \times \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}})} : \tilde{\mathcal{J}}_V(\gamma) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(\gamma).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\Phi : \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}) \longrightarrow C_\oplus$$

stanowiące (jedyne) rozszerzenie przyporządkowania określonego na tensorach prostych jako

$$\Phi(\gamma \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{\gamma}) := \tilde{\mathcal{J}}_V(\gamma) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}).$$

Pokażemy, że  $\Phi$  jest unitalnym izomorfizmem  $\mathbb{K}$ -algebr, konstruując jego odwrotność. W tym celu rozważmy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\Psi : V \oplus \tilde{V} \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}}) : (v, \tilde{v}) \longmapsto v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v},$$

które spełnia warunek Clifforda

$$\begin{aligned} \Psi(v, \tilde{v})^2 &= (v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \cdot (v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\ &= v^2 \otimes_{\mathbb{K}} e^C + \varepsilon \triangleright v \cdot e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} + \varepsilon \triangleright e_\Delta \cdot v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} + e_\Delta^2 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}^2 \\ &= Q_V(v) \triangleright e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright v \cdot e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} - \varepsilon \triangleright v \cdot e_\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} + \varepsilon Q_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \triangleright e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C \\ &\equiv (Q_V \oplus \varepsilon \triangleright Q_{\tilde{V}})(v, \tilde{v}) \triangleright e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C, \end{aligned}$$

a zatem indukuje (jedyne) unitalny homomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\tilde{\Psi} : C_\oplus \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q_V) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(\tilde{V}, Q_{\tilde{V}})$$



o własności

$$\tilde{\Psi}(v, \tilde{v}) = v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}.$$

Zauważmy, że reprezentacja (3.1.12) elementu kanonicznego pozwala nam obliczyć wprost

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} \circ \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) &\equiv \tilde{\Psi} \circ \tilde{\mathcal{J}}_V(e_1 \cdot e_2 \cdots e_{2m}) = \tilde{\Psi}(\mathcal{J}_V(e_1) \cdot \mathcal{J}_V(e_2) \cdots \mathcal{J}_V(e_{2m})) \\ &= \Psi(e_1, 0) \cdot \Psi(e_2, 0) \cdots \Psi(e_{2m}, 0) = (e_1 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \cdot (e_2 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \cdots (e_{2m} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \\ &= e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C. \end{aligned}$$

Tożsamości

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} \circ \Phi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) &= \tilde{\Psi}((v, 0) \cdot \tilde{\varphi}(e^C) + \tilde{\mathcal{J}}_V(e^C) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{v})) \\ &= \tilde{\Psi}((v, 0) \cdot \mathbf{1}_{C_{\oplus}} + \mathbf{1}_{C_{\oplus}} \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v})) \\ &= \tilde{\Psi}(v, 0) + \tilde{\Psi} \circ \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\Psi}(0, \tilde{v}) \\ &= v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + (e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) \cdot (\varepsilon \triangleright e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\ &= v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_{\Delta}^2 \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} \\ &= v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + e^C \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Phi \circ \tilde{\Psi}(v, \tilde{v}) &= \Phi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C + \varepsilon \triangleright e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) = \Phi(v \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{e}^C) + \varepsilon \triangleright \Phi(e_{\Delta} \otimes_{\mathbb{K}} \tilde{v}) \\ &= \tilde{\mathcal{J}}_V(v) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{e}^C) + \varepsilon \triangleright \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{v}) \\ &= (v, 0) \cdot \mathbf{1}_{C_{\oplus}} + \varepsilon \triangleright \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\tilde{V}}(\tilde{v}) \\ &= (v, 0) + \varepsilon \triangleright \tilde{\mathcal{J}}_V(e_{\Delta}^2) \cdot (0, \tilde{v}) = (v, 0) + (0, \tilde{v}) \equiv (v, \tilde{v}). \end{aligned}$$

pokazują dowodnie – na (nietrywialnych) generatorach, więc i ogólnie (wobec homomorficznego charakteru rozpatrywanych odwzorowań) – antycypowaną odwracalność  $\Phi$ .  $\square$

Na zakończenie rozważań ogólnych, wytyczających szlak ku twierdzeniom klasyfikacyjnym dla rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, wypowiemy jeszcze istotne

**TWIERDZENIE 3.1.8.** *Przyjmijmy zapis Def. 16, 32, 111 oraz 112 i niechaj  $((V_{\alpha}, +_{\alpha}, P_{\alpha}, \bullet \mapsto 0_{\alpha}), \ell_{\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami  $\mathbb{K}$ -liniowymi wymiaru  $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim_{\mathbb{K}} V_2 =: N < \infty$ , a nadto niech  $\Delta : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{K}$  będzie dwoistością. Określmy na  $V_1 \oplus V_2$  formę kwadratową*

$$Q_{\Delta} : V_1 \oplus V_2 \rightarrow \mathbb{K} : (v_1, v_2) \mapsto \Delta(v_1, v_2).$$

*Istnieje kanoniczny unitalny izomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr*

$$\text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_{\Delta}) \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_1).$$

■

*Dowód:* Zaczniemy od odnotowania, że sensowność definicji formy kwadratowej  $Q_\Delta$  jest prostą kownsekwencją dwuliniowości doistości  $\Delta$ . To rzekłszy, możemy przywołać Stw. 6, które daje nam do ręki izomorfizm przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowych

$$r_\Delta : V_2 \xrightarrow{\cong} V_1^* : v \longmapsto \Delta(\cdot, v).$$

Ten w połączeniu z tezą Stw. 169 pozwala nam wypisać wygodny układ generujący  $\mathbb{K}$ -algebry  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V_1)$  złożony z endomorfizmów  $\mu_{v_1}$ ,  $v_1 \in V_1$  oraz  $\iota_{r_\Delta(v_2)}$ ,  $v_2 \in V_2$ , które spełniają proste relacje

$$\mu_{v_1}^2 = 0 = \iota_{r_\Delta(v_2)}^2, \quad \{\iota_{r_\Delta(v_2)}, \mu_{v_1}\} = \Delta(v_1, v_2) \triangleright \text{id}_{\bigwedge^\bullet V_1}.$$

O ile dwie pierwsze nie wymagają dodatkowego komentarza, ostatnią sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (na tensorach prostych, dla dowolnych  $w_i \in V_1$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ):

$$\begin{aligned} \{\iota_{r_\Delta(v_2)}, \mu_{v_1}\}(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) &= \iota_{r_\Delta(v_2)}(v_1 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) \\ &+ v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &= \Delta(v_1, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &- v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &+ v_1 \wedge \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Delta(w_k, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &= \Delta(v_1, v_2) \triangleright w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n \\ &\equiv \Delta(v_1, v_2) \triangleright \text{id}_{\bigwedge^\bullet V_1}(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n). \end{aligned}$$

Zdefiniujmy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\varphi : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V_1) : (v_1, v_2) \longmapsto \mu_{v_1} + \iota_{r_\Delta(v_2)}.$$

Na podstawie wypisanych wyżej tożsamości bez trudu sprawdzamy, że spełnia ono warunek Clifforda,

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, v_2)^2 &\equiv (\mu_{v_1} + \iota_{r_\Delta(v_2)}) \circ (\mu_{v_1} + \iota_{r_\Delta(v_2)}) = \mu_{v_1}^2 + \iota_{r_\Delta(v_2)}^2 + \{\iota_{r_\Delta(v_2)}, \mu_{v_1}\} \\ &= \Delta(v_1, v_2) \triangleright \text{id}_{\bigwedge^\bullet V_1} \equiv Q_\Delta(v_1, v_2) \triangleright \mathbf{1}_{\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V_1)}, \end{aligned}$$

rozszerza się ono zatem kanonicznie do unitalnego homomorfizmu  $\mathbb{K}$ -algebry

$$\tilde{\varphi} : \text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_\Delta) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V_1)$$

o własności

$$\tilde{\varphi}(v_1, v_2) = \mu_{v_1} + \iota_{r_\Delta(v_2)}.$$

Na mocy Stw. 169 podprzestrzeń  $\text{Im } \tilde{\varphi} \upharpoonright_{J_{V_1 \oplus V_2}^{\mathbb{C}}(V_1 \oplus V_2)} \equiv \text{Im } \varphi$  generuje  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V_1)$  jako  $\mathbb{K}$ -algebrę, zatem  $\tilde{\varphi}$  jest epimorfizmem. Ale zarazem – w świetle Równ. (3.1.10)

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Cliff}(V_1 \oplus V_2, Q_\Delta) = 2^{\dim_{\mathbb{K}}(V_1 \oplus V_2)} = 2^{\dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2} = 2^{2 \dim_{\mathbb{K}} V_1}$$

oraz – tym razem na gruncie Tw. 1.2.11 oraz Stw. 168 –

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^\bullet V_1) = (\dim_{\mathbb{K}} \bigwedge^\bullet V_1)^2 = (2^{\dim_{\mathbb{K}} V_1})^2 \equiv 2^{2 \dim_{\mathbb{K}} V_1},$$

co pokazuje dowodnie, że  $\tilde{\varphi}$  jest w istocie izomorfizmem.  $\square$

Jako proste corollarium do poprzedniego twierdzenia otrzymujemy

**STWIERDZENIE 177.** *Przyjmijmy zapis Def. 111, zakładając przy tym, że  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ , przestrzeń kwadratowa  $V$  jest niezwyrodniała i ma  $\dim_{\mathbb{K}} V \in 2\mathbb{N}$ . Niechaj  $\omega \in \text{End}_{\mathbb{K}} V$  będzie inwolucją,  $\omega^2 = \text{id}_V$ , skośnie symetryczną względem formy kwadratowej  $Q$ , tj. taką, która spełnia warunek*

$$\omega^* = -\omega$$

wypisany dla

$$\forall v_1, v_2 \in V : \Phi_Q(\omega^*(v_1), v_2) := \Phi_Q(v_1, \omega(v_2)).$$

Wówczas istnieje kanoniczny unitalny izomorfizm  $\mathbb{K}$ -algebr

$$\text{Cliff}(V, Q) \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} \text{Ker}(\omega - \text{id}_V)).$$

■

Dowód: Inwolucja  $\omega$  zadaje – w świetle Stw. 33 – rozkład

$$V = \text{Ker}(\omega - \text{id}_V) \oplus \text{Ker}(\omega + \text{id}_V) \equiv V_- \oplus V_+,$$

gdyż para  $P_{\pm} := 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (\omega \pm \text{id}_V)$  stanowi zupełny układ rzutów komplementarnych. Ponadto dla dowolnych  $v_{\pm}, w_{\pm} \in V_{\pm}$  zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\pm}) &= \Phi_Q(\mp \omega(v_{\pm}), \mp \omega(w_{\pm})) = \Phi_Q(\omega^* \circ \omega(v_{\pm}), w_{\pm}) = -\Phi_Q(\omega^2(v_{\pm}), w_{\pm}) \\ &= -\Phi_Q(v_{\pm}, w_{\pm}), \end{aligned}$$

przeto

$$V_{\pm} \perp_Q V_{\pm},$$

natomiast w ograniczeniu do  $V_{\pm} \times V_{\mp}$  forma dwuliniowa  $\Phi_Q$  jest niezwyrodniała – istotnie, ilekroć dla ustalonego  $v_{\pm} \in V_{\pm}$  jest

$$\forall w_{\mp} \in V_{\mp} : \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\mp}) = 0_{\mathbb{K}},$$

to dowolny wektor  $V \ni w = \tilde{w}_- \oplus w_+$  wzgl.  $w = w_- \oplus \tilde{w}_+$  spełnia warunek

$$\Phi_Q(v_{\pm}, w) = \Phi_Q(v_{\pm}, \tilde{w}_{\pm}) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\mp}) = \Phi_Q(v_{\pm}, w_{\mp}) = 0_{\mathbb{K}},$$

zatem – wobec niezwyrodnienia  $Q$  – koniecznie

$$v_{\pm} = 0_V.$$

W rezultacie otrzymujemy parę dwoistą  $(V_-, V_+)$  związaną dwoistością

$$\Delta_Q := 2\Phi_Q \upharpoonright_{V_- \times V_+},$$

dla której wyprowadzamy tożsamość

$$\begin{aligned} \Phi_Q(v_- \oplus v_+, w_- \oplus w_+) &= \Phi_Q(v_-, w_-) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_+, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v_+, w_-) \\ &= \Phi_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Phi_Q(w_-, v_+) \\ &\equiv 2_{\mathbb{K}}^{-1} \triangleright (\Delta_Q(v_-, w_+) +_{\mathbb{K}} \Delta_Q(w_-, v_+)), \end{aligned}$$

a z niej – równość

$$Q(v_- \oplus v_+) = \Delta_Q(v_-, v_+),$$

usprawiedliwiająca – w połączeniu z wcześniejszymi obserwacjami – bezpośrednio odwołanie się do Tw. 3.1.8. Na tej podstawie stwierdzamy, zgodnie z tezą będącą przedmiotem dowodu,

$$\text{Cliff}(V, Q) \equiv \text{Cliff}(V_- \oplus V_+, Q \equiv Q_{\Delta_Q}) \cong \text{End}_{\mathbb{K}}(\bigwedge^{\bullet} V_-).$$

□

## Klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda

W dalszej części wykładu przedstawimy kompletną klasyfikację algebr Clifforda stowarzyszonych ze skończone wymiarowymi przestrzeniami kwadratowymi nad ciałami liczbowymi o szczególnym znaczeniu w modelowaniu zjawisk fizycznych, tj. nad  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$ .

### 1. Rzeczywiste algebry Clifforda w skończonym wymiarze

Tytułem wstępu sformułujemy porządkujące, a oczywiste

**STWIERDZENIE 178.** *Przyjmijmy zapis Def. 38 i 111 oraz Przykł. 14 (1). Algebra Clifforda dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej wyposażonej w niezwyrodniałą formę kwadratową o sygnaturze  $(p, q)$  jest izomorficzna z algebrą Clifforda przestrzeni (pseudo)euklidesowej  $\mathbb{R}^{p,q}$ . Tę ostatnią algebrę Clifforda oznaczamy symbolem*

$$\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}) \equiv \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}.$$

■

*Dowód:* Natychmiastowa konsekwencja koniunkcji Tw. 1.2.3 i Stw. 173. □

Powyższe przygotowuje nas do klasyfikacji rzeczywistych algebr Clifforda, do której przejdziemy obecnie. Zaczynamy od

**TWIERDZENIE 3.2.1 (Klasyfikacyjne IR).** *Przyjmijmy zapis Stw. 150 oraz 178 i ustalmy (dowolnie) parę  $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$ . Istnieją unitalne izomorfizmy  $\mathbb{R}$ -algebr*

$$\text{Cl}_{p+2,q}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}},$$

$$\text{Cl}_{p,q+2}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}.$$

*W szczególności*

$$\text{Cl}_{p+2,0}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{0,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}},$$

$$\text{Cl}_{0,q+2}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{0,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}.$$

■

*Dowód:* W świetle Stw. 37 i 175 w przypadku obu algebr:  $\text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}$  i  $\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}$  istnieją wyznaczniki unormowane  $\Delta \in \wedge^{\bullet} \mathbb{R}^{\times 2}$ , dla których  $\lambda_{\Delta} = 1$ , zachodzi więc tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{2(2-1)}{2}} \lambda_{\Delta} \triangleright e^{\mathbb{C}} = -e^{\mathbb{C}} =: \varepsilon_2 \triangleright e^{\mathbb{C}}.$$

Oznaczmy

$$\varepsilon_2 \mathbb{R}^{q,p} \equiv (\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^p, \varepsilon_2 (\delta_E^{(q)} \oplus (-\delta_E^{(p)}))) = (\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^p, (-\delta_E^{(q)} \oplus \delta_E^{(p)}) = \mathbb{R}^{p,q}$$

i dokonajmy – jak w Tw. 3.1.7 – rozkładu ortogonalnego (względem  $\delta_E^{(p+2,q)}$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{p+2,q} &= \mathbb{R}^{2,0} \oplus_{\delta_E^{(p+2,q)}} \mathbb{R}^{p,q} \equiv \mathbb{R}^{2,0} \oplus_{\delta_E^{(p+2,q)} \varepsilon_2} \mathbb{R}^{q,p} \\ &\equiv (\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{p+q}, \delta_E^{(2,0)} \oplus \varepsilon_2 \delta_E^{(q,p)}), \end{aligned}$$

a następnie przywołajmy tezę Tw. 3.1.7 (oraz Tw. 1.2.7), aby zapisać

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p+2,q}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0} \oplus_{\delta_E^{(p+2,q)} \varepsilon_2} \mathbb{R}^{q,p}) \cong \text{Cliff}(\mathbb{R}^{2,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cliff}(\mathbb{R}^{q,p}) \equiv \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Na podstawie analogicznego rozkładu

$$\mathbb{R}^{p,q+2} = \mathbb{R}^{0,2} \oplus_{\delta_E^{(p,q+2)} \varepsilon_2} \mathbb{R}^{q,p}$$

otrzymujemy drugą z pożądaných tożsamości

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,q+2}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2} \oplus_{\delta_E^{(p,q+2)} \varepsilon_2} \mathbb{R}^{q,p}) \cong \text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,2}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cliff}(\mathbb{R}^{q,p}) \equiv \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

□

Mamy także

**TWIERDZENIE 3.2.2** (Klasyfikacyjne II  $\mathbb{R}$ ). *Przyjmijmy zapis Stw. 178. Ilkroć składowe sygnatury  $(p, q) \in \mathbb{N} \times 2$  spełniają relację  $q \equiv p \pmod{4}$ , istnieje unikatny izomorfizm  $\mathbb{R}$ -algebr*

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}}.$$

*W szczególności*

$$\forall_{n \in 4\mathbb{N}} : \text{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{0,n}^{\mathbb{R}}.$$

■

Dowód: Zacznijmy od spostrzeżenia:

$$N = p + q = p - q + 2q = 4k + 2q = 2(2k + q) \in 2\mathbb{N}.$$

Jeśli zatem  $\Delta$  jest wyznacznikiem unormowanym na  $\mathbb{R}^{p,q}$ , to

$$\lambda_{\Delta} = (-1)^q \equiv (-1)^{q+2k} = (-1)^{(q+2k)(2(2k+q)-1)} = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}},$$

możemy przeto zastosować Tw. 3.1.6, na mocy którego (w konwencji poprzedniego dowodu)

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}) \cong \text{Cliff}(-\mathbb{R}^{p,q}) \equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{q,p}) \equiv \text{Cl}_{q,p}^{\mathbb{R}}.$$

□

W następnej kolejności napotykamy oczywiste, acz przydatne

**TWIERDZENIE 3.2.3** (Klasyfikacyjne III  $\mathbb{R}$ ). *Przyjmijmy zapis Stw. 178. Dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  istnieją unitalne izomorfizmy  $\mathbb{R}$ -algebr*

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{n+8,0}^{\mathbb{R}} &\cong \text{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}}, \\ \text{Cl}_{0,n+8}^{\mathbb{R}} &\cong \text{Cl}_{0,n}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

przy czym

$$\text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}}.$$

■

*Dowód:* Wybrawszy na  $\mathbb{R}^{8,0}$  (wzgl.  $\mathbb{R}^{0,8}$ ) wyznacznik unormowany, otrzymujemy  $\lambda_{\Delta} = 1$ , a zatem

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{8(8-1)}{2}} \triangleright e^{\mathbb{C}} = e^{\mathbb{C}} =: \varepsilon_8 \triangleright e^{\mathbb{C}},$$

skąd – w świetle Tw. 3.1.7 (oraz Tw. 1.2.7) i w konwencji przyjętej wcześniej –

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{n+8,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{8,0} \oplus \varepsilon_8 \mathbb{R}^{n,0}) \cong \text{Cliff}(\mathbb{R}^{8,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cliff}(\mathbb{R}^{n,0}) \equiv \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \text{Cl}_{n,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Drugiej tożsamości dowodzimy analogicznie. Ostatnia część tezy dowodzonego twierdzenia jest implikowana przez Tw. 3.2.2.  $\square$

Do pełnej klasyfikacji rzeczywistych algebr Clifforda brakuje nam już tylko dyskusji ich struktury w przypadku sygnatury mieszanej – ten opisuje

**TWIERDZENIE 3.2.4** (Klasyfikacyjne IV  $\mathbb{R}$ ). *Przyjmijmy zapis Def. 112, Stw. 178 i Przykł. 31 (2). Dla dowolnych  $p, q, r, s \in \mathbb{N}$  istnieją unitalne izomorfizmy  $\mathbb{R}$ -algebr*

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} &\cong \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge^{\bullet} \mathbb{R}^{\times p}) \equiv \mathbb{R}(2^p), \\ \text{Cl}_{p,p+r}^{\mathbb{R}} &\cong \text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,r}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^p) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,r}^{\mathbb{R}}, \\ \text{Cl}_{q+s,q}^{\mathbb{R}} &\cong \text{Cl}_{q,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{s,0}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^p) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{s,0}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

■

*Dowód:* Istnienie dwóch ostatnich klas izomorfizmów jest bezpośrednią konsekwencją istnienia pierwszej rodziny izomorfizmów oraz tego, że element kanoniczny  $\text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}}$  stowarzyszony z wyznacznikiem unormowanym spełnia tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{2p(2p-1)}{2}} \cdot (-1)^p \triangleright e^{\mathbb{C}} = e^{\mathbb{C}} =: \varepsilon_{p,p} \triangleright e^{\mathbb{C}},$$

co – w świetle Tw. 3.1.7 i w konwencji przyjętej wcześniej – daje nam

$$\text{Cl}_{p,p+r}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,p} \oplus \varepsilon_{p,p} \mathbb{R}^{0,r}) \cong \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,p}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cliff}(\mathbb{R}^{0,r}) \equiv \text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,r}^{\mathbb{R}}$$

i analogiczny wynik dla  $\text{Cl}_{q+s,q}^{\mathbb{R}}$ . Pozostaje zatem wykazać słuszność pierwszej części tezy. W tym celu dokonujemy rozkładu ortogonalnego

$$\mathbb{R}^{p,p} = \mathbb{R}^{p,0} \oplus_{\delta_{p,p}} \mathbb{R}^{0,p}$$

i wybieramy bazy (pseudo)ortonormalne:  $\{e_i^+\}_{i \in \overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^{p,0}$  oraz  $\{e_j^-\}_{j \in \overline{1,p}} \subset \mathbb{R}^{0,p}$ ,

$$\Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\pm}, e_j^{\pm}) = \pm \delta_{i,j}, \quad \Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^+, e_j^-) = 0, \quad i, j \in \overline{1,p}.$$

Tych możemy użyć do zdefiniowania inwolucji  $\omega \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2p})$  stanowiącej (jedyne)  $\mathbb{R}$ -liniowe rozszerzenie przyporządkowania elementów baz:

$$\omega(e_i^{\pm}) := e_i^{\mp}, \quad i \in \overline{1, p}.$$

Bez trudu upewniamy się, że inwolucja ta jest skośnie symetryczna,

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta_{p,p}}(\omega^*(e_i^{\pm}), e_j^{\pm}) &\equiv \Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\pm}, \omega(e_j^{\pm})) = \Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\pm}, e_j^{\mp}) = 0 = \Phi_{\delta_{p,p}}(-\omega(e_i^{\pm}), e_j^{\pm}), \\ \Phi_{\delta_{p,p}}(\omega^*(e_i^{\pm}), e_j^{\mp}) &\equiv \Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\pm}, \omega(e_j^{\mp})) = \Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\pm}, e_j^{\pm}) = \pm\delta_{i,j} = -\Phi_{\delta_{p,p}}(e_i^{\mp}, e_j^{\mp}) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{p,p}}(-\omega(e_i^{\pm}), e_j^{\mp}), \end{aligned}$$

i jako taka pozwala na odniesienie do pary  $(\mathbb{R}^{p,p}, \omega)$  tezy Stw. 177, która przesądza o istnieniu izomorfizmu

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,p}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,p}) \cong \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge \bullet \text{Ker}(\omega - \text{id}_{\mathbb{R}^{p,p}})) \equiv \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge \bullet \bigoplus_{i=1}^p \langle e_i^+ + e_i^- \rangle_{\mathbb{R}}) \\ &\equiv \text{End}_{\mathbb{R}}(\bigwedge \bullet \mathbb{R}^{\times p}). \end{aligned}$$

□

W podsumowaniu dotychczasowych rozważań klasyfikacyjnych otrzymujemy

**TWIERDZENIE 3.2.5** (Klasyfikacyjne V  $\mathbb{R}$  – „Szachownica Clifforda”). *Przyjmijmy zapis Stw. 147 i 178. Tablica 1 zawiera klasyfikację algebr Clifforda  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$  dla  $p, q \in \overline{0, 8}$  i tym samym określa  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$  dla dowolnej sygnatury  $(p, q)$ . W szczególności odczytujemy z niej tożsamości*

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,p+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{R}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-1+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{R}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4k}), & \text{Cl}_{p,p+1+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{C}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-2+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{R}(2^{p-1+4k}), & \text{Cl}_{p,p+2+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{H}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-3+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{C}(2^{p-1+4k}), & \text{Cl}_{p,p+3+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-4+8k}^{\mathbb{R}} &\cong \mathbb{H}(2^{p-3+4k}), \end{aligned}$$

śluszne dla dowolnych  $p, k, l \in \mathbb{Z}$ , dla których powyższe formuły mają sens.

■

*Dowód:* Zawartość tabeli jest prostą konsekwencją Twierdzeń Klasyfikacyjnych I–IV  $\mathbb{R}$ , Stw. 153 oraz 167. Poniżej przedstawimy kilka spośród 81 rachunków szczegółowych, pozostawiając Czytelnika z elementarnym zadaniem sprawdzenia wszystkich pozostałych. Oto więc postać trywialnej algebry  $\text{Cl}_{0,0}^{\mathbb{R}}$  wynika wprost z definicji algebry Clifforda, natomiast postać  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$  dla  $0 < p + q \leq 2$  odczytujemy ze Stw. 167. Zaczynamy więc od wyprowadzenia

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{3,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{1+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{3.2.1}{\cong} \text{Cl}_{0,1}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{167}{\cong} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \stackrel{1.2.7}{\cong} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \stackrel{153(i)}{\cong} \mathbb{C}(2), \\ \text{Cl}_{0,3}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{0,1+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{3.2.1}{\cong} \text{Cl}_{1,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{167}{\cong} (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \stackrel{1.2.10}{\cong} (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \\ &\stackrel{153(i)}{\cong} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Cl}_{4,0}^{\mathbb{R}} &\stackrel{\cong}{\underset{3.2.2}{\cong}} \text{Cl}_{0,4}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cl}_{0,2+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{167 \text{ (iii,iv)}}{\cong}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{H}(2). \end{aligned}$$

(3.2.1)

Na podstawie powyższego wyznaczamy dalej

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{5,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{3+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{0,3}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.1),167 \text{ (iii)}}{\cong}} (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.10}{\cong}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)) \oplus (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)) \stackrel{\cong}{\underset{1.2.7}{\cong}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \\ &\stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2), \\ \text{Cl}_{0,5}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{0,3+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{3,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.1),167 \text{ (iv)}}{\cong}} \mathbb{C}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (iii)}}{\cong}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.8}{\cong}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (iv)}}{\cong}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) \stackrel{\cong}{\underset{1.2.7}{\cong}} \mathbb{R}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{C}(4), \\ \text{Cl}_{6,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{4+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{0,4}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.1),167 \text{ (iii)}}{\cong}} \mathbb{H}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.7}{\cong}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{H}(4), \\ \text{Cl}_{0,6}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{0,4+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{4,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.1),167 \text{ (iv)}}{\cong}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.8}{\cong}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (iv)}}{\cong}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) \stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{R}(8). \end{aligned}$$

(3.2.2)

Biorąc pod uwagę rezultaty ostatniego rachunku, otrzymujemy następnie

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{7,0}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{5+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{0,5}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.2),167 \text{ (iii)}}{\cong}} \mathbb{C}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \stackrel{\cong}{\underset{1.2.7}{\cong}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}(4) \\ &\stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{C}(8), \\ \text{Cl}_{0,7}^{\mathbb{R}} &\equiv \text{Cl}_{0,5+2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{5,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.2),167 \text{ (iv)}}{\cong}} [(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.10}{\cong}} [(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}] \oplus [(\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}] \\ &\stackrel{\cong}{\underset{1.2.8}{\cong}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H})) \\ &\stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (iv)}}{\cong}} (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4)) \oplus (\mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4)) \stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8), \\ \text{Cl}_{0,8}^{\mathbb{R}} &\stackrel{\cong}{\underset{3.2.2}{\cong}} \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \equiv \text{Cl}_{6+2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{3.2.1}{\cong}} \text{Cl}_{0,6}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \stackrel{\cong}{\underset{(3.2.2),167 \text{ (iii)}}{\cong}} \mathbb{R}(8) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \stackrel{\cong}{\underset{153 \text{ (i)}}{\cong}} \mathbb{R}(16). \end{aligned}$$

(3.2.3)

Ostatnia składowa tezy dowodzonego twierdzenia broni się na podstawie następującej obserwacji, opartej na Tw. 3.2.1 (jak również 1.2.7 i 1.2.8), Stw. 167 (iii) i (iv) oraz 153 (i) i Równ. (3.2.3),

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p+8,q}^{\mathbb{R}} &\cong \text{Cl}_{q,p+6}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \cong (\text{Cl}_{p+4,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{p+4,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}) \\ &\cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} ((\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} (\text{Cl}_{0,2}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{2,0}^{\mathbb{R}})) \cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{8,0}^{\mathbb{R}} \\ &\cong \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cl_{p,q+8}^{\mathbb{R}} &\cong Cl_{q+6,p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,2}^{\mathbb{R}} \cong (Cl_{p,q+4}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{2,0}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,2}^{\mathbb{R}} \cong Cl_{p,q+4}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} (Cl_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,2}^{\mathbb{R}}) \\
&\cong Cl_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} ((Cl_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,2}^{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} (Cl_{2,0}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,2}^{\mathbb{R}})) \cong Cl_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} Cl_{0,8}^{\mathbb{R}} \\
&\cong Cl_{p,q}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16).
\end{aligned}$$

□

Rzut oka na Tablicę 1 przekonuje nas, że wszystkie rzeczywiste algebry Clifforda są – w świetle Stw. 145 – proste lub półproste, przy czym w tym drugim przypadku mamy do czynienia z sumami prostymi dwóch algebr prostych. Łatwo dostrzeżalne prawidłowości w lokalizacji algebr półprostych pośród rzeczywistych algebr Clifforda (i w szczególności w obrębie „szachownicy Clifforda”) oraz ich strukturę można bez trudu wyjaśnić w odwołaniu do konstrukcji elementu kanonicznego. Wprowadźmy pojęcie

DEFINICJA 116. Przyjmijmy zapis Stw. 178 i niechaj  $\{e_i\}_{i \in \overline{1,p+q}}$  będzie bazą standardową  $\mathbb{R}^{\times p} \oplus \mathbb{R}^{\times q}$ , (pseudo)ortonormalną względem formy kwadratowej  $\delta_E^{(p,q)}$ . **Element objętości** w  $Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}$  to wektor

$$\omega_{\mathbb{R}} := e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q}.$$

▲

Możemy już teraz wysłowić wyjaśniające zaobserwowane regularności

STWIERDZENIE 179. *Przyjmijmy zapis Def. 113 i 116 i Stw. 145, 147 oraz 148. Dla dowolnej pary  $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$  prawdziwą jest równoważność*

$$\omega_{\mathbb{R}}^2 = e^C \iff (p+q+1)(p+q) - 2p \in 4\mathbb{N}.$$

W jej konsekwencji dla dowolnej sygnatury spełniającej warunek

$$(3.2.4) \quad q - p = 3 \pmod{4}$$

istnieje rozkład

$$(3.2.5) \quad Cl_{p,q}^{\mathbb{R}} = Cl_{p,q}^+ \oplus Cl_{p,q}^-$$

algebry Clifforda  $Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}$  na sumę prostą jej podalgebr (zredukowanych)

$$Cl_{p,q}^{\pm} := P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm} \cdot Cl_{p,q}^{\mathbb{R}},$$

o elementach spełniających warunki – odpowiednio – **samodwoistości** (lub inaczej **samodualności**)

$$\forall \gamma \in Cl_{p,q}^+ : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma = \gamma,$$

wzgl. **skośnej samodwoistości** (lub inaczej **antysamodualności**)

$$\forall \gamma \in Cl_{p,q}^- : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma = -\gamma.$$

Zachodzą relacje:

$$(3.2.6) \quad J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(Cl_{p,q}^{\pm}) = Cl_{p,q}^{\mp}$$

oraz

$$(3.2.7) \quad Cl_{p,q}^{\mathbb{R}0} = (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}})(Cl_{p,q}^{\pm}).$$

Rozkład ten pokrywa się z rozkładem półprostej  $\mathbb{R}$ -algebry  $Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}$  na składowe proste wynikającym z Tw. 3.2.5 (ukazanym w Tabelicy 1), tj. dla dowolnych  $k, l \in \mathbb{Z}$  o własnościach  $p + 3 + 8k, p + 7 + 8l \geq 0$  istnieją izomorfizmy  $\mathbb{R}$ -algebr prostych

$$(3.2.8) \quad Cl_{p,p+3+8k}^{\pm} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}), \quad Cl_{p,p+7+8l}^{\pm} \cong \mathbb{R}(2^{p+3+4l}).$$

■

*Dowód:* Pierwszą część tezy sprawdzamy w bezpośrednim rachunku, wykorzystującym ortonormalność bazy standardowej,

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{R}}^2 &= e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q} \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q} = (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}} e_1^2 \cdot e_2^2 \cdots e_{p+q}^2 \\ &= (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2} + q} e^C = (-1)^{\frac{(p+q)^2 - p + q}{2}} e^C, \end{aligned}$$

z którego wynika wprost dowodzony postulat. Przy tym zgodnie z tezą Tw. 3.1.5  $\omega_{\mathbb{R}}$  jest elementem centralnym tylko dla  $p + q \in 2\mathbb{N} + 1$ , co w świetle Stw. 148 prowadzi do rozkładu jak w Równ. (3.2.5), kiedy dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$  spełniony jest układ warunków

$$p + q = 2k + 1 \quad \wedge \quad 2k + 2q \in 4\mathbb{N}.$$

Po podstawieniu pierwszego z nich do drugiego otrzymujemy warunek (3.2.4) jako rozwiązanie układu. Relacja (3.2.6) jest następstwem oczywistej tożsamości

$$J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}) = P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\mp} \quad \Longleftarrow \quad J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\omega_{\mathbb{R}}) = -\omega_{\mathbb{R}}.$$

Istotnie, na jej podstawie wyprowadzamy relacje

$$J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(Cl_{p,q}^{\pm}) \subset Cl_{p,q}^{\mp},$$

a ewaluując na tych ostatnich obustronnie  $J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}$  – także relacje odwrotne

$$Cl_{p,q}^{\pm} \subset J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(Cl_{p,q}^{\mp}).$$

Z kolei relację (3.2.7) wyprowadzamy z następujących obserwacji. Z jednej strony zachodzi

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{R}^{\times p+q}} \circ (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}) &= (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}) \\ \implies (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}})(Cl_{p,q}^{\pm}) &\subset Cl_{p,q}^{\mathbb{R}0}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony niechaj  $\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-)$  będzie rozkładem elementu  $\gamma_0 \in Cl_{p,q}^{\mathbb{R}0}$  na składowe z  $Cl_{p,q}^{\pm} \ni \gamma_0^{\pm}$ , a wówczas – wobec (3.2.6) – otrzymujemy równość

$$(\gamma_0^+, \gamma_0^-) = \gamma_0 = J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0) = (J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^-), J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^+)),$$

z której już wprost wynika wniosek, że

$$\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-) = (\gamma_0^+, J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^+)) \in (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}})(Cl_{p,q}^+)$$

oraz

$$\gamma_0 = (\gamma_0^+, \gamma_0^-) = (J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(\gamma_0^-), \gamma_0^-) \in (\text{id}_{Cl_{p,q}^{\mathbb{R}}} + J_{\mathbb{R}^{\times p+q}})(Cl_{p,q}^-).$$

Ażeby przekonać się, że wskazany rozkład pokrywa się z rozkładem algebry Clifforda na podalgebry proste, wystarczy zauważyć, że przewidziane przez Tw. 3.2.5 (w połączeniu z powyższymi ustaleniami) izomorfizmy  $\mathbb{R}$ -algebr

$$\iota_3 \quad : \quad \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k}) \xrightarrow{\cong} Cl_{p,p+8k+3}^+ \oplus Cl_{p,p+8k+3}^-,$$

$$\iota_7 : \mathbb{R}(2^{p+4l+3}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4l+3}) \xrightarrow{\cong} \text{Cl}_{p,p+8l+7}^+ \oplus \text{Cl}_{p,p+8l+7}^-$$

odwzorowują *proste* składniki  $\mathbb{H}(2^{p+4k})$  wzgl.  $\mathbb{R}(2^{p+4l+3})$  dziedziny w *takież* podalgebry przeciwdziedziny, gdyby zatem istniały nietrywialne rozkłady

$$\mathfrak{M}_3 := \iota_3(\mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \{\mathbf{0}_{2^{p+4k}}\}) = \mathfrak{M}_3 \cap \text{Cl}_{p,p+8k+3}^+ \oplus \mathfrak{M}_3 \cap \text{Cl}_{p,p+8k+3}^-,$$

$$\mathfrak{M}_7 := \iota_7(\mathbb{R}(2^{p+4l+3}) \oplus \{\mathbf{0}_{2^{p+4l+3}}\}) = \mathfrak{M}_7 \cap \text{Cl}_{p,p+8l+7}^+ \oplus \mathfrak{M}_7 \cap \text{Cl}_{p,p+8l+7}^-,$$

to każdy ze składników prostych po prawej stronie powyższych równości byłby nietrywialnym obustronnym ideałem w odnośnej algebrze  $\mathfrak{M}_m$ ,  $m \in \{3, 7\}$ , a to z tej racji, że składniki proste w rozkładzie (3.2.5) są podalgebrami, zatem

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\pm) \cdot (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\pm) &\subseteq \mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\pm, \\ (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\pm) \cdot (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\mp) &= \{0_{\text{Cl}_{p,p+8k+m}^\mathbb{R}}\} \\ &\subseteq (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\pm) \cap (\mathfrak{M}_m \cap \text{Cl}_{p,p+8k+m}^\mp). \end{aligned}$$

To jednak leży w sprzeczności z prostotą  $\mathfrak{M}_m$ , wnioskujemy zatem, że albo  $\mathfrak{M}_m \subseteq \text{Cl}_{p,p+8k+m}^+$ , albo też  $\mathfrak{M}_m \subseteq \text{Cl}_{p,p+8k+m}^-$ . Teza jest teraz natychmiastową konsekwencją rachunku wymiarów.  $\square$

Zanim przejdziemy do dyskusji zespolonych algebr Clifforda, zatrzymamy się nad jednym jeszcze wynikiem strukturalnym dotyczącym algebr rzeczywistych, który odegra niebagatelną rolę w rachunku spinorowym. Oto więc mamy

**STWIERDZENIE 180.** *Przyjmijmy zapis Def. 113 oraz Stw. 178. Dla dowolnej sygnatury  $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$  istnieje unitalny izomorfizm  $\mathbb{R}$ -algebr*

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0}.$$

■

*Dowód:* Wybierzmy w  $\mathbb{R}^{p,q+1}$  (o formie kwadratowej  $Q = \delta_{\mathbb{E}}^{(p,q+1)}$ ) bazę standardową (pseudo)ortonormalną  $\{e_i\}_{i \in \overline{1,p+q+1}}$  uporządkowaną tak, że wektory  $e_j$ ,  $j \in \overline{1,p}$  rozpinają podprzestrzeń o sygnaturze  $(p, 0)$ , a pozostałe wektory  $e_k$ ,  $k \in \overline{p+1, p+q+1}$  – podprzestrzeń o sygnaturze  $(0, q+1)$ . Następnie zdefiniujmy podprzestrzeń

$$\mathbb{R}^{p+q} := \bigoplus_{i=1}^{p+q} \langle e_i \rangle_{\mathbb{R}},$$

a na niej – odwzorowanie

$$\varphi : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0} : v \longmapsto v \cdot e_{p+q+1},$$

które ma własność Clifforda, co pokazujemy – dla dowolnego wektora  $v := \sum_{i=1}^N \lambda^i \triangleright e_i \in \mathbb{R}^{p+q}$  – w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} \varphi(v)^2 &= \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright e_i \cdot e_{p+q+1} \cdot e_j \cdot e_{p+q+1} = - \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright e_i \cdot e_j \cdot e_{p+q+1}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright e_i \cdot e_j \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \lambda^i \cdot \lambda^j \triangleright \{e_i, e_j\} = Q(v) \triangleright e^{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

To gwarantuje istnienie unitalnego homomorfizmu  $\mathbb{R}$ -algebr

$$\tilde{\varphi} : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0},$$

przy czym dowolny generator  $\text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0}$  otrzymujemy z elementu dziedziny w następujący sposób: dla  $1 \leq i < j \leq p+q$  mamy

$$e_i \cdot e_j = \tilde{\varphi}(e_i) \cdot \tilde{\varphi}(e_j) = \tilde{\varphi}(e_i \cdot e_j),$$

a dla  $1 \leq k \leq p+q$  jest

$$e_k \cdot e_{p+q+1} = \tilde{\varphi}(e_k).$$

Jest zatem  $\tilde{\varphi}$  epimorfizmem, a ponieważ – jak łatwo sprawdzić –  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{p,q+1}^{\mathbb{R}0} = \dim_{\mathbb{R}} \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ , przeto odwzorowanie to jest poszukiwanym izomorfizmem.  $\square$

Poklasyfikowawszy rzeczywiste algebry Clifforda, przejdziemy obecnie do analizy ich zespolonych odpowiedników.

## 2. Zespolone algebry Clifforda w skończonym wymiarze

Bestiariusz niezwyrodniałych algebr Clifforda nad zespolonymi przestrzeniami kwadratowymi osłaja i systematyzuje poniższe

**STWIERDZENIE 181.** *Przyjmijmy zapis Def. 111. Algebra Clifforda dowolnej zespolonej przestrzeni kwadratowej wyposażonej w niezwyrodniałą formę kwadratową rzędu  $n \in \mathbb{N}$  jest izomorficzna z algebrą Clifforda przestrzeni  $\mathbb{C}^{\times n}$  z euklidesową formą kwadratową  $\delta_{\mathbb{E}}^{(n)}$ . Tę ostatnią algebrę Clifforda oznaczamy symbolem*

$$\text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}) \equiv \text{Cl}_n^{\mathbb{C}}.$$

■

*Dowód:* Wynika wprost ze Stw. 23 i Tw. 3.1.3.  $\square$

Stwierdzenie to pozwala udzielić natychmiastowej odpowiedzi na pytanie o postać zespolonych algebr Clifforda na gruncie dotychczasowych naszych rezultatów dotyczących rzeczywistych algebr Clifforda, co dowodnie pokazuje

**TWIERDZENIE 3.2.6** (O naturalności kompleksyfikacji algebr Clifforda). *Przyjmijmy zapis Def. 27 i 102, Tw. 3.1.3, Stw. 178 i 181 oraz Przykł. 15 (2) i niechaj  $\mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{K}}$  będzie kategorią algebr Clifforda nad ciałem  $\mathbb{K}$ , stanowiącą podkategorię kategorii  $\mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}}$ . Istnieje izomorfizm naturalny*

$$\begin{array}{ccc} \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{(\cdot)^{\mathbb{C}}} & \square \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \\ \text{Cliff} \downarrow & \eta \swarrow \text{=} & \downarrow \text{Cliff} \\ \mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{(\cdot)^{\mathbb{C}} \upharpoonright_{\mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{R}}}} & \mathbf{CliffAlg}_{\mathbb{C}} \end{array} .$$

W szczególności więc dla dowolnego  $p \in \overline{0, n}$  istnieje unitalny izomorfizm  $\mathbb{C}$ -algebr

$$\text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \cong \text{Cl}_{p, n-p}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

■

*Dowód:* Kanoniczny monomorfizm przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych

$$j_V : V \rightarrow V^{\mathbb{C}} : v \mapsto (1, 0) \otimes_{\mathbb{R}} v$$

jest izometrią (w odniesieniu do skompleksyfikowanej formy kwadratowej  $Q^{\mathbb{C}}$  z Def. 45), oto bowiem

$$Q^{\mathbb{C}} \circ J_V(v) \equiv J_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \cdot (1, 0)^2 = J_{\mathbb{R}} \circ Q(v) \equiv Q(v).$$

W świetle Stw. 173 istnieje zatem funktorialne podniesienie  $J_V$  do unitalnego monomorfizmu  $\mathbb{R}$ -algebr

$$\text{Cliff}(J_V) : \text{Cliff}(V, Q) \rightarrow \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}),$$

który możemy wykorzystać do skonstruowania odwzorowania  $\mathbb{C}$ -liniowego

$$\varphi_{(V, Q)} : \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}),$$

określonego na tensorach prostych  $\gamma \otimes_{\mathbb{R}} z \in \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  wzorem

$$\varphi_{(V, Q)}(\gamma \otimes_{\mathbb{R}} z) := z \triangleright \text{Cliff}(J_V)(\gamma).$$

Odwzorowanie to spełnia warunek

$$\begin{aligned} \varphi_{(V, Q)} \circ m_{\otimes}((\gamma_1 \otimes_{\mathbb{R}} z_1), (\gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_2)) &= \varphi_{(V, Q)}(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_1 \cdot z_2) \\ &= (z_1 \cdot z_2) \triangleright \text{Cliff}(J_V)(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \\ &= (z_1 \cdot z_2) \triangleright (\text{Cliff}(J_V)(\gamma_1) \cdot_{\mathbb{C}} \text{Cliff}(J_V)(\gamma_2)) \\ &= (z_1 \triangleright \text{Cliff}(J_V)(\gamma_1)) \cdot (z_2 \cdot_{\mathbb{C}} \text{Cliff}(J_V)(\gamma_2)) \\ &\equiv \varphi_{(V, Q)}(\gamma_1 \otimes_{\mathbb{R}} z_1) \cdot \varphi_{(V, Q)}(\gamma_2 \otimes_{\mathbb{R}} z_2), \end{aligned}$$

jest zatem (jawnie unitalnym) homomorfizmem  $\mathbb{C}$ -algebr. Punktem wyjścia do konstrukcji jego odwrotności jest odwzorowanie  $\mathbb{C}$ -liniowe

$$\begin{aligned} \psi_{(V, Q)} : V^{\mathbb{C}} &\longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ &: v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \longmapsto J_V(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + J_V(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), \end{aligned}$$

spełniające warunek Clifforda,

$$\begin{aligned} &\psi_{(V, Q)}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1))^2 \\ &= (J_V(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + J_V(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \cdot (J_V(v) \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + J_V(w) \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ &= v^2 \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)^2 + \{v, w\} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (0, 1) + w^2 \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)^2 \\ &= (Q(v) - Q(w)) \triangleright e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + 2\Phi_Q(v, w) \triangleright e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1) \\ &= e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} e^{\mathbb{C}} (Q(v) - Q(w), 2\Phi_Q(v, w)) \\ &= Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \triangleright (e^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)) \\ &\equiv Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \triangleright e_{\otimes}^{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

w którego wyprowadzeniu korzystamy z tożsamości

$$\begin{aligned} &Q^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\ &\equiv \Phi_{Q^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0) + w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi_{Q^c}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0), v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)) + \Phi_{Q^c}(w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1), w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\
&\quad + 2\Phi_{Q^c}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0), w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\
&\equiv Q^c(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0)) + Q^c(w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) + 2\Phi_{Q^c}(v \otimes_{\mathbb{R}} (1, 0), w \otimes_{\mathbb{R}} (0, 1)) \\
&= (1, 0)^2 \cdot_{\mathbb{C}} Q(v) + (0, 1)^2 \cdot_{\mathbb{C}} Q(w) + (1, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} 2\Phi_Q(v, w) \\
&= (Q(v) - Q(w), 2\Phi_Q(v, w)).
\end{aligned}$$

Powyższe przesądza o istnieniu (jedyne) unitalnego homomorfizmu  $\mathbb{C}$ -algebr

$$\tilde{\psi}_{(V, Q)} : \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}) \longrightarrow \text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

o własności

$$\tilde{\psi}_{(V, Q)} \circ J_{V^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) = J_V(v) \otimes_{\mathbb{R}} z.$$

Ten ostatni w oczywisty sposób spełnia tożsamości

$$\tilde{\psi}_{(V, Q)} \circ \varphi_{(V, Q)} = \text{id}_{\text{Cliff}(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}}, \quad \varphi_{(V, Q)} \circ \tilde{\psi}_{(V, Q)} = \text{id}_{\text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}})},$$

które bez trudu sprawdzamy na generatorach, i tym samym zyskuje interpretację odwrotności  $\varphi_{(V, Q)}$ . Dla dowolnej rzeczywistej przestrzeni kwadratowej otrzymujemy zatem unitalny izomorfizm  $\mathbb{C}$ -algebr

$$\eta_{(V, Q)} := \tilde{\psi}_{(V, Q)} : \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, Q^{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\cong} \text{Cliff}(V, Q)^{\mathbb{C}}.$$

Łatwo sprawdzamy (na generatorach  $v \otimes_{\mathbb{R}} z \in V_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ) jego naturalność licząc – dla dowolnej izometrii  $\chi : V_1 \longrightarrow V_2$  między parą rzeczywistych przestrzeni kwadratowych (o odnośnych formach kwadratowych  $Q_1$  i  $Q_2$ ) –

$$\begin{aligned}
\eta_{(V_2, Q_2)} \circ \text{Cliff}(\chi)^{\mathbb{C}} \circ J_{V_1^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) &= \eta_{(V_2, Q_2)} \circ J_{V_2^{\mathbb{C}}} \circ \chi^{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) \\
&= \eta_{(V_2, Q_2)} \circ J_{V_2^{\mathbb{C}}}(\chi(v) \otimes_{\mathbb{R}} z) = J_{V_2} \circ \chi(v) \otimes_{\mathbb{R}} z \\
&\equiv \text{Cliff}(\chi) \circ J_{V_1}(v) \otimes_{\mathbb{R}} z \\
&= \text{Cliff}(\chi)^{\mathbb{C}}(J_{V_1}(v) \otimes_{\mathbb{R}} z) \\
&\equiv \text{Cliff}(\chi)^{\mathbb{C}} \circ \eta_{(V_1, Q_1)} \circ J_{V_1^{\mathbb{C}}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z).
\end{aligned}$$

□

Powyższe twierdzenie pozwala ustalić postać niskowymiarowych zespolonych algebr Clifforda i sformułować reguły (pseudo)okresowości ich struktury na podstawie wcześniejszych twierdzeń klasyfikacyjnych z dziedziny rzeczywistej. Nie daje nam natomiast wglądu w dodatkowe strukturalne relacje między zespolonymi algebrami Clifforda nie będące prostą pochodną relacji między ich rzeczywistymi odpowiednikami. Ta konstatacja każe nam poświęcić więcej jeszcze czasu i uwagi na bezpośrednie zbadanie interesującej nas struktury i zarezerwować dla powyższego twierdzenia rolę wyniku porządkującego i wyjaśniającego ledwie część prawidłowości, jakie wyłonią się ostatecznie z naszych rozważań. Oto więc mamy

**TWIERDZENIE 3.2.7** (Klasyfikacyjne I  $\mathbb{C}$ ). *Przyjmijmy zapis Stw. 150 i 181. Dla dowolnych  $m, n \in \mathbb{N}$  istnieje unitalny izomorfizm  $\mathbb{C}$ -algebr*

$$\text{Cl}_{2m+n}^{\mathbb{C}} \cong \text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \text{Cl}_n^{\mathbb{C}}.$$

■

*Dowód:* Zauważmy przede wszystkim, że wobec algebraicznej domkniętości  $\mathbb{C}$  na dowolnej przestrzeni  $\mathbb{C}^{\times N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  istnieje wyznacznik (unormowany) o własności  $\lambda_{\Delta} = 1$ , przy czym jest on określony z dokładnością do znaku. Na mocy Stw. 175 odnośny element kanoniczny  $\text{Cl}_N^{\mathbb{C}}$  spełnia tożsamość

$$e_{\Delta}^2 = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} e^{\mathbb{C}},$$

wobec czego dla  $N = 2m + n$  otrzymujemy – w świetle Stw. 181 i Tw. 3.1.7 – pożądaną ciąg izomorfizmów

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{2m+n}^{\mathbb{C}} &\equiv \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m+n}, \delta_{\mathbb{E}}^{(2m+n)}) = \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m} \oplus \mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathbb{E}}^{(2m)} \oplus \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}) \\ &\cong \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m} \oplus \mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathbb{E}}^{(2m)} \oplus (-1)^{\frac{2m(2m-1)}{2}} \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}) \\ &\cong \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m}, \delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}) \otimes_{\mathbb{R}} \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times n}, \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}) \equiv \text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \text{Cl}_n^{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

□

Ostatnie stwierdzenie w połączeniu ze Stw. 167 (vi) pozwala nam sprowadzić zadanie klasyfikacji zespolonych algebr Clifforda do konstrukcji modelu algebry Clifforda (dowolnej) euklidesowej przestrzeni  $\mathbb{C}$ -liniowej parzystego wymiaru. Tę oczywistą tezę precyzuje

**TWIERDZENIE 3.2.8** (Klasyfikacyjne II  $\mathbb{C}$ ). *Przyjmijmy zapis Def. 112, Stw. 181 i 147 oraz Przykł. 31 (2). Dla dowolnego  $m \in \mathbb{N}$  istnieje unitalny izomorfizm  $\mathbb{C}$ -algebr*

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} &\cong \text{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^{\bullet} \mathbb{C}^{\times m}) \equiv \mathbb{C}(2^m), \\ \text{Cl}_{2m+1}^{\mathbb{C}} &\cong \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m). \end{aligned}$$

■

*Dowód:* Drugi z postulowanych izomorfizmów jest bezpośrednim następstwem Tw. 3.2.7 (dla  $n = 1$ ) oraz Stw. 167 (vi), wystarczy zatem udowodnić istnienie pierwszego z nich. W tym celu dokonujemy (dowolnego) rozkładu  $\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}$ -ortogonalnego

$$\mathbb{C}^{\times 2m} \cong \mathbb{C}^{\times m} \underset{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}{\oplus} \mathbb{C}^{\times m},$$

wybierając przy tym bazy ortonormalne  $\{e_i^A\}_{i \in \overline{1, m}}$ ,  $A \in \{1, 2\}$  w każdej z kopii  $\mathbb{C}^{\times m}$  w tym rozkładzie. Następnie definiujemy involucję  $\omega \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{\times 2m})$  jako (jedyne)  $\mathbb{C}$ -liniowe rozszerzenie przyporządkowania elementów baz:

$$\begin{aligned} \omega &: e_i^1 \mapsto (0, 1) \triangleright e_i^2, \\ &: e_i^2 \mapsto (0, -1) \triangleright e_i^1, \quad i \in \overline{1, m}. \end{aligned}$$



Bez trudu stwierdzamy, że odwzorowanie to jest skośnie symetryczne, oto bowiem – dla dowolnych  $i, j \in \overline{1, m}$  –

$$\begin{aligned}\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(\omega^*(e_i^1), e_j^1) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, \omega(e_j^1)) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, (0, 1) \triangleright e_j^2) = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, e_j^2) = 0 \\ &= -(0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, e_j^1) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(-(0, 1) \triangleright e_i^2, e_j^1) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(-\omega(e_i^1), e_j^1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(\omega^*(e_i^2), e_j^2) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, \omega(e_j^2)) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, (0, -1) \triangleright e_j^1) = (0, -1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, e_j^1) \\ &= 0 = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, e_j^2) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}((0, 1) \triangleright e_i^1, e_j^2) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(-\omega(e_i^2), e_j^2)\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(\omega^*(e_i^1), e_j^2) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, \omega(e_j^2)) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, (0, -1) \triangleright e_j^1) = (0, -1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, e_j^1) \\ &= (0, -1) \triangleright \delta_{ij} = (0, -1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, e_j^2) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}((0, -1) \triangleright e_i^2, e_j^2) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(-\omega(e_i^1), e_j^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(\omega^*(e_i^2), e_j^1) &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, \omega(e_j^1)) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, (0, 1) \triangleright e_j^2) = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^2, e_j^2) \\ &= (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \delta_{ij} = (0, 1) \cdot_{\mathbb{C}} \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(e_i^1, e_j^1) = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}((0, 1) \triangleright e_i^1, e_j^1) \\ &\equiv \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}}(-\omega(e_i^2), e_j^1).\end{aligned}$$

Wobec tej jego własności możemy przywołać tezę Stw. 177, która w obecnej sytuacji daje nam izomorfizm

$$\mathbb{C}_{2m}^{\mathbb{C}} \equiv \text{Cliff}(\mathbb{C}^{\times 2m}, \delta_{\mathbb{E}}^{(2m)}) \cong \text{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge \bullet \text{Ker}(\omega - \text{id}_{\mathbb{C}^{\times 2m}})).$$

Ten z racji oczywistej równości

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\omega - \text{id}_{\mathbb{C}^{\times 2m}}) = m$$

jest izomorfizmem, o którym mowa w treści dowodzonego twierdzenia.  $\square$

Dyskusję naszą rekapitułuje

**TWIERDZENIE 3.2.9 (Klasyfikacyjne III  $\mathbb{C}$ ).** *Przyjmijmy zapis Stw. 147 i 181. Tablica 2 zawiera klasyfikację algebr Clifforda  $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$  dla  $n \in \overline{0, 8}$  i tym samym określa  $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$  dla dowolnego  $n$ . Istnieją zatem – dla dowolnego  $m \in \mathbb{N}$  – izomorfizmy  $\mathbb{C}$ -algebr*

$$\text{Cl}_{2m}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}(2^m), \quad \text{Cl}_{2m+1}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m).$$

■

*Dowód:* Teza twierdzenia wynika bezpośrednio z Tw. 3.2.8. Można ją też wyprowadzić z Tw. 3.2.5, przywoławszy na pomoc Tw. 3.2.6.  $\square$

Prawidłowości w rozmieszczeniu algebr półprostych pośród zespolonych algebr Clifforda (i w szczególności w Tablicy 2) oraz ich strukturę tłumaczymy – tak jak w przypadku rzeczywistym – przy użyciu stosownego elementu kanonicznego.

DEFINICJA 117. Przyjmijmy zapis Stw. 181 i niechaj  $\{e_i\}_{i \in \overline{1, n}}$  będzie bazą standardową  $\mathbb{C}^{\times n}$ , ortonormalną względem formy kwadratowej  $\delta_E^{(n)}$ . **Element objętości** w  $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$  to wektor

$$\omega_{\mathbb{C}} := i^{n+E(\frac{n+1}{2})} \triangleright e_1 \cdot e_2 \cdots e_n,$$

w której definicji  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  jest częścią całkowitą (funkcją *entier*). ▲

Możemy już teraz wysłowić wyjaśniające zaobserwowane regularności

STWIERDZENIE 182. *Przyjmijmy zapis Def. 117 i Stw. 145, 147 oraz 148. Dla dowolnej liczby  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi równość*

$$\omega_{\mathbb{C}}^2 = e^{\mathbb{C}}.$$

W jej konsekwencji ilekroć  $n \in 2\mathbb{N} + 1$ , istnieje rozkład

$$(3.2.9) \quad \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} = \text{Cl}_n^+ \oplus \text{Cl}_n^-$$

algebry Clifforda  $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$  na sumę prostą jej podalgebr (zredukowanych)

$$\text{Cl}_n^{\pm} := P_{\omega_{\mathbb{C}}}^{\pm} \cdot \text{Cl}_n^{\mathbb{C}},$$

o elementach spełniających warunki – odpowiednio – samodwoistości (czyli samodualności)

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_n^+ : \omega_{\mathbb{C}} \cdot \gamma = \gamma,$$

wzgl. skośnej samodwoistości (lub inaczej antysamodualności)

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_n^- : \omega_{\mathbb{C}} \cdot \gamma = -\gamma.$$

Zachodzą relacje:

$$J_{\mathbb{C}^{\times n}}(\text{Cl}_n^{\pm}) = \text{Cl}_n^{\mp}$$

oraz

$$\text{Cl}_n^{\mathbb{C}^0} = (\text{id}_{\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}} + J_{\mathbb{C}^{\times n}})(\text{Cl}_n^{\pm}).$$

Rozkład ten pokrywa się z rozkładem półprostej  $\mathbb{C}$ -algebry  $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$  na składowe proste opisanym w Tw. 3.2.9, tj. dla dowolnego  $m \in \mathbb{N}$  istnieje izomorfizm  $\mathbb{C}$ -algebr prostych

$$\text{Cl}_{2m+1}^{\pm} \cong \mathbb{C}(2^m).$$

■

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Stw. 179. □

## Teoria reprezentacji algebr Clifforda

W niniejszym rozdziale skrupulatnie wykorzystamy wszystkie dotychczasowe nasze obserwacje dotyczące struktury rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda w celu przeprowadzenia wyczerpującej klasyfikacji ich reprezentacji, co będzie stanowiło fundamentalny przyczynek do zrozumienia fizykalnie istotnych tzw. reprezentacji spinorowych pewnych wyróżnionych podalgebr tychże algebr Clifforda.

### 1. Ogólne własności modułów Clifforda

Punktem wyjścia do dalszej dyskusji jest

DEFINICJA 118. Przyjmijmy zapis Def. 107 oraz 111 i niechaj  $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto 0_V), \ell_V), Q_V)$  będzie przestrzenią kwadratową nad ciałem  $\mathbb{K}$ . **Moduł Clifforda** algebry  $\text{Cliff}(V, Q_V)$  to para  $((W, +_W, P_W, \bullet \mapsto 0_W), \ell_W), \rho)$  złożona z przestrzeni wektorowej  $((W, +_W, P_W, \bullet \mapsto 0_W), \ell_W)$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  oraz reprezentacji

$$\rho : \text{Cliff}(V, Q_V) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W).$$

▲

Najbardziej elementarnej (re)interpretacji (algebraicznej) powyższej definicji na gruncie leżącej u jej podstaw definicji algebry Clifforda dostarcza

STWIERDZENIE 183. *Przyjmijmy zapis Def. 118. Ilekroć forma kwadratowa  $Q_V$  jest niezwyrodniała, ograniczenie (dziedziny) reprezentacji algebry Clifforda do przestrzeni wektorowej  $V \subset \text{Cliff}(V, Q_V)$  jest wierne (tj. iniektywne).*

■

*Dowód:* Dla dowolnego  $v \in \text{Ker } \rho$  obliczamy – wobec homomorficzności  $\rho$  –

$$Q_V(v) \triangleright \text{id}_W \equiv Q_V(v) \triangleright \rho(e^C) = \rho(v.v) = \rho(v)^2 = 0,$$

co z racji niezwyrodnienia  $Q_V$  implikuje równość  $v = 0_V$ . □

UWAGA 39. W świetle powyższego stwierdzenia możemy postrzegać moduł Clifforda jako wierną realizację przestrzeni wektorowej  $V$  w przestrzeni wektorowej  $W$ , która transportuje strukturę algebry (Clifforda) na  $V$  indukowaną w obecności formy kwadratowej  $Q_V$ .

¯

Jako że prowadzimy nasze rozważania w środowisku przestrzeni kwadratowych, zasadnym wydaje się wyróżnienie tych reprezentacji algebr Clifforda, które – w przypadku istnienia struktury przestrzeni kwadratowej na nośniku reprezentacji – wykazują proste własności względem obu struktur przestrzeni kwadratowej: na

przestrzeni  $V$  określającej reprezentowaną algebrę oraz na nośniku reprezentacji  $W$ . Ten sposób myślenia formalizuje

DEFINICJA 119. Przyjmijmy zapis Def. 118, zakładając przy tym, że także nośnik reprezentacji  $W$  jest przestrzenią kwadratową z formą kwadratową  $Q_W$ . Ustaliwszy skalar  $\varepsilon \in \{-1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\}$ , reprezentację algebry Clifforda  $\rho : \text{Cliff}(V, Q_V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$  określimy mianem  **$\varepsilon$ -ortogonalnej**, jeśli dla dowolnych  $(v, w_1, w_2) \in V \times W^{\times 2}$  jest spełniony warunek

$$(3.3.1) \Phi_{Q_W}(\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)(w_1), \rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)(w_2)) = \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} Q_V(v) \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_{Q_W}(w_1, w_2),$$

w którego zapisie  $j_V^{\mathbb{C}} : V \rightarrow \text{Cliff}(V, Q)$  jest kanonicznym odwzorowaniem Clifforda.

▲

Mamy proste

STWIERDZENIE 184. *Przyjmijmy zapis Def. 25 i 119, zakładając dodatkowo, że  $Q_W$  jest niezwyrodniała. Wówczas reprezentacja  $\rho : \text{Cliff}(V, Q_V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$  jest  $\varepsilon$ -ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe  $\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v) \in \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$  jest dla dowolnego  $v \in V$   **$\varepsilon$ -hermitowskie**, tj. spełnia warunek*

$$(\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v))^{\dagger} = \varepsilon (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)),$$

gdzie  $(\cdot)^{\dagger}$  jest sprzężeniem hermitowskim określonym względem  $\Phi_{Q_W}$ .

■

*Dowód:* Założenie o niezwyrodnieniu  $Q_W$ , implikujące niezwyrodnienie indukowanej przez nią formy dwuliniowej  $\Phi_{Q_W}$ , pozwala przepisać warunek (3.3.1) definiujący reprezentację  $\varepsilon$ -ortogonalną w równoważnej postaci

$$\forall v \in V : (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v))^{\dagger} \circ (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)) = \varepsilon Q_V(v) \triangleright \text{id}_W.$$

Ponieważ zachodzi także równość

$$(\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)) \circ (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)) = \rho(j_V^{\mathbb{C}}(v) \cdot j_V^{\mathbb{C}}(v)) = \rho(Q_V(v) \triangleright e^{\mathbb{C}}) = Q_V(v) \triangleright \text{id}_W,$$

przeto otrzymujemy tożsamość

$$\begin{aligned} Q_V(v) \triangleright (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v))^{\dagger} &\equiv (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v))^{\dagger} \circ (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)) \circ (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)) \\ &= \varepsilon Q_V(v) \triangleright (\rho \circ j_V^{\mathbb{C}}(v)), \end{aligned}$$

z którego – wobec niezwyrodnienia  $Q_V$  – wynika już wprost pożądana teza. □

Naturalności dokonanego przez nas wyróżnienia dowodzi

STWIERDZENIE 185. *Przyjmijmy zapis Def. 119. Dowolna reprezentacja algebry Clifforda przestrzeni kwadratowej (wymiaru  $d_V = \dim_{\mathbb{K}} V$ ) o (pseudo)euklidesowej formie kwadratowej  $Q_V = \varepsilon_V \triangleright \delta_{\mathbb{E}}^{(d_V)}$ ,  $\varepsilon_V \in \{-1, +1\}$  na przestrzeni kwadratowej (wymiaru  $d_W = \dim_{\mathbb{K}} W$ ) o (pseudo)euklidesowej formie kwadratowej  $Q_W = \varepsilon_W \triangleright \delta_{\mathbb{E}}^{(d_W)}$ ,  $\varepsilon_W \in \{-1, +1\}$  jest równoważna pewnej reprezentacji  $\varepsilon_V$ -ortogonalnej.*

■

*Dowód:* Wybierzmy bazę  $\varepsilon_V$ -ortonormalną  $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i \in \overline{1, d_V}}$  w przestrzeni  $V$ , a wówczas w  $\text{Cliff}(V, Q_V)$  są spełnione relacje

$$\{e_i, e_j\} = 2\varepsilon \delta_{i,j} \triangleright e^C, \quad i, j \in \overline{1, d_V}.$$

Zdefiniujmy grupę

$$\Gamma := \langle e_i \mid i \in \overline{1, d_V} \rangle,$$

generowaną moltiplikatywnie przez obrazy elementów bazy  $\mathcal{E}$  w  $\text{Cliff}(V, Q_V)$ . Grupa ta jest w oczywisty sposób skończona, ma zatem sens poniższa definicja odwzorowania dwuliniowego:

$$(\cdot | \cdot)^\Gamma : W \times W \longrightarrow \mathbb{K} : (w_1, w_2) \longmapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} \Phi_{Q_W}(\rho(\gamma)(w_1), \rho(\gamma)(w_2)).$$

Przy tym ( $\varepsilon_W$ -)określoność formy  $\Phi_{Q_W}$  implikuje (takąż) określoność odwzorowania  $(\cdot | \cdot)^\Gamma$ , a nadto – dla dowolnych  $\gamma \in \Gamma$  i  $w_1, w_2 \in W^{\times 2}$  – stwierdzamy  $\Gamma$ -niezmienniczość tego ostatniego,

$$\begin{aligned} (\rho(\gamma)(w_1) | \rho(\gamma)(w_2))^\Gamma &\equiv \sum_{\tilde{\gamma} \in \Gamma} \Phi_{Q_W}(\rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_1), \rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_2)) \\ &= \sum_{\tilde{\gamma} \cdot \gamma \in \Gamma} \Phi_{Q_W}(\rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_1), \rho(\tilde{\gamma} \cdot \gamma)(w_2)) \equiv (w_1 | w_2)^\Gamma. \end{aligned}$$

Pierwsza z tych cech pozwala stwierdzić istnienie odwzorowania  $\chi \in \text{Aut}_{\mathbb{K}}(W)$  o własności

$$\forall w_1, w_2 \in W : (w_1 | w_2)^\Gamma = \Phi_{Q_W}(\chi(w_1), \chi(w_2)).$$

Istotnie, wystarczy wybrać w  $W$  – w zgodzie z Stw. 22 – bazę  $\{f_i\}_{i \in \overline{1, d_W}} \in W$ -ortonormalną względem formy kwadratowej  $Q_W$  oraz bazę  $\{g_i\}_{i \in \overline{1, d_W}} \in W$ -ortonormalną względem formy kwadratowej

$$Q_W^\Gamma : W \longrightarrow \mathbb{K} : w \longmapsto (w | w)^\Gamma,$$

a następnie dokonać (jedyne)  $\mathbb{K}$ -liniowego rozszerzenia przyporządkowania

$$\chi(g_i) := f_i, \quad i \in \overline{1, d_W},$$

gdyż wtedy

$$\begin{aligned} (w_1 | w_2)^\Gamma &= w_1^i \cdot_{\mathbb{K}} w_2^j \cdot_{\mathbb{K}} (g_i | g_j)^\Gamma = \varepsilon_W w_1^i \cdot_{\mathbb{K}} w_2^j \cdot_{\mathbb{K}} \delta_{i,j}^{\mathbb{K}} \equiv w_1^i \cdot_{\mathbb{K}} w_2^j \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_{Q_W}(f_i, f_j) \\ &= w_1^i \cdot_{\mathbb{K}} w_2^j \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_{Q_W}(\chi(g_i), \chi(g_j)) = \Phi_{Q_W}(\chi(w_1), \chi(w_2)). \end{aligned}$$

Na tym etapie możemy już zadać reprezentację

$$\rho_\chi := \chi \circ \rho(\cdot) \circ \chi^{-1} : \text{Cliff}(V, \varepsilon_V \triangleright \delta_{\mathbb{E}}^{(d_V)}) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W) : x \longmapsto \chi \circ \rho(x) \circ \chi^{-1},$$

wprost na mocy definicji równoważną  $\rho$ . Obrazy elementów grupy  $\Gamma$  względem tej reprezentacji są izometriami  $Q_W$ , oto bowiem dla dowolnych  $(\gamma, w_1, w_2) \in \Gamma \times W^{\times 2}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi_{Q_W}(\rho_\chi(\gamma)(w_1), \rho_\chi(\gamma)(w_2)) &\equiv \Phi_{Q_W}(\chi(\rho(\gamma) \circ \chi^{-1}(w_1)), \chi(\rho(\gamma) \circ \chi^{-1}(w_2))) \\ &= (\rho(\gamma)(\chi^{-1}(w_1)) | \rho(\gamma)(\chi^{-1}(w_2)))^\Gamma \\ &= (\chi^{-1}(w_1) | \chi^{-1}(w_2))^\Gamma = \Phi_{Q_W}(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Zdefiniujmy rodzinę endomorfizmów

$$\sigma_i := \rho_\chi(e_i), \quad i \in \overline{1, d_V}.$$

Te spełniają – dla dowolnych  $w_1, w_2 \in W$  oraz  $i \in \overline{1, d_V}$  – tożsamość

$$\Phi_{Q_W}(\sigma_i^\dagger \circ \sigma_i(w_1), w_2) = \Phi_{Q_W}(\sigma_i(w_1), \sigma_i(w_2)) = \Phi_{Q_W}(w_1, w_2),$$

przeto – wobec dowolności  $w_1$  i  $w_2$  – jest

$$\sigma_i^\dagger \circ \sigma_i = \text{id}_W,$$

ale też

$$\sigma_i \circ \sigma_i = \rho_\chi(e_i^2) = \varepsilon_V \triangleright \rho_\chi(e^C) = \varepsilon_V \triangleright \text{id}_W,$$

więc ostatecznie

$$\sigma_i^\dagger = \varepsilon_V \triangleright \sigma_i,$$

co pozwala zapisać – dla dowolnego wektora  $v = v^i \triangleright e_i \in V$  – tożsamość

$$\rho_\chi(v)^\dagger = v^i \triangleright \sigma_i^\dagger = \varepsilon_V v^i \triangleright \sigma_i \equiv \varepsilon_V \triangleright \rho_\chi(v),$$

która w świetle Stw. 184 przesądza o  $\varepsilon_V$ -ortogonalności reprezentacji  $\rho_\chi$ , jawnie równoważnej  $\rho$ .  $\square$

Powyższe wprowadzenie przygotowało nas należycie do zmierzenia się z wyzwaniem, jakim jest kompletna klasyfikacja (nieprzywiedlnych i nietrywialnych) reprezentacji rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda – wyzwanie to podejmujemy w następnym rozdziale.

## 2. Reprezentacje rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda

Wyczerpująca klasyfikacja rzeczywistych i zespolonych algebr Clifforda, przeprowadzona w Rozdz. 3.2, w połączeniu z wiedzą dotyczącą reprezentacji algebr prostych, zgromadzoną w Rozdz. 2, stanowią solidną podstawę do sformułowania kompletnego opisu reprezentacji (nieprzywiedlnych) wszystkich algebr Clifforda nad  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$ . Tytułem jej uzupełnienia w sposób pozwalający na wysłowienie twierdzeń klasyfikacyjnych sformułujemy istotne

**STWIERDZENIE 186.** *Przyjmijmy zapis Def. 107, 116 i 117 oraz Stw. 178 i 181. Dla dowolnych liczb  $p, q \in \mathbb{N}$  spełniających warunek  $q - p = 3 \pmod{4}$  i dowolnej liczby  $n \in 2\mathbb{N} + 1$  zachodzi, co następuje:*

- (i) *w dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej  $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  na przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej  $V$  zachodzi*

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}}) = \varepsilon \triangleright \text{id}_V, \quad \varepsilon \in \{-1, +1\},$$

*przy czym reprezentacje odpowiadające obu wartościom  $\varepsilon$  istnieją i są wzajemnie nierównoważne – w dalszej części dyskusji będziemy je oznaczać symbolem  $\rho_\varepsilon^{p,q}$ ;*

- (ii) *w dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej  $\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$  na przestrzeni  $\mathbb{C}$ -liniowej  $\tilde{V}$  zachodzi*

$$\rho(\omega_{\mathbb{C}}) = \tilde{\varepsilon} \triangleright \text{id}_{\tilde{V}}, \quad \tilde{\varepsilon} \in \{-1, +1\},$$

*przy czym reprezentacje odpowiadające obu ewentualnościom istnieją i są wzajemnie nierównoważne – w dalszej części dyskusji będziemy je oznaczać symbolem  $\rho_\varepsilon^n$ .*

■

*Dowód:* Niechaj  $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  będzie dowolną (nietrywialną) reprezentacją nieprzywiedlną. Wobec tożsamości

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}})^2 = \rho(\omega_{\mathbb{R}}^2) = \rho(e^{\mathbb{C}}) = \text{id}_V,$$

wynikającej ze Stw. 179, endomorfizm  $\rho(\omega_{\mathbb{R}})$  definiuje zupełną parę rzutów komplementarnych:

$$P_{\pm} := \frac{1}{2} (\text{id}_V \pm \rho(\omega_{\mathbb{R}})),$$

która w świetle Stw. 33 wyznacza rozkład nośnika reprezentacji na sumę prostą

$$V = V_+ \oplus V_-, \quad V_{\pm} := P_{\pm}(V),$$

przy czym zachodzi

$$\rho(\omega_{\mathbb{R}}) \upharpoonright_{V_{\pm}} = \pm \text{id}_{V_{\pm}}.$$

Jako że element objętości należy do centrum  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ , przeto podprzestrzenie własne  $V_{\pm}$  są  $\rho$ -niezmiennicze, co wobec założonej nieprzywiedlności  $\rho$  ogranicza możliwą rozkłady jak niżej:

$$(V_+, V_-) = (V, \{0_V\}) \quad \vee \quad (V_+, V_-) = (\{0_V\}, V).$$

Załóżmy, że otrzymane tą drogą reprezentacje  $\rho_{\pm} : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V_{\pm})$  o własności  $\rho_{\pm}(\omega_{\mathbb{R}}) = \pm \text{id}_{V_{\pm}}$  są równoważne, czyli istnieje izomorfizm  $\chi : V_+ \rightarrow V_-$  spełniający warunek

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} : \chi \circ \rho_+(\gamma) = \rho_-(\gamma) \circ \chi.$$

Zachodzi wówczas – w szczególności – tożsamość

$$\chi \equiv \chi \circ \rho_+(\omega_{\mathbb{R}}) = \rho_-(\omega_{\mathbb{R}}) \circ \chi = -\chi,$$

która prowadzi do sprzeczności, skąd ostateczny wniosek o nierównoważności wzajemnej obu reprezentacji.

Na koniec pokażemy, że obie reprezentacje istnieją. W tym celu odwołamy się do Stw. 164 oraz 179, aby stwierdzić istnienie dwóch (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry  $R(2^m) \oplus R(2^m) \cong \text{Cl}_{p,q}^+ \oplus \text{Cl}_{p,q}^- \equiv \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ ,  $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , o strukturze

$$\tilde{\rho}_+ := \rho_{\text{def}} \circ \text{pr}_1 : R(2^m) \oplus R(2^m) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

i

$$\tilde{\rho}_- := \rho_{\text{def}} \circ \text{pr}_2 : R(2^m) \oplus R(2^m) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

odpowiednio. Zważywszy (unitalny charakter  $\text{Cl}_{p,q}^{\pm} \cong R(2^m)$  oraz) słuszność tożsamości

$$\forall \gamma_{\pm} \in \text{Cl}_{p,q}^{\pm} : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma_{\pm} = \pm \gamma_{\pm},$$

wynikających wprost z definicji podalgebr  $\text{Cl}_{p,q}^{\pm}$ , wyprowadzamy stąd wniosek, że w obrazie odwrotnym izomorfizmów  $\iota_k$ ,  $k \in \{3, 7\}$  z dowodu Stw. 179 otrzymujemy

$$\iota_k^{-1}(\omega_{\mathbb{R}}) = \mathbf{1}_{2^m} \oplus (-\mathbf{1}_{2^m}),$$

a zatem także dla nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho_{\pm} := \tilde{\rho}_{\pm} \circ \iota_k^{-1} : \text{Cl}_{p,q}^+ \oplus \text{Cl}_{p,q}^- \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(R^{2^m})$$

oczekiwane tożsamości

$$\rho_{\pm}(\omega_{\mathbb{R}}) = \pm \text{id}_{R^{2^m}} .$$

Dowód dla przypadku zespolonego przebiega analogicznie, przy czym odwołuje się do Stw. 182 zamiast Stw. 179.  $\square$

Tak przygotowani możemy już przejść do sklasyfikowania reprezentacji algebr Clifforda, co w przypadku algebr rzeczywistych podsumowuje

**TWIERDZENIE 3.3.1** (Klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych  $/\mathbb{R}$ ). *Przyjmijmy zapis Stw. 159 i 178 oraz Tw. 2 i 3.2.5, a następnie wprowadźmy oznaczenia*

$$(q_{\mathbb{R}}, q_{\mathbb{C}}, q_{\mathbb{H}}) := (0, 1, 2)$$

oraz – dla dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej  $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  –

$$d_{p,q}^{\mathbb{R}} := \dim_{\mathbb{R}} V, \quad \mathfrak{C}_{p,q}^{\mathbb{R}} := C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(V)}(\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}})).$$

Wreszcie też niechaj  $\nu_{p,q}^{\mathbb{R}}$  będzie liczbą nierównoważnych (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ . Wówczas prawdziwe są równości

$$\nu_{p,q}^{\mathbb{R}} = \begin{cases} 2, & \text{gdy } q - p = 3 \pmod{4} \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

a ponadto ilekroć izotyp  $\mathbb{R}$ -algebry  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$  przedstawiony w Tablicy 1 jest postaci

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong R(2^n) \quad \text{lub} \quad \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong R(2^n) \oplus R(2^n),$$

to spełnione są relacje (te same dla obu reprezentacji nierównoważnych w przypadku  $q - p = 3 \pmod{4}$ )

$$d_{p,q}^{\mathbb{R}} = 2^{n+q_{\mathbb{R}}}, \quad \mathfrak{C}_{p,q}^{\mathbb{R}} \cong R.$$

■

*Dowód:* Na podstawie Tw. 3.2.5 i Stw. 145 wnioskujemy, że algebra  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$  jest albo prosta (w przypadku  $q - p = 3 \pmod{4}$ ), albo półprosta (w przeciwnym przypadku), co w świetle Stw. 164 i Tw. 2.2.2 prowadzi do postulowanego wzoru na  $d_{p,q}^{\mathbb{R}}$  oraz – po uwzględnieniu punktu (i) Stw. 186 – wzoru na  $\nu_{p,q}^{\mathbb{R}}$ . Typ reprezentacji nieprzywiedlnych (każdorazowo jest to  $R$ ) ustala Stw. 165.  $\square$

W przypadku algebr zespolonych mamy analogiczne

**TWIERDZENIE 3.3.2** (Klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych  $/\mathbb{C}$ ). *Przyjmijmy zapis Stw. 181 oraz Tw. 3.3.1 i wprowadźmy – dla dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej  $\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  – oznaczenia*

$$d_n^{\mathbb{C}}(\rho) := \dim_{\mathbb{C}} V, \quad \mathfrak{C}_n^{\mathbb{C}}(\rho) := C_{\text{End}_{\mathbb{R}}(V)}(\rho(\text{Cl}_n^{\mathbb{C}})).$$

Wreszcie też niechaj  $\nu_n^{\mathbb{C}}$  będzie liczbą nierównoważnych (nietrywialnych) reprezentacji nieprzywiedlnych algebry  $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ . Wówczas prawdziwe są równości

$$\nu_n^{\mathbb{C}} = \begin{cases} 2, & \text{gdy } n \in 2\mathbb{N} + 1 \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases},$$



a ponadto spełnione są relacje (te same dla obu reprezentacji nierównoważnych w przypadku  $n \in 2\mathbb{N} + 1$ )

$$d_n^{\mathbb{C}} = 2^{E(\frac{n}{2})}, \quad \mathfrak{C}_n^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C},$$

tj. – w szczególności – wszystkie rozważane reprezentacje są zespolone. ■

Dowód: Tezy Tw. 3.2.9 i Stw. 145 przesądają o tym, że algebra  $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$  jest albo prosta (w przypadku  $n \in 2\mathbb{N}$ ), albo półprosta (w przypadku  $n \in 2\mathbb{N} + 1$ ), co pozwala uzyskać postulowany wzór na  $d_{p,q}^{\mathbb{R}}$  oraz – po uwzględnieniu punktu (ii) Stw. 186 – wzór na  $\nu_{p,q}^{\mathbb{R}}$  na gruncie Stw. 164 i Tw. 2.2.2. Zespolony typ reprezentacji nieprzywiedlnych wyznacza teza Stw. 165. □

Ostatnie dwa twierdzenia wyczerpują zagadnienie klasyfikacji nieprzywiedlnych reprezentacji algebr Clifforda  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$  i  $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ . Zanim jednak zamkniemy ten rozdział naszych dociekań, zatrzymamy się nad pewną szczególną własnością strukturalną rozpatrywanych przez nas reprezentacji, która odegra istotną rolę w dyskusji reprezentacji spinorowych w dalszej części kursu. Oto więc mamy

**STWIERDZENIE 187.** *Przyjmijmy zapis Stw. 148 i 186. Dla dowolnych liczb  $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2} \setminus \{(0, 0)\}$  spełniających warunek  $q - p = 0 \pmod{4}$  i dowolnej liczby  $n \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$  zachodzi, co następuje:*

- (i) *nośnik  $V$  dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej  $\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  ma rozkład*

$$V = V_+ \oplus V_-, \quad V_{\pm} := \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm})(V)$$

*na podprzestrzenie własne endomorfizmu  $\rho(\omega_{\mathbb{R}})$  stowarzyszone z wartościami własnymi  $\pm 1$ , przy czym dowolny wektor  $v \in \mathbb{R}^{\times p+q}$  o własności  $\delta_{\mathbb{E}}^{(p,q)}(v) \neq 0$  zadaje izomorfizm*

$$v_{\pm} := \rho \circ j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}(v)|_{V_{\pm}} : V^{\pm} \xrightarrow{\cong} V^{\mp},$$

*a nadto podprzestrzenie  $V_{\pm}$  są zachowywane przez podalgebrę  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}$ , której reprezentacje indukowane tym sposobem na  $V_{\pm}$  spełniają relację*

$$\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0})|_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}^{p,q-1}(\text{Cl}_{p,q-1}^{\mathbb{R}}),$$

*jeśli  $q \geq 1$ , lub*

$$\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0})|_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}^{p-1,q}(\text{Cl}_{p-1,q}^{\mathbb{R}}),$$

*jeśli  $p \geq 1$ ;*

- (ii) *nośnik  $V$  dowolnej (nietrywialnej) reprezentacji nieprzywiedlnej  $\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  ma rozkład*

$$V = V_+ \oplus V_-, \quad V_{\pm} := \rho(P_{\omega_{\mathbb{C}}}^{\pm})(V)$$

*na podprzestrzenie własne endomorfizmu  $\rho(\omega_{\mathbb{C}})$  stowarzyszone z wartościami własnymi  $\pm 1$ , przy czym dowolny wektor  $v \in \mathbb{C}^{\times n}$  o własności  $\delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(v) \neq 0$  zadaje izomorfizm*

$$v_{\pm} := \rho \circ j_{\mathbb{C}^{\times n}}(v)|_{V_{\pm}} : V^{\pm} \xrightarrow{\cong} V^{\mp},$$

a nadto podprzestrzenie  $V_{\pm}$  są zachowywane przez podalgebrę  $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}0}$ , której reprezentacje indukowane tym sposobem na  $V_{\pm}$  spełniają relację

$$\rho(\text{Cl}_n^{\mathbb{C}0}) \upharpoonright_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}^{n-1}(\text{Cl}_{n-1}^{\mathbb{C}}).$$

■

*Dowód:* Zajmiemy się punktem (i) tezy stwierdzenia – punkt (ii) jest dowodzony w pełni analogicznie. Założmy dla ustalenia uwagi, że  $q \geq 1$ , w przeciwnym wypadku zachodzi  $p \geq 1$  i dowód przebiega podobnie. Przywoławszy (pierwszą część) Stw. 179, konstatujemy istnienie rozkładu prostego  $V$ , o którym mowa w stwierdzeniu, dla dowolnej pary  $(p, q)$  spełniającej warunek  $(p+q+1)(p+q) - 2p \in 4\mathbb{N}$ , zatem w szczególności dla par związanych warunkiem  $q-p = 0 \pmod{4}$ . O tym, że odzorowania  $\mathbb{R}$ -liniowe  $v_{\pm}$  są poprawnie określone, przekonuje bezpośredni rachunek:

$$v_{\pm} \circ \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}) \equiv \rho(J_{\mathbb{R} \times p+q}(v) \cdot P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\pm}) = \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\mp} \cdot J_{\mathbb{R} \times p+q}(v)) = \rho(P_{\omega_{\mathbb{R}}}^{\mp}) \circ v_{\pm},$$

przeprowadzony w odwołaniu do Równ. (3.1.13), które w naszym przypadku daje równość

$$\omega_{\mathbb{R}} \cdot v = J_{\mathbb{R} \times p+q}(v) \cdot \omega_{\mathbb{R}} = (-1)^{p+q-1} v \cdot \omega_{\mathbb{R}} \equiv (-1)^{q-p+2p-1} v \cdot \omega_{\mathbb{R}} = -v \cdot \omega_{\mathbb{R}}.$$

Bijektywność  $v_{\pm}$  wynika wprost z tożsamości

$$v_{\pm} \circ v_{\mp} = \rho(J_{\mathbb{R} \times p+q}(v)^2) = \rho(\delta_E^{(p,q)}(v) \triangleright e^{\mathbb{C}}) = \delta_E^{(p,q)}(v) \triangleright \text{id}_{V_{\mp}},$$

w połączeniu z założeniem o nieizotropowości  $v$ . Wreszcie też niezmienniczość  $V_{\pm}$  względem  $\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0})$  jest następstwem relacji przemienności

$$\forall \gamma \in \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0} : \omega_{\mathbb{R}} \cdot \gamma = \gamma \cdot \omega_{\mathbb{R}},$$

które w świetle Równ. (3.1.13) są implikowane przez tożsamość

$$J_{\mathbb{R} \times p+q} \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}} = \text{id}_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}}.$$

Na tym etapie pozostaje wykazać istnienie równoważności reprezentacji

$$\rho(\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}) \upharpoonright_{V_{\pm}} \sim \rho_{\pm 1}(\text{Cl}_{p,q-1}^{\mathbb{R}}).$$

W tym celu wykorzystamy treść i dowód Stw. 180, na podstawie których otrzymujemy – oznaczwszy na potrzeby poniższego rachunku element objętości algebry  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$  symbolem  $\omega_{\mathbb{R}}^{p,q}$  –

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}) &= e_1 \cdot e_{p+q} \cdot e_2 \cdot e_{p+q} \cdots e_{p+q-1} \cdot e_{p+q} \\ &= (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}} e_1 \cdot e_2 \cdots e_{p+q-1} \cdot e_{p+q} \cdot e_{p+q}^{p+q-2} \\ &\equiv (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}} \omega_{\mathbb{R}}^{p,q} \cdot (e_{p+q}^2)^{\frac{p+q}{2}-1} = (-1)^{\frac{(p+q-1)(p+q-2)+p+q}{2}-1} \omega_{\mathbb{R}}^{p,q} \\ &\equiv (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-2)}{2}} \omega_{\mathbb{R}}^{p,q}, \end{aligned}$$

i ostatecznie – wobec założeń poczynionych w odniesieniu do  $(p, q)$  –

$$\tilde{\varphi}(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}) = \omega_{\mathbb{R}}^{p,q},$$

stąd zaś

$$\rho \circ \tilde{\varphi}(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q-1}) \upharpoonright_{V_{\pm}} = \rho(\omega_{\mathbb{R}}^{p,q}) \upharpoonright_{V_{\pm}} \equiv \pm \text{id}_{V_{\pm}}.$$

Równość  $(q-1) - p = 3 \pmod{4k}$  pozwala nam następnie sięgnąć do Stw. 179, które w połączeniu z udowodnionym na początku tego rozdziału Stw. 186 doprowadza nas do pożądanej konkluzji.  $\square$

## Spinory

### 1. Cliffordowskie realizacje izometrii

W niniejszym rozdziale zajmiemy się szczegółową rekonstrukcją funktorialnego podniesienia izometrycznych automorfizmów przestrzeni kwadratowej  $(V, Q)$  do jej algebry Clifforda  $\text{Cliff}(V, Q)$ , co doprowadzi nas ostatecznie do identyfikacji – w odwołaniu do prezentacji grupy ortogonalnej w terminach generatorów (i relacji), którą precyzuje Twierdzenie Cartana–Dieudonnégo – podgrupy w algebrze Clifforda implementującej na kanonicznie zanurzonej w  $\text{Cliff}(V, Q)$  wyjściowej przestrzeni  $V$  (poprzez ograniczenie doń odnośnych automorfizmów) transformacje ortogonalne. Nasze dociekania rozpoczniemy od

**DEFINICJA 120.** Przyjmijmy zapis Def. 12 oraz 111. **Multyplikatywna grupa jedności** algebry Clifforda to zbiór

$$\text{Cliff}(V, Q)^\times := \{ \gamma \in \text{Cliff}(V, Q) \mid \exists \gamma^{-1} \in \text{Cliff}(V, Q) : \gamma \cdot \gamma^{-1} = e^C = \gamma^{-1} \cdot \gamma \}$$

odwracalnych elementów  $\text{Cliff}(V, Q)$  ze strukturą grupy indukowaną z tejże algebry unitalnej (tj. w szczególności z operacją binarną daną przez mnożenie w algebrze Clifforda). **Reprezentacja dołączona** tej grupy to homomorfizm grup

$$\begin{aligned} \text{Ad} &: \text{Cliff}(V, Q)^\times \longrightarrow \text{Inn}(\text{Cliff}(V, Q)) \\ &: u \longmapsto ( \text{Cliff}(V, Q) \ni \gamma \longmapsto u \cdot \gamma \cdot u^{-1} \equiv \text{Ad}_u(\gamma) ). \end{aligned}$$

Bywa on także nazywany **reprezentacją wektorową**  $\text{Cliff}(V, Q)^\times$ . ▲

W bezpośrednim nawiązaniu do uwagi wprowadzającej wysławiamy

**STWIERDZENIE 188.** *Przyjmijmy zapis Def. 24 i 120. Dla dowolnego wektora nieizotropowego  $v \in V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$  i dowolnego wektora  $w \in V$  spełniona jest tożsamość*

$$-\text{Ad}_v(w) = w - 2 \frac{\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \triangleright v,$$

więc też – w szczególności –

$$\text{Ad}_v(V) = V,$$

przy czym utożsamiliśmy – jak zwykle – przestrzeń  $V$  z jej monomorficznym obrazem w  $\text{Cliff}(V, Q)$ . ■

Dowód: Odwrotność wektora nieizotropowego  $v$  w  $\text{Cliff}(V, Q)$  to

$$v^{-1} = Q(v)^{-1} \triangleright v,$$

stąd

$$-Q(v) \triangleright \text{Ad}_v(w) = -v.w.v \equiv -v.\{w, v\} + v^2.w = -2\Phi_Q(w, v) \triangleright v + Q(v) \triangleright w.$$

□

UWAGA 40. Działanie dołączone w ograniczeniu (obustronnym) do  $V \subset \text{Cliff}(V, Q)$  realizuje superpozycje przeciwności (odbicia wzgl. wektora zerowego) z odbiciami w płaszczyznach ortogonalnych (wzgl.  $Q$ ) do wektorów nieizotropowych.

□

Powyższe obserwacje prowadzą nas wprost do

STWIERDZENIE 189. *Przyjmijmy zapis Def. 24 oraz 120 i dla*

$$V^\times := V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$$

*zdefiniujmy grupę*

$$(3.4.1) \quad P(V, Q) := \{v \in V^\times\} \subset \text{Cliff}(V, Q)^\times,$$

*tj. grupę generowaną mnożeniowo (wzgl. mnożenia indukowanego z algebry  $\text{Cliff}(V, Q)$ ) przez wektory nieizotropowe. Reprezentacja dołączona  $\text{Cliff}(V, Q)^\times$  na  $\text{Cliff}(V, Q)$  ogranicza się do reprezentacji*

$$\underline{\text{Ad}} : P(V, Q) \longrightarrow \text{O}(V, Q) : u \longmapsto \text{Ad}_u \upharpoonright_{V \subset \text{Cliff}(V, Q)}.$$

■

*Dowód:* Homomorficzność  $\underline{\text{Ad}}$  jest oczywista,

$$\forall_{u_1, u_2 \in P(V, Q)} : \underline{\text{Ad}}_{u_1 \cdot u_2} = \underline{\text{Ad}}_{u_1} \circ \underline{\text{Ad}}_{u_2},$$

pozostaje zatem tylko sprawdzić, że endomorfizm  $\underline{\text{Ad}}_u$  zachowuje formę kwadratową  $Q$ , co czynimy – dla dowolnych  $v \in V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$  i  $w \in V$  – w bezpośrednim rachunku odwołującym się do Stw. 188,

$$\begin{aligned} Q \circ \underline{\text{Ad}}_v(w) &\equiv Q(v.w.v^{-1}) = Q(-v.w.v^{-1}) = Q\left(w - 2\frac{\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \triangleright v\right) \\ &\equiv \Phi_Q\left(w - 2\frac{\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \triangleright v, w - 2\frac{\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \triangleright v\right) \\ &= \Phi_Q(w, w) - 4\frac{\Phi_Q(w, v)}{Q(v)} \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(w, v) + \frac{\Phi_Q(w, v)^2}{Q(v)^2} \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v, v) \\ &= Q(w). \end{aligned}$$

□

Reprezentacja dołączona, jakkolwiek przydatna przy wyrabianiu sobie pewnych elementarnych intuicji algebraicznych i geometrycznych, z których skorzystamy w dalszej części wywodu, ma jedną istotną niedoskonałość: oto jej ograniczenie  $\underline{\text{Ad}}$  nie zawiera w ogólności transformacji zmieniających na przeciwną orientację  $V$  – istotnie, w przypadku  $\dim_{\mathbb{K}} V = 2n + 1 \in 2\mathbb{N} + 1$  endomorfizm  $\text{Ad}_v$ ,  $v \in V^\times$  odwzorowuje wektor  $w$  w siebie,  $\text{Ad}_v(v) = v$ , a dowolny wektor  $w \in \langle v \rangle_{\mathbb{K}}^{\perp Q}$  – wektor przeciwny,  $\text{Ad}_v(w) = -w$ , co oznacza, że wyznacznik tego endomorfizmu ma wartość  $\det \text{Ad}_v = 1 \cdot (-1)^{2n} = 1$ . Ażeby naprawić tę niedoskonałość, musimy w naszej rekonstrukcji funktorialnego podniesienia automorfizmów przestrzeni kwadratowej wyjść poza zbiór automorfizmów wewnętrznych, co czynimy w następniej

DEFINICJA 121. Przyjmijmy zapis Def. 113 i 120, Stw. 189 oraz Przykł. 12 (7). **Reprezentacja dołączona zwichrowana** moltiplikatywnej grupy jedności algebry Clifforda, zwana także **reprezentacją  $J_V$ -wektorową moltiplikatywnej grupy jedności**, to homomorfizm grup

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}} &: \text{Cliff}(V, Q)^\times \longrightarrow \text{Aut}(\text{Cliff}(V, Q)) \\ &: u \longmapsto \left( \text{Cliff}(V, Q) \ni \gamma \longmapsto J_V(u) \cdot \gamma \cdot u^{-1} \equiv \widetilde{\text{Ad}}_u(\gamma) \right). \end{aligned}$$

Reprezentacja ta pozwala wyróżnić grupę

$$\Gamma(V, Q) := \{ u \in \text{Cliff}(V, Q)^\times \mid \widetilde{\text{Ad}}_u(V) = V \} \supset P(V, Q),$$

określaną mianem **grupy Clifforda**. ▲

Punktu wyjścia do analizy grupy Clifforda dostarcza

STWIERDZENIE 190. *Przyjmijmy zapis Def. 53 i 121 oraz Przykł. 6 i niechaj  $((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto 0_V), \ell_V, Q)$  będzie niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową skończonego wymiaru nad ciałem  $\mathbb{K}$  o charakterystyce  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ . Ograniczenie reprezentacji dołączonej zwichrowanej*

$$\widetilde{\text{Ad}} : \Gamma(V, Q) \longrightarrow \text{GL}(V; \mathbb{K}) \equiv \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V) : u \longmapsto \widetilde{\text{Ad}}_u \upharpoonright_{V \subset \text{Cliff}(V, Q)}.$$

zadaje krótki ciąg dokładny grup

$$(3.4.2) \quad \mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{K}^\times \longrightarrow \Gamma(V, Q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{GL}(V; \mathbb{K}),$$

w którym

$$\mathbb{K}^\times \equiv \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$$

jest moltiplikatywną grupą niezerowych elementów ciała  $\mathbb{K}$ . ■

*Dowód:* Przynależność do jądra  $\widetilde{\text{Ad}}$  (obrazów) elementów  $\mathbb{K}^\times$  jest rzeczą oczywistą,

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K}^\times \quad \forall v \in V : \widetilde{\text{Ad}}_{\lambda \triangleright e^C}(v) &= (\lambda \triangleright e^C) \cdot v \cdot (\lambda \triangleright e^C)^{-1} \equiv (\lambda \triangleright e^C) \cdot v \cdot (\lambda^{-1} \triangleright e^C) \\ &= \lambda \cdot_{\mathbb{K}} \lambda^{-1} \triangleright v = v. \end{aligned}$$

Wnioskując odwrotnie, wybierzmy bazę ortogonalną  $\{v_i\}_{i \in \overline{1, N}}$ ,  $N \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$  w przestrzeni  $V$ ,

$$\forall_{i, j \in \overline{1, N}} : \Phi_Q(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{i, j}^{\mathbb{K}}, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}^\times,$$

i rozważmy dowolny element  $u \in \text{Ker } \widetilde{\text{Ad}}$ , który wprost na mocy definicji spełnia warunek

$$\forall_{v \in V} : J_V(u) \cdot v = v \cdot u.$$

Rozkładając  $u = u_0 + u_1$  na składowe  $u_k \in \text{Cliff}(V, Q)^k$ ,  $k \in \{0, 1\}$ , przepisujemy powyższe w postaci

$$u_0 \cdot v - u_1 \cdot v = v \cdot u_0 + v \cdot u_1,$$

czyli – wobec Równ. (3.1.8) – równoważnie w formie układu warunków

$$u_0 \cdot v = v \cdot u_0 \quad \wedge \quad u_1 \cdot v = -v \cdot u_1.$$

Redukcja stopnia 2 w  $\text{Cliff}(V, Q)$  określona przez relacje

$$\forall_{i, j \in \overline{1, N}} : v_i \cdot v_j = -v_j \cdot v_i + 2\lambda_i \delta_{i, j}^{\mathbb{K}}$$

pozwała przy tym rozisać

$$u_0 = \alpha_0(v_2, v_3, \dots, v_N) + v_1 \cdot \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N),$$

$$u_1 = \beta_1(v_2, v_3, \dots, v_N) + v_1 \cdot \beta_0(v_2, v_3, \dots, v_N)$$

w terminach pewnych wielomianów  $\alpha_k, \beta_k$  parzystości  $k$ . Kładąc  $v = v_1$ , otrzymujemy z pierwszego z powyższych warunków równość

$$\begin{aligned} \alpha_0(v_2, v_3, \dots, v_N) \cdot v_1 + v_1 \cdot \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N) \cdot v_1 &= v_1 \cdot \alpha_0(v_2, v_3, \dots, v_N) \\ &+ v_1^2 \cdot \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N), \end{aligned}$$

która sprowadza się ostatecznie do postaci

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \alpha_0(v_2, v_3, \dots, v_N) - v_1^2 \cdot \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N) &= v_1 \cdot \alpha_0(v_2, v_3, \dots, v_N) \\ &+ v_1^2 \cdot \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N), \end{aligned}$$

czyli

$$2\lambda_1 \triangleright \alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Jako że  $Q$  jest niezwyrodniała,  $\lambda_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$ , przeto  $\alpha_1(v_2, v_3, \dots, v_N) = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}$ , a zatem  $u_0$  nie zależy od  $v_1$ . Powtarzając analogiczne rozumowanie dla  $v_j$ ,  $j \in \overline{2, N}$ , stwierdzamy ostatecznie, że

$$u_0 = \lambda \triangleright e^C, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

W podobny sposób stwierdzamy, że także  $u_1$  nie zależy od  $v_i$ ,  $i \in \overline{1, N}$ , co wobec nieparzystości  $u_1$  implikuje jego trywialność,  $u_1 = \mathbf{0}_{\text{Cliff}(V, Q)}$ . W sumie zatem mamy

$$u = u_0 + u_1 = u_0 = \lambda \triangleright e^C,$$

co z racji odwracalności  $u$  daje nam tezę dowodzonego stwierdzenia.  $\square$

**UWAGA 41.** Założenie o niezwyrodnieniu formy kwadratowej  $Q$  poczynione w ostatnim stwierdzeniu jest istotne, o czym przekonuje nas analiza przypadku  $\text{Cliff}(V, 0) \equiv \wedge^\bullet V$ . Oto więc dla dowolnych  $v_1, v_2 \in V \setminus \{0_V\}$  sprawdzamy tożsamość

$$(1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2)^{-1} = 1_{\mathbb{K}} - v_1 \wedge v_2,$$

która oznacza, że  $1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2 \in \text{Cliff}(V, Q)^\times$ . Przy tym dla dowolnego  $v \in V$  zachodzi

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}}_{1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2}(v) &= J_V(1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2) \wedge v \wedge (1_{\mathbb{K}} - v_1 \wedge v_2) \\ &= (1_{\mathbb{K}} + v_1 \wedge v_2) \wedge (v - v \wedge v_1 \wedge v_2) \\ &= v - v \wedge v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_2 \wedge v - v_1 \wedge v_2 \wedge v \wedge v_1 \wedge v_2 \\ &= v - v \wedge v_1 \wedge v_2 + v \wedge v_1 \wedge v_2 = v, \end{aligned}$$

co pokazuje dowodnie, że  $\text{Ker } \widetilde{\text{Ad}}$  zawiera elementy nie-skalarne.

Zanim podejmiemy dalszą analizę relacji między grupą Clifforda a grupą automorfizmów przestrzeni kwadratowej  $(V, Q)$ , wprowadzimy obecnie nader przydatną konstrukcję pomocniczą.

DEFINICJA 122. Przyjmijmy zapis Def. 113. **Norma spinorowa** na  $\text{Cliff}(V, Q)$  to odwzorowanie

$$\mathbf{N} : \text{Cliff}(V, Q) \circlearrowleft : \gamma \mapsto \gamma \cdot J_V \circ T_V(\gamma),$$

o oczywistej własności

$$\forall_{v \in V} : \mathbf{N}(v) = -Q(v) \triangleright e^{\mathbb{C}}.$$

▲

Kluczową własność określonego powyżej odwzorowania wysławia

STWIERDZENIE 191. *Przyjmijmy zapis Def. 122 oraz Stw. 190, zakładając przy tym, że przestrzeń kwadratowa  $(V, Q)$  jest skończenie wymiarowa i niezwyrodniała. Wówczas norma spinorowa ogranicza się do homomorfizmu grup*

$$\mathbf{N} \upharpoonright_{\Gamma(V, Q)} : \Gamma(V, Q) \longrightarrow \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{K}^\times.$$

■

*Dowód:* Zauważmy na wstępie, że dla dowolnego  $u \in \Gamma(V, Q)$  i wszystkich  $v \in V$  zachodzi – wprost na mocy definicji grupy Clifforda –  $J_V(u) \cdot v \cdot u^{-1} \in V$ , więc także

$$\begin{aligned} J_V(u) \cdot v \cdot u^{-1} &= T_V(J_V(u) \cdot v \cdot u^{-1}) = T_V(u)^{-1} \cdot T_V(v) \cdot T_V \circ J_V(u) \\ &= T_V(u)^{-1} \cdot v \cdot J_V \circ T_V(u), \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} v &= (T_V(u) \cdot J_V(u)) \cdot v \cdot (J_V \circ T_V(u) \cdot u)^{-1} = J_V(J_V \circ T_V(u) \cdot u) \cdot v \cdot (J_V \circ T_V(u) \cdot u)^{-1} \\ &\equiv \widetilde{\text{Ad}}_{J_V \circ T_V(u) \cdot u}(v), \end{aligned}$$

co oznacza, że

$$J_V \circ T_V(u) \cdot u \in \text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} \upharpoonright_V.$$

Przy tym wobec pierwszej z powyższych równości zachodzi

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}}_{J_V \circ T_V(u)}(v) &= T_V(u) \cdot v \cdot J_V \circ T_V(u)^{-1} \equiv T_V(u^{-1})^{-1} \cdot v \cdot J_V \circ T_V(u^{-1}) \\ &= J_V(u^{-1}) \cdot v \cdot u \equiv J_V(u^{-1}) \cdot v \cdot (u^{-1})^{-1} \equiv \widetilde{\text{Ad}}_{u^{-1}}(v) \in V, \end{aligned}$$

co pozwala stwierdzić, że  $J_V \circ T_V(u) \in \Gamma(V, Q)$ , czyli też

$$J_V \circ T_V(u) \cdot u \in \Gamma(V, Q) \cap \text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} \upharpoonright_V,$$

a w takim razie na mocy Stw. 190 wyprowadzamy wniosek o istnieniu skalaru  $\lambda_u \in \mathbb{K}^\times$  spełniającego warunek

$$J_V \circ T_V(u) \cdot u = \lambda_u \triangleright e^{\mathbb{C}}.$$

To pozwala nam stwierdzić, że

$$\mathbf{N}(T_V(u)) \equiv T_V(u) \cdot J_V(u) = J_V(J_V \circ T_V(u) \cdot u) = J_V(\lambda_u \triangleright e^{\mathbb{C}}) = \lambda_u \triangleright e^{\mathbb{C}}.$$



Zarazem

$$V = J_V(u).V.u^{-1} \iff V = J_V(u)^{-1}.V.u,$$

przeto

$$\begin{aligned} V \equiv T_V(V) &= T_V(J_V(u)^{-1}.V.u) = T_V(u).T_V(V).T_V \circ J_V(u)^{-1} \\ &= T_V(u).V.J_V \circ T_V(u)^{-1}, \end{aligned}$$

więc ostatecznie

$$\begin{aligned} V \equiv -J_V(V) &= -J_V(T_V(u).V.J_V \circ T_V(u)^{-1}) \\ &= -J_V \circ T_V(u).J_V(V).J_V \circ J_V \circ T_V(u)^{-1} \\ &= J_V \circ T_V(u).V.T_V(u)^{-1} \equiv \widetilde{\text{Ad}}_{T_V(u)}(V). \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że

$$u \in \Gamma(V, Q) \iff T_V(u) \in \Gamma(V, Q),$$

co pozwala wcześniejszą naszą konstatację przepisać w pożądaney postaci

$$\mathbf{N}(u) = \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathbb{C}} \in \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathbb{C}}.$$

Na koniec bez trudu sprawdzamy, dla dowolnych  $u_1, u_2 \in \Gamma(V, Q)$ , że

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(u_1.u_2) &\equiv u_1.u_2.J_V \circ T_V(u_1.u_2) = u_1.\mathbf{N}(u_2).J_V \circ T_V(u_1) \\ &= u_1.\lambda_{T_V(u_2)} \triangleright e^{\mathbb{C}}.J_V \circ T_V(u_1) = u_1.J_V \circ T_V(u_1).\lambda_{T_V(u_2)} \triangleright e^{\mathbb{C}} \\ &\equiv \mathbf{N}(u_1).\mathbf{N}(u_2). \end{aligned}$$

□

Wyposażeni w nowe narzędzie analizy strukturalnej, jakim jest norma spinorowa, możemy przyjrzeć się bliżej krótkiemu ciągowi dokładnemu grup (3.4.2). Czynimy to w poniższym

**STWIERDZENIE 192.** *Przyjmijmy zapis Stw. 190. Ograniczenie  $\widetilde{\text{Ad}}$  reprezentacji dołączonej zwichrowanej zadaje homomorfizm grup*

$$\widetilde{\text{Ad}} : \Gamma(V, Q) \longrightarrow \text{O}(V, Q).$$

■

*Dowód:* Zaczniemy od wyznaczenia – w odwołaniu do Stw. 191, a dla dowolnego  $u \in \Gamma(V, Q)$  – normy

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(J_V(u)) &\equiv J_V(u).J_V \circ T_V \circ J_V(u) = J_V(u).T_V(u) = J_V(u.J_V \circ T_V(u)) \\ &\equiv J_V(\mathbf{N}(u)) = J_V(\lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathbb{C}}) = \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathbb{C}} \equiv \mathbf{N}(u). \end{aligned}$$

Uwzględnivszy powyższe oraz  $J_V(u), u^{-1} \in \Gamma(V, Q)$ , jak również treść Stw. 191, możemy następnie obliczyć, dla dowolnego (anizotropowego)  $v \in V^\times \subset \Gamma(V, Q)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\widetilde{\text{Ad}}_u(v)) &\equiv \mathbf{N}(J_V(u).v.u^{-1}) = \mathbf{N}(J_V(u)).\mathbf{N}(v).\mathbf{N}(u^{-1}) = \mathbf{N}(u).\mathbf{N}(v).\mathbf{N}(u)^{-1} \\ &\equiv \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathbb{C}}.\mathbf{N}(v).\lambda_{T_V(u)}^{-1} \triangleright e^{\mathbb{C}} = \mathbf{N}(v) \end{aligned}$$

i na tej podstawie – stwierdzić, że działanie dołączone zwichrowane zachowuje  $Q(v)$  dla wszystkich anizotropowych wektorów  $v \in V^\times$ . Z drugiej strony ilekroć  $Q(v) = 0_{\mathbb{K}}$ , zachodzi  $\widetilde{\text{Ad}}_u(v) \notin V^\times$ , gdyż w przeciwnym razie byłoby – w świetle wcześniejszych ustaleń –  $v = \widetilde{\text{Ad}}_{u^{-1}}(\widetilde{\text{Ad}}_u(v)) \in \widetilde{\text{Ad}}_u(V^\times) \subset V^\times$ , co prowadziłoby do sprzeczności. Mamy zatem implikację

$$N(v) = -Q(v) \triangleright e^{\mathbb{C}} = 0_{\text{Cliff}(V, Q)} \quad \implies \quad N(\widetilde{\text{Ad}}_u(v)) = 0_{\text{Cliff}(V, Q)},$$

która czyni nasz dowód kompletnym.  $\square$

Ostatnie stwierdzenie w połączeniu z definicją (3.4.1) podgrupy  $P(V, Q) \subset \Gamma(V, Q)$  oraz tożsamością

$$(3.4.3) \quad \widetilde{\text{Ad}}_v \equiv P_v$$

(patrz: definicja (26)) każe postawić pytanie o surjektywny charakter indukowanego przez reprezentację dołączoną zwichrowaną homomorfizmu

$$\widetilde{\text{Ad}} \upharpoonright_{P(V, Q)} : P(V, Q) \longrightarrow \text{O}(V, Q).$$

Odpowiedzi na to pytanie dostarcza

**STWIERDZENIE 193.** *Przyjmijmy zapis Def. 121 oraz Stw. 189. Ograniczenie reprezentacji dołączonej zwichrowanej*

$$\widetilde{\text{Ad}} \upharpoonright_{P(V, Q)} : P(V, Q) \longrightarrow \text{O}(V, Q)$$

*jest epimorfizmem grup.*

■

Dowód: Prosta konsekwencja definicji grupy  $P(V, Q)$ , tożsamość (3.4.3) oraz Tw. 1.2.4.  $\square$

Zanim postąpimy dalej w naszej eksploracji anatomii grupy Clifforda, wprowadzimy pewne wyróżnione jej podgrupy o absolutnie kluczowym znaczeniu dla naszych rozważań, zorientowanych ostatecznie na konstrukcję spinorów. Oto więc mamy

**DEFINICJA 123.** Przyjmijmy zapis Def. 113 oraz 120. **Grupa**  $\text{Pin}$  przestrzeni kwadratowej  $(V, Q)$  to podgrupa

$$\text{Pin}(V, Q) := \langle v \in Q^{-1}(\{-1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\}) \rangle \subset P(V, Q).$$

Jej podgrupa

$$\text{Spin}(V, Q) := \text{Pin}(V, Q) \cap \text{Cliff}(V, Q)^0$$

nosi miano **grupy**  $\text{Spin}$  przestrzeni kwadratowej  $(V, Q)$ .  $\blacktriangle$

W kontekście poprzedniego stwierdzenia najogólniejsze własności wprowadzonych tu grup opisuje

**STWIERDZENIE 194.** *Przyjmijmy zapis Def. 123 oraz Stw. 190. Podgrupy*

$$\widetilde{\text{Ad}}(\text{Pin}(V, Q)), \widetilde{\text{Ad}}(\text{Spin}(V, Q)) \subset \text{O}(V, Q)$$

*są normalne.*

■

Dowód: Izometryczne działanie definiujące grupy  $O(V, Q)$  na  $(V, Q)$

$$\rho_{\text{def.}} \equiv \text{id}_{O(V, Q)} : O(V, Q) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{K}}(V, Q)$$

podnosi się funktorialnie do  $\text{Cliff}(V, Q)$  na mocy Tw. 3.1.3, przy czym

$$\forall \chi \in O(V, Q) : [\text{Cliff}(\chi), J_V] = 0,$$

więc też dla dowolnych  $v \in V^\times, w \in V$  oraz  $\chi \in O(V, Q)$  obliczamy

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}}_{\chi(v)}(w) &\equiv J_V \circ \chi(v).w.\chi(v)^{-1} = \chi \circ J_V(v).w.\chi(v^{-1}) \\ &= \text{Cliff}(\chi)(J_V(v).\chi^{-1}(w).v^{-1}) = \text{Cliff}(\chi) \circ \widetilde{\text{Ad}}_v(\chi^{-1}(w)), \end{aligned}$$

czyli – wobec Równ (3.4.3) –

$$\widetilde{\text{Ad}}_{\chi(v)}(w) = \chi \circ \widetilde{\text{Ad}}_v \circ \chi^{-1}(w),$$

co pozwala nam zapisać

$$\widetilde{\text{Ad}}_{\chi(v)} \upharpoonright_V = \text{Ad}_\chi(\widetilde{\text{Ad}}_v \upharpoonright_V)$$

i na tej podstawie – w bezpośrednim odwołaniu do Def. 123 (obie grupy są generowane mnożeniowo przez pewne wektory nieizotropowe w stosownej liczbie (parzystej dla  $\text{Spin}(V, Q)$ ), a nadto  $Q \circ \chi(v) = Q(v)$ ) – ustalić pożądane relacje

$$\forall_{H \in \{\widetilde{\text{Ad}}(\text{Pin}(V, Q)), \widetilde{\text{Ad}}(\text{Spin}(V, Q))\}} \forall_{\chi \in O(V, Q)} : \text{Ad}_\chi(H) \subset H.$$

□

Tytułem ukierunkowania dalszej dyskusji, która pozwoli należycie wyeksponować grupy  $\text{Pin}$  i  $\text{Spin}$ , zauważmy, że dla dowolnego skalaru  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$  (i dla każdego wektora  $v \in V^\times$ ) spełniona jest tożsamość

$$P_{\lambda \triangleright v} = P_v,$$

jeśli zatem bylibyśmy w stanie przernormować wszystkie nieizotropowe wektory w  $V$  tak, by ich norma (spinorowa, tj. zadawana przez  $Q$ ) była równa  $\pm \mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ , to wówczas w świetle Tw. 1.2.4 reprezentacja dołączona zwichrowana ograniczałaby się w oczywisty sposób do epimorfizmów  $\text{Pin}(V, Q) \twoheadrightarrow O(V, Q)$  oraz  $\text{Spin}(V, Q) \twoheadrightarrow \text{SO}(V, Q)$ . Kłopot w tym, że tego typu operacja wymaga rozwiązania (w  $\mathbb{K}^\times$ ) równania

$$\{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\} \ni Q(\lambda \triangleright v) = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)$$

dla dowolnej wartości  $Q(v)$ , co tłumaczy się na warunek

$$\forall_{v \in V^\times} \exists_{\varepsilon_v \in \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\}} : \frac{\varepsilon_v}{Q(v)} \in \{ \lambda^2 \in \mathbb{K}^\times \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times \}.$$

Warunek ten jest (szczęśliwie) spełniony dla  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , w ogólności zaś dostarcza motywacji dla

DEFINICJA 124. Przyjmijmy zapis Def. 9 oraz Przykł. 6 (1) i wprowadźmy oznaczenie

$$(\mathbb{K}^\times)^2 \equiv \{ \lambda^2 \in \mathbb{K}^\times \mid \lambda \in \mathbb{K}^\times \}.$$

Ciało  $\mathbb{K}$  o charakterystyce  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$  nazywamy **spinowym**, jeśli spełnia warunek

$$\mathbb{K}^\times = (\mathbb{K}^\times)^2 \cup -(\mathbb{K}^\times)^2,$$

czyli

$$\forall_{\lambda \in \mathbb{K}^\times} \exists_{\mu \in \mathbb{K}^\times} : \mu^2 \in \{-\lambda, \lambda\}.$$



Zwieńczeniem naszych dociekań jest

**TWIERDZENIE 3.4.1.** *Przyjmijmy zapis Def. 53, 123 i 124, Stw. 190 oraz Przykł. 14 (1). Dla dowolnej skończonej wymiarowej niezwyrodniałej przestrzeni kwadratowej  $(V, Q)$  nad ciałem spinowym  $\mathbb{K}$  istnieją krótkie ciągi dokładne grup*

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \text{Pin}(V, Q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{O}(V, Q) \longrightarrow \mathbf{1},$$

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \text{Spin}(V, Q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{SO}(V, Q) \longrightarrow \mathbf{1},$$

przy czym

$$\mathbb{F} = \begin{cases} \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\} \cong \mathbb{Z}_2, & \text{gdy } \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \notin \mathbb{K} \\ \{-\sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}}, \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}}, -\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\} \cong \mathbb{Z}_4 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

co pokazuje, że grupy  $\text{Pin}$  i  $\text{Spin}$  są centralnymi rozszerzeniami grup – odpowiednio – ortogonalnej i specjalnej ortogonalnej przestrzeni kwadratowej. W szczególności dla  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  i dowolnej sygnatury  $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2} \setminus \{(0, 0)\}$ , a przy oznaczeniach  $G_{\mathbb{R}}(p, q) \cong G(\mathbb{R}^{p, q})$ ,  $G \in \{\text{O}, \text{SO}, \text{Pin}, \text{Spin}\}$ , otrzymujemy krótkie ciągi dokładne

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Pin}_{\mathbb{R}}(p, q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{O}_{\mathbb{R}}(p, q) \longrightarrow \mathbf{1},$$

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) \longrightarrow \mathbf{1},$$

w których – o ile tylko  $(p, q) \neq (1, 1)$  – podwójne nakrycia grupy ortogonalnej (wzgl. specjalnej ortogonalnej) przez grupę  $\text{Pin}$  (wzgl.  $\text{Spin}$ ) są topologicznie nietrywialne nad  $\text{O}_{\mathbb{R}}(p, q)$  – i tak np. podwójne nakrycie

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}_{\mathbb{R}}(0, n) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{SO}_{\mathbb{R}}(0, n) \longrightarrow \mathbf{1}$$

jest uniwersalne dla  $n \geq 3$ .



*Dowód:* Rozważmy dowolny element  $u = v_1.v_2.\dots.v_m \in \text{Pin}(V, Q)$  z jądra homomorfizmu  $\widetilde{\text{Ad}}$  (określony przez wektory  $v_i \in Q^{-1}(\{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\})$ ,  $i \in \overline{1, m}$ ). Na mocy Stw. 190

$$u \in \mathbb{K}^{\times} \triangleright e^{\mathbb{C}},$$

zatem – w świetle Stw. 191 i samej Def. 122 –

$$\begin{aligned} u.u &= u.J_V \circ T_V(u) \cong N(u) = N(v_1).N(v_2).\dots.N(v_m) \\ &= (-Q(v_1)) \cdot_{\mathbb{K}} (-Q(v_2)) \cdot_{\mathbb{K}} \dots \cdot_{\mathbb{K}} (-Q(v_m)) \triangleright e^{\mathbb{C}} \in \mathbb{Z}_2 \triangleright e^{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Mamy tutaj dwie wykluczające się ewentualności:

- albo  $\mathbb{K} \not\cong \sqrt{-\mathbb{1}_{\mathbb{K}}}$ , a wtedy nieodzownie  $u^2 = e^{\mathbb{C}}$ , czyli  $u \in \{-e^{\mathbb{C}}, e^{\mathbb{C}}\}$ , tj.

$$\text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} \subseteq \{-e^{\mathbb{C}}, e^{\mathbb{C}}\},$$

ponieważ jednak

$$\widetilde{\text{Ad}}_{\pm e^{\mathbb{C}}} = \text{id}_V,$$

przeto ostatecznie

$$\text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} = \{-e^C, e^C\} \cong \mathbb{Z}_2,$$

- albo  $\mathbb{K} \ni \sqrt{-1_{\mathbb{K}}}$ , a wtedy oba znaki w powyższej tożsamości są dopuszczalne, więc

$$\text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} \subseteq \{-\sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, \sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, -e^C, e^C\},$$

a że

$$\forall_{x \in \{-\sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, \sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, -e^C, e^C\}} : \widetilde{\text{Ad}}_x = \text{id}_V,$$

toteż

$$\text{Ker } \widetilde{\text{Ad}} = \{-\sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, \sqrt{-1_{\mathbb{K}}} \triangleright e^C, -e^C, e^C\} \cong \mathbb{Z}_4.$$

Topologia podwójnych nakryć ma swój aspekt elementarny, który odróżnia pokrycia  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \widehat{B} \rightarrow B$  postaci  $\widehat{B} = B \times \mathbb{Z}_2$  (zwane trywialnymi) od pokryć przyjmujących postać trywialną jedynie lokalnie (nad bazą  $B$ ), ale też – zwłaszcza w obecnym kontekście – aspekt wyższy, który odróżnia pokrycia  $n$ -spójne (dla  $n \geq 1$ ) od nie- $n$ -spójnych. Zanalizowanie tego ostatniego aspektu wymaga znajomości szczegółów topologii wszystkich grup uwikłanych w treść twierdzenia na poziomie wykraczającym dalece poza zakres niniejszego kursu – zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do literatury źródłowej, jak choćby do doskonałej monografii S. Helgasona [Hel01]. W niniejszym dowodzie skupimy się natomiast na aspekcie elementarnym, wykazując, że podwójne pokrycia wymienione w drugiej części twierdzenia nie mają struktury podwójnej kopii bazy. W tym celu wystarczy połączyć krzywą ciągłą<sup>1</sup> punkty w przestrzeni totalnej pokrycia, które rzutują się na ten sam punkt bazy, a więc np.  $-e^C$  i  $e^C$  w  $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$ . Jako że  $(p, q) \neq (1, 1)$  (na podstawie poczynionego tu założenia), zawsze znajdziemy wektory  $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{p+q}$  spełniające układ warunków

$$\delta_E^{(p,q)}(e_1) = \delta_E^{(p,q)}(e_2) =: \varepsilon \in \{-1, 1\} \quad \wedge \quad e_1 \perp_{\delta_E^{(p,q)}} e_2.$$

Dla dowolnej takiej pary wektorów definiujemy krzywą (gładką)

$$\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0} : t \mapsto (\cos t \triangleright e_1 + \sin t \triangleright e_2) \cdot (\cos t \triangleright e_1 - \sin t \triangleright e_2).$$

Bez trudu wyznaczamy

$$\begin{aligned} \delta_E^{(p,q)}(\cos t \triangleright e_1 + \sin t \triangleright e_2) &= \cos^2 t \cdot \delta_E^{(p,q)}(e_1) + \sin^2 t \cdot \delta_E^{(p,q)}(e_2) \\ &\quad + \sin t \cdot \cos t \cdot \Phi_{\delta_E^{(p,q)}}(e_1, e_2) = \varepsilon, \\ \delta_E^{(p,q)}(\cos t \triangleright e_1 - \sin t \triangleright e_2) &= \cos^2 t \cdot \delta_E^{(p,q)}(e_1) + \sin^2 t \cdot \delta_E^{(p,q)}(e_2) \\ &\quad - \sin t \cdot \cos t \cdot \Phi_{\delta_E^{(p,q)}}(e_1, e_2) = \varepsilon \end{aligned}$$

i na tej podstawie stwierdzamy, że krzywa leży w grupie Spin,

$$\gamma([0, \frac{\pi}{2}]) \subset \text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q),$$

<sup>1</sup>Przy naturalnych założeniach dotyczących topologii rozpatrywanych grup, znajdujących potwierdzenie w szczegółowych dociekaniach, np. na podstawie lektury rzeczzonej monografii S. Helgasona.

będącej przestrzenią totalną rozpatrywanego nakrycia. Przy tym krzywa ta łączy ze sobą oba punkty w  $\widetilde{\text{Ad}}^{-1}(\text{id}_V)$ ,

$$\gamma(0) = e_1 \cdot e_1 = \varepsilon \triangleright e^C, \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e_2 \cdot e_2 = -\varepsilon \triangleright e^C,$$

co nie byłoby możliwe w topologii  $O_{\mathbb{R}}(p, q) \times \mathbb{Z}_2$ .  $\square$

## 2. Reprezentacje spinorowe

Próba zrozumienia struktury funktorialnego podniesienia izometrycznych automorfizmów przestrzeni kwadratowej do jej algebry Clifforda, zrealizowana w poprzednim rozdziale, doprowadziła nas do konstrukcji centralnego rozszerzenia grupy obrotów zachowujących orientację przestrzeni kwadratowej i tym samym przygotowała grunt pod wieńczącą nasze dociekania algebraiczne (w obecnym kontekście)

DEFINICJA 125. Przyjmijmy zapis Def. 123, Tw. 3.4.1 i Przykł. 14 (1), przy czym niechaj  $((V, Q), \mathbb{K}) \in \{(\mathbb{R}^{p,q}, \mathbb{R}), (\mathbb{C}^{n,0}, \mathbb{C})\}$ , i niech  $S \in \text{Obj Vect}_{\mathbb{K}}$ . **Reprezentacja spinorowa** grupy  $\text{Spin}(V, Q)$  to ograniczenie (nietrywialnej) nieprzywiedlnej reprezentacji

$$\rho : \text{Cliff}(V, Q) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(S)$$

do tejże grupy

$$(3.4.4) \quad \text{Spin}(V, Q) \subset \text{Cliff}(V, Q)^0 \subset \text{Cliff}(V, Q),$$

przy czym w przypadku  $((V, Q), \mathbb{K}) = (\mathbb{R}^{p,q}, \mathbb{R})$  i  $\rho$  rzeczywistej mówimy o **rzeczywistej reprezentacji spinorowej** grupy  $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$ , a w przypadku  $((V, Q), \mathbb{K}) = (\mathbb{C}^{n,0}, \mathbb{C})$  i  $\rho$  zespolonej – o **zespolonej reprezentacji spinorowej** grupy  $\text{Spin}_{\mathbb{C}}(n) \equiv \text{Spin}(\mathbb{C}^{n,0})$ .  $\blacktriangle$

UWAGA 42. Należy zwrócić, że reprezentacja spinorowa nie zstępuje do (czyli nie indukuje reprezentacji)  $\text{SO}(V, Q)$ , oto bowiem  $\rho_{-e^C} = -\text{id}_V$ .  $\overline{\lambda}$

W odwołaniu do wyników dotychczasowych naszych dociekań możemy bez trudu dokonać kompletnej klasyfikacji wprowadzonych tu obiektów.

TWIERDZENIE 3.4.2 (Klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych / $\mathbb{R}$ ). Przyjmijmy zapis Def. 125 oraz Przykł. 12 (7) i niechaj

$$\rho : \text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(S)$$

będzie (nietrywialną rzeczywistą) reprezentacją nieprzywiedlną. Reprezentacja spinorowa

$$\rho \upharpoonright_{\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)} : \text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q) \longrightarrow \text{GL}(S; \mathbb{R})$$

przyjmuje – w zależności od  $(p, q) \in \mathbb{N}^{\times 2}$  – następującą postać

- dla  $|q - p| = 1 \pmod{8}$  : nieprzywiedlna rzeczywista na  $S = \mathbb{R}^{2^k}$ , gdzie  $k = \begin{cases} p, & \text{gdy } q - p = 1 \pmod{8} \\ p - 1, & \text{gdy } q - p = 7 \pmod{8} \end{cases}$  (**spinory Pauliego**);

- dla  $|q - p| = 3 \pmod{8}$  : nieprzywiedlna kwaternionowa na  $S = \mathbb{H}^{2^k}$ , gdzie  $k = \begin{cases} p, & \text{gdy } q - p = 3 \pmod{8} \\ p - 3, & \text{gdy } q - p = 5 \pmod{8} \end{cases}$  (spinory Pauliego);
- dla  $|q - p| = 2 \pmod{8}$  : nieprzywiedlna zespolona na  $S = \mathbb{C}^{2^k}$ , gdzie  $k = \begin{cases} p, & \text{gdy } q - p = 2 \pmod{8} \\ p - 1, & \text{gdy } q - p = 6 \pmod{8} \end{cases}$  (spinory Pauliego);
- dla  $q - p = 0 \pmod{8}$  : przywiedlna rzeczywista na  $S = S_+ \oplus S_-$  (spinory Diraca) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne rzeczywiste reprezentacje na  $S_{\pm} = \mathbb{R}^{2^p}$  (chiralne spinory Weyla);
- dla  $q - p = 4 \pmod{8}$  : przywiedlna rzeczywista na  $S = S_+ \oplus S_-$  (spinory Diraca) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne kwaternionowe reprezentacje na  $S_{\pm} = \mathbb{H}^{2^p}$  (chiralne spinory Weyla).

Przy tym w przypadku  $q - p = 3 \pmod{4}$  wynik powyższej indukcji reprezentacji grupy Spin nie zależy od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ . ■

Dowód: Zważywszy Równ. (3.4.4), kluczową rolę w dowodzie odgrywają izomorfizmy (zapisane dla dowolnych  $p, k \in \mathbb{Z}$ , dla których zapis ma sens)

$$\begin{aligned} \text{Cl}_{p,p+1+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-1+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p-2+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^{p-1+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p+3+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p+2+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-3+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p-4+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}(2^{p-3+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p+2+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p+1+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p-2+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p-3+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}(2^{p-1+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p-1+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{R}(2^{p+4k}), \\ \text{Cl}_{p,p+4+8k}^{\mathbb{R}0} &\cong \text{Cl}_{p,p+3+8k}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}(2^{p+4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{p+4k}), \end{aligned}$$

odczytane wprost ze Stw. 153 (i) oraz z (dowodu) Tw. 3.2.5 po przywołaniu tezy Stw. 180. Wobec powyższego pozostaje upewnić się, że ograniczenie nieprzywiedlnych reprezentacji odnośnych (prostych) algebr macierzowych do zawartych w nich w sposób właściwy grup Spin nie prowadzi do pojawienia się podprzestrzeni niezmienniczych względem obrazu ograniczenia w grupie liniowej przestrzeni reprezentacji w obrębie tychże przestrzeni, a ponadto – że w przypadku, gdy odnośne parzyste podalgebry Clifforda są półproste, ich nierównoważne reprezentacje pozostają nierównoważnymi po ograniczeniu ich do grup Spin. Oba te fakty wynikają jednak wprost z tego, że  $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$  zawiera addytywną bazę  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}$ , a określenie reprezentacji na takowej bazie w pełni charakteryzuje tę reprezentację, oto bowiem równoważność dwóch reprezentacji (ograniczonych) ewaluowanych na bazie addytywnej implikowałaby ich równoważność w ogólności, a do tego niezmienniczość  $S$

względem reprezentacji ograniczonej do podstruktury zawierającej ową bazę implikowałaby bezpośrednio jej niezmienniczość względem reprezentacji sprzed ograniczenia.

Na koniec zajmiemy się niezależnością wyniku opisanej indukcji reprezentacji grupy  $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(p, q)$  od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej  $\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}}$ . Oznaczmy jako

$$\iota_3^{\pm} : \text{Cl}_{p,p+3+8k}^{\pm} \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}(2^{p+4k}), \quad \iota_7^{\pm} : \text{Cl}_{p,p-1+8k}^{\pm} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}(2^{p+4k})$$

izomorfizmy (3.2.8), po czym zauważmy, że w świetle Równ. (3.2.7) zachodzi tożsamość

$$\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0} = \{ \gamma_+ \oplus J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+) \mid \gamma_+ \in \text{Cl}_{p,q}^+ \},$$

a ponieważ na mocy Stw. 179  $J_{\mathbb{R}^{p+q}}$  jest izomorfizmem między algebrą  $\text{Cl}_{p,q}^+$  i  $\text{Cl}_{p,q}^-$ , przeto reprezentacje

$$\rho_{\text{def}} \circ \iota_3^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} : \text{Cl}_{p,p+3+8k}^+ \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^{2^{p+4k}})$$

oraz

$$\rho_{\text{def}} \circ \iota_7^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} : \text{Cl}_{p,p-1+8k}^+ \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2^{p+4k}})$$

są nieprzywiedlne, a zatem – wobec prostoty  $\text{Cl}_{p,q}^+$  – nieodzownie

$$\rho_{\text{def}} \circ \iota_k^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}} \sim \rho_{\text{def}} \circ \iota_k^+, \quad k \in \{3, 7\},$$

mimo więc relację – orzeczoną w Stw. 186 (i) –  $\rho_+ \not\sim \rho_-$ , stwierdzamy istnienie splataczy  $\chi_3 \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}^{2^{p+4k}})$  oraz  $\chi_7 \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2^{p+4k}})$  spełniających warunki

$$\begin{aligned} \rho_-(\gamma_+ \oplus J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+)) &= \rho_{\text{def}} \circ \iota_k^- \circ J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+) = \chi_k \circ \rho_{\text{def}} \circ \iota_k^+(\gamma_+) \circ \chi_k^{-1} \\ &\equiv \chi_k \circ \rho_+(\gamma_+ \oplus J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma_+)) \circ \chi_k^{-1}, \end{aligned}$$

czyli

$$\rho_- \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}} \sim \rho_+ \upharpoonright_{\text{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}0}}.$$

□

**TWIERDZENIE 3.4.3** (Klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych / $\mathbb{C}$ ).  
Przyjmijmy zapis Def. 125 oraz Przykł. 12 (7) i niechaj

$$\rho : \text{Cl}_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$$

będzie (nietrywialną zespoloną) reprezentacją nieprzywiedlną. Reprezentacja spinorowa

$$\rho \upharpoonright_{\text{Spin}_{\mathbb{C}}(n)} : \text{Spin}_{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow \text{GL}(S; \mathbb{C})$$

przyjmuje – w zależności od  $n \in \mathbb{N}$  – następującą postać

- dla  $n \in 2\mathbb{N} + 1$  : nieprzywiedlna zespolona na  $S = \mathbb{C}^{2^{\frac{n-1}{2}}}$  (spinory Pauliego);
- dla  $n \in 2\mathbb{N}$  : przywiedlna zespolona na  $S = S_+ \oplus S_-$  (spinory Diraca) rozkładalna na dwie wzajem nierównoważne nieprzywiedlne zespolone reprezentacje na  $S_{\pm} = \mathbb{C}^{2^{\frac{n}{2}-1}}$  (chiralne spinory Weyla).

Przy tym w przypadku  $n \in 2\mathbb{N}+1$  wynik powyższej indukcji reprezentacji grupy  $\text{Spin}$  nie zależy od wyboru nieprzywiedlnej reprezentacji algebry półprostej  $\text{Cl}_n^{\mathbb{C}}$ .



■

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Tw. 3.4.2. □

Jest całkowicie jasnym, że przedstawiona tu dyskusja reprezentacji spinorowych stanowi ledwie wprowadzenie do teorii reprezentacji grupy Spin, przynoszącej – m.in. – odpowiedź na pytanie o kompletną klasyfikację *wszystkich* nierównoważnych nieprzywiedlnych jej reprezentacji oraz pierścienia tychże reprezentacji. Szczegółowe studium struktury tego ostatniego, które z racji fundamentalnej roli, jaką nieprzywiedlne reprezentacje grupy Spin odgrywają w modelowaniu pól fizycznych, powinno być przedmiotem każdego umotywowanego fizykalnie wykładu z teorii grup i algebr (Liego), pozwala wyróżnić reprezentację spinorową jako jego elementarny generator. Doskonałym źródłem intuicji i podstawowych konstrukcji w tym zakresie jest monografia Cartana [Car38a, Car38b].

### 3. Spinory czyste i flagi zerowe – studium przypadków

Konstrukcje algebraiczne napotykanne w kategorii przestrzeni kwadratowych mają zazwyczaj naturalną i czytelną interpretację geometryczną, która zasada się na intuicji dotyczącej pojęć „długości wektora”, „kąta między wektorami”, „obrotu wektora” i „odbicia wektora w hiperpłaszczyźnie”. Idąc tym tropem, możemy zadać pytanie o geometryczny aspekt konstrukcji spinora, rozumianego jako wektor z przestrzeni reprezentacji grupy Spin nakrywającej grupę obrotów przestrzeni kwadratowej. Pięknej w swej naturalności i prostocie odpowiedzi na tak postawione pytanie (choć nie wyczerpującej denotatu, a to z racji istnienia spinorów nie-czystych (*sic!*)) udzielił E. Cartan we wspomnianej już wcześniej monografii [Car38a, Car38b] poświęconej spinorom. Odpowiedź tę doskonale uzupełnia konstrukcja R. Penrose’a przedstawiona w trakcie konferencji Battelle Rencontres, a spisana w [Pen68].

**3.1. Spinor czysty Cartana.** Zaczniemy od przedstawienia pomysłu Cartana, która jest zorganizowana wokół

DEFINICJA 126. Przyjmijmy zapis Def. 6 i 125. **Spinor czysty** to wektor z przestrzeni reprezentacji spinorowej grupy  $\text{Spin}(V, Q)$  anihilowany przez obraz  $j_V^C(W) \subset \text{Cliff}(V, Q)$  dowolnej maksymalnej podprzestrzeni  $Q$ -zerowej  $W \subset V$ .

▲

Szczegółowa analiza konstrukcji Cartana wykracza poza ramy niniejszego kursu, jednakowoż jej znaczenie w budowaniu konkretnej geometrycznej konotacji dla abstrakcyjnego pojęcia spinora stanowi dostateczną motywację choćby tylko dla wnikliwego prześledzenia tej konstrukcji na wybranym przykładzie, co czynimy poniżej.

Rozważmy wektor

$$v \equiv (t, x, y) \in \mathbb{R}^{1,2} \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

o normie

$$\delta_E^{(1,2)}(v) = t^2 - x^2 - y^2.$$

Ilekość  $v$  jest izotropowy,

$$\delta_E^{(1,2)}(v) = 0,$$

możemy – wobec warunku  $t \neq 0$  (którego niespełnienie implikowałoby równość  $v = (0, 0, 0)$ ) – „wyciągnąć pierwiastek kwadratowy” z wektora  $v$  wprowadzając wektor (przypomnijmy:  $Cl_{1,2}^{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}(2)$ )

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

o składowych spełniających układ warunków

$$(3.4.5) \quad \begin{cases} \xi_1^2 - \xi_2^2 = x \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 = iy \\ 2\xi_1\xi_2 = it \end{cases} .$$

Istotnie, otrzymujemy wówczas tożsamość

$$t^2 - x^2 - y^2 = -4\xi_1^2\xi_2^2 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 = 0 .$$

Rozwiązanie ogólne powyższego układu ma postać

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sqrt{\frac{x+iy}{2}} \\ \varepsilon_2 \sqrt{\frac{-x+iy}{2}} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\},$$

przy czym wybieramy wspólną dla obu składowych gałąź funkcji  $\sqrt{\cdot}$ , dla której  $\sqrt{-1} = i$ . Znaki  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  związane są warunkiem

$$\operatorname{sgn}(t)|t| \equiv t = -2i\xi_1\xi_2 = -i\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{-x^2 - y^2} = \varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{t^2} = \varepsilon_1\varepsilon_2|t|,$$

z którego wyprowadzamy relację

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sgn}(t) .$$

Ta pozwala ostatecznie zapisać rozwiązanie

$$(3.4.6) \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x+iy}{2}} \\ \operatorname{sgn}(t) \sqrt{\frac{-x+iy}{2}} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\},$$

czyli – jeśli wprowadzić pomocniczą notację zespoloną  $z \equiv x + iy \in \mathbb{C}$ , w której  $\bar{z} = x - iy$  –

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{z}{2}} \\ \operatorname{sgn}(t) i \sqrt{\frac{\bar{z}}{2}} \end{pmatrix} =: \xi(v), \quad \varepsilon \in \{-1, 1\} .$$

Zauważmy, że znak  $\varepsilon$  nie może być ustalony w sposób niesamosprzeczny jednocześnie dla *wszystkich* wektorów izotropowych, oto bowiem przy obrocie o kąt  $\varphi$  w płaszczyźnie  $\{(0, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , przy którym składowe wektora  $v$  transformują się wedle formuł

$$v \equiv (t, z) \mapsto (t, e^{i\varphi} \cdot_{\mathbb{C}} z) =: R_\varphi(v),$$

składowe spinora podlegają transformacji

$$\xi(v) \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \xi(v) \equiv \xi(R_\varphi(v)) .$$

W szczególności pod wpływem pełnego obrotu,  $\varphi = 2\pi$ , następuje odbicie

$$\xi(v) \mapsto \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} \xi(R_\varphi(v)) = -\xi(v) .$$

Podane przez nas rozwiązanie problemu „wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego z wektora” ma swoją zgrabną (i w pełni równoważną z powyższą) realizację

macierzową, do której omówienia przejdziemy obecnie. Oto więc z wektorem  $v$  stowarzyszymy macierz

$$\gamma(v) := \begin{pmatrix} t & iz \\ i\bar{z} & -t \end{pmatrix} \equiv t \triangleright \gamma(e_0) + x \triangleright \gamma(e_1) + y \triangleright \gamma(e_2),$$

otrzymując przy tej okazji trójkę macierzy

$$\gamma(e_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

odpowiadających wektorom bazy standardowej. Zauważmy, że spełnione są tożsamości

$$\begin{aligned} \gamma(e_0)^2 &= \mathbf{1}_2 \equiv \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_0) \triangleright \mathbf{1}_2, \\ \gamma(e_1)^2 &= -\mathbf{1}_2 \equiv \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_1) \triangleright \mathbf{1}_2, \\ \gamma(e_2)^2 &= -\mathbf{1}_2 \equiv \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_2) \triangleright \mathbf{1}_2 \end{aligned}$$

oraz

$$\{\gamma(e_0), \gamma(e_1)\} = \mathbf{0}_2, \quad \{\gamma(e_0), \gamma(e_2)\} = \mathbf{0}_2, \quad \{\gamma(e_1), \gamma(e_2)\} = \mathbf{0}_2,$$

czyli w sumie – dla dowolnych wektorów  $v_\alpha = v_\alpha^\mu \triangleright e_\mu \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  –

$$(3.4.7) \quad \{\gamma(v_1), \gamma(v_2)\} = v_1^\mu v_2^\nu \{\gamma(e_\mu), \gamma(e_\nu)\} = \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}}(v_1, v_2) \triangleright \mathbf{1}_2.$$

Stwierdzamy zatem, że  $\gamma$  jest kanonicznym odwzorowaniem Clifforda

$$(3.4.8) \quad \gamma : \mathbb{R}^{1,2} \longrightarrow \mathbb{C}(2) \cong \mathbb{C}l_{1,2}^{\mathbb{R}},$$

a do tego spełnia warunek strukturalny

$$\forall v \in \mathbb{R}^{1,2} : \det_{(2)} \gamma(v) = -Q(v).$$

Rozważmy następnie wektor  $\xi(v) \in \mathbb{C}^2$  przyporządkowany – według opisanego schematu – wektorowi izotropowemu  $v \in \mathbb{R}^{1,2}$  oraz macierz  $\gamma(v)$  stowarzyszoną z tym ostatnim. Jak wynika wprost z konstrukcji, zachodzi równość

$$\gamma(v) \odot \xi(v) \equiv \begin{pmatrix} -2i\xi_1\xi_2 & 2i\xi_1^2 \\ -2i\xi_2^2 & 2i\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a ponieważ  $\text{Ker } \gamma(v) \neq \mathbb{C}^2$  (wszak  $\gamma(v) \neq \mathbf{0}_2$ ), przeto dla ustalonego (dowolnie) izotropowego wektora  $v \in \mathbb{R}^{1,2}$  równość

$$(3.4.9) \quad \gamma(v) \odot \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wyznacza (kierunek)  $\xi \in \mathbb{C}^2$ . Istotnie, wobec równości

$$\det_{(2)} \gamma(v) = \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(v) = 0$$

mamy nierówność

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(v) > 0,$$

a zarazem – jeśli tylko  $v \neq (0, 0, 0)$  – prawdziwą jest też nierówność

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(v) < 2,$$

których koniunkcja daje nam pożądaną wynik:

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(v) = 1.$$

Przywoławszy Def. 126, domniemywamy, że powyższy  $\xi \in \text{Ker } \gamma(v) \setminus \{0_{\mathbb{C} \times 2}\}$  jest spinorem czystym stowarzyszonym z maksymalną podprzestrzenią  $\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}$ -zerową  $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{1,2}$ . Ażeby potwierdzić to przypuszczenie, musimy jeszcze przekonać się, że spinory tej postaci rozpinają przestrzeń reprezentacji grupy  $\text{Spin}_{\mathbb{R}}(1,2)$ . W tym celu rozpatrzmy transformacje macierzy  $\gamma(v)$  indukowane przez standardowe działanie grupy  $\text{SO}_{\mathbb{R}}(p,q)$  na (dowolnym) wektorze  $v$  za pośrednictwem odwzorowania (3.4.8). W świetle Tw. 1.2.4 wystarczy zbadać zachowanie tejże macierzy pod wpływem złożenia dwóch odbić  $v$  w płaszczyznach  $\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}$ -ortogonalnych do dwóch wektorów nieizotropowych. Obliczamy zatem – dla dowolnego  $\mu \in \{0, 1, 2\}$  –

$$\begin{aligned}
\gamma(P_{e_{\mu}}(v)) &= \gamma(v - 2\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}}(v, e_{\bar{\mu}}) \triangleright e_{\bar{\mu}}) \\
&= \gamma(v) - 2\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}}(v, e_{\bar{\mu}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \\
&= \gamma(v) - \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright \{\gamma(v), \gamma(e_{\bar{\mu}})\} \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \\
&\equiv \gamma(v) - \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright (\gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) + \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}})) \\
&= \gamma(v) - \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright (\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}}) \triangleright \gamma(v) + \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}})) \\
&= -\delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \equiv -\text{Ad}_{\gamma(e_{\bar{\mu}})}(\gamma(v))
\end{aligned}$$

i na tej podstawie

$$\gamma(P_{e_{\mu}} \circ P_{e_{\nu}}(v)) = \text{Ad}_{\gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(e_{\bar{\nu}})}(\gamma(v)).$$

Uwzględniając równość (3.4.9) definiującą kierunek  $\xi(v)$ , postulujemy

$$(3.4.10) \quad \xi(P_{e_{\mu}}(v)) = \lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \xi(v)$$

dla pewnego homomorfizmu grup

$$\lambda : \text{O}_{\mathbb{R}}(1,2) \longrightarrow \mathbb{C}^{\times},$$

co do którego czynimy istotne założenie, że jest ciągły względem standardowej topologii na grupie Liego  $\text{O}_{\mathbb{R}}(1,2)$ , przy czym należy pamiętać, że grupa ta ma cztery spójne składowe: podgrupę  $\text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+$  odwzorowań zachowujących kierunek czasu  $e_0$  oraz orientację w przestrzeni  $\langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$  (tzw. ortochroniczną specjalną grupę Lorentza) oraz jej translaty  $P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+$ ,  $(n_0, n_1) \in \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ , tj.

$$\text{O}_{\mathbb{R}}(1,2) = \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \sqcup P_{e_0} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \sqcup P_{e_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \sqcup P_{e_0} \cdot P_{e_1} \cdot \text{SO}_{\mathbb{R}}(1,2)^+.$$

Powyższy postulat sprawdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned}
\gamma(P_{e_{\bar{\mu}}}(v)) \odot (\lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \xi(v)) &= -\lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \text{Ad}_{\gamma(e_{\bar{\mu}})}(\gamma(v)) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \xi(v) \\
&= -\lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(v) \odot \xi(v) \\
&= -\lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right),
\end{aligned}$$

z którego – zgodnie z oczekiwaniem – wynika

$$\forall_{v \in \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)-1}(\{0\})} \forall_{\xi \in \text{Ker } \gamma(v)} : \lambda(P_{e_{\bar{\mu}}}) \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \xi(v) \in \text{Ker } \gamma(P_{e_{\bar{\mu}}}(v)),$$

a ponieważ, jak uzasadniliśmy wcześniej,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \gamma(P_{e_{\bar{\mu}}}(v)) = 1,$$

przeto poszukiwany skalar  $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$  istnieje. Na tym etapie możemy przywołać tożsamość

$$P_{e_{\bar{\mu}}} \circ P_{e_{\bar{\mu}}} = \text{id}_{\mathbb{R}^{1,2}},$$

aby wyznaczyć

$$\begin{aligned} \xi(v) &= \xi(P_{e_{\bar{\mu}}} \circ P_{e_{\bar{\mu}}}(v)) = \lambda(P_{e_{\bar{\mu}}})^2 \triangleright \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \gamma(e_{\bar{\mu}}) \odot \xi(v) \\ &= \lambda(P_{e_{\bar{\mu}}})^2 \cdot \delta_{\mathbb{E}}^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}}) \triangleright \xi(v). \end{aligned}$$

Zważywszy nieusuwalną  $\mathbb{Z}_2$ -niejednoznaczność w formule (3.4.6), wywodzimy stąd warunek

$$\lambda^2 \in \{-1, 1\}.$$

Przyjęte wcześniej założenie o ciągłym charakterze odwzorowania  $\lambda$  implikuje stałość tego ostatniego na każdej z czterech spójnych składowych  $O_{\mathbb{R}}(1, 2)$ . Ażeby wyznaczyć  $\lambda$  dla poszczególnych składowych, wystarczy zbadać warunek (3.4.10) w bezpośrednim odwołaniu do relacji (3.4.5). Na podstawie oczywistych równości

$$\begin{aligned} \gamma(e_0) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} =: \xi^{(0)}, \\ \gamma(e_1) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i\xi_2 \\ i\xi_1 \end{pmatrix} =: \xi^{(1)}, & \gamma(e_2) \odot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} =: \xi^{(2)}, \end{aligned}$$

z których wyprowadzamy reguły transformacyjne

$$\begin{aligned} (t, x, y) &\xrightarrow{\xi \mapsto \xi^{(0)}} (-t, x, y) \equiv P_{e_0}(t, x, y), \\ (t, x, y) &\xrightarrow{\xi \mapsto \xi^{(1)}} (-t, x, -y) \equiv -P_{e_1}(t, x, y), \\ (t, x, y) &\xrightarrow{\xi \mapsto \xi^{(2)}} (-t, -x, y) \equiv -P_{e_2}(t, x, y), \end{aligned}$$

stwierdzamy, że

$$\lambda(P_{e_0}) = 1 = -\lambda(P_{e_1}) = -\lambda(P_{e_2}),$$

a stąd już wprost

$$\lambda \upharpoonright_{SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+} = 1 = \lambda \upharpoonright_{P_{e_0} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+}, \quad \lambda \upharpoonright_{P_{e_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+} = -1 = \lambda \upharpoonright_{P_{e_0} \cdot P_{e_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+},$$

przy czym zamiast  $e_1$  moglibyśmy z jednakim skutkiem użyć  $e_2$ , co niezależnie potwierdza sensowność przyjętego przyporządkowania. Takie przypisanie wartości generatorom grupy  $O_{\mathbb{R}}(1, 2)$  jest spójne z poczynionym przez nas na wstępie założeniem o homomorficznym charakterze  $\lambda$ , oto bowiem dla dowolnych par  $(m_0, m_1), (n_0, n_1) \in \{0, 1\}^{\times 2}$  z jednej strony zachodzą relacje algebraiczne

$$P_{e_0}^{m_0} \cdot P_{e_1}^{m_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1, 2)^+ \cdot P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1, 2)^+ \subset P_{e_0}^{m_0+n_0} \cdot P_{e_1}^{m_1+n_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1, 2)^+,$$

z drugiej zaś – homomorficzność  $\lambda$  wymaga

$$\begin{aligned} \lambda \upharpoonright_{P_{e_0}^{m_0} \cdot P_{e_1}^{m_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+ \cdot P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+} &= \lambda \upharpoonright_{P_{e_0}^{m_0} \cdot P_{e_1}^{m_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+} \cdot \lambda \upharpoonright_{P_{e_0}^{n_0} \cdot P_{e_1}^{n_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+} \\ &= (-1)^{m_1} \cdot (-1)^{n_1} = (-1)^{m_1+n_1} \equiv \lambda \upharpoonright_{P_{e_0}^{m_0+n_0} \cdot P_{e_1}^{m_1+n_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(1,2)^+}. \end{aligned}$$

Na zakończenie zauważmy, że transformacje  $\xi(v) \mapsto \pm\gamma(e_\mu) \odot \xi(v)$ , indukowane przez odbicia  $P_{\pm e_\mu}$ , są nierozróżnialne na poziomie wektorowym, oto bowiem

$$\begin{aligned} \gamma(P_{-e_\mu}(v)) &= \gamma(v - 2\delta_E^{(1,2)}(-e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_E^{(1,2)}}(v, -e_{\bar{\mu}}) \triangleright (-e_{\bar{\mu}})) \\ &= \gamma(v - 2\delta_E^{(1,2)}(e_{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \Phi_{\delta_E^{(1,2)}}(v, e_{\bar{\mu}}) \triangleright e_{\bar{\mu}}) \equiv \gamma(P_{e_\mu}(v)). \end{aligned}$$

To samo dotyczy każdej innej pary odwzorowań indukowanych przez transformacje ortogonalne w  $\mathbb{R}^{1,2}$ , a różniących się o znak. Fakt ten stanowi jawne odzwierciedlenie istnienia obu krótkich ciągów dokładnych grup, o których mówi Tw. 3.4.1.

W podsumowaniu naszego studium możemy skonstatować, że oto naturalną geometryzacją algebraicznej konstrukcji spinora (czystego) w sygnaturze  $(1, 2)$  jest wektor izotropowy, który jednoznacznie reprezentuje klasę spinora względem relacji zmiany znaku.

### 3.2. Flaga zerowa Penrose'a.

## Część 4

# Wiązki włókniste z powiązaniem

Qui bono?



## Wprowadzenie do teorii wiązek włóknistych

### 1. Struktury ogólne

DEFINICJA 127. Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz 65 i ustalmy  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . **Wiązka włóknista** klasy  $C^k$  to czwórka  $(E, B, F, \pi_E)$  złożona z  $C^k$ -rozmaitości:

- $E$ , zwanej **przestrzenią totalną (wiązki)**;
- $B$ , zwanej **bazą (wiązki)**;
- $F$ , zwanej **włóknem typowym (wiązki)**;

oraz odwzorowania surjektywnego klasy  $C^k$

$$\pi_E : E \twoheadrightarrow B,$$

zwanego **rzutem na bazę (wiązki)**, dla których istnieje pokrycie otwarte  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$  wraz ze stowarzyszoną z nim rodziną dyfeomorfizmów klasy  $C^k$

$$\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F,$$

zwanymi **trywializacjami lokalnymi (wiązki)**, domykającymi diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i} & \mathcal{O}_i \times F \\ & \searrow \pi_E & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & \mathcal{O}_i \end{array} .$$

Pokrycie o powyższej własności określamy mianem **trywializującego**. Odwzorowania

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Aut}(F) \cong \text{Diff}^k(F, F)$$

określone, dla wszystkich par indeksów  $(i, j) \in \langle I \times I \rangle_{\mathcal{O}}$ , przez superpozycje dyfeomorfizmów

$$\tau_{ij} := \tau_i \circ \tau_j^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij} \times F} : \mathcal{O}_{ij} \times F \hookrightarrow \mathcal{O}_{ij} \times F \hookrightarrow \mathcal{O}_i \times F \hookrightarrow F, (x, f) \mapsto (x, g_{ij}(x)(f)),$$

gdzie odwzorowanie  $\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F : (x, f) \mapsto g_{ij}(x)(f)$  jest z założenia klasy  $C^k$ , są nazywane **odwzorowaniami przejścia (wiązki)**, a grupa automorfizmów  $\text{Aut}(F)$  włókna typowego (lub dowolna jej podgrupa, do której należą wszystkie odwzorowania przejścia) zyskuje miano **grupy strukturalnej (wiązki)**, Wiązkę

będziemy nieraz oznaczać przy użyciu diagramu

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \pi_E \\ & & B \end{array} .$$

Przeciwwobraz punktu  $x \in B$  względem rzutu kanonicznego,

$$\pi_E^{-1}(\{x\}) \equiv E_x$$

nazywamy **włóknem wiązki  $E$  nad  $x$** .

Innymi słowy, wiązka włóknista jest przestrzenią Hausdorffa  $(E, \mathcal{T}(E))$  typu  $\mathbf{Man}^{(k)}$  lokalnie modelowaną na kategorii  $\mathcal{T}(B) \times F$  o klasie obiektów złożonej z produktów  $\mathcal{O} \times F$ , w których pierwszy czynnik to  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(B)$ , drugi zaś to  $F \in \text{Obj } \mathbf{Man}^{(k)}$ , oraz o klasie morfizmów złożonej z odwzorowań produktowych  $f \times \varphi : \mathcal{O}_1 \times F \rightarrow \mathcal{O}_2 \times F$ , w których pierwszy czynnik to  $f \in C^k(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ , a drugi to  $\varphi \in \text{Aut}(F)$ , przy czym pokrycie trywializujące ma tu postać  $\{\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)\}_{i \in I}$ , gdzie  $\pi_E : E \rightarrow B$  jest surjekcją klasy  $C^k$ , a  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  jest pokryciem otwartym  $B$ . Na tak określonym pokryciu trywializującym zadana jest rodzina izomorfizmów  $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times F$  w kategorii  $\mathbf{Man}^{(k)}$ , których złożenia  $\tau_j \circ \tau_i^{-1}$  – określone dla  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  – są izomorfizmami w kategorii  $\mathcal{T}(B) \times F$ .

**Podwiązka** wiązki  $\mathcal{E} \equiv (E, B, F, \pi_E)$  to wiązka włóknista  $(\tilde{E}, B, \tilde{F}, \pi_E \upharpoonright_{\tilde{E}})$ , której przestrzeń totalna jest podzaimością  $\tilde{E} \subset E$  gładko włożoną w przestrzeń totalną  $\mathcal{E}$ , a włókno typowe jest podzaimością  $\tilde{F} \subset F$  włożoną we włókno typowe  $F$ .

**Morfizm wiązek włóknistych** między dwiema wiązkami włóknistymi  $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  klasy  $C^k$  to para  $(\Phi, f)$  odwzorowań klasy  $C^k$ , które czynią przemiennym poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \pi_{E_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array} .$$

Izomorfizm wiązek włóknistych pokrywający identyczność na bazie, czyli spełniający warunek  $f = \text{id}_B$ , nosi miano **równoważności wiązek włóknistych**.

Wiązki włókniste nad ustaloną bazą  $B$  wraz z morfizmami (wiązek) między nimi tworzą **kategorię wiązek włóknistych nad  $B$** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{Bun}(B).$$

Zbiór morfizmów wiązek włóknistych  $(E_\alpha, B, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  pokrywających identyczność na wspólnej bazie  $B$  będziemy oznaczać jako

$$\text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(E_1, E_2 | B),$$

a zbiór automorfizmów wiązki  $(E, B, F, \pi_E)$  pokrywających identyczność na  $B$  – jako

$$\text{Aut}_{\mathbf{Bun}(B)}(E | B).$$



PRZYKŁAD(Y) 36.

(1) **Wiązka trywialna** to czwórka

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & B \times F \\ & & \downarrow \text{pr}_1, \\ & & B \end{array}$$

a więc np. 2-torus  $\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ , walec  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ .

(2) **Wstęga Möbiusa** jako wiązka nietrywialna nad  $\mathbb{S}^1$ .

(3) Niechaj  $(E, B_2, F, \pi_E)$  będzie wiązką włóknistą klasy  $C^k$  o lokalnych trywializacjach  $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$  stowarzyszonych z pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B_2$ , a  $f : B_1 \longrightarrow B_2$  – odwzorowaniem klasy  $C^k$ . Wówczas czwórka

$$(f^*E \equiv B_1 \times_{B_2} E, B_1, F, \text{pr}_1),$$

zapisana w konwencji Przykł. 21 (1), jest wiązką, zwaną **wiązką cofniętą (wzdłuż  $f$ )**, o

- przestrzeni totalnej w postaci produktu włóknistego

$$\begin{array}{ccc} B_1 \times_{B_2} E & \xrightarrow{\text{pr}_2 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}} & E \\ \text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E} \downarrow & & \downarrow \pi_E, \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

który wyposażamy w topologię podprzestrzeni indukowaną z topologii produktowej na  $B_1 \times E \supset B_1 \times_{B_2} E$ ;

- rzucie na bazę  $\pi_{f^*E} \equiv \text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E} : B_1 \times_{B_2} E \longrightarrow B_1$  danym jako (odpowiednio ograniczony, a jawnie surjektywny) rzut kanoniczny na pierwszą składową;
- włóknie typowym tożsamym z włóknem typowym  $E$  i włóknem nad punktem bazy  $x \in B_1$  danym w postaci  $\{x\} \times \pi_E^{-1}(\{f(x)\}) \equiv E_{f(x)}$ ;
- trywializacjach lokalnych

$$\tau_i^{f^*} := (\text{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_i)} \times (\text{pr}_2 \circ \tau_i)) \upharpoonright_{\text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))} : \text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i)) \xrightarrow{\cong} f^{-1}(\mathcal{O}_i) \times F$$

stowarzyszonych z pokryciem trywializującym  $f^*\mathcal{O} \equiv \{f^{-1}(\mathcal{O}_i)\}_{i \in I}$  (jego otwartość jest oczywistą konsekwencją ciągłości  $f$ ).

Trywializacje są w oczywisty sposób dobrze określone, oto bowiem mamy tożsamość

$$\text{pr}_1 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i)) = \text{pr}_2 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)) \equiv \text{pr}_2 \upharpoonright_{B_1 \times_{B_2} E}^{-1}(\tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i \times F)),$$

wynikającą z przemienności powyższego diagramu. Ponadto gładkość odwzorowań strukturalnych:  $\pi_{f^*E}$  i  $\tau_i^{f^*}$  jest zapewniona przez Tw. 1.4.24,

które orzeka o istnieniu struktury rozmaitości włożonej klasy  $C^k$  na podprzestrzeni  $B_1 \times_{B_2} E \subset B_1 \times E$ , a to z racji submersywności  $\pi_E$ . Oznaczywszy rzeczone włożenie (klasy  $C^k$ ) jako  $\iota_{f^*} : B_1 \times_{B_2} E \hookrightarrow B_1 \times E$ , możemy zapisać oba odwzorowania jako superpozycje odwzorowań gładkich:

$$\pi_{f^*E} \equiv \text{pr}_1 \circ \iota_{f^*}, \quad \tau_i^{f^*} \equiv (\text{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_i)} \times (\text{pr}_2 \circ \tau_i)) \circ \iota_{f^*} \upharpoonright_{\text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))}.$$

Bez trudu wyznaczamy odwzorowania przejścia wiązki cofniętej,

$$g_{ij}^{f^*} \equiv g_{ij} \circ f \upharpoonright_{f^{-1}(\mathcal{O}_{ij})} : f^{-1}(\mathcal{O}_{ij}) \longrightarrow \text{Aut}(F), \quad (i, j) \in \{I^{\times 2}\}_{\mathcal{O}}$$

w bezpośrednim rachunku

$$\begin{aligned} \tau_i^{f^*} \circ \tau_j^{f^* -1}(x, \phi) &= \tau_i^{f^*}(x, \tau_j^{-1}(f(x), \phi)) = (x, \text{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(f(x), \phi)) \\ &= (x, \text{pr}_2(f(x), (g_{ij} \circ f)(x)(\phi))) = (x, (g_{ij} \circ f)(x)(\phi)), \end{aligned}$$

przeprowadzonym dla dowolnych  $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_i) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_j) = f^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$  oraz  $\phi \in F$  i wykorzystującym tożsamość

$$\tau_i(e) = (f(x), \text{pr}_2 \circ \tau_i(e))$$

słuszną w dowolnym punkcie  $(x, e) \in \text{pr}_1^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_i))$ .

- (4) Niechaj  $(E_\alpha, B, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą wiązkami włóknistymi klasy  $C^k$  o lokalnych trywializacjach  $\tau_i : \pi_{E_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F_\alpha$  i odnośnych odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \times F_\alpha \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{ij} \times F_\alpha$  :  $(x, f_\alpha) \mapsto (x, g_{ij}^\alpha(x)(f_\alpha))$  stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$ . Wówczas czwórka

$$(\pi_{E_1}^* E_2 \equiv \pi_{E_2}^* E_1 \equiv E_1 \times_B E_2, B, F_1 \times F_2, \pi_{E_1} \circ \text{pr}_1 \equiv \pi_{E_2} \circ \text{pr}_2)$$

zapisana w konwencji Przykł. 21 (1), jest wiązką *nad wspólną bazą obu wiązek*<sup>1</sup>, określaną mianem **produktu włóknistego wiązek włóknistych**,

o

- przestrzeni totalnej w postaci produktu włóknistego

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times_B E_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2 \upharpoonright_{E_1 \times_B E_2}} & E_2 \\ \text{pr}_1 \upharpoonright_{E_1 \times_B E_2} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ E_1 & \xrightarrow{\pi_{E_1}} & B \end{array},$$

będącego – w świetle Tw. 1.4.24, a z racji submersywnego charakteru każdego z rzutów kanonicznych na (wspólną) bazę – podrozmaitością włożoną w  $E_1 \times E_2$ ;

- rzucie na bazę  $\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1 \equiv \pi_{E_2} \circ \text{pr}_2 : E_1 \times_B E_2 \longrightarrow B$  danym jako rzut kanoniczny obliczony na dowolnej składowej kartezjańskiej;
- włóknie typowym tożsamym z produktem kartezjańskim włókien typowych obu składowych,  $E_1 \times E_2$ , i włóknie nad punktem bazy  $x \in B$  danym w postaci  $E_{1x} \times E_{2x}$ ;

<sup>1</sup>To czyni z niej obiekt zasadniczo różny od rozważanej poprzednio wiązki cofniętej.

- trywializacjach lokalnych

$$\tau_i^{12} : (\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1)^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times F_1 \times F_2 : (e_1, e_2) \mapsto (\tau_i^1(e_1), \text{pr}_2 \circ \tau_i^2(e_2)).$$

Trywializacje lokalne są w oczywisty sposób gładkie (klasy  $C^k$ ), podobnie jak ich odwrotności

$$\begin{aligned} \tau_i^{12-1} & : \mathcal{O}_i \times F_1 \times F_2 \twoheadrightarrow (\pi_{E_1} \circ \text{pr}_1)^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ & : (x, f_1, f_2) \mapsto (\tau_i^{1-1}(x, f_1), \tau_i^{2-1}(x, f_2)). \end{aligned}$$

Znajomość tych ostatnich pozwala nam ustalić odwzorowania przejścia:

$$\tau_i^{12} \circ \tau_j^{12-1} : \mathcal{O}_{ij} \times F_1 \times F_2 \circlearrowleft : (x, f_1, f_2) \mapsto (x, g_{ij}^1(x)(f_1), g_{ij}^2(x)(f_2)).$$

✓

**STWIERDZENIE 195.** *Przyjmijmy zapis Def. 127, przy czym zakładamy dodatkowo, że  $k \geq 1$ . Rzut na bazę wiązki  $\pi_E : E \rightarrow B$  jest surjektywną submersją i jako taki ma na pewnym otoczeniu  $\mathcal{O} \ni x$  dowolnego punktu bazy  $x \in B$  cięcie lokalne (w rozumieniu Stw. 116), spełniające tożsamość*

$$(4.1.1) \quad \pi \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}},$$

które nazywamy **cięciem lokalnym (wiązki)**. Ilekroć  $\mathcal{O} = B$ , mówimy o **cięciu globalnym (wiązki)**. ■

*Dowód:* Submersywność  $\pi_E$  wynika wprost z postaci obrazu tożsamości (4.1.1) względem funktora stycznego w dowolnym punkcie bazy  $x \in B$ ,

$$\mathbb{T}_{\sigma(x)}\pi_E \circ \mathbb{T}_x\sigma = \mathbb{T}_x\text{id}_{\mathcal{O}} = \text{id}_{\mathbb{T}_x\mathcal{O}}.$$

Istnienie cięć lokalnych jest konsekwencją Stw. 116. □

**UWAGA 43.** Zbiór cięć lokalnych wiązki  $(E, B, F, \pi_E)$  będziemy oznaczać symbolem

$$\Gamma_{\text{loc}}(E),$$

a zbiór jej cięć globalnych – symbolem

$$\Gamma(E).$$

¯

**TWIERDZENIE 4.1.1 (O rekonstrukcji wiązki włóknistej).** *Przyjmijmy zapis Def. 66 i 127. Odwzorowania przejścia wiązki włóknistej  $(E, B, F, \pi_E)$  o pokryciu trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  spełniają **warunek 1-kocyklu***

$$(4.1.2) \quad \forall_{(i,j,k) \in \{I^{\times 3}\}_{\mathcal{O}}, x \in \mathcal{O}_{ijk}} : g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x) = \text{id}_F.$$

*I odwrotnie, niechaj  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie pokryciem otwartym  $C^k$ -rozmaitości  $B$  i niech  $F$  będzie dowolną  $C^k$ -rozmaitością o grupie automorfizmów  $\text{Aut}(F)$ . Dowolna stowarzyszona z  $\mathcal{O}$  rodzina odwzorowań*

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{Aut}(F), \quad (i, j) \in \{I^{\times 2}\}_{\mathcal{O}}$$

indukujących odwzorowania klasy  $C^k$

$$\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F : (x, f) \longmapsto g_{ij}(x)(f)$$

*i spełniających powyższy warunek określa wiązkę włóknistą o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z  $\mathcal{O}_{ij}$  tożsamy z  $g_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{I^{\times 2}\}_{\mathcal{O}}$ . Ilekroć odwzorowania te są odwzorowaniami przejścia pewnej wiązki włóknistej nad  $B$  o włóknie typowym  $F$ , ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez odwzorowania przejścia  $g_{ij}$ .*

■

Dowód: Pierwsza część tezy jest bezpośrednią konsekwencją następującej równości, słusznej dla dowolnej trójki  $(i, j, k) \in \{I^{\times 3}\}$  oraz  $(x, f) \in \mathcal{O}_{ijk} \times F$ :

$$\begin{aligned} (x, f) &\equiv (\text{id}_{\mathcal{O}_{ijk}} \times \text{id}_F)(x, f) = ((\tau_i \circ \tau_j^{-1}) \circ (\tau_k \circ \tau_j^{-1})^{-1} \circ (\tau_k \circ \tau_i^{-1}))(x, f) \\ &= (x, g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} \circ g_{ki}(x)(f)). \end{aligned}$$

Punktem wyjścia do dowodu drugiej jego części jest konstrukcja sumy rozłącznej  $\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$ , na której określamy relację

$$(x, f, i) \sim_{g..} (y, g, j) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ g = g_{ji}(x)(f) \end{cases},$$

Warunek 1-kocyklu spełniony przez odwzorowania przejścia sprawia, że jest to relacja równoważności, oto bowiem dla  $i = j = k$  dostajemy

$$g_{ii}(x) \equiv g_{ii}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ii}(x) = \text{id}_F,$$

zatem  $\sim_{g..}$  jest zwrotna, a dalej tenże warunek w połączeniu z poprzednią konkluzją implikuje skośną symetrię  $g_{ij}$ ,

$$g_{ji}(x) \circ g_{ij}(x) = g_{ji}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ij}(x) = \text{id}_F,$$

która pociąga za sobą jej symetrię, i wreszcie stosownie przepisany warunek 1-kocyklu,

$$g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} = g_{ki}(x)^{-1} = g_{ik}(x),$$

oznacza, że jest ona przechodnia. Możemy zatem przejść od  $\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F)$  do zbioru klas abstrakcji

$$\mathcal{R}_{g..} := \left( \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \right) / \sim_{g..},$$

na którym określamy surjekcję

$$\pi_{\mathcal{R}_{g..}} : \mathcal{R}_{g..} \twoheadrightarrow B : [(x, f, i)]_{\sim_{g..}} \longmapsto x.$$

Zauważmy, że dowolna klasa  $[(x, f, i)]_{\sim_{g..}}$  zawiera dokładnie jednego reprezentanta o ustalonym indeksie,  $(x, f, i) \in \mathcal{O}_i \times F \times \{i\}$ , gdyż – wprost z definicji –

$$(y, g, i) \in [(x, f, i)]_{\sim_{g..}} \implies (y, g) = (x, g_{ii}(x)(f)) = (x, \text{id}_F(f)) = (x, f),$$

a ponieważ także

$$\forall (x, f) \in \mathcal{O}_i \times F : (x, f, i) \in [(x, f, i)]_{\sim_{g..}},$$

przeto otrzymujemy bijekcję

$$[\tau_i] : \pi_{\mathcal{R}_{g..}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_i \times F : [(x, f, i)]_{\sim_{g..}} \longmapsto (x, f).$$

Następnie wprowadzamy na  $\mathcal{R}_{g,\cdot}$  topologię ilorazową nazywając otwartym dowolny podzbiór  $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}_{g,\cdot}$ , którego przeciwobraz względem rzutu

$$(4.1.3) \quad \pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \longrightarrow \mathcal{R}_{g,\cdot}$$

jest otwarty w  $\tilde{\mathcal{R}}_{g,\cdot}$  w topologii sumy rozłącznej przestrzeni  $\mathcal{O}_i \times F$ ,  $i \in I$ , z których każda jest nośnikiem topologii produktowej (por. Def. 67). W rzeczonyj topologii ilorazowej bijekcje  $[\tau_i]$  są homeomorfizmami, a rzut  $\pi_{\mathcal{R}_{g,\cdot}}$  jest ciągły. Otrzymana tu topologia jest hausdorffowska. Istotnie, ilekroć  $[(x_1, f_1, i_1)]_{\sim_{g,\cdot}} \neq [(x_2, f_2, i_2)]_{\sim_{g,\cdot}}$ , mamy dwie możliwości: albo  $x_2 \neq x_1$ , a wtedy rozdzielamy punkty  $x_1$  i  $x_2$  zbiorami otwartymi – odpowiednio –  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_{i_1}$  i  $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_{i_2}$  w hausdorffowskiej (z założenia) bazie, po czym tworzymy jawnie rozłączne otoczenia otwarte  $\pi_{\sim}(\mathcal{O}_{\alpha} \times F \times \{i_{\alpha}\})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  obu klas w  $\mathcal{R}_{g,\cdot}$ , albo też  $x_2 = x_1$  przy  $i_2 = i_1$ , a wtedy rozdzielamy punkty  $f_1$  i  $f_2$  zbiorami otwartymi – odpowiednio –  $\mathcal{U}_1$  i  $\mathcal{U}_2$  w hausdorffowskim (także z założenia) włóknie  $F$  i na zakończenie tworzymy rozłączne otoczenia otwarte  $\pi_{\sim}(\mathcal{O}_{i_1} \times \mathcal{U}_{\alpha} \times \{i_1\})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  obu klas w  $\mathcal{R}_{g,\cdot}$ .

Możemy już teraz skonstruować atlas na tak określonej przestrzeni topologicznej. W tym celu ustalamy atlas na zbiorze  $\mathcal{O}_i$  poprzez ograniczenie dowolnego atlasu na bazie  $B$ , otrzymując tym sposobem mapy lokalne  $\xi_{i,A} : \mathcal{O}_{i,A} \rightsquigarrow \mathcal{U}_{i,A}$ ,  $A \in J_i$  na podzbiorach  $\mathcal{O}_{i,A} \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_i)$  (w topologii podprzestrzeni) modelowanych na  $\mathcal{U}_{i,A} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{xn})$ ,  $n = \dim B$ , a do tego – atlas na włóknie złożony z map lokalnych  $\zeta_{\alpha} : \mathcal{V}_{\alpha} \rightsquigarrow \mathcal{W}_{\alpha}$ ,  $\alpha \in K$  na podzbiorach  $\mathcal{V}_{\alpha} \in \mathcal{T}(F)$  modelowanych na  $\mathcal{W}_{\alpha} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{xm})$ ,  $m = \dim F$ . To uczyniwszy, definiujemy atlas na  $\mathcal{R}_{g,\cdot}$  jako zbiór map lokalnych

$$\begin{aligned} \kappa_{i,A,\alpha} & : \mathcal{Q}_{i,A,\alpha} \equiv \pi_{\sim}(\mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_{\alpha}) \rightsquigarrow \mathcal{U}_{i,A} \times \mathcal{W}_{\alpha} \subset \mathbb{R}^{xn+m} \\ & : [(x, f, i)]_{\sim_{g,\cdot}} \longmapsto (\xi_{i,A}(x), \zeta_{\alpha}(f)), \end{aligned}$$

które są dobrze określone, jako że – w świetle wcześniejszych naszych ustaleń – istnieje jedyny reprezentant  $(x, f) \in \mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_{\alpha} \subset \mathcal{O}_i \times F$  klasy  $[(x, f, i)]_{\sim_{g,\cdot}}$  o ustalonym indeksie pokrycia  $i \in I$ . Na przecięciu ich dziedzin znajdujemy transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \kappa_{i,A,\alpha} \circ \kappa_{j,B,\beta}^{-1} & : \kappa_{j,B,\beta}(\mathcal{O}_{i,Aj,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}) \rightsquigarrow \kappa_{i,A,\alpha}(\mathcal{O}_{i,Aj,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}) \\ & : (\xi_{j,B}(x), \zeta_{\beta}(f)) \longmapsto (\xi_{i,A}(x), \zeta_{\alpha} \circ g_{ij}(x)(f)) \\ & \equiv (\xi_{i,A} \circ \xi_{j,B}^{-1}(\xi_{j,B}(x)), \zeta_{\alpha} \circ (g_{ij} \circ \xi_{j,B}^{-1})(\xi_{j,B}(x)) \circ \zeta_{\beta}^{-1}(\zeta_{\beta}(f))). \end{aligned}$$

Zważywszy, że odwzorowania  $\xi_{i,A} \circ \xi_{j,B}^{-1}$  są transformacjami współrzędniowymi (rozdrobnionego) atlasu na  $B$ ,  $C^k$ -gładkimi z założenia, a ponadto  $g_{ij} \circ \xi_{j,B}^{-1}$  są lokalnymi prezentacjami odwzorowań przejścia, także  $C^k$ -gładkimi (w działaniu na  $F$ , w rozumieniu opisu odwzorowań  $g_{ij}$  podanego w treści dowodzonego twierdzenia) z założenia, i wreszcie  $\zeta_{\alpha} \circ g_{ij}(x) \circ \zeta_{\beta}^{-1}$  są lokalnymi prezentacjami automorfizmów  $g_{ij}(x)$  włókna  $F$ , również  $C^k$ -gładkimi z założenia, stwierdzamy, że transformacje  $\kappa_{i,A,\alpha} \circ \kappa_{j,B,\beta}^{-1}$  są  $C^k$ -gładkie, zatem mapy lokalne  $\kappa_{i,A,\alpha}$  określają na  $\mathcal{R}_{g,\cdot}$  strukturę rozmaitości różniczkowalnej klasy  $C^k$ . Względem tejże struktury odwzorowania  $[\tau_i]$  są (tautologicznie) dyfeomorfizmami klasy  $C^k$  (takozż rzut na

bazę,  $\pi_{\mathcal{R}_{g,\cdot}}, \uparrow_{\mathcal{O}_{i,A,\alpha}} \equiv \text{pr}_1 \circ [\tau_i]$ ) i określają na  $\mathcal{R}_{g,\cdot}$  strukturę wiązki włóknistej klasy  $C^k$ .

Na zakończenie wykażemy równoważność struktur wiązki włóknistej: wyjściowej na danej wiązce włóknistej  $(E, B, F, \pi_E)$ , o lokalnych trywializacjach  $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times F$ ,  $i \in I$ , i tej zrekonstruowanej w sposób opisany wyżej z jej odwzorowań przejścia  $g_{ij}$ . W tym celu rozważymy odwzorowania dane lokalnie w postaci

$$(4.1.4) \quad \iota_i := [\tau_i]^{-1} \circ \tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times F \rightarrow \pi_{\mathcal{R}_{g,\cdot}}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I$$

i zauważamy, że te lokalne dyfeomorfizmy w dowolnym punkcie  $y \in \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$ , zadanym przez pewne  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  oraz  $f \in F$  w postaci  $y = \tau_i^{-1}(x, f)$ , spełniają relację

$$\begin{aligned} \iota_j(y) &\equiv \iota_j(\tau_i^{-1}(x, f)) \equiv [\tau_j]^{-1} \circ \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, f) = [\tau_j]^{-1}(x, g_{ji}(x)(f)) \\ &= [\tau_i]^{-1} \circ [\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}(x, g_{ji}(x)(f)) = [\tau_i]^{-1}(x, g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x)(f)) \\ &= [\tau_i]^{-1}(x, f) \equiv [\tau_i]^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x, f) \equiv \iota_i(y), \end{aligned}$$

czyli że stanowią ograniczenia określonego globalnie dyfeomorfizmu

$$\iota : E \rightarrow \mathcal{R}_{g,\cdot},$$

dane wzorem

$$\iota \uparrow_{\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \iota_i,$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{R}_{g,\cdot} \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{R}_{g,\cdot}} \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array},$$

która pozwala nam zidentyfikować  $\iota$  jako postulowany izomorfizm wiązek.  $\square$

**STWIERDZENIE 196.** *Przyjmijmy zapis Def. 127 i zdefiniujmy, dla dowolnej pary  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ , odwzorowania*

$$\widehat{\nu}_{(i,j);i} : \mathcal{O}_{ij} \times F \times \{(i, j)\} \rightarrow \mathcal{O}_i \times F : (x, f, i, j) \mapsto (x, f),$$

$$\widehat{\nu}_{(i,j);j} : \mathcal{O}_{ij} \times F \times \{(i, j)\} \rightarrow \mathcal{O}_j \times F : (x, f, i, j) \mapsto (x, g_{ji}(x)(f)),$$

$$\check{\varepsilon}_i \equiv \tau_i^{-1} : \mathcal{O}_i \times F \rightarrow E.$$

Wiązka włóknista  $(E, B, F, \pi_E)$  jest strukturą inicjalną

$$(E, \{\check{\varepsilon}_i\}_{i \in I}), \quad \check{\varepsilon}_i \in C^k(\mathcal{O}_i \times F, E) \equiv \text{Hom}_{\mathbf{Man}^{(k)}}(\mathcal{O}_i \times F, E)$$

dla warunku

$$\begin{aligned} &P_{\{\mathcal{O}_i \times F\}_{i \in I}; \text{id}_{\mathbf{Man}^{(k)}}, \Delta_{\mathbf{Man}^{(k)}}, I} (Z, \{\check{\zeta}_i\}_{i \in I}) \\ &= \text{„dla dowolnej pary } (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}} \text{ kopułoka } \text{cosp}((\check{\zeta}_i, \check{\zeta}_j), Z) \end{aligned}$$



domyka powłokę  $\text{sp}(\mathcal{O}_{ij} \times F, (\widehat{v}_{(i,j);i}, \widehat{v}_{(i,j);j}))$  do diagramu przemiennego  $\text{cosp}((\check{\zeta}_i, \check{\zeta}_j), Z) \circ_{(\mathcal{O}_i \times F, \mathcal{O}_j \times F)} \text{sp}(\mathcal{O}_{ij} \times F, (\widehat{v}_{(i,j);i}, \widehat{v}_{(i,j);j}))$ ”

na  $\text{Obj } \mathbf{Man}^{(k)} \times \text{Mor } \mathbf{Man}^{(k) \times 2}$ .

■

Dowód: Po pierwsze zauważmy, że zdanie (wyartykułowane w zapisie zapożyczonym z dowodu Tw. 4.1.1)

$$P_{\{\mathcal{O}_i \times F\}_{i \in I}; \text{id}_{\mathbf{Man}^{(k)}}, \Delta_{\mathbf{Man}^{(k)}}, I} (\mathcal{R}_{g..}, \{[\tau_i]^{-1}\}_{i \in I})$$

jest trywialnie prawdziwe,

$$\begin{aligned} [\tau_i]^{-1} \circ \widehat{v}_{(i,j);i}(x, f, i, j) &= [\tau_i]^{-1}(x, f) = [(x, f, i)]_{\sim_{g..}} = [(x, g_{ji}(x)(f), j)]_{\sim_{g..}} \\ &\equiv [\tau_j]^{-1}(x, g_{ji}(x)(f)) \equiv [\tau_j]^{-1} \circ \widehat{v}_{(i,j);j}(x, f, i, j). \end{aligned}$$

Pokażemy, że para  $(\mathcal{R}_{g..}, \{[\tau_i]^{-1}\}_{i \in I})$  jest strukturą inicjalną dla warunku z treści dowodzonego stwierdzenia. W tym celu rozpatrzmy dowolną parę  $(Z, \{\check{\zeta}_i\}_{i \in I})$  spełniającą tenże warunek. Istnienie rodziny odwzorowań  $\check{\zeta}_i \in C^k(\mathcal{O}_i \times F, Z)$ ,  $i \in I$  implikuje – w świetle dyskusji z Przykł. 19 – istnienie jedyne odwzorowania

$$\zeta : \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times F) \longrightarrow Z$$

klasy  $C^k$  domykającego rodzinę diagramów przemiennych

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow \check{\zeta}_i & \uparrow \\ \mathcal{O}_i \times F & \xrightarrow{j_i} & \bigsqcup_{j \in I} (\mathcal{O}_j \times F) \\ & & \downarrow \zeta \end{array}, \quad i \in I,$$

w którym  $j_i : \mathcal{O}_i \times F \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} (\mathcal{O}_j \times F) : (x, f) \longmapsto (x, f, i)$ ,  $i \in I$  są kanonicznymi włożeniami rozmaitości  $\mathcal{O}_i \times F$  w koprodukt (czyli obiekt inicjalny)  $\bigsqcup_{j \in I} (\mathcal{O}_j \times F)$ , współdefiniującymi ten ostatni. Odwzorowanie  $\zeta$  spełnia warunki

$$\begin{aligned} \zeta(x, g_{ji}(x)(f), j) &\equiv \zeta \circ j_j(x, g_{ji}(x)(f)) = \check{\zeta}_j(x, g_{ji}(x)(f)) \equiv \check{\zeta}_j \circ \widehat{v}_{(i,j);j}(x, f, i, j) \\ &= \check{\zeta}_i \circ \widehat{v}_{(i,j);i}(x, f, i, j) = \check{\zeta}_i(x, f) = \zeta \circ j_i(x, f) = \zeta(x, f, i), \end{aligned}$$

przeto określa jedyne odwzorowanie

$$\check{\zeta} : \mathcal{R}_{g..} \longrightarrow Z$$

domykające diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow \check{\zeta} & \uparrow \\ \bigsqcup_{j \in I} (\mathcal{O}_j \times F) & \xrightarrow{\pi_{\sim}} & \mathcal{R}_{g..} \\ & & \downarrow \zeta \end{array}.$$

Istnienie i jedyność  $\check{\zeta}$  przesądza o tym, że  $\mathcal{R}_{g,\cdot}$  jest strukturą inicjalną, o której mowa w treści stwierdzenia. Dowód kończy następująca obserwacja: Oto odwzorowania  $\check{\varepsilon}_i$ ,  $i \in I$  trywialnie spełniają warunek z treści stwierdzenia, a zatem istnieje jedyne odwzorowanie  $\phi$  klasy  $C^k$  domykające diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \check{\varepsilon}_i & \uparrow \\ \mathcal{O}_i \times F & \xrightarrow{[\tau_i]^{-1}} & \mathcal{R}_{g,\cdot} \end{array} \quad \phi$$

Jak wynika wprost z lokalnej definicji (4.1.4), odwzorowaniem tym jest

$$\phi \equiv \iota,$$

co oznacza właśnie, że wiązka  $E$  jest modelem obiektu inicjalnego z treści stwierdzenia.  $\square$

DEFINICJA 128. Przyjmijmy zapis Def.127 oraz Uwag 19 i 43. Niechaj  $(E, B, F, \pi_E)$  będzie wiązką włóknistą klasy  $C^{k+1}$  o lokalnych trywializacjach  $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times F$  nad pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i^B\}_{i \in I}$ , przy czym zakładamy<sup>2</sup>, że elementy pokrycia są zarazem dziedzinami map  $\kappa_i^B : \mathcal{O}_i^B \twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{x_m}$ ,  $m = \dim B$  pewnego atlasu  $\widehat{\mathcal{A}}_B$  bazy  $B$ . Zdefiniujmy pomocnicze dyfeomorfizmy

$$T_v^i : \mathcal{U}_i \twoheadrightarrow T_v^i(\mathcal{U}_i) =: \mathcal{U}_i^0 : w \mapsto w - v, \quad v \in \mathcal{U}_i$$

odwzorowujące zbiory otwarte  $\mathcal{U}_i$  w odnośne otoczenia  $\mathbf{0}_m \equiv T_v^i(v) \in \mathbb{R}^{x_m}$ . Wybrawszy dowolny atlas  $\widehat{\mathcal{A}}_F = \{\kappa_\alpha^F\}_{\alpha \in J}$  włókna typowego  $F$ , złożony z map  $\kappa_\alpha^F : \mathcal{O}_\alpha^F \twoheadrightarrow \mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^{x_n}$ ,  $n = \dim F$ ,  $\alpha \in J$ , indukujemy na  $E$  atlas  $\widehat{\mathcal{A}}_E = \{\kappa_{i,\alpha}^E\}_{(i,\alpha) \in I \times J}$ , który tworzą mapy

$$\kappa_{i,\alpha}^E \equiv (\kappa_i^B \times \kappa_\alpha^F) \circ \tau_i \upharpoonright_{\tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i^B \times \mathcal{O}_\alpha^F)} : \tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i^B \times \mathcal{O}_\alpha^F) \twoheadrightarrow \mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^{x_{m+n}},$$

zwane **mapami dostosowanymi**. Na zbiorze

$$\Gamma_x(E) := \{ \phi \in \Gamma_{\text{loc}}(E) \mid (\pi_E \circ \phi)^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset \}$$

cięć lokalnych wiązki  $E$  określonych w punkcie  $x \in B$  zadajemy relację równoważności:

$$\phi_1 \sim_{J_x^1} \phi_2 \iff (\phi_1(x), T_x \phi_1) = (\phi_2(x), T_x \phi_2).$$

Klasę abstrakcji cięcia  $\phi \in \Gamma_x(E)$  względem tej relacji oznaczamy symbolem

$$J_x^1 \phi \equiv [\phi]_{\sim_{J_x^1}}$$

i określamy mianem **pierwszego miotu różniczkowego cięcia**  $\phi$ . Zbiór tych klas abstrakcji nad ustalonym punktem  $x \in B$  będziemy oznaczać symbolem

$$J_x^1 E \equiv \{ J_x^1 \phi \mid \phi \in \Gamma_x(E) \}.$$

**Wiązka pierwszych miotów różniczkowych cięć wiązki  $E$**  to wiązka włóknista klasy  $C^k$  o składowych

<sup>2</sup>Założenie to nie stanowi ograniczenia ogólności naszych rozważań, oto bowiem pokrycie takie uzyskujemy dokonując rozdrobnienia dowolnego pokrycia trywializującego względem wybranego (dowolnie) atlasu na  $B$ .

- baza  $B$  o strukturze rozmaiłości zadawanej przez atlas  $\widehat{\mathcal{A}}_B$ ;
- przestrzeń totalna

$$J^1 E := \bigsqcup_{x \in B} J_x^1 E$$

- o strukturze rozmaiłości opisanej poniżej;
- włókno typowe  $J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^{x^m} \times F)$  o strukturze rozmaiłości różniczkowalnej opisanej poniżej;
- rzut na bazę

$$\pi_{J^1 E} : J^1 E \longrightarrow B : (J_x^1 \phi, x) \longmapsto x.$$

Przy tym odwzorowania

$$\begin{aligned} J^1 \kappa_{i,\alpha}^E & : J^1 E_{i,\alpha} \equiv \{ J_x^1 \phi \mid \phi(x) \in \tau_i^{E-1}(\mathcal{O}_i^B \times \mathcal{O}_\alpha^F) \} \twoheadrightarrow J^1 \kappa_{i,\alpha}^E(J^1 E_{i,\alpha}) \\ & : J_x^1 \phi \longmapsto (\kappa_i^B(x), \kappa_\alpha^F \circ \phi(x), D(\kappa_\alpha^F \circ \phi \circ \kappa_i^{B-1})(\kappa_i^B(x))), \quad (i, \alpha) \in I \times J \end{aligned}$$

indukują na  $J^1 E$  mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach  $J^1 \kappa_{i,\alpha}^E(J^1 E_{i,\alpha}) \subset \mathbb{R}^{x^m+n+mn}$ , tj. taką, w której podzbiór  $\mathcal{V} \subset J^1 E$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall (i,\alpha) \in I \times J : J^1 \kappa_{i,\alpha}^E(\mathcal{V} \cap J^1 E_{i,\alpha}) \in \mathcal{T}(J^1 \kappa_{i,\alpha}^E(J^1 E_{i,\alpha})).$$

W tej topologii odwzorowania  $J^1 \kappa_{i,\alpha}^E$  są – wprost na mocy jej konstrukcji – homeomorficzne i (dzięki temu) możemy ich użyć jako map, zwanych **mapami indukowanymi** (lub **naturalnymi**), o odnośnych transformacjach współrzędniowych na

$$J^1 E_{ij,\alpha\beta} \equiv \{ J_x^1 \phi \mid \phi(x) \in \tau_i^{E-1}(\mathcal{O}_{ij}^B \times \mathcal{O}_{\alpha\beta}^F) \}$$

w postaci

$$\begin{aligned} J^1 \kappa_{ij,\alpha\beta}^E & := J^1 \kappa_{i,\alpha}^E \circ (J^1 \kappa_{j,\beta}^E)^{-1} : J^1 \kappa_{j,\beta}^E(J^1 E_{ij,\alpha\beta}) \twoheadrightarrow J^1 \kappa_{i,\alpha}^E(J^1 E_{ij,\alpha\beta}) \\ & : (\kappa_j^B(x), \kappa_\beta^F \circ \phi(x), D(\kappa_\beta^F \circ \phi \circ \kappa_j^{B-1})(\kappa_j^B(x))) \\ & \longmapsto (\kappa_i^B(x), \kappa_\alpha^F \circ \phi(x), D(\kappa_\alpha^F \circ \phi \circ \kappa_i^{B-1})(\kappa_i^B(x))) \\ & = (t_{ij}^B(\kappa_j^B(x)), t_{\alpha\beta}^F(\kappa_\alpha^F \circ \phi(x))), \\ & Dt_{\alpha\beta}^F(\kappa_\beta^F \circ \phi(x)) \circ D(\kappa_\beta^F \circ \phi \circ \kappa_j^{B-1})(\kappa_j^B(x)) \circ Dt_{ij}^B(\kappa_j^B(x))^{-1} \end{aligned}$$

Zależność punktu w obrazie od argumentu z dziedziny jest klasy  $C^{k+1}$  w składowej bazowej oraz w składowej z włókna wiązki  $E$  (z założenia),

$$t_{ij}^B \in \text{Diff}^{k+1}(\kappa_j^B(\mathcal{O}_{ij}^B), \kappa_i^B(\mathcal{O}_{ij}^B)), \quad t_{\alpha\beta}^F \in \text{Diff}^{k+1}(\kappa_\beta^F(\mathcal{O}_{\alpha\beta}^F), \kappa_\alpha^F(\mathcal{O}_{\alpha\beta}^F)),$$

i klasy  $C^k$  w składowej ostatniej w argumencie bazowym oraz tym z włókna wiązki  $E$ ,

$$Dt_{\alpha\beta}^F \in C^k(\kappa_\beta^F(\mathcal{O}_{\alpha\beta}^F), \mathbb{R}^{x^{n^2}}), \quad Dt_{ij}^B \in C^k(\kappa_j^B(\mathcal{O}_{ij}^B), \mathbb{R}^{x^{m^2}})$$

a nadto liniowa, więc klasy  $C^\infty$  w argumencie ostatnim  $D(\kappa_\beta^F \circ \phi \circ \kappa_j^{B-1})(\kappa_j^B(x))$ , zatem w sumie klasy  $C^k$ , tym samym więc zadaje na  $J^1 E$  strukturę rozmaiłości

różniczkowalnej klasy  $C^k$ . Zauważmy przy tym, że rzut na bazę jest surjekcją klasy  $C^k$  jako superpozycja odwzorowań tego samego typu,

$$\pi_{J^1 E} \upharpoonright_{J^1 E_{i,\alpha}} = \kappa_i^{B-1} \circ \text{pr}_1 \circ J^1 \kappa_{i,\alpha}^E.$$

Strukturę różniczkowalnej klasy  $C^k$  na zbiorze  $J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^m \times F)$  zadajemy w sposób analogiczny do opisanego powyżej, przy czym wykorzystujemy tu globalną mapę na bazie  $\mathbb{R}^m$  wiązki trywialnej  $\mathbb{R}^m \times F$  oraz mapy lokalne  $\kappa_\alpha^F$ ,  $\alpha \in J$  na jej włóknach. Mamy więc na podzbiórach

$$J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{O}_\alpha^F) \equiv \{ J_{\mathbf{0}_m}^1 \phi \mid \phi(0) \in \tau_i^{E-1}(\{\mathbf{0}_m\} \times \mathcal{O}_\alpha^F) \}$$

odwzorowania

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{0}_m}^1 \kappa_\alpha^F & : J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{O}_\alpha^F) \twoheadrightarrow J_{\mathbf{0}_\alpha}^1 \tau_\alpha^F (J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{O}_\alpha^F)) \\ & : J_{\mathbf{0}_m}^1 \phi \longmapsto (\kappa_i^F \circ \phi(\mathbf{0}_m), D(\kappa_i^F \circ \phi)(\mathbf{0}_m)), \end{aligned}$$

które indukują na  $J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^m \times F)$  mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach  $J_{\mathbf{0}_\alpha}^1 \tau_\alpha^F (J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^m \times \mathcal{O}_\alpha^F)) \subset \mathbb{R}^{m+n(1+m)}$  i względem tej topologii pełnią rolę map lokalnych klasy  $C^k$ .

Trywializacje lokalne wiązki  $J^1 E$  są zadane w postaci

$$\begin{aligned} J^1 \tau_i^E & : \pi_{J^1 E}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^m \times F) \\ & : (J_x^1 \phi, x) \longmapsto (x, J_{\mathbf{0}_m}^1((T_{\kappa_i^B(x)} \circ \kappa_i^B \times \text{id}_F) \circ \tau_i^E \circ \phi \circ \kappa_i^{B-1} \circ T_{\kappa_i^B(x)}^{-1}))) \end{aligned}$$

▲

Geometrycznie absolutnie naturalnym i – także, choć nie wyłącznie z tego powodu – modelowym przykładem wiązki włóknistej jest wiązka styczna nad różniczkowalną  $(M, \mathcal{A})$  klasy  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Wiązkę tę można definiować na kilka wzajem równoważnych sposobów, z których każdy eksponuje inną jej cechę strukturalną – jeden z nich, przedstawiony w Def. 67, wykorzystuje dane lokalne  $Dt_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(\dim M; \mathbb{R})$  do rekonstrukcji wiązki stycznej z jej lokalnych trywializacji współrzędniowych według schematu sformalizowanego w Tw. 4.1.1. Struktura liniowa, której oczekujemy od modelu „przestrzeni ruchów nieskończenie małych” albo „przestrzeni prędkości”, jest w tym ujęciu zakamuflowana pod postacią przemyślnego wyboru lokalnego modelu włókna  $\mathbb{R}^{\dim M}$ , o naturalnej interpretacji w terminach lokalnych współrzędnych i takież strukturze liniowej. Poniżej przedyskutujemy odmienne spojrzenie na tę samą strukturę, stanowiące udaną próbę uwolnienia opisu wewnętrznej geometrii stycznościowej od lokalnej euklidesowej kartografii różniczkowalności. Pierwszy krok w tym kierunku został poczyniony w treści, dowodzie i okolicach Stw. 94, w którym wprowadziliśmy relację współstyczności na zbiorze (lokalnych) ścieżek klasy  $C^1$  przechodzących przez ustalony (dowolnie) punkt  $M$  i wykazaliśmy równoważność otrzymanego tym sposobem geometrycznego modelu przestrzeni stycznej do różniczkowalności z jej modelem algebraicznym zdefiniowanym wcześniej w Stw. 93. Poniżej przedstawimy alternatywną w stosunku do tej z Tw. 4.1.1 metodę rekonstrukcji struktury globalnej wiązki włóknistej z danych lokalnych, która doprowadzi nas do (równoważnego poprzedniemu) opisu przestrzeni totalnej wiązki (włóknistej) stycznej  $TM$ .

DEFINICJA 129. Przyjmijmy zapis Def. 127, Stw. 94 oraz Przykł. 24 (5).  
**Wiązka (włóknista) styczna nad różniczkowalnością** klasy  $C^{k+1}$   $(M, \mathcal{A})$  wymiaru

$n \in \mathbb{N}^\times$  o atlasie  $\widehat{\mathcal{A}}$  złożonym z map lokalnych  $\kappa_i : \mathcal{O}_i \rightsquigarrow \mathcal{U}_i$ ,  $i \in I$  to wiązka włóknista o składowych:

- baza  $M$ , o strukturze rozmierności różniczkowalnej klasy  $C^{k+1}$  zadawanej przez atlas  $\widehat{\mathcal{A}}$ ;
- przestrzeń totalna

$$TM := \bigsqcup_{x \in M} P_x$$

o strukturze rozmierności opisanej poniżej;

- włókno typowe  $\mathbb{R}^{xn}$  o naturalnej strukturze rozmierności różniczkowalnej klasy  $C^\infty$  (więc też w szczególności klasy  $C^k$ );
- rzut na bazę

$$\pi_{TM} : TM \longrightarrow M : ([\gamma]_{\sim_x}, x) \longmapsto x.$$

Przy tym odwzorowania

$$\mathbb{T}\kappa_i : \mathbb{T}\mathcal{O}_i := \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{xn} : [\gamma]_{\sim_x} \longmapsto (\kappa_i(x), D(\kappa_i \circ \gamma)(0))$$

indukują na  $TM$  mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach  $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{xn} \subset \mathbb{R}^{x2n}$ , tj. taką, w której podzbiór  $\mathcal{V} \subset TM$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i \in I} : \mathbb{T}\kappa_i(\mathcal{V} \cap \mathbb{T}\mathcal{O}_i) \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{xn}).$$

W tej topologii odwzorowania  $\mathbb{T}\kappa_i$  są jawnie homeomorficzne, stanowią przeto mapy lokalne, zwane **mapami naturalnymi**, dla których transformacje współrzędniowe to

$$\begin{aligned} \mathbb{T}t_{ij} := \mathbb{T}\kappa_i \circ (\mathbb{T}\kappa_j)^{-1} & : \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{xn} \rightsquigarrow \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{xn} \\ & : (\kappa_j(x), D(\kappa_j \circ \gamma)(0)) \longmapsto (\kappa_i(x), D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \\ & \equiv (t_{ij}(\kappa_j(x)), D(t_{ij} \circ \kappa_j \circ \gamma)(0)) \\ & = (t_{ij}(\kappa_j(x)), Dt_{ij}(\kappa_j(x))(D(\kappa_j \circ \gamma)(0))). \end{aligned}$$

Zależność punktu w obrazie od argumentu z dziedziny jest klasy  $C^{k+1}$  w składowej bazowej (z założenia),

$$t_{ij} \in \text{Diff}^{k+1}(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \kappa_i(\mathcal{O}_{ij})),$$

i klasy  $C^k$  w składowej z włókna w argumentie bazowym,

$$Dt_{ij} \in C^k(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \mathbb{R}^{xn^2}),$$

a nadto liniowa, więc klasy  $C^\infty$  w argumentie z włókna  $D(\kappa_j \circ \gamma)(0)$ , czyli ostatecznie klasy  $C^k$ , i jako taka zadaje na  $TM$  strukturę rozmierności różniczkowalnej klasy  $C^k$ . Zarazem odwzorowania  $\mathbb{T}\kappa_i$  pełnią też rolę lokalnych trywializacji, tautologicznie  $C^k$ -gładkich względem zdefiniowanej tu (przy ich użyciu) struktury różniczkowej. Wreszcie też rzut na bazę jest surjekcją klasy  $C^k$  jako superpozycja odwzorowań tego samego typu,

$$\pi_{TM} \upharpoonright_{\mathbb{T}\mathcal{O}_i} = \kappa_i^{-1} \circ \text{pr}_1 \circ \mathbb{T}\kappa_i.$$

▲

UWAGA 44. Odwzorowania (1.4.31) określają równoważność (izomorfizm) między oboma opisami wiązki stycznej zgodną z naturalną strukturą liniową na włóknach  $TM$ , opisaną w Stw. 94. Odwzorowanie

$${}_{t_x;i} : (TM)_x \rightsquigarrow \mathbb{R}^{xn} : ([\gamma]_{\sim_x}, x) \mapsto D(\kappa^i \circ \gamma)(0).$$

jest izomorfizmem (niekanonicznym) włókna  $(TM)_x \equiv P_x$  nad punktem  $x \in \mathcal{O}_i \subset B$  z włóknem typowym  $\mathbb{R}^{xn}$ . Bez trudu wskazujemy nad każdym punktem  $B$  bazę w wiązce przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych  $TM$ , a mianowicie – dla  $x \in \mathcal{O}_i$  i pewnego  $\varepsilon_k > 0$  –

$$T_x M = \bigoplus_{k=1}^n ([\gamma_k]_{\sim_x})_{\mathbb{R}}, \quad \gamma_k : ]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[ \rightarrow M : t \mapsto \tau_i^{-1}(\tau_i(x) + t \triangleright e_k),$$

gdzie  $\{e_k\}_{k \in \overline{1,n}}$  jest bazą standardową  $\mathbb{R}^{xn}$  z Przykł. 13 (5). Zaobserwowaną tu strukturę wiązki przestrzeni liniowych formalizujemy w dalszej części wykładu.

▮

## 2. Wiązki wektorowe

DEFINICJA 130. Przyjmijmy zapis Def. 15 i 127, Stw. 18 oraz Przykł. 11 (10), 15 (2) i 21 (1), ustalmy (dowolnie)  $n \in \mathbb{N}$  i rozważmy  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ze standardową topologią (euklidesową) i strukturą różniczkową klasy  $C^\infty$ . **Wiązka wektorowa rzędu  $n$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  klasy  $C^k$**  to wiązka włóknista<sup>3</sup>  $(V, B, \mathbb{K}^{xn}, \pi_V)$  o własnościach

- $\forall_{x \in B} : V_x \equiv \pi_V^{-1}(\{x\}) \in \text{Obj Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$ ;
- ograniczenia dyfeomorfizmów klasy  $C^k$  (lokalnych trywializacji)

$$\text{pr}_2 \circ \tau_i \upharpoonright_{V_x} : V_x \rightsquigarrow \mathbb{K}^{xn}, \quad x \in B$$

są izomorfizmami przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowych,

przy czym odwzorowania definiujące strukturę  $\mathbb{K}$ -liniową na włóknach  $V$  są klasy  $C^k$ , w szczególności więc mamy dyfeomorfizm

$$(4.1.5) \quad \mathbb{A} : V \times_B V \rightarrow V$$

modelowany na definiującej operacji binarnej  $A^n : \mathbb{K}^{xn} \times \mathbb{K}^{xn} \rightarrow \mathbb{K}^{xn}$  w rozumieniu diagramu przemiennego

$$(4.1.6) \quad \begin{array}{ccc} \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\mathbb{A}} & \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \downarrow \tau_i \times \tau_i & & \downarrow \tau_i \\ (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{xn}) \times_{\mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{xn}) & \xrightarrow{(\text{pr}_1, A^n \circ \text{pr}_{2,4})} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{xn} \end{array}$$

oraz rodzinę dyfeomorfizmów

$$(4.1.7) \quad \mathbb{K}^x \rightarrow \text{Diff}^k(V) : \lambda \mapsto \mathbb{L}_\lambda$$

<sup>3</sup>W konkretnych zastosowaniach bywa zasadnym zachowanie większej swobody w definicji modelowej przestrzeni wektorowej, jaką jest włókno typowe – w szczególności spotykamy wiązki wektorowe z włóknem typowym o strukturze algebry Liego bez naturalnego wyboru bazy. Oczywiście dowolny wybór bazy ustala izomorfizm ze stosowną potęgą kartezjańską ciała bazowego i ustalenie takiego właśnie (globalnego) wyboru przewiduje nasza definicja. Konsekwencją przyjętej przez nas konwencji jest duża wygoda i przejrzystość w późniejszych strukturalnych.

o  $\mathbb{K}$ -liniowych ograniczeniach do włókien, uzupełnianą przez odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe  $\mathbb{L}_{0\mathbb{K}}$ , modelowanych na definiującym działaniu  $\ell^n : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\times n} \rightarrow \mathbb{K}^{\times n}$  w rozumieniu diagramu przemiennego

$$(4.1.8) \quad \begin{array}{ccc} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\mathbb{L}_\lambda} & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} & \xrightarrow{\ell_\lambda^n} & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{array} .$$

W przypadku  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  mówimy o **rzeczywistej wiązce wektorowej**, gdy zaś  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  – o **zespolonej wiązce wektorowej**.

Rząd wiązki będziemy oznaczać symbolem  $\text{rk } \mathbb{V}$ . Ilekroć  $\text{rk } \mathbb{V} = 1$ , wiązkę określamy mianem **wiązki liniowej** i zwyczajowo oznaczamy symbolem  $L$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & L \\ & & \downarrow \pi_L \\ & & B \end{array} .$$

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy  $C^k$ )

$$\mathbf{0}_{\mathbb{V}} : B \rightarrow \mathbb{V} : x \mapsto \tau_i^{-1}(x, \mathbf{0}^n), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki wektorowej  $\mathbb{V}$ . Jest ono cięciem globalnym  $\mathbb{V}$  w rozumieniu Uwagi 43, przy czym zarówno zbiór cięć lokalnych  $\Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$ , jak i zbiór cięć globalnych  $\Gamma(\mathbb{V})$  niosą naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem  $C^k(B, \mathbb{K})$ .

**Podwiązka wektorowa wymiaru  $m$**  wiązki wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  to podwiązka  $(\mathbb{W}, B, \mathbb{K}^{\times m}, \pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{W}})$ ,  $m < n$  teźże wiązki (włóknistej) o tej własności, że nad dowolnym punktem bazy  $x \in B$  jej włókno  $\mathbb{W}_x \subset \mathbb{V}_x$  jest podprzestrzenią  $\mathbb{K}$ -liniową.

**Morfizm wiązek wektorowych (nad ciałem  $\mathbb{K}$ )**  $(\mathbb{V}_\alpha, B_\alpha, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$ ,  $n_\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  to dwójka  $(\Phi, f)$  złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) : (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \rightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2}),$$

którego ograniczenie do włókna nad dowolnym punktem bazy  $x \in B_1$ ,

$$(4.1.9) \quad \Phi \upharpoonright_{\mathbb{V}_{1x}} : \mathbb{V}_{1x} \rightarrow \mathbb{V}_{2f(x)},$$

jest odwzorowaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym. **Rząd morfizmu wiązek wektorowych  $(\Phi, f)$**  to odwzorowanie

$$\text{rk}(\Phi, f) : B_1 \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto \text{rk}(\Phi \upharpoonright_{\mathbb{V}_{1x}}).$$

Wiązki wektorowe skończonego wymiaru nad ciałem  $\mathbb{K}$  o bazie  $B$  wraz z morfizmami wiązek wektorowych między nimi tworzą **kategorię wiązek wektorowych skończonego wymiaru nad ciałem  $\mathbb{K}$  nad  $B$** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{VectBun}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}(B).$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 37.

(1) Trywialna wiązka wektorowa nad  $B$  modelowana na  $V \cong \mathbb{K}^n$ , czyli

$$(B \times V, B, \mathbb{K}^n, \text{pr}_1).$$

(2) Wiązka styczna nad rozmaitością różniczkowalną  $(M, \mathcal{A})$  klasy  $C^{k+1}$  wymiaru  $n = \dim M$ ,

$$(TM, M, \mathbb{R}^n, \pi_{TM}).$$

Pośród morfizmów odnajdujemy tu odwzorowania stycznościowe

$$(Tf, f) : (TM_1, M_1, \mathbb{R}^{n_1}, \pi_{TM_1}) \longrightarrow (TM_2, M_2, \mathbb{R}^{n_2}, \pi_{TM_2})$$

do odwzorowań klasy  $C^k$  między bazami, a to z racji liniowości ograniczeń tych odwzorowań do dowolnego włókna.

✓

**STWIERDZENIE 197.** *Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między nigdzie nieznikającymi cięciami lokalnymi klasy  $C^k$  wiązki liniowej klasy  $C^k$  i jej trywializacjami lokalnymi (teżże klasy). W szczególności wiązka liniowa jest (globalnie) trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma nigdzie nieznikające globalne cięcia.*

■

Dowód: Każde nigdzie nieznikające cięcie  $\sigma : \mathcal{O} \longrightarrow L \setminus \{\mathbf{0}_L(B)\}$  wiązki liniowej  $L$  nad zbiorem  $\mathcal{O} \in \mathcal{S}(B)$  jest gładko indeksowaną przez bazę  $\mathcal{O}$  wiązki rodziną baz  $\sigma(x)$ ,  $x \in \mathcal{O}$  poszczególnych jednowymiarowych włókien  $L_x$ , zatem dowolnemu wektorowi  $v \in \pi_L^{-1}(\mathcal{O})$  z włókna  $L_{\pi_L(v)}$  możemy przypisać w jednoznaczny sposób skalar  $\lambda(v) \in \mathbb{K}$  o własności

$$v = \mathbb{L}_{\lambda(v)}(\sigma \circ \pi_L(v)),$$

przy czym zależność tegoż skalara od wektora  $v$  jest gładka (wszak własność tę ma superpozycja odwzorowań gładkich  $\sigma \circ \pi_L$ ). To pozwala nam zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma : \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K} : v \longmapsto (\pi_L(v), \lambda(v)),$$

jawnie  $\mathbb{K}$ -liniowe i gładkie (klasy  $C^k$ ). Bez trudu wskazujemy jego odwrotność:

$$\tau_\sigma^{-1} : \mathcal{O} \times \mathbb{K} \longrightarrow \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) : (x, \lambda) \longmapsto \mathbb{L}_\lambda(\sigma(x)),$$

o tych samych cechach strukturalnych.

Cięcie lokalne przyporządkowane dowolnej trywializacji lokalnej  $\tau : \pi_{\mathbb{P}^1}^{-1}(\mathcal{O}) \twoheadrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}$  to

$$\sigma_\tau : \mathcal{O} \longrightarrow \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) : x \longmapsto \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}).$$

O jego niezerowości przekonuje prosty argument: jeśli dopuścimy równość

$$0_{L_x} = \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}})$$

nad pewnym punktem  $x \in \mathcal{O}$ , to wówczas wobec założonej przez nas  $\mathbb{K}$ -liniowości  $\tau$  dochodzimy do sprzeczności

$$(x, 0_{\mathbb{K}}) \equiv \tau(0_{L_x}) = \tau \circ \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}) = (x, 1_{\mathbb{K}}).$$

Wypisane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, nad dowolnym punktem  $x \in \mathcal{O}$  wyznaczamy

$$\sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}) = \mathbb{L}_{1_{\mathbb{K}}}(\sigma(x)) = \sigma(x),$$



zatem

$$\sigma_{\tau\sigma} = \sigma.$$

Ponadto jeśli dla dowolnego wektora  $v \in L_{\pi_L(v)} \subset \pi_L^{-1}(\mathcal{O})$  zdefiniować (w sposób jednoznaczny) skalar  $\lambda(v)$  równaniem

$$v =: \mathbb{L}_{\lambda(v)}(\sigma_\tau \circ \pi_L(v)) \equiv \mathbb{L}_{\lambda(v)} \circ \tau^{-1}(\pi_L(v), 1_{\mathbb{K}}) = \tau^{-1}(\pi_L(v), \lambda(v)),$$

to wyznaczamy

$$\lambda(v) = \text{pr}_2 \circ \tau(v),$$

a stąd także

$$\tau_{\sigma\tau}(v) = (\pi_L(v), \text{pr}_2 \circ \tau(v)) \equiv \tau(v),$$

czyli

$$\tau_{\sigma\tau} = \tau.$$

□

Podobnie jak same wiązki wektorowe, morfizmy tych wiązek pokrywające dyfeomorfizm identycznościowy na bazie mają prosty opis lokalny, z którego nieraz przyjdzie nam korzystać.

**TWIERDZENIE 4.1.2.** *Przyjmijmy zapis Def. 130. Dowolny morfizm  $(\Phi, \text{id}_B)$  wiązek wektorowych  $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o odnośnych trywializacjach lokalnych  $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{V}_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n_\alpha}$  (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ ) i odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(n_\alpha; \mathbb{K})$ , opisany przez diagram przemienny*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{V}_2 \\ \pi_{\mathbb{V}_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{V}_2} \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę  $\{h_i\}_{i \in I}$  odwzorowań macierzowych (lokalnie) klasy  $C^k$

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2, \mathbb{K}), \quad i \in I$$

o własności

$$(4.1.10) \quad \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) = h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x).$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu. ■

Dowód: Wybierzmy (dowolnie) bazę  $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n_1}}$  w przestrzeni  $\mathbb{K}^{\times n_1}$  i na tej podstawie zdefiniujemy cięcia lokalne

$$(4.1.11) \quad \varepsilon_a^{(i)} : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{V}_1 : x \mapsto \tau_i^{1-1}(x, e_a).$$

Zauważmy, że odwzorowanie  $\Phi$  jest w pełni określone przez wartości przyjmowane przezeń na powyższych cięciach, oto bowiem wobec założonej  $\mathbb{K}$ -liniowości  $\tau_i$  oraz  $\Phi$  w dowolnym punkcie

$$v \equiv \tau_i^{-1}(x, v^a \triangleright_n e_a) \equiv \mathbb{L}_{v^a}^{(1)}(\varepsilon_a^{(i)}(x)), \quad x \in \mathcal{O}_i$$

otrzymujemy

$$\Phi(v) = \Phi(\mathbb{L}_{v^a}^{(1)}(\varepsilon_a^{(i)}(x))) = \mathbb{L}_{v^a}^{(2)} \circ \Phi(\varepsilon_a^{(i)}(x)).$$

Wybermy zatem (dowolnie) bazę  $\{f_r\}_{r \in \overline{1, n_2}}$  w  $\mathbb{K}^{\times n_2}$ , o bazie dualnej (w rozumieniu Stw. 7)  $\{f_r^*\}_{r \in \overline{1, n_2}}$ , i oznaczmy odnośne cięcia lokalne  $\mathbb{V}_2$  jako

$$\phi_r^{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{V}_2 : x \longmapsto \tau_i^{2-1}(x, f_r),$$

po czym zdefiniujemy

$$h_{i ar} := f_r^* \circ \text{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1}(\cdot, e_a) : \mathcal{O}_i \longrightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K}),$$

czyli poprzez formułę

$$(4.1.12) \quad \mathbb{L}_{h_{i ar}(x)}^2(\phi_r^{(i)}(x)) := \Phi(\varepsilon_a^{(i)}(x)).$$

Na podstawie Tw. 1.2.11 zapisujemy powyższe dane lokalne morfizmu  $\Phi$  w postaci macierzy

$$h_i(x) := h_{i ar}(x) \triangleright \varepsilon(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} f_r), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

podobnie reprezentujemy też odwzorowania przejścia:

$$g_{ij}^1(x) = g_{ij ab}^1(x) \triangleright \varepsilon(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b), \quad g_{ij}^2(x) = g_{ij rs}^2(x) \triangleright \varepsilon(f_r^* \otimes_{\mathbb{K}} f_s).$$

Przywołując definicję tych ostatnich, ustalamy relację

$$\tau_j^{2-1}(x, h_j(x)(e_a)) = \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x)(e_a)),$$

a jednocześnie, wobec  $\mathbb{K}$ -liniowości  $\tau_i^\alpha$  oraz  $\Phi$ , znajdujemy

$$\begin{aligned} \tau_j^{2-1}(x, h_j(x)(e_a)) &= \Phi(\tau_j^{1-1}(x, e_a)) = \Phi(\tau_i^{1-1}(x, g_{ij}^1(x)(e_a))) \\ &= \mathbb{L}_{g_{ij ab}^1(x)}^2 \circ \Phi(\tau_i^{1-1}(x, e_b)) = \mathbb{L}_{g_{ij ab}^1(x)}^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(e_b)) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x)(e_a)). \end{aligned}$$

Niechaj teraz  $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą wiązkami wektorowymi o trywializacjach lokalnych  $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{V}_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{G}$  i odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{GL}(n_\alpha; \mathbb{K})$ . Niech też  $h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})$ ,  $i \in I$  będzie rodziną odwzorowań jak w tezie dowodzonego stwierdzenia, przy użyciu której określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i : \pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}_2}^{-1}(\mathcal{O}_i) : \tau_i^{1-1}(x, v) \longmapsto \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(v)),$$

które w świetle tożsamości, spełnionej dla dowolnych  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  i  $v \in \mathbb{K}^{\times n_1}$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_j(\tau_i^{1-1}(x, v)) &= \Phi_j(\tau_j^{1-1}(x, g_{ji}^1(x)(v))) = \tau_j^{2-1}(x, h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x)(v)) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x)(v)) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)(v)) \\ &= \Phi_i(\tau_i^{1-1}(x, v)), \end{aligned}$$

jawią się ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi : \mathbb{V}_1 \longrightarrow \mathbb{V}_2, \quad \Phi \upharpoonright_{\pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i.$$

Odwzorowanie to jest w oczywisty sposób  $\mathbb{K}$ -liniowe i zachowuje włókna.  $\square$

STWIERDZENIE 198. *Przyjmijmy zapis Def. 130 oraz Przykł. 1 (6) i niechaj  $(\Phi, f) : (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2})$  będzie morfizmem wiązek wektorowych  $\mathbb{V}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  stałego rzędu  $\text{rk}(\Phi, f) \equiv r \in \mathbb{N}$ . Wówczas **jądro morfizmu**  $(\Phi, f)$*

$$\text{Ker}(\Phi, f) := \bigsqcup_{x \in B_1} \text{ker}(\Phi|_{\mathbb{V}_{1x}})$$

*nieśie kanoniczną strukturę podwiązki wektorowej jego dziedziny  $\mathbb{V}_1$ , przy czym*

$$\text{rk Ker}(\Phi, f) = n_1 - r.$$

■

*Dowód:* Jest oczywistym, że ograniczenie atlasu  $\mathbb{V}_1$  do podprzestrzeni topologicznej  $\text{Ker}(\Phi, f)$  indukuje na niej strukturę (pod)rozmaitości klasy  $C^k$  (wszak nad każdym punktem bazy mamy do czynienia z podprzestrzenią liniową włókna), przy czym nad dowolnym punktem bazy  $x \in B$  zachodzi – na mocy Stw. 17 –

$$(\pi_{\mathbb{V}_1}|_{\text{Ker}(\Phi, f)})^{-1}(\{x\}) \cong \mathbb{K}^{n_1-r}.$$

Pozostaje jedynie skonstruować  $C^k$ -gładkie trywializacje lokalne tak otrzymanej wiązki (wzajem izomorficznych) przestrzeni wektorowych. Zważywszy lokalny charakter zagadnienia, ograniczymy się do (dostatecznie małych) otoczeń otwartych:  $\mathcal{O}_1$  (ustalonego dowolnie) punktu  $x_1 \in B_1$  oraz  $\mathcal{O}_2 \supset f(\mathcal{O}_1)$  punktu  $f(x_1)$ , na których określone są dyfeomorfizmy (klasy  $C^k$ )

$$\tau_{\mathcal{O}_\alpha} : \pi_{\mathbb{V}_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_\alpha) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_\alpha \times \mathbb{K}^{n_\alpha}, \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

W obrazie tychże morfizm  $(\Phi, f)$  przybiera postać

$$\Phi_{21} \equiv \tau_{\mathcal{O}_2} \circ \Phi \circ \tau_{\mathcal{O}_1}^{-1} : \mathcal{O}_1 \times \mathbb{K}^{n_1} \longrightarrow \mathcal{O}_2 \times \mathbb{K}^{n_2} : (x, v) \longmapsto (f(x), L_\Phi(x)(v))$$

dla pewnego gładkiego odwzorowania

$$L_\Phi : \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathbb{K}(n_2) : x \longmapsto L_\Phi(x)$$

o rzędzie

$$\text{rk } L_\Phi(x) = r.$$

Dokonajmy rozkładu

$$\mathbb{K}^{n_1} = \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1, \quad \mathbb{K}^{n_2} = \text{Im } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2,$$

określonego dla pewnych przestrzeni dopełniających  $\Delta_\alpha \subset \mathbb{K}^{n_\alpha}$  o wymiarach

$$\dim_{\mathbb{K}} \Delta_1 = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } L_\Phi(x_1) = n_2 - \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2.$$

Wobec oczywistej relacji

$$\Delta_1 \cong \text{Im } L_\Phi(x_1)$$

możemy następnie skonstruować indeksowaną przez  $\mathcal{O}_1 \ni x$  rodzinę odwzorowań  $\mathbb{K}$ -liniowych

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\Phi(x) & : \quad \mathbb{K}^{n_1} \oplus \Delta_2 \equiv \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \longrightarrow \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \text{Im } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2 \\ & \equiv \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{n_2} \end{aligned}$$

$$: \quad (k, \delta_1, \delta_2) \longmapsto (k, 0_{\text{Im } L_\Phi(x_1)}, \delta_2) +_{\oplus} (0, L_\Phi(x))(k, \delta_1),$$

o jawnie odwracalnym elemencie

$$\tilde{\Lambda}_\Phi(x_1) = \text{id}_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)} \oplus L_\Phi(x_1) \upharpoonright_{\Delta_1} \oplus \text{id}_{\Delta_2}.$$

Jako że odwzorowania odwracalne tworzą podzbiór otwarty w  $\text{Hom}_\mathbb{K}(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2})$  (a mianowicie: dopełnienie przeciwoobrazu zbioru domkniętego  $\{0_\mathbb{K}\}$  względem odwzorowania  $\det_{(n_1 + \dim_\mathbb{K} \Delta_2)}$  będącego superpozycją odwzorowań ciągłych, więc też ciągłego), przeto  $\tilde{\Lambda}_\Phi(x_1)$  należy do tego podzbioru wraz z pewnym swoim otoczeniem otwartym  $\mathcal{U}$ , którego przeciwoobraz względem (ciągłego) odwzorowania  $\tilde{\Lambda}_\Phi$  jest otoczeniem otwartym  $\mathcal{V}_1 \equiv \tilde{\Lambda}_\Phi^{-1}(\mathcal{U}) \ni x_1$  o własności  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{O}_1$ . Oto więc obok  $C^k$ -gładkiego odwzorowania

$$\Lambda_\Phi \equiv \tilde{\Lambda}_\Phi \upharpoonright_{\mathcal{V}_1} : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \text{Iso}_\mathbb{K}(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}),$$

mamy też  $C^k$ -gładkie odwzorowanie

$$V_\Phi \equiv \text{Inv} \circ \Lambda_\Phi : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \text{Iso}_\mathbb{K}(\text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2),$$

(punktowo) odwrotne do  $\Lambda_\Phi$  w każdym  $x \in \mathcal{V}_1$ . Rozważmy dowolny wektor

$$(k, \delta_1) \in \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \equiv \mathbb{K}^{\times n_1}.$$

Ustalwszy  $x \in \mathcal{V}_1$ , stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} (k, \delta_1) \in \text{Ker } L_\Phi(x) &\iff \Lambda_\Phi(x)(k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = (k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}) \\ &\iff (k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = V_\Phi(x)(k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}). \end{aligned}$$

Wziąwszy pod uwagę włożenia kanoniczne:

$$J_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)} : \text{Ker } L_\Phi(x_1) \twoheadrightarrow \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}$$

oraz

$$J_{\mathbb{K}^{\times n_1}} : \mathbb{K}^{\times n_1} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2,$$

możemy zatem zapisać

$$J_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\text{Ker } L_\Phi(x)) \subseteq V_\Phi(x)(\text{Im } J_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)}),$$

ale też

$$\begin{aligned} \dim_\mathbb{K} J_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\text{Ker } L_\Phi(x)) &= \dim_\mathbb{K} \text{Ker } L_\Phi(x) = n_1 - \dim_\mathbb{K} \text{Im } L_\Phi(x) \\ &= n_1 - \dim_\mathbb{K} \text{Im } L_\Phi(x_1) = \dim_\mathbb{K} \text{Ker } L_\Phi(x_1) = \dim_\mathbb{K} \text{Im } J_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)} \\ &\equiv \dim_\mathbb{K} V_\Phi(x)(\text{Im } J_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)}), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z odwracalności  $V_\Phi(x)$ . Widzimy więc, że

$$J_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\text{Ker } L_\Phi(x)) = V_\Phi(x)(\text{Im } J_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)}),$$

i na tej podstawie konstatujemy, że odwzorowanie

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{V}_1}^{-1} : \mathcal{V}_1 \times \text{Ker } L_\Phi(x_1) &\longrightarrow \text{Ker}(\Phi_{21}, f \upharpoonright_{\mathcal{O}_1}) \upharpoonright_{\mathcal{V}_1} \\ &: (x, k) \longmapsto (x, \text{pr}_{1,2} \circ V_\Phi(x)(k, 0_{\text{Im } L_\Phi(x_1)}, 0_{\Delta_2})) \end{aligned}$$

jest  $(C^k)$ -gładką odwrotnością trywializacji lokalnej (także  $(C^k)$ -gładkiej)

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{V}_1} : \text{Ker}(\Phi_{21}, f \upharpoonright_{\mathcal{O}_1}) \upharpoonright_{\mathcal{V}_1} &\longrightarrow \mathcal{V}_1 \times \text{Ker } L_\Phi(x_1) \\ &: (x, v) \longmapsto (x, \text{pr}_1 \circ \Lambda_\Phi(x)(v, 0_{\Delta_2})). \end{aligned}$$

□

COROLLARIUM 9. Przyjmijmy zapis Def. 127 oraz Stw. 198 i niechaj  $(E, B, F, \pi_E)$  będzie wiązką włóknistą klasy  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Jądro epimorfizmu wiązek wektorowych

$$(\mathbb{T}\pi_E, \pi_E) : \mathbb{T}E \longrightarrow \mathbb{T}B$$

jest podwiązką wektorową klasy  $C^{k-1}$

$$(\mathbb{V}E \equiv \text{Ker}(\mathbb{T}\pi_E, \pi_E), E, \mathbb{K}^{\dim F}, \pi)$$

wiązki stycznej  $\mathbb{T}E$ . Określamy ją mianem **(pod)wiązki pionowej** (lub **wertykalnej**) nad  $E$ . Jej włókno  $\mathbb{V}_p E \equiv (\mathbb{V}E)_p$  nad  $p \in E$ , zwane **(pod)przestrzenią pionową** (lub **wertykalną**), rozpinają **wektory pionowe** (lub **wertykalne**). ■

*Dowód:* Teza wynika wprost ze Stw. 198, a to z racji orzeczonej w Stw. 195 submersywności rzutu kanonicznego na bazę,  $\text{rk } \mathbb{T}\pi_E = \dim F \equiv \dim E - \dim B$ . □

Jedną z naturalnych konstrukcji na przestrzeni wektorowej jest wybór bazy  $\{e_i\}_{i \in \overline{1, D}}$ ,  $D = \dim_{\mathbb{K}} V$ , tj. wybór izomorfizmu

$$V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times D} : v = v^i e_i \longmapsto (v^1, v^2, \dots, v^D).$$

Konstrukcja ta ma swój nader istotny odpowiednik w teorii wiązek wektorowych, który teraz omówimy.

DEFINICJA 131. Przyjmijmy zapis Def. 130 i niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową rzędu  $n \in \mathbb{N}$ , o trywializacjach lokalnych  $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}$  stowarzyszonych z pokryciem otwartym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$ . **Wiązka reperów** (zwana też **wiązką baz**) **wiązki wektorowej**  $\mathbb{V}$  to wiązka włóknista

$$(\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}, B, \text{GL}(n; \mathbb{K}), \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}})$$

o składowych

- przestrzeń totalna

$$\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V} := \bigsqcup_{x \in B} \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$$

o strukturze różniczkowalnej klasy  $C^k$  indukowanej przez trywializacje  $\{\tau_i\}_{i \in I}$  i o włóknie  $(\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V})_x \equiv \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$  nad dowolnym punktem  $x \in B$  będącym zbiorem baz  $\beta_x : \mathbb{K}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$  włókna  $\mathbb{V}_x$ ;

- włókno typowe  $\text{GL}(n; \mathbb{K}) \equiv \text{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n})$ ;
- rzut na bazę  $\pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}} : \mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V} \longrightarrow B : (\beta_x, x) \longmapsto x$ .

Przy tym bijekcje  $F\tau_i$  odwrotne do

$$F\tau_i^{-1} : \mathcal{O}_i \times \text{GL}(n; \mathbb{K}) \twoheadrightarrow \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) : (x, \chi) \longmapsto (\tau_i^{-1}(x, \chi(\cdot)), x)$$

indukują na  $\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}$  mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach  $\mathcal{O}_i \times \text{GL}(n; \mathbb{K})$  (gdzie topologia na  $\text{GL}(n; \mathbb{K})$  to topologia podprzestrzeni topologicznej przestrzeni wektorowej  $\mathbb{K}^{\times n^2}$ ), tj. taką, w której podzbiór  $\mathcal{U} \subset \mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i \in I} : F\tau_i(\mathcal{U} \cap \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)) \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_i \times \text{GL}(n; \mathbb{K})).$$

W tej topologii odwzorowania  $F\tau_i$  są homeomorficznymi trywializacjami lokalnymi o odwzorowaniach przejścia klasy  $C^k$ :

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\text{F}_{\text{GLV}}} \equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(\cdot)) & : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\text{GL}(n; \mathbb{K})) \\ & : x \longmapsto \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(x)), \end{aligned}$$

gdzie

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(x)) : \text{GL}(n; \mathbb{K}) \curvearrowright : \chi \longmapsto \tau_{ij}(x) \circ \chi.$$

Struktura różniczkowej klasy  $C^k$  jest indukowana wzdłuż homeomorfizmów  $F\tau_i$  ze struktury produktowej na lokalnym modelu  $\mathcal{O}_i \times \text{GL}(n; \mathbb{K})$ , trywialnej (klasy  $C^\infty$ ) w drugim czynniku i wyznaczonej przez przecięcie z atlasem  $\widehat{\mathcal{A}}_B$  na rozmaitości  $B$  w czynniku pierwszym. Względem tak określonej struktury różniczkowej trywializacje lokalne  $F\tau_i$  są tautologicznie gładkie klasy  $C^k$ , podobnie jak rzut kanoniczny na bazę,  $\pi_{\text{F}_{\text{GLV}}} \equiv \text{pr}_1 \circ F\tau_i^{-1}$ .

▲

UWAGA 45. Powyższa definicja wymaga kilku słów komentarza. W pierwszej kolejności odnotujemy istnienie naturalnego prawego działania – włókno po włóknie – grupy  $\text{GL}(n; \mathbb{K})$  na przestrzeni totalnej  $\text{F}_{\text{GLV}}$  danego w postaci

$$r : \text{F}_{\text{GLV}} \times \text{GL}(n; \mathbb{K}) \longrightarrow \text{F}_{\text{GLV}} : ((\beta_x, x), \chi) \longmapsto (\beta_x \circ \chi, x) \equiv (\beta_x, x) \triangleleft \chi.$$

Działanie to jest w jawny sposób wolne (wobec odwracalności elementów włókna  $\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ ), a nadto przechodnie nad dowolnym punktem  $x \in B$  – wszak dla dowolnej pary  $\beta_{x_1}, \beta_{x_2} \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$  spełniona jest tożsamość

$$\beta_{x_2} \equiv \beta_{x_1} \circ (\beta_{x_1}^{-1} \circ \beta_{x_2}),$$

a ponieważ  $\beta_{x_1}^{-1} \circ \beta_{x_2} \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n})$  jest odwzorowaniem o odwrotności  $\beta_{x_2}^{-1} \circ \beta_{x_1}$ , przeto możemy zapisać

$$(\beta_{x_2}, x) = (\beta_{x_1}, x) \triangleleft (\beta_{x_1}^{-1} \circ \beta_{x_2}),$$

konstatując przy tym, że  $\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$  jest torsorem grupy  $\text{GL}(n; \mathbb{K})$  w rozumieniu Def. 14. Wybór dowolnego elementu  $\beta_{x_*} \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$  zadaje niekanoniczny  $(\text{GL}(n; \mathbb{K})$ -ekwiwariantny) izomorfizm

$$\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \xrightarrow{\cong} \text{GL}(n; \mathbb{K}) : \beta_x \longmapsto \beta_{x_*}^{-1} \circ \beta_x.$$

Wobec powyższego bez trudu stwierdzamy, że odwzorowania  $F\tau_i^{-1}$  są bijektywne, oto bowiem przyporządkowują w sposób jawnie injktywny elementom zbioru  $\{x\} \times \text{GL}(n; \mathbb{K})$ ,  $x \in \mathcal{O}_i$  elementy zbioru  $\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \times \{x\}$ . Są więc odwracalne, co pozwala użyć ich do zaindukowania topologii na  $\text{F}_{\text{GLV}}$  według opisanego schematu. Ich identyfikacja jako trywializacji lokalnych zasadza się na bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} F\tau_i \circ F\tau_j^{-1} & : \mathcal{O}_{ij} \times \text{GL}(n; \mathbb{K}) \curvearrowright \\ & : (x, \chi) \longmapsto F\tau_i(\tau_j^{-1}(x\chi(\cdot)), x) \equiv F\tau_i(\tau_i^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, \chi(\cdot)), x) \\ & = F\tau_i(\tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)), x) \equiv F\tau_i \circ F\tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)) \\ & = (x, g_{ij}(x) \circ \chi(\cdot)), \end{aligned}$$

w którym  $g_{ij} \in C^k(\mathcal{O}_{ij}, \text{GL}(n; \mathbb{K}))$  są odwzorowaniami przejścia wiązki  $\mathbb{V}$ , a który ukazuje gładki (klasy  $C^k$ ) charakter odwzorowań  $F\tau_i \circ F\tau_j^{-1}$ .

Na koniec zauważmy, że odwzorowania  $F\tau_i^{-1}$  (więc także trywializacje lokalne  $F\tau_i$ ) są ekwiwariantne względem prawostronnego działania grupy  $\text{GL}(n; \mathbb{K})$ : regularnego  $\varphi$  na drugim czynniku kartezjańskim ich dziedziny oraz opisanego powyżej  $r$  na przeciwdziedzinie. Istotnie, obliczamy wprost – dla dowolnego elementu  $\gamma \in \text{GL}(n; \mathbb{K})$  –

$$\begin{aligned} F\tau_i^{-1} \circ (\text{id}_{\mathcal{O}_i} \times \varphi_\gamma)(x, \chi) &= F\tau_i^{-1}(x, \chi \circ \gamma) = (\tau_i^{-1}(x, \chi \circ \gamma(\cdot)), x) \\ &\equiv (\tau_i^{-1}(x, \chi(\cdot)), x) \triangleleft \gamma \equiv r_\gamma \circ F\tau_i^{-1}(x, \chi). \end{aligned}$$

Trywializacje lokalne są zatem zgodne z zaobserwowaną wcześniej strukturą torsora grupy  $\text{GL}(n; \mathbb{K})$  na włóknie wiązki reperów. Następną definicja przynosi stosowną formalizację poczynionej tu obserwacji.

$\bar{\lambda}$

### 3. Wiązki główne z grupą strukturalną

DEFINICJA 132. Przyjmijmy zapis Def. 93 oraz 127 i niechaj  $G$  będzie grupą topologiczną (wzgl. Liego w przypadku  $k > 0$ ). **Wiązka główna** klasy  $C^k$  o **grupie strukturalnej**  $G$  to wiązka włóknista klasy  $C^k$

$$(P_G, B, G, \pi_{P_G})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna  $P_G$  z wolnym działaniem prawostronnym  $r$  grupy strukturalnej  $G$ , które jest przechodnie we włóknie nad (dowolnym) punktem bazy, co opisuje diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} P_G \times G & \xrightarrow{r} & P_G \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_{P_G} \\ P_G & \xrightarrow{\pi_{P_G}} & B \end{array} ;$$

- lokalne trywializacje

$$\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times G, \quad i \in I$$

stowarzyszone z pokryciem otwartym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$  i  $G$ -ekwiwariantne względem działań prawostronnych:  $r$  na dziedzinie oraz regularnego  $\varphi$  na drugim czynniku kartezjańskim przeciwdziedziny,

$$\tilde{\varphi}^i \equiv \text{id}_{\mathcal{O}_i} \times \varphi : (\mathcal{O}_i \times G) \times G \longrightarrow \mathcal{O}_i \times G : ((x, g), h) \longmapsto (x, g \cdot h).$$

**Podwiązka główna o grupie strukturalnej**  $H$  wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  to podwiązka  $(P_H, B, H, \pi_{P_G} \upharpoonright_{P_H})$  tejże wiązki (włóknistej) o grupie strukturalnej będącej podgrupą topologiczną (wzgl. Liego)  $H \subset G$ .

**Morfizm wiązek głównych**  $(P_{G_\alpha}, B_\alpha, G_\alpha, \pi_{P_{G_\alpha}})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o działaniach odnośnych grup strukturalnych  $r^\alpha$  to trójka  $(\Phi, f, \varphi)$  złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) : (P_{G_1}, B_1, G_1, \pi_{P_{G_1}}) \longrightarrow (P_{G_2}, B_2, G_2, \pi_{P_{G_2}})$$

oraz homomorfizmu grup topologicznych (wzgl. Liego) pozostających w relacji wyrażanej przez diagram przemienny

$$(4.1.13) \quad \begin{array}{ccccc} P_{G_1} \times G_1 & \xrightarrow{r^1} & P_{G_1} & \xrightarrow{\pi_{P_{G_1}}} & B_1 \\ \Phi \times \varphi \downarrow & & \downarrow \Phi & & \downarrow f \\ P_{G_2} \times G_2 & \xrightarrow{r^2} & P_{G_2} & \xrightarrow{\pi_{P_{G_2}}} & B_2 \end{array} .$$

Wiązki główne o grupie strukturalnej  $G$  i bazie  $B$  wraz z odnośnymi morfizmami wiązek głównych między nimi o składowej na grupie strukturalnej  $\varphi = \text{id}_G$  tworzą **kategorię wiązek głównych o grupie strukturalnej  $G$  nad  $B$** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{GrpBun}_G^{(k)}(B).$$

▲

PRZYKŁAD(Y) 38.

- (1) Trywialna wiązka główna nad  $B$  o grupie strukturalnej  $G$ , czyli

$$(B \times G, B, G, \text{pr}_1).$$

- (2) Wiązka reperów wiązki wektorowej  $V$  modelowanej na  $\mathbb{K}^{\times n}$ , czyli

$$(F_{GL}V, B, GL(n; \mathbb{K}), \pi_{F_{GL}V}),$$

w szczególności zaś – **wiązka reperów nad rozmaitością** (albo **wiązka baz nad rozmaitością**)  $M$  wymiaru  $n$ , czyli

$$(F_{GL}TM, M, GL(TM) \cong GL(n; \mathbb{R}), \pi_{F_{GL}TM}).$$

- (3) **Rozwłóknienie Hopfa**

$$(SU(2) \cong \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, U(1), \pi_{SU(2)/U(1)}).$$

✓

DEFINICJA 133. Przyjmijmy zapis Def. 132 i niechaj

$$P_G \times_B P_G := \{ (p_1, p_2) \in P_G \times P_G \mid \pi_{P_G}(p_1) = \pi_{P_G}(p_2) \}$$

będzie produktem włóknistym w rozumieniu Przykł. 21 (1). **Odwzorowanie ilorazowe** na wiązce głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  to odwzorowanie (klasy  $C^k$ )

$$\phi_{P_G} : P_G \times_B P_G \longrightarrow G$$

określone przez warunek

$$\forall_{(p_1, p_2) \in P_G \times_B P_G} : p_2 = p_1 \triangleleft \phi_{P_G}(p_1, p_2).$$

▲



UWAGA 46. O postulowanej gładkości odwzorowania ilorazowego najłatwiej jest przekonać się przy użyciu trywializacji lokalnych. Istotnie, niechaj  $p_1, p_2 \in (P_G)_x$ ,  $x \in \mathcal{O}_i$ ,  $i \in I$ , przy czym  $p_\alpha = \tau_i^{-1}(x, g_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  dla pewnych elementów  $g_\alpha \in G$ , a wtedy wobec równości

$$p_2 = \tau_i^{-1}(x, g_2) \equiv \tau_i^{-1}(x, g_1 \cdot (g^{-1} \cdot g_2)) = \tau_i^{-1}(x, g_1) \triangleleft (g^{-1} \cdot g_2) \equiv p_1 \triangleleft (g^{-1} \cdot g_2)$$

otrzymujemy reprezentację lokalną odwzorowania ilorazowego:

$$\phi_{P_G}(p_1, p_2) \equiv g^{-1} \cdot g_2 = M(\text{Inv} \circ \text{pr}_2 \circ \tau_i(p_1), \text{pr}_2 \circ \tau_i(p_2)),$$

daną w postaci superpozycji odwzorowań gładkich, więc gładką.

$\bar{\lambda}$

STWIERDZENIE 199. *Przyjmijmy zapis Def. 193. Odwzorowanie ilorazowe spełnia warunki wyrażone przez następujące diagramy przemienne:*

(DM1) *skośna symetria*

$$\begin{array}{ccc} P_G \times_B P_G & \xrightarrow{\tau_{P_G, P_G}} & P_G \times_B P_G \\ \phi_{P_G} \downarrow & & \downarrow \phi_{P_G} \\ G & \xrightarrow{\text{Inv}} & G \end{array} ,$$

gdzie  $\tau_{P_G, P_G} : P_G \times_B P_G \rightarrow P_G \times_B P_G : (p_1, p_2) \mapsto (p_2, p_1)$  jest (obcięta do produktu włóknistego) transpozycją kanoniczną, czyli

$$\forall_{(p_1, p_2) \in P_G \times_B P_G} : \phi_{P_G}(p_2, p_1) = \phi_{P_G}(p_1, p_2)^{-1};$$

(DM2) *warunek 1-kocyklu*

$$\begin{array}{ccc} P_G \times_B P_G \times_B P_G & \xrightarrow{(\phi_{P_G} \circ \text{pr}_{1,2}, \phi_{P_G} \circ \text{pr}_{2,3})} & G \times G \\ & \searrow \phi_{P_G} \circ \text{pr}_{1,3} & \downarrow M \\ & & G \end{array} ,$$

gdzie  $\text{pr}_{i,j} : P_G \times_B P_G \times_B P_G \rightarrow P_G \times_B P_G : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (p_i, p_j)$ ,  $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$  jest (obcięty do produktu włóknistego) rzutem kanonicznym, czyli

$$\forall_{(p_1, p_2, p_3) \in P_G \times_B P_G \times_B P_G} : \phi_{P_G}(p_2, p_3) \circ \phi_{P_G}(p_1, p_3)^{-1} \circ \phi_{P_G}(p_1, p_2) = e;$$

(DM3) *G-ekwiwariancja*

$$\begin{array}{ccccc} P_G \times_B P_G & \xleftarrow{(\text{r} \circ \text{pr}_{1,3}, \text{pr}_2)} & (P_G \times_B P_G) \times G & \xrightarrow{\text{id}_{P_G} \times \tau} & P_G \times_B P_G \\ \phi_{P_G} \downarrow & & \downarrow \phi_{P_G} \times \text{id}_G & & \downarrow \phi_{P_G} \\ G & \xleftarrow{\ell \circ (\text{Inv} \times \text{id}_G) \circ \tau_{G, G}} & G \times G & \xrightarrow{\wp} & G \end{array} ,$$

czyli

$$\forall_{(p_1, p_2) \in P_G \times_B P_G, g_1, g_2 \in G} : \phi_{P_G}(p_1 \triangleleft g_1, p_2 \triangleleft g_2) = g_1^{-1} \cdot \phi_{P_G}(p_1, p_2) \cdot g_2.$$

■

Dowód: Oczywisty. □

**STWIERDZENIE 200.** *Przyjmijmy zapis Def. 93 oraz Tw. 1.4.24. Niechaj  $P, B$  będą rozmaitościami (klasy  $C^k$ ) i niech  $G$  będzie grupą Liego. Zakładamy też, że jest określona surjektywna submersja  $\pi : P \rightarrow B$  oraz gładkie działanie prawostronne  $r : P \times G \rightarrow P$  grupy  $G$  na  $P$ . Jeśli działanie  $r$  jest swobodne, jego orbity pokrywają się z poziomiami  $\pi$ , a odwzorowanie  $\phi_P : P \times_B P \rightarrow G$  określone (jednoznacznie) przez warunek*

$$\forall_{(p_1, p_2) \in P \times_B P} : p_2 = r_{\phi_P(p_1, p_2)}(p_1)$$

jest gładkie, to wówczas czwórka

$$(P, B, G, \pi)$$

jest wiązką główną (klasy  $C^k$ ).

■

Dowód: Na podstawie Stw. 116 stwierdzamy istnienie pokrycia otwartego  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  rozmaitości  $B$ , na którego elementach określone są gładkie cięcia lokalne  $\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow P$  submersji  $\pi$ , możemy zatem zdefiniować jawnie gładkie odwzorowania

$$\tau_i^{-1} : \mathcal{O}_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) : (x, g) \mapsto r_g(\sigma_i(x)).$$

Wykorzystując odwzorowanie  $\phi_P$ , bez trudu znajdujemy ich (gładkie) odwrotności:

$$\tau_i : \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times G : p \mapsto (\pi(p), \phi_P(\sigma_i \circ \pi(p), p)).$$

Są one dobrze określone, gdyż

$$\pi(\sigma_i \circ \pi(p)) = (\pi \circ \sigma_i) \circ \pi(p) = \text{id}_{\mathcal{O}_i} \circ \pi(p) = \pi(p),$$

i – istotnie – spełniają postulowane tożsamości:

$$\tau_i^{-1} \circ \tau_i(p) = \tau_i^{-1}(\pi(p), \phi_P(\sigma_i \circ \pi(p), p)) = r_{\phi_P(\sigma_i \circ \pi(p), p)}(\sigma_i \circ \pi(p)) \equiv p,$$

$$\begin{aligned} \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x, g) &= \tau_i(r_g(\sigma_i(x))) = (\pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), \phi_P(\sigma_i \circ \pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x))) \\ &= (\pi \circ \sigma_i(x), \phi_P(\sigma_i \circ \pi \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x))) \\ &= (x, \phi_P(\sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x))) = (x, g), \end{aligned}$$

z których druga wynika stąd, że  $G$  odwzorowuje poziomice  $\pi$  w siebie, a do tego nieuchronnie

$$\forall_{(p_1, p_2, g) \in P \times^2 \times G} : \phi_P(p_1, r_g(p_2)) = \phi_P(p_1, p_2) \cdot g.$$

Skonstruowane powyżej trywializacje lokalne spełniają w punktach  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ ,  $(i, j) \in \langle I \times^2 \rangle_{\mathcal{O}}$  warunki

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, g) = \tau_i(r_g \circ \sigma_j(x)) = (\pi \circ r_g \circ \sigma_j(x), \phi_P(\sigma_i \circ \pi \circ r_g \circ \sigma_j(x), r_g \circ \sigma_j(x)))$$

$$= (x, \phi_{\mathbb{P}}(\sigma_i(x), r_g \circ \sigma_j(x))) = (x, \phi_{\mathbb{P}}(\sigma_i(x), \sigma_j(x)) \cdot g),$$

z których odczytujemy postać odwzorowań przejścia:

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G : x \longmapsto \phi_{\mathbb{P}}(\sigma_i(x), \sigma_j(x)),$$

zamykając tym samym procedurę identyfikacji postulowanej struktury wiązki głównej o grupie strukturalnej  $G$ .  $\square$

**COROLLARIUM 10.** *Przyjmijmy zapis Def. 86 oraz Tw. 1.5.8 i niechaj  $G$  będzie grupą topologiczną (wzgl. Liego),  $H \subseteq G$  zaś – dowolną jej podgrupą domkniętą. Czwórka*

$$(G, G/H, H, \pi_{G/H})$$

*jest topologiczną (wzgl. gładką) wiązką główną nad przestrzenią jednorodną  $G/H$ .*  $\blacksquare$

Dowód: Wystarczy zauważyć, że rzut  $\pi_{G/H}$  jest – zgodnie z tezą Tw. 1.5.8 – surjektywną submersją o poziomicach tożsamyh z orbitami naturalnego prawego (regularnego) działania  $H$ , a do tego jest określone odwzorowanie jawnie gładkie

$$\phi_G : G \times_{G/H} G \longrightarrow H : (g_1, g_2) \longmapsto g_1^{-1} \cdot g_2.$$

$\square$

**STWIERDZENIE 201.** *Działanie definiujące grupy strukturalnej na przestrzeni totalnej wiązki głównej jest właściwe w rozumieniu Def. 95.*  $\blacksquare$

Dowód: Rozważmy ciągi  $p : \mathbb{N} \longrightarrow P_G$  i  $g : \mathbb{N} \longrightarrow G$  o własnościach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft g_n) = \tilde{p}.$$

Wobec ciągłości rzutu kanonicznego na bazę oraz charakteru działania grupy strukturalnej (we włóknie) otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \pi_{P_G}(\tilde{p}) &\equiv \pi_{P_G}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft g_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_n \triangleleft g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_n) \\ &= \pi_{P_G}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\right) = \pi_{P_G}(p), \end{aligned}$$

która w świetle Def. 133 pozwala zapisać

$$\tilde{p} = p \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}).$$

Niechaj  $\pi_{P_G}(p) \in \mathcal{O}_i$ , gdzie  $\mathcal{O}_i$  jest elementem pokrycia trywializującego  $P_G$ . Istnieje indeks  $N \in \mathbb{N}$  o własności

$$\forall_{n \geq N} : p_n, p_n \triangleleft g_n \in \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i),$$

możemy zatem rozpatrywać podciągi  $p_{N+}$  i  $p_{N+} \triangleleft g_{N+}$  w obrazie trywializacji  $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$ , w którym

$$\tau_i(p_n) =: (x_n, \gamma_n), \quad \tau_i(p) =: (x, \gamma),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \gamma_n) = (x, \gamma),$$

więc też

$$\tau_i(p_n \triangleleft g_n) = \tau_i(p_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n \cdot g_n)$$

oraz

$$\tau_i(\tilde{p}) = \tau_i(p \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})) = \tau_i(p) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}) = (x, \gamma) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}) = (x, \gamma \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n \triangleleft g_n) = \gamma \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}).$$

Wobec ciągłości operacji grupowych wyprowadzamy stąd wniosek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n^{-1} \cdot (\gamma_n \cdot g_n)) = \gamma^{-1} \cdot (\gamma \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})) = \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}),$$

który na mocy Stw. 140 przesądza o słuszności dowodzonej tezy.  $\square$

**COROLLARIUM 11.** *Przyjmijmy zapis Def. 132 i niechaj  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  będzie wiązką główną,  $M$  zaś – przestrzenią topologiczną z działaniem (lewostronnym)  $\lambda : G \times M \rightarrow M$  grupy  $G$ . Rozważmy rozmaitość produktową  $\mathbb{P}_G \times M$ . Działanie grupy  $G$  dane wzorem*

$$(4.1.14) \quad \tilde{\lambda} : G \times (\mathbb{P}_G \times M) \rightarrow \mathbb{P}_G \times M : (g, (p, x)) \mapsto (r(p, g^{-1}), \lambda(g, m))$$

jest wolne i właściwe (w rozumieniu Def. 95).  $\blacksquare$

*Dowód:* Oczywisty.  $\square$

**STWIERDZENIE 202.** *Przyjmijmy zapis Def. 132 oraz Tw. 1.5.7 i niechaj  $G$  będzie grupą topologiczną (wzgl. Liego),  $H \subseteq G$  zaś – dowolną jej podgrupą domkniętą. Działanie podgrupy  $H$  na przestrzeni totalnej  $\mathbb{P}_G$  wiązki głównej  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  będące ograniczeniem (do  $H$ ) działania definiującego  $r$  jest swobodne oraz właściwe i określa na  $\mathbb{P}_G$  strukturę wiązki głównej*

$$(\mathbb{P}_G, \pi_{\mathbb{P}_G/H}, \mathbb{P}_G/H, H).$$

*Dowód:* Swobodny charakter działania  $H$  na  $\mathbb{P}_G$  jest konsekwencją takiego samego charakteru działania grupy strukturalnej  $G$  na  $\mathbb{P}_G$ , pozostaje zatem wykazać jego naturę właściwą. Niechaj ciągi  $p_n \in \mathbb{P}_G^{\mathbb{N}}$  i  $h_n \in H^{\mathbb{N}}$  spełniają warunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft h_n) = \tilde{p},$$

a wtedy – wobec właściwego charakteru działania  $G \supset H \ni h_n$  – istnieje podciąg  $h_{n_k} \in H^{\mathbb{N}}$  o własności

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{n_k} = h \in G.$$

Ponieważ jednak  $H$  jest domknięta, przeto koniecznie  $h \in H$ , co w świetle Stw. 140 oznacza właśnie, że działanie  $H$  jest właściwe. W takim jednak razie zbiór orbit  $\mathbb{P}_G/H$  niesie – na mocy Tw. 1.5.7 – strukturę rozmaitości gładkiej, względem której rzut kanoniczny  $\pi_{\mathbb{P}_G/H}$  jest surjektywną submersją, a że poziomice tegoż rzutu są orbitami działania  $H$  i mamy jednoznacznie określone odwzorowanie

$$\tilde{\phi}_{\mathbb{P}_G} : \mathbb{P}_G \times_{\mathbb{P}_G/H} \mathbb{P}_G \rightarrow H : (p_1, p_2) \mapsto \phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2),$$

które jest jawnie gładkie, przeto na gruncie Stw. 200 konstatujemy słuszność drugiej części tezy.  $\square$

**STWIERDZENIE 203.** *Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi klasy  $C^k$  wiązki głównej klasy  $C^k$  i jej trywializacjami lokalnymi (teżże klasy). W szczególności wiązka główna jest (globalnie) trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma globalne cięcie.*

■

Dowód: Cięciu lokalnemu  $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{P}_G$ ,  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(B)$  przyporządkowujemy trywializację (lokalną)

$$\tau_\sigma : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O} \times G : p \mapsto (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p))$$

o pożądanym własnościach, a więc odwracalną,

$$\tau_\sigma^{-1} : \mathcal{O} \times G \rightarrow \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) : (x, g) \mapsto \sigma(x) \triangleleft g,$$

i  $G$ -ekwiwariantną,

$$\begin{aligned} \tau_\sigma(p \triangleleft g) &\equiv (\pi_{\mathbb{P}_G}(p \triangleleft g), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p \triangleleft g), p \triangleleft g)) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p \triangleleft g)) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p) \cdot g) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p)) \triangleleft g \equiv \tau_\sigma(p) \triangleleft g. \end{aligned}$$

I odwrotnie, dowolnej trywializacji lokalnej  $\tau : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O} \times G$  przypisujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau : \mathcal{O} \rightarrow \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}) : x \mapsto \tau^{-1}(x, e).$$

Powyższe przyporządkowania są przy tym wzajem odwrotne, oto bowiem – z jednej strony –

$$\forall_{x \in \mathcal{O}} : \sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x, e) = \sigma(x) \triangleleft e = \sigma(x),$$

oraz – z drugiej strony –

$$\begin{aligned} \forall_{p \in \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O})} : \tau_{\sigma_\tau}(p) &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\sigma_\tau \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p)) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p)), \end{aligned}$$

a ponieważ

$$p \equiv \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p),$$

czyli

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \tau(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p)) \\ &= \tau \circ \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), p)), \end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau}(p) = \tau(p).$$

□

UWAGA 47. Należy podkreślić, że ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia nie stosuje się do wiązek włóknistych w ogólności. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że każda wiązka wektorowa ma globalne cięcie zerowe  $\mathbf{0}_V$ , patrz: Def. 130.

$\bar{\quad}$

W następnej kolejności zajmiemy się wyznaczeniem wygodnego opisu lokalnego morfizmów wiązek głównych pokrywających dyfeomorfizm identycznościowy na bazie (pośród których z czasem rozpoznamy tzw. „transformacje symetrii cechowania”).

**TWIERDZENIE 4.1.3.** *Przyjmijmy zapis Def. 132. Dowolny morfizm  $(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G)$  wiązek głównych  $(P_G^\alpha, B, G, \pi_{P_G^\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o odnośnych trywializacjach lokalnych  $\tau_i^\alpha : \pi_{P_G^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times G$  (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ ) i odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$ , opisany przez diagram przemienny*

$$\begin{array}{ccc} P_G^1 & \xrightarrow{\Phi} & P_G^2 \\ \pi_{P_G^1} \downarrow & & \downarrow \pi_{P_G^2} \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę  $\{h_i\}_{i \in I}$  odwzorowań (lokalnie) klasy  $C^k$

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G, \quad i \in I$$

o własności

$$(4.1.15) \quad \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g_{ij}^2(x) = h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x) \cdot h_j(x)^{-1}.$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu. ■

*Dowód:* Postać odwzorowania  $\Phi$  jest w pełni określona przez wartości, jakie przyjmuje ono w punktach  $\tau_i^{-1}(x, e)$ ,  $x \in \mathcal{O}_i$ ,  $i \in I$ , gdyż z racji  $G$ -ekwiwariantności  $\tau_i$  oraz  $\Phi$  zachodzi

$$\forall_{(x,g) \in \mathcal{O}_i \times G} : \Phi(\tau_i^{-1}(x, g)) = \Phi(\tau_i^{-1}(x, e) \triangleleft_{(1)} g) = \Phi(\tau_i^{-1}(x, e)) \triangleleft_{(2)} g.$$

Zdefiniujmy zatem

$$h_i := \text{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1}(\cdot, e) : \mathcal{O}_i \rightarrow G,$$

czyli poprzez formułę

$$(4.1.16) \quad \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)) := \Phi(\tau_i^{1-1}(x, e)).$$

Wprost na mocy definicji odwzorowań przejścia w  $P_G^2$  możemy zapisać

$$\tau_j^{2-1}(x, h_j(x)) = \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x)),$$

a zarazem, przywoławszy  $G$ -ekwiwariantność  $\tau_i^\alpha$  oraz  $\Phi$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau_j^{2-1}(x, h_j(x)) &= \Phi(\tau_j^{1-1}(x, e)) = \Phi(\tau_i^{1-1}(x, g_{ij}^1(x))) = \Phi(\tau_i^{1-1}(x, e)) \triangleleft_{(2)} g_{ij}^1(x) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, h_i(x)) \triangleleft_{(2)} g_{ij}^1(x) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x)). \end{aligned}$$

Niechaj teraz  $(P_G^\alpha, B, G, \pi_{P_G^\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą wiązkami głównymi o trywializacjach lokalnych  $\tau_i^\alpha : \pi_{P_G^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$  i odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$ . Niech też  $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G$ ,  $i \in I$  będzie rodziną odwzorowań jak w tezie dowodzonego stwierdzenia. Możemy wówczas zdefiniować odwzorowania lokalne

$$\Phi_i : \pi_{P_G^1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \pi_{P_G^2}^{-1}(\mathcal{O}_i) : \tau_i^{1-1}(x, g) \mapsto \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g),$$

które wobec tożsamości, słusznej dla dowolnych  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  i  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_j(\tau_i^{1-1}(x, g)) &= \Phi_j(\tau_j^{1-1}(x, g_{ji}^1(x) \cdot g)) = \tau_j^{2-1}(x, h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x) \cdot g) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x) \cdot g) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g) \\ &= \Phi_i(\tau_i^{1-1}(x, g)), \end{aligned}$$

zadają odwzorowanie globalnie gładkie

$$\Phi : P_G^1 \rightarrow P_G^2$$

o własności

$$\Phi \upharpoonright_{\pi_{P_G^1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i.$$

Odwzorowanie to jest jawnie  $G$ -ekwiwariantne (wszak  $\wp$  jest przemienne z  $\ell$ ) i zachowuje włókna.  $\square$

STWIERDZENIE 204. *Przyjmijmy zapis Def. 132. Podkategoria*

$$\mathbf{GrpBun}_G(B | \text{id}_B)$$

*kategorii  $\mathbf{GrpBun}_G(B)$  o tej samej klasie obiektów i o morfizmach o identycznościowej składowej na bazie,  $f = \text{id}_B$  (i na grupie strukturalnej,  $\varphi = \text{id}_G$ ) jest grupoidem.*

■

*Dowód:* W świetle Tw. 4.1.3 wystarczy poprowadzić rozważania w opisie lokalnym, w którym dowolny morfizm  $\Phi : P_G^1 \rightarrow P_G^2$  pokrywający identyczność na bazie  $B$  jest reprezentowany przez rodzinę odwzorowań  $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G$ ,  $i \in I$ . Na mocy tego samego stwierdzenia rodzina odwzorowań  $\{\tilde{h}_i := \text{Inv} \circ h_i\}_{i \in I}$  określa morfizm  $P_G^2 \rightarrow P_G^1$ , który w oczywisty sposób jest odwrotnością  $\Phi$ .  $\square$

Wiązki główne odgrywają fundamentalną rolę w opisie (lokalnych) symetrii teorii fizycznych, o czym więcej powiemy już wkrótce. Stanowią też punkt wyjścia do nowych istotnych fizykalnie konstrukcji, którymi zajmiemy się obecnie.

UWAGA 48. Okazuje się, że wiązkę wektorową  $V$  można odtworzyć (z dokładnością do izomorfizmu) z odnośnej wiązki reperów  $F_{GL}V$  przez pewną sprytną konstrukcję, którą przedstawiamy poniżej. Jak wynika wprost z definicji  $F_{GL}V$ , jest dobrze określone odwzorowanie (punktowej) ewaluacji

$$\widehat{ev} : F_{GL}V \times \mathbb{K}^{xn} \rightarrow V : ((\beta_x, x), v) \mapsto (\beta_x(v), x).$$

Odwzorowanie to jest stałe na orbitach działania

$$\begin{aligned} \tilde{ev} &: GL(n; \mathbb{K}) \times (F_{GL}V \times \mathbb{K}^{xn}) \rightarrow F_{GL}V \times \mathbb{K}^{xn} \\ &: (\chi, ((\beta_x, x), v)) \mapsto ((\beta_x \circ \chi^{-1}, x), \chi(v)), \end{aligned}$$

zapisanego w terminach naturalnego (definiującego) działania grupy  $GL(n; \mathbb{K})$  na  $\mathbb{K}^{\times n}$ ,

$$\text{ev} : GL(n; \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n} : (\chi, v) \longmapsto \chi(v).$$

To oznacza, że  $\widehat{\text{ev}}$  zstępuje na rozmaiłość ilorazową  $(F_{GL} \mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/GL(n; \mathbb{K})$  zdefiniowaną w odniesieniu do działania  $\widehat{\text{ev}}$ , której istnienie zapewnia Cor. 11. Innymi słowy,  $\widehat{\text{ev}}$  zadaje odwzorowanie

$$(4.1.18) \quad \begin{aligned} [\widehat{\text{ev}}] & : (F_{GL} \mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/GL(n; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{V} \\ & : [((\beta_x, x), v)] \longmapsto \widehat{\text{ev}}((\beta_x, x), v) \equiv (\beta_x(v), x) \end{aligned}$$

które domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{V} \\ & \nearrow \widehat{\text{ev}} & \uparrow [\widehat{\text{ev}}] \\ F_{GL} \mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n} & \xrightarrow{\pi_{(F_{GL} \mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/GL(n; \mathbb{K})}} & (F_{GL} \mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/GL(n; \mathbb{K}) \end{array}$$

Zapisany na nim rzut kanoniczny  $\pi_{(F_{GL} \mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times n})/GL(n; \mathbb{K})}$  na przestrzeń orbit jest – w świetle Tw. 1.5.7 – gładką submersją, przeto wprost na mocy Stw. 117 gładkość (klasy  $C^k$ ) odwzorowania indukowanego  $[\widehat{\text{ev}}]$  jest implikowana przez gładkość (tej samej klasy) odwzorowania  $\widehat{\text{ev}}$ . Przy tym bez trudu przekonujemy się, że w ograniczeniu do dowolnego włókna  $(\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \times \mathbb{K}^{\times n})/GL(n; \mathbb{K})$ ,  $x \in B$  odwzorowanie to jest bijekcją. Istotnie, wybierzmy dowolną bazę  $\beta_x^* \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$  i rozważmy zbiór  $S := \{ ((\beta_x^*, x), v) \mid v \in \mathbb{K}^{\times n} \}$ . Orbity dwóch dowolnych jego elementów,  $GL(n; \mathbb{K}) \triangleright ((\beta_x^*, x), v_1)$  i  $GL(n; \mathbb{K}) \triangleright ((\beta_x^*, x), v_2)$ , albo pokrywają się ze sobą, albo też są rozłączne, a to w konsekwencji Stw. 2. Pierwsza z tych ewentualności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} & ((\beta_x^*, x), v_2) \in GL(n; \mathbb{K}) \\ \iff & \exists \chi \in GL(n; \mathbb{K}) : ((\beta_x^*, x), v_2) = ((\beta_x^* \circ \chi^{-1}, x), \chi(v_2)) \\ \iff & (\chi = \text{id}_{\mathbb{K}^{\times n}} \quad \wedge \quad v_2 = v_1), \end{aligned}$$

zatem nietożsame elementy zbioru  $S$  należą do rozłącznych orbit. Moc włókna  $(\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \times \mathbb{K}^{\times n})/GL(n; \mathbb{K})$  jest więc nie mniejsza niż moc włókna  $\mathbb{V}_x$ . Pozostaje sprawdzić injektywność  $[\widehat{\text{ev}}]$ . W tym celu rozważmy konsekwencje równości

$$\beta_x^1(v_1) \equiv [\widehat{\text{ev}}]([((\beta_x^1, x), v_1)]) = [\widehat{\text{ev}}]([((\beta_x^2, x), v_2)]) \equiv \beta_x^2(v_2).$$

Ta jest równoważna równości

$$v_2 = \beta_x^{2-1} \circ \beta_x^1(v_1),$$

która implikuje relację

$$v_2 \in GL(n; \mathbb{K}) \triangleright v_1,$$

a dalej także

$$((\beta_x^2, x), v_2) = ((\beta_x^1 \circ (\beta_x^{2-1} \circ \beta_x^1)^{-1}, \beta_x^{2-1} \circ \beta_x^1(v_1)) \in GL(n; \mathbb{K}) \triangleright ((\beta_x^1, x), v_1).$$



Na tej podstawie wyciągamy wnioski o równości argumentów,

$$[\left((\beta_x^1, x), v_1\right)] = [\left((\beta_x^2, x), v_2\right)],$$

która przesądza o iniektywności  $[\tilde{e}\tilde{v}]$ . Mamy zatem do czynienia z  $(C^k)$ -gładką bijekcją. Skonstruujemy jej gładką odwrotność. W tym celu użyjemy lokalnych trywializacji  $\tau_i : \pi_{\text{FGLV}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \text{GL}(n; \mathbb{K})$ ,  $i \in I$  wiązki reperów stowarzyszonych z pokryciem  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , które w odwołaniu do tezy Stw. 203 pozwalają nam skonstruować lokalnie gładkie cięcia

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \text{FGLV} : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, e) \equiv (\beta_i(x), x) \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x^n}, \mathbb{V}_x) \times \{x\},$$

przy czym pole baz  $\beta_i$  zależy (lokalnie)  $C^k$ -gładko od punktu w  $\mathcal{O}_i \subset B$ . Łatwo przekonujemy się, że odwzorowanie zadane lokalnie (nad  $\mathcal{O}_i \ni x$ ) w postaci

$$\Sigma_i \upharpoonright_{\mathbb{V}_x} : \mathbb{V}_x \longrightarrow (\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{x^n}, \mathbb{V}_x) \times \mathbb{K}^{x^n}) / \text{GL}(n; \mathbb{K}) : \nu \longmapsto [\left((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu)\right)]$$

jest (lokalną) odwrotnością  $[\tilde{e}\tilde{v}]$ , oto bowiem

$$\begin{aligned} \Sigma_i \circ [\tilde{e}\tilde{v}](\left((\beta_x, x), v\right)) &= \Sigma_i \circ \beta_x(v) = [\left((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v)\right)] \\ &\equiv [\left((\beta_x \circ (\beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x)^{-1}, x), \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v)\right)] = [\left((\beta_x, x), v\right)] \end{aligned}$$

a nadto – dla  $\nu \in \mathbb{V}_x$  –

$$[\tilde{e}\tilde{v}] \circ \Sigma_i(\nu) = [\tilde{e}\tilde{v}](\left((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu)\right)) = \beta_i(x)(\beta_i(x)^{-1}(\nu)) = \nu.$$

I wreszcie na koniec upewniamy się, że odwzorowania lokalne  $\Sigma_i$  stanowią ograniczenia (do odnośnych elementów  $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$  pokrycia przestrzeni totalnej  $\mathbb{V}$ ) odwzorowania globalnie gładkiego. W tym celu musimy najpierw ustalić regułę transformacyjną dla lokalnych wyborów bazy  $\beta_i$ . Niechaj  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{GL}(n; \mathbb{K})$  będą odwzorowaniami przejścia dla wybranych wcześniej trywializacji lokalnych  $\mathbb{V}$ , tj. – dla dowolnych  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  oraz  $\chi \in \text{GL}(n; \mathbb{K})$  –

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, \chi) = (x, g_{ij}(x) \circ \chi).$$

Obliczamy wówczas

$$\begin{aligned} (\beta_j(x), x) &\equiv \tau_j^{-1}(x, \text{id}_{\mathbb{K}^{x^n}}) = \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)) = \tau_i^{-1}(x, \text{id}_{\mathbb{K}^{x^n}}) \triangleleft g_{ij}(x) \\ &= (\beta_i(x), x) \triangleleft g_{ij}(x) \equiv (\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x), \end{aligned}$$

czyli

$$\beta_j(x) = \beta_i(x) \circ g_{ij}(x),$$

a stąd już łatwo wyprowadzamy – dla dowolnego punktu  $\nu \in \mathbb{V}_x$ ,  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  – pożądaną tożsamość

$$\begin{aligned} \Sigma_j(\nu) &= [\left((\beta_j(x), x), \beta_j(x)^{-1}(\nu)\right)] = [\left((\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x), g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(\nu)\right)] \\ &= [\left((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu)\right)] \equiv \Sigma_i(\nu). \end{aligned}$$

Dotychczasowe nasze rozważania pozwalają nam wypisać wprost trywializacje lokalne

$$\begin{aligned} [\tau_i] &: (\pi_{\text{FGLV}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{x^n}) / \text{GL}(n; \mathbb{K}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{x^n} \\ &: [\left((\beta_x, x), v\right)] \longmapsto (x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v)) \end{aligned}$$

o odwrotnościach

$$\begin{aligned} [\tau_i]^{-1} &: \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{n \times n} \twoheadrightarrow (\pi_{\mathbb{F}_{\text{GLV}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{n \times n})/\text{GL}(n; \mathbb{K}) \\ &: (x, v) \mapsto [((\beta_i(x), x), v)] \end{aligned}$$

i tym samym zidentyfikować strukturę wiązki włóknistej na rozmaitości ilorazowej  $(\mathbb{F}_{\text{GLV}} \times \mathbb{K}^{n \times n})/\text{GL}(n; \mathbb{K})$ , przy czym jest jasne, że jest to wiązka wektorowa nad  $B$  o ciele bazowym  $\mathbb{K}$ . Odnotujmy na marginesie, że odwzorowania przejścia dla wypisanych tu trywializacji przyjmują – w dowolnym punkcie  $(x, v) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{K}^{n \times n}$  – postać

$$\begin{aligned} [\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}(x, v) &= [\tau_i]([((\beta_j(x), x), v)]) = (x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_j(x)(v)) \\ &= (x, g_{ij}(x)(v)), \end{aligned}$$

identyczną jak w przypadku  $\mathbb{V}$ . Wobec swojej oczywistej  $\mathbb{K}$ -liniowości odwzorowanie  $[\widehat{e\mathbb{V}}]$  jawi się nam jako izomorfizm wiązek wektorowych

$$[\widehat{e\mathbb{V}}] : (\mathbb{F}_{\text{GLV}} \times \mathbb{K}^{n \times n})/\text{GL}(n; \mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}.$$

$\overline{\lambda}$

#### 4. Wiązki stowarzyszone

DEFINICJA 134. Przyjmijmy zapis Def. 132 i niechaj  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  będzie wiązką główną (klasy  $C^k$ ),  $M$  zaś – rozmaitością z  $(C^k)$ -gładkim działaniem (lewostronnym)  $\lambda : G \times M \rightarrow M$  grupy Liego  $G$ . **Wiązka stowarzyszona z  $\mathbb{P}_G$  poprzez  $\lambda$  klasy  $C^k$**  to wiązka włóknista (też klasy)

$$(\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M, B, M, \pi_{\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna  $\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M \equiv (\mathbb{P}_G \times M)/G$  będąca rozmaitością ilorazową określoną – według schematu opisanego w Cor. 11 (na gruncie Tw. 1.5.7) i w użytym tam zapisie – przez działanie (4.1.14);
- rzut na bazę

$$\pi_{\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M} : \mathbb{P}_G \times_{\lambda} M \rightarrow B : [(p, m)] \mapsto \pi_{\mathbb{P}_G}(p).$$

Przy tym trywializacje lokalne  $\tau_i : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$  wiązki głównej  $\mathbb{P}_G$  stowarzyszone z pokryciem  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$  indukują trywializacje lokalne

$$\widetilde{\tau}_i : \pi_{\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times M : [(p, m)] \mapsto (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda_{\text{pr}_2 \circ \tau_i(p)}(m)),$$

o odwzorowaniach przejścia

$$\widetilde{\tau}_i \circ \widetilde{\tau}_j^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times M \supset : (x, m) \mapsto (x, \lambda_{g_{ij}(x)}(m)).$$

Ustaliwszy (dowolnie) punkt  $x \in B$ , wybierzmy (także dowolnie)  $p_* \in (\mathbb{P}_G)_x$ . Dyfeomorfizmy

$$[p_*]_{\lambda} : M \xrightarrow{\cong} (\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M)_x : m \mapsto [(p_*, m)],$$

o odwrotnościach

$$[p_*]_{\lambda}^{-1} : (\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M)_x \xrightarrow{\cong} M : [(p, m)] \mapsto \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)}(m)$$

i oczywistej własności

$$(4.1.19) \quad \forall_{g \in G} : [p_* \triangleleft g]_\lambda = [p_*]_\lambda \circ \lambda_g,$$

noszą miano **izomorfizmów modelujących włókna**. Indukują one **izomorfizmy transportu włókna**

$$\begin{aligned} [p_2, p_1]_\lambda \equiv [p_2]_\lambda \circ [p_1]_\lambda^{-1} & : (\mathbb{P}_G \times_\lambda M)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p_1)} \xrightarrow{\cong} (\mathbb{P}_G \times_\lambda M)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p_2)} \\ & : [(p, m)] \mapsto [(p_2, \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p)}(m))] \end{aligned}$$

określone dla dowolnej pary  $(p_1, p_2) \in \mathbb{P}_G$ .

Dla dowolnej pary  $(\mathbb{P}_G \times_{\lambda_\alpha} M_\alpha, B, M_\alpha, \pi_{\mathbb{P}_G \times_{\lambda_\alpha} M_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  wiązek stowarzyszonych z tą samą wiązką główną  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  określamy także **niezmiennik wiązek stowarzyszonych** jako morfizm wiązek włóknistych

$$(\Phi, \text{id}_B) : \mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathbb{P}_G \times_{\lambda_2} M_2$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny, wypisany dla dowolnej pary punktów  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_G$ ,

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p_1)} & \xrightarrow{[p_2, p_1]_{\lambda_1}} & (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p_2)} \\ \downarrow \Phi \upharpoonright_{(\mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p_1)}} & & \downarrow \Phi \upharpoonright_{(\mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p_2)}} \\ (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_2} M_2)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p_1)} & \xrightarrow{[p_2, p_1]_{\lambda_2}} & (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_2} M_2)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p_2)} \end{array} .$$

▲

**UWAGA 49.** Istnienie struktury rozmierności (klasy  $C^k$ ) na przestrzeni orbit  $\mathbb{P}_G \times_\lambda M$  działania  $\tilde{\lambda}$  jest bezpośrednią konsekwencją Tw. 1.5.7, na którego przywołanie w powyższym kontekście pozwala Cor. 11. Przy tym gładkość rzutu na bazę  $\pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}$  wynika tu wprost ze Stw. 117, kedy zauważyć, że rzut ten domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow \pi_{\mathbb{P}_G} \circ \text{pr}_1 & \uparrow \pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M} \\ \mathbb{P}_G \times M & \xrightarrow{\pi_{(\mathbb{P}_G \times M)/G}} & \mathbb{P}_G \times_\lambda M \end{array} ,$$

w którym  $\pi_{(\mathbb{P}_G \times M)/G}$  jest surjektywną submersją (na mocy tegoż Tw. 1.5.7), a  $\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \text{pr}_1$  jest jawnie  $(C^k)$ -gładkie. Jako że to ostatnie odwzorowanie także jest submersją, przeto własność tę ma  $\pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}$ , o czym przekonuje tożsamość zapisana przez obraz powyższego diagramu względem funktora stycznego.

Przejdziemy do zbadania trywializacji lokalnych, zaczynając od sprawdzenia sensowności ich definicji. Musimy w tym celu pokazać, że wartość przyjmowana przez odwozowanie  $\tilde{\tau}_i$  na klasie  $[(p, m)]$  nie zależy od wyboru reprezentanta tej ostatniej. Obliczamy przeto

$$(\pi_{\mathbb{P}_G}(p \triangleleft g), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p \triangleleft g), \lambda(g^{-1}, m))) = (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g, \lambda(g^{-1}, m)))$$

$$= (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g \cdot g^{-1}, m)) = (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p), m)).$$

Ponadto ponieważ odwzorowania

$$\mathcal{T}_i : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M \longrightarrow \mathcal{O}_i \times M : (p, m) \longmapsto (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda_{\text{pr}_2 \circ \tau_i(p)}(m)), \quad i \in \{1, 2\}$$

są jawnie gładkie, a przy tym pozostają z  $\tilde{\tau}_i$  w relacji opisywanej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O}_i \times M \\ & \nearrow \mathcal{T}_i & \uparrow \tilde{\tau}_i \\ \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M & \xrightarrow{\pi_{(\mathbb{P}_G \times M)/G}} & \pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \end{array},$$

w którym rzut kanoniczny  $\pi_{(\mathbb{P}_G \times M)/G}$  jest – wprost na mocy Tw. 1.5.7 i Cor. 11 – gładki (klasy  $C^k$ ), przeto w świetle Stw. 117 także odwzorowania  $\tilde{\tau}_i$  są gładkie (tej samej klasy  $C^k$ ). Gładkość (także lokalna) ich odwrotności

$$\tilde{\tau}_i^{-1} : \mathcal{O}_i \times M \longrightarrow \pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) : (x, m) \longmapsto [(\tau_i^{-1}(x, e), m)]$$

nie budzi wątpliwości. We wszystkich dotychczasowych rozważaniach zakładamy *implicite* sensowność definicji odwzorowań  $\tilde{\tau}_i$  i  $\tilde{\tau}_i^{-1}$ , która wymaga odrębnej weryfikacji – ta usprawiedliwia *a posteriori* dokonaną przez nas identyfikację włókna typowego

$$\pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}^{-1}(\{ \pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}([ (p, m) ]) \}) \cong M, \quad [(p, m)] \in \mathbb{P}_G \times_\lambda M$$

rekonstruowanej tu wiązki włóknistej. Bez trudu dowiedzimy pożądaných tożsamości: oto więc dla  $(x, m) \in \mathcal{O}_i \times M$  zachodzi

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_i^{-1}(x, m) &= \tilde{\tau}_i([(\tau_i^{-1}(x, e), m)]) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \tau_i^{-1}(x, e), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x, e), m)) = (x, \lambda(e, m)) = (x, m), \end{aligned}$$

a dla  $[(p, m)] \in \mathbb{P}_G \times_\lambda M$ ,  $p = \tau_i^{-1}(x, g)$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i^{-1} \circ \tilde{\tau}_i([(p, m)]) &= \tilde{\tau}_i^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p), m)) \\ &= [(\tau_i^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p), m))] = [(\tau_i^{-1}(x, e), \lambda(g, m))] \\ &= [(\tau_i^{-1}(x, e) \triangleleft g, m)] = [(\tau_i^{-1}(x, g), m)] \equiv [(p, m)]. \end{aligned}$$

Wreszcie też na koniec obliczamy

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(x, m) &\equiv \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \tau_j^{-1}(x, e), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_j(\tau_j^{-1}(x, e)), m)) \\ &= \tilde{\tau}_i([(\tau_j^{-1}(x, e), m)]) = (x, \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, e), m)) \\ &= (x, \lambda(\text{pr}_2(x, g_{ij}(x)), m)) \equiv (x, \lambda(g_{ij}(x), m)). \end{aligned}$$

Konstrukcja wiązki stowarzyszonej jest zatem dobrze określona.

Rozważmy następnie odwzorowanie

$$[p_*]_\lambda^{-1} : (\mathbb{P}_G \times_\lambda M)_x \longrightarrow M : [(p, m)] \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)}(m), \quad p_* \in (\mathbb{P}_G)_x.$$

Jest ono dobrze określone, gdyż dla dowolnego reprezentanta  $(\tilde{p}, \tilde{m}) \in [(p, m)]$  obliczamy

$$\lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, \tilde{p})}(\tilde{m}) = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)} \circ \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})}(\tilde{m}) = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)}(m).$$

Ponadto jest ono bijekcją, albowiem prawdziwą jest implikacja

$$\begin{aligned} [p_*]_{\lambda}^{-1}([(p_2, m_2)]) &= [p_*]_{\lambda}^{-1}([(p_1, m_1)]) \iff m_2 = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(m_1) \\ \implies [(p_2, m_2)] &= [(p_2, \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(m_1))] = [(p_2 \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1), m_1)] \\ &= [(p_1, m_1)], \end{aligned}$$

dowodząca iniektywności  $[p_*]_{\lambda}^{-1}$ , a do tego dowolny punkt  $m \in M$  możemy zapisać w postaci

$$m = [p_*]_{\lambda}^{-1}([(p_*, m)]),$$

co zaświadcza o surjektywności tego odwzorowania, wskazując w jawny sposób jego odwrotność

$$[p_*]_{\lambda} : M \longrightarrow (\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M)_x : m \longmapsto [(p_*, m)].$$

Istotnie, odwzorowanie  $[p_*]$  spełnia tożsamości

$$\begin{aligned} [p_*]_{\lambda}^{-1} \circ [p_*]_{\lambda}(m) &= \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_*)}(m) = \lambda_e(m) = m, \\ [p_*]_{\lambda} \circ [p_*]_{\lambda}^{-1}([(p, m)]) &= [(p_*, \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)}(m))] \equiv [(p_* \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p), m)] \\ &= [(p, m)]. \end{aligned}$$

Jest ono jawnie gładkie (klasy  $C^k$ ) jako superpozycja włożenia  $(p_*, \text{id}_M) : M \longrightarrow \{p_*\} \times M \subset (\mathbb{P}_G)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p_*)} \times M$  i surjektywnej submersji  $\pi_{(\mathbb{P}_G \times M)/G} : \mathbb{P}_G \times M \longrightarrow (\mathbb{P}_G \times M)/G$ . Gładkość  $[p_*]_{\lambda}^{-1}$  wynika natomiast z tezy Stw. 117 odniesionej do diagramu przemiennego

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow \lambda(\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_{F_1}), p_{F_2}) & \uparrow [p_*]_{\lambda}^{-1} \\ (\mathbb{P}_G)_x \times M & \xrightarrow{\pi_{(\mathbb{P}_G \times G)/G} \uparrow (\mathbb{P}_G)_x \times M} & (\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M)_x \end{array}$$

o submersyjnej surjekcji na krawędzi poziomej. Konstrukcja dyfeomorfizmu  $[p_*]_{\lambda}^{-1}$  stanowi zatem niezależny (od wcześniejszej konstrukcji trywializacji lokalnych) dowód słuszności przedłożonej przez nas identyfikacji włókna typowego wiązki stowarzyszonej.

$\bar{\lambda}$

**STWIERDZENIE 205.** *Przyjmijmy zapis Def. 132. Wiązki stowarzyszone z daną wiązką główną  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  (klasy  $C^k$ ) wraz z odnośnymi niezmiennikami wiązek stowarzyszonych tworzą kategorię wiązek stowarzyszonych z wiązką główną  $\mathbb{P}_G$ , którą będziemy oznaczać symbolem*

$$\text{AssBun}^{(k)}(\mathbb{P}_G).$$

*Kategoria ta jest kanonicznie równoważna kategorii  $\mathbf{Man}_G^{(k)}$  rozmiatości z (lewostronnym) działaniem gładkim (klasy  $C^k$ ) opisanej w Def. 93.* ■

Dowód: Pierwsza część tezy stanowi ledwie wskazanie klasy morfizmów przez nas rozpatrywanych i jako taka nie wymaga odrębnego dowodu (niezmienniki wiązek można w oczywisty sposób składać, a ponadto morfizm identycznościowy jest – rzecz jasna – niezmiennikiem wiązek). Także wzajem jednoznaczna odpowiedniość między obiektami kategorii  $\mathbf{AssBun}^{(k)}(\mathbb{P}_G)$  i  $G$ -rozmiatościami jest oczywista. Jedynym zatem, co wymaga sprawdzenia, jest stosowna bijektywna odpowiedniość między niezmiennikami wiązek stowarzyszonych i odwzorowaniami  $G$ -ekwiwariantnymi.

Niechaj  $(\Phi, \text{id}_B) : \mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathbb{P}_G \times_{\lambda_2} M_2$  będzie niezmiennikiem wiązek, a wtedy możemy zdefiniować – dla pewnego (dowolnego) punktu  $p \in \mathbb{P}_G$  – odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\chi[\Phi] := [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p]_{\lambda_1} : M_1 \xrightarrow{\cong} (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \longrightarrow (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_2} M_2)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \xrightarrow{\cong} M_2,$$

które wobec definiującej własności  $\Phi$ ,

$$\Phi \circ [p_2]_{\lambda_1} \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1} = [p_2]_{\lambda_2} \circ [p_1]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi,$$

nie zależy od wyboru punktu  $p$  użytego w jego definicji.  $G$ -ekwiwariantność tak określonych odwzorowań,

$$\chi[\Phi] \in \text{Hom}_G(M_1, M_2),$$

wynika wprost z bezpośredniego rachunku, odwołującego się do Równ. (4.1.19) i przeprowadzonego poniżej dla dowolnych  $(p, g) \in \mathbb{P}_G \times G$ ,

$$\begin{aligned} \chi[\Phi] \circ \lambda_{1g} &\equiv [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ ([p]_{\lambda_1} \circ \lambda_{1g}) = [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} \\ &\equiv ([p \triangleleft g]_{\lambda_2} \circ \lambda_{2g^{-1}})^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} = \lambda_{2g} \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} \\ &= \lambda_{2g} \circ [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p]_{\lambda_1} \equiv \lambda_{2g} \circ \chi[\Phi]. \end{aligned}$$

I odwrotnie, z każdym odwzorowaniem  $\chi \in \text{Hom}_G(M_1, M_2)$  możemy stowarzyszyć odwzorowanie (gładkie)

$$\begin{aligned} \Phi[\chi]^{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} := [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} & : (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \longrightarrow (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_2)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \\ & : [(p, m)] \longmapsto [(p, \chi(m))], \end{aligned}$$

zależne jedynie od rzutu  $p \in \mathbb{P}_G$  na bazę wiązki  $B$ ,

$$\begin{aligned} \Phi[\chi]^{\pi_{\mathbb{P}_G}(p \triangleleft g)} &= [p \triangleleft g]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ (\lambda_{2g} \circ \chi \circ \lambda_{1g^{-1}}) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \\ &= [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ (\lambda_{1g} \circ \lambda_{1g^{-1}}) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \equiv \Phi[\chi]^{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)}, \end{aligned}$$

i z tej racji określające niezmiennik wiązek dany wzorem

$$\Phi[\chi] : \mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathbb{P}_G \times_{\lambda_2} M_2 : [(p, m)] \longmapsto \Phi[\chi]^{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)}([(p, m)]).$$

Istotnie, obliczamy

$$\begin{aligned} \Phi[\chi] \circ [p_2, p_1]_{\lambda_1} &\equiv ([p_2]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_2]_{\lambda_1}^{-1}) \circ ([p_2]_{\lambda_1} \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}) = [p_2]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1} \\ &= ([p_2]_{\lambda_2} \circ [p_1]_{\lambda_2}^{-1}) \circ ([p_1]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}) \equiv [p_2, p_1]_{\lambda_2} \circ \Phi[\chi]. \end{aligned}$$

Skonstruowane tu przyporządkowania

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathbf{AssBun}^{(k)}(\mathbb{P}_G)}(\mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1, \mathbb{P}_G \times_{\lambda_2} M_2) \longrightarrow \text{Hom}_G(M_1, M_2) \\ & : (\Phi, \text{id}_B) \longmapsto \chi[\Phi] \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_G(M_1, M_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{AssBun}^{(k)}(\mathbb{P}_G)}(\mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1, \mathbb{P}_G \times_{\lambda_2} M_2) \\ & : \chi \longmapsto (\Phi[\chi], \text{id}_B) \end{aligned}$$

są wzajem odwrotne, a każde z nich jest funktorialne. Istotnie, w przypadku roz-  
maitości  $M$  z działaniem  $\lambda : G \times M \rightarrow M$  otrzymujemy, w dowolnym punkcie  
 $p \in \mathbb{P}_G$ , równość

$$\Phi[\text{id}_M]^{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} = [p]_{\lambda_2} \circ \text{id}_B \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = \text{id}_{(\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)}},$$

czyli też tożsamość

$$\Phi[\text{id}_M] = \text{id}_{\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M},$$

a nadto dla dowolnej pary odwzorowań  $G$ -ekwiwariantnych  $\chi_\alpha : M_\alpha \rightarrow M_{\alpha+1}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  pomiędzy  $G$ -rozmaitościami  $M_\beta$ ,  $\beta \in \{1, 2, 3\}$  z odnośnymi działaniami  $\lambda_\beta : G \times M_\beta \rightarrow M_\beta$  otrzymujemy diagram przemienny (dla dowolnego  $p \in \mathbb{P}_G$ )

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{[p]_{\lambda_1}} & (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \\ \downarrow \chi_1 & & \swarrow \Phi[\chi_1]^{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \\ M_2 & \xrightarrow{[p]_{\lambda_2}} & (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_2} M_2)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \\ \downarrow \chi_2 & & \searrow \Phi[\chi_2]^{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \\ M_3 & \xrightarrow{[p]_{\lambda_3}} & (\mathbb{P}_G \times_{\lambda_3} M_3)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \downarrow \Phi[\chi_2]^{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \circ \Phi[\chi_1]^{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)}, \\ \\ \end{array}$$

w którym przemiennosc górnego (wzgl. dolnego) trapezu wyraża definicję niezmiennika  $\Phi[\chi_1]$  (wzgl.  $\Phi[\chi_2]$ ), a przemiennosc lewego i prawego trójkąta jest zapisem definicji odnośnych superpozycji odwzorowań, a ponieważ zarazem skrajna prawa krawędź jest – wprost z definicji – tożsama z odwzorowaniem  $\Phi[\chi_2 \circ \chi_1]^{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)}$ , przeto – zgodnie z oczekiwaniami –

$$\Phi[\chi_2 \circ \chi_1] = \Phi[\chi_2] \circ \Phi[\chi_1].$$

Ten sam diagram przekonuje nas o funktorialności odwzorowania odwrotnego, jeśli tylko potraktować niezmienniki wiązek jako dane, a odwzorowania  $G$ -ekwiwariantne – jako przypisane tym ostatnim.  $\square$

PRZYKŁAD(Y) 39.

- (1) Wiązka wektorowa  $\mathbb{V}$  (rzędu  $n$ ) jest wiązką stowarzyszoną z wiązką (główną) reperów  $F_{GL}\mathbb{V}$  poprzez działanie definiujące (ewaluację),

$$\mathbb{V} \cong F_{GL}\mathbb{V} \times_{ev} \mathbb{K}^{n}.$$

- (2) **Wiązka dołączona**

$$(\text{Ad } P_G \equiv P_G \times_{\text{Ad}} G, B, G, \pi_{P_G \times_{\text{Ad}} G}).$$

- (3) Wiązka główna  $P_G$  może być zrealizowana jako wiązka stowarzyszona

$$(P_G \times_{\ell} G, B, G, \pi_{P_G \times_{\ell} G}).$$

Stosowny izomorfizm wiązek włóknistych to

$$\tilde{\tau} : P_G \times_{\ell} G \longrightarrow P_G : [(p, g)] \longmapsto p \triangleleft g,$$

przy czym jego gładkość wynika z tego, że domyka on diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow r & \uparrow \pi_{P_G \times_{\ell} G} \\ P_G \times G & \xrightarrow{\pi_{(P_G \times G)/G}} & P_G \times_{\ell} G \end{array}$$

w którym  $\pi_{(P_G \times G)/G}$  jest surjektywną submersją,  $r$  zaś – odwzorowaniem gładkim. Odwrotność  $\tilde{\tau}$  jest dana w (jawnie gładkiej) postaci

$$\tilde{\tau}^{-1} : P_G \longrightarrow P_G \times_{\ell} G : p \longmapsto [(p, e)].$$

Na wiązce stowarzyszonej  $P_G \times_{\ell} G$  jest określone działanie prawostronne grupy  $G$  w postaci

$$\tilde{r} : (P_G \times_{\ell} G) \times G \longrightarrow P_G \times_{\ell} G : ([(p, g)], h) \longmapsto [(p, g \cdot h)],$$

względem którego każde z włókien jest torsorem. Izomorfizm  $\tilde{\tau}$  jest  $G$ -ekwiwariantny,

$$\tilde{\tau} \circ \tilde{r}([(p, g)], h) = \tilde{\tau}([(p, g \cdot h)]) = p \triangleleft (g \cdot h) = (p \triangleleft g) \triangleleft h = r \circ \tilde{\tau}([(p, g)], h),$$

mamy zatem do czynienia z izomorfizmem wiązek głównych.

W poszukiwaniu automorfizmów wiązki stowarzyszonej  $P_G \times_{\ell} G$  zauważamy, że ze względu na przemienność działania regularnego lewostronnego  $\ell$  z działaniem regularnym prawostronnym  $\varrho : G \times G \longrightarrow G : (g, h) \longmapsto g \cdot h$  to ostatnie indukuje – na mocy Stw. 205, a dla dowolnego  $g \in G$  – niezmiennik wiązek

$$\Phi[r_g] : P_G \times_{\ell} G \circlearrowleft : [(p, h)] \longmapsto \Phi[r_g]^{\pi_{P_G}(p)}([(p, h)]),$$

przy czym

$$\begin{aligned} \Phi[r_g]^{\pi_{P_G}(p)}([(p, h)]) &= [p]_{P_G \times_{\ell} G} \circ r_g \circ [p]_{P_G \times_{\ell} G}^{-1}([(p, h)]) \\ &= [p]_{P_G \times_{\ell} G} \circ r_g \circ \ell_{\phi_{P_G}(p, p)}(h) = [p]_{P_G \times_{\ell} G} \circ r_g(h) \\ &= [p]_{P_G \times_{\ell} G}(h \cdot g) = [(p, h \cdot g)] \equiv \tilde{r}_g([(p, h)]), \end{aligned}$$

czyli

$$\Phi[r_g] \equiv \tilde{r}_g,$$



a ponieważ

$$[(p, h)] = [(p \triangleleft h, e)] \equiv \tilde{\tau}^{-1}(p \triangleleft h)$$

oraz

$$[(p, h \cdot g)] = [(p \triangleleft h \cdot g, e)] = [((p \triangleleft h) \triangleleft g, e)] = [(r_g(p \triangleleft h), e)] \equiv \tilde{\tau}^{-1} \circ r_g(p \triangleleft h),$$

zatem

$$\tilde{\tau} \circ \Phi[r_g] \circ \tilde{\tau}^{-1} = r_g.$$

W tym więc sensie automorfizmy  $\Phi[r_g]$  są indukowane przez  $r$ , a o tym ostatnim możemy myśleć jako o modelowym niezmienniku wiązek.

✓

**UWAGA 50.** Termin „wiązka dołączona” bywa używany w literaturze w odniesieniu do wiązki stowarzyszonej

$$(\text{ad } P_G \equiv P_G \times_{T_e \text{Ad } \mathfrak{g}} B, \mathfrak{g}, \pi_{P_G \times_{T_e \text{Ad } \mathfrak{g}}}),$$

o włóknie typowym tożsamym z algebrą Liego  $\mathfrak{g}$  grupy Liego  $G$ .

▭

**STWIERDZENIE 206.** *Przyjmijmy zapis Tw. 1.5.8 oraz Stw. 205 i niechaj  $G$  będzie grupą topologiczną (wzgl. Liego),  $H \subseteq G$  – dowolną jej podgrupą domkniętą,  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  zaś – wiązką główną. Rzut kanoniczny  $\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H$  indukuje niezmiennik wiązek stowarzyszonych*

$$\Phi[\pi_{G/H}] : P_G \times_{\ell} G \rightarrow P_G \times_{[\ell]} G/H,$$

który w połączeniu z kanonicznym izomorfizmem  $\tilde{\tau}$  z Przykł. 39 (3) określa morfizm wiązek

$$\phi_{\pi_{G/H}} := \Phi[\pi_{G/H}] \circ \tilde{\tau}^{-1} : P_G \rightarrow P_G \times_{[\ell]} G/H$$

zadający strukturę wiązki głównej

$$(P_G, P_G \times_{[\ell]} G/H, H, \phi_{\pi_{G/H}})$$

i indukujący izomorfizm wiązek

$$[\tilde{\tau}]^{-1} : P_G/H \xrightarrow{\cong} P_G \times_{[\ell]} G/H.$$

■

**Dowód:** Rzut kanoniczny  $\pi_{G/H}$  jest odwzorowaniem  $G$ -ekwiwariantnym,

$$\forall g, \tilde{g} \in G : \pi_{G/H} \circ \ell_{\tilde{g}}(g) = \pi_{G/H}(\tilde{g} \cdot g) = (\tilde{g} \cdot g)H \equiv [\ell]_{\tilde{g}}(gH) \equiv [\ell]_{\tilde{g}} \circ \pi_{G/H}(g),$$

zatem w świetle Stw. 205 indukuje niezmiennik wiązek stowarzyszonych jak w tezie dowodzonego stwierdzenia, a ten z kolei pozwala określić morfizm wiązek

$$\phi_{\pi_{G/H}} : P_G \rightarrow P_G \times_{[\ell]} G/H : p \mapsto \Phi[\pi_{G/H}]([(p, e)]),$$

który możemy przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \phi_{\pi_{G/H}}(p) &\equiv [p]_{[\ell]} \circ \pi_{G/H} \circ [p]_{[\ell]}^{-1}([(p, e)]) \\ &= [p]_{[\ell]} \circ \pi_{G/H}(\phi_{P_G}(p, p) \cdot e) = [p]_{[\ell]} \circ \pi_{G/H}(e) = [p]_{[\ell]}(H) = [(p, H)], \end{aligned}$$

a następnie poddać szczegółowej analizie. Jest on złożeniem surjektywnych submersji,

$$\phi_{\pi_{G/H}} = [\cdot]_{[\ell]} \circ \pi_{G/H} \circ [\cdot]_{[\ell]}^{-1} \circ \tilde{\iota}^{-1},$$

i jako taki sam jest surjektywną submersją, a przy tym jego poziomice są orbitami działania podgrupy  $H$ , oto bowiem dla dowolnych  $p_1, p_2 \in P_G$  zachodzą równoważności

$$\begin{aligned} \phi_{\pi_{G/H}}(p_2) = \phi_{\pi_{G/H}}(p_1) &\iff [(p_2, H)] = [(p_1, H)] \\ \iff \exists_{g \in G} : (p_2, H) = (p_1 \triangleleft g^{-1}, gH) &\iff \exists_{g \in H} : p_2 = p_1 \triangleleft g^{-1} \\ \iff p_2 \in p_1 \triangleleft H. \end{aligned}$$

Mamy też dla każdej pary  $(p_1, p_2) \in P_G \times_{P_G \times_{[\ell]} G/H} P_G$  relację  $p_2 = p_1 \triangleleft \phi_{P_G}(p_1, p_2)$ , zatem określone jednoznacznie przez warunek przynależności do wspólnej poziomicy  $\phi_{\pi_{G/H}}$  odwzorowanie

$$\tilde{\phi}_{P_G} : P_G \times_{P_G \times_{[\ell]} G/H} P_G \longrightarrow H : (p_1, p_2) \mapsto \phi_{P_G}(p_1, p_2)$$

jest jawnie gładkie. Możemy zatem przywołać Stw. 200, ażeby stwierdzić, że

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & P_G \\ & & \downarrow \phi_{\pi_{G/H}} \\ & & P_G \times_{[\ell]} G/H \end{array}$$

jest w istocie wiązką główną o grupie strukturalnej  $H$ . Na gruncie Stw. 117 zauważamy następnie, że wobec surjektywnej submersyjności rzutu  $\pi_{P_G/H}$  oraz gładkości  $\phi_{\pi_{G/H}}$  istnieje jedyne odwzorowanie

$$[\tilde{\iota}]^{-1} : P_G/H \longrightarrow P_G \times_{[\ell]} G/H$$

domykające diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & P_G \times_{[\ell]} G/H \\ & \nearrow \phi_{\pi_{G/H}} & \uparrow [\tilde{\iota}]^{-1} \\ P_G & \xrightarrow{\pi_{P_G/H}} & P_G/H \end{array} .$$

Odwracając rolami odwzorowania  $\pi_{P_G/H}$  i  $\phi_{\pi_{G/H}}$  (tj. w szczególności wykorzystując surjektywną submersyjność tego ostatniego), uzyskujemy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & P_G/H \\ & \nearrow \pi_{P_G/H} & \uparrow [\tilde{\iota}] \\ P_G & \xrightarrow{\phi_{\pi_{G/H}}} & P_G \times_{[\ell]} G/H \end{array} ,$$

którego istnienie przesądza o dyfeomorficznym charakterze  $[\tilde{\iota}]$ . Dyfeomorfizm ten zachowuje poziomice odnośnych surjektywnych submersji ( $\pi_{P_G/H}$  i  $\phi_{\pi_{G/H}}$ ), oto bowiem dla dowolnego punktu  $p \in P_G$  spełnione są równości

$$\begin{aligned} \pi_{P_G \times_{[\ell]} G/H} \circ [\tilde{\iota}]^{-1}(p \triangleleft H) &\equiv \pi_{P_G \times_{[\ell]} G/H} \circ [\tilde{\iota}]^{-1} \circ \pi_{P_G/H}(p) = \pi_{P_G \times_{[\ell]} G/H} \circ \phi_{\pi_{P_G/H}}(p) \\ &= \pi_{P_G \times_{[\ell]} G/H} \circ \Phi[\pi_{P_G/H}] \circ \tilde{\iota}^{-1}(p) = \pi_{P_G \times_{[\ell]} G/H}([\tilde{\iota}(p, H)]) \\ &\equiv \pi_{P_G}(p), \end{aligned}$$

możemy go przeto użyć do wyindukowania na  $P_G/H$  struktury wiązki włóknistej, względem której  $[\tilde{\iota}]$  jest (tautologicznie) izomorfizmem wiązek włóknistych.  $\square$

**STWIERDZENIE 207.** *Przyjmijmy zapis Def. 134, Tw. 1.5.8 oraz Przykł. 7 (4) i niechaj  $H_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą podgrupami domkniętymi grupy topologicznej (wzgl. Liego)  $G$  wzajem sprzężonymi, tj. takimi, dla których istnieje element  $g_{21} \in G$  o własności*

$$H_2 = \text{Ad}_{g_{21}}(H_1),$$

i niech  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  będzie wiązką główną. Dyfeomorfizm  $G$ -rozmaitości

$$[\wp_{21}] : G/H_1 \xrightarrow{\cong} G/H_2 : gH_1 \mapsto (g \cdot g_{21}^{-1})H_2$$

indukuje izomorfizm wiązek stowarzyszonych

$$\Phi[\wp_{21}] : P_G \times_{[\ell]} G/H_1 \xrightarrow{\cong} P_G \times_{[\ell]} G/H_2,$$

który rozszerza się do izomorfizmu wiązek głównych

$$\begin{aligned} (r_{g_{21}^{-1}}, \Phi[\wp_{21}], \text{Ad}_{g_{21}}) : (P_G, P_G \times_{[\ell]} G/H_1, H_1, \phi_{\pi_{P_G/H_1}}) \\ \xrightarrow{\cong} (P_G, P_G \times_{[\ell]} G/H_2, H_2, \phi_{\pi_{P_G/H_2}}), \end{aligned}$$

tym samym domykając diagram przemienny

$$\begin{array}{ccccc} & & G & \xrightarrow{\tilde{\iota} \circ [\cdot]_{[\ell]}} & P_G & \xleftarrow{\quad} & H_2 \\ & \nearrow \wp_{g_{21}^{-1}} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_{g_{21}^{-1}} \\ G & \xleftarrow{[\cdot]_{[\ell]}^{-1} \circ \tilde{\iota}^{-1}} & P_G & \xleftarrow{r_{g_{21}^{-1}}} & P_G & \xleftarrow{\quad} & H_1 \\ & \downarrow \pi_{G/H_2} & \downarrow & & \downarrow \phi_{\pi_{G/H_2}} & & \\ & G/H_2 & \xrightarrow{[\cdot]_{[\ell]}} & P_G \times_{[\ell]} G/H_2 & & & \\ \downarrow \pi_{G/H_1} & \nearrow [\wp_{21}] & \downarrow \phi_{\pi_{G/H_1}} & \nearrow \Phi[\wp_{21}] & & & \\ G/H_1 & \xleftarrow{[\cdot]_{[\ell]}^{-1}} & P_G \times_{[\ell]} G/H_1 & \xrightarrow{\quad} & P_G \times_{[\ell]} G/H_2 & \xrightarrow{\pi_{P_G \times_{[\ell]} G/H_2}} & B \\ & & \downarrow \pi_{P_G \times_{[\ell]} G/H_1} & & \downarrow & & \\ & & B & & B & & \end{array}$$

■

Dowód: Dyfeomorfizm  $[\wp_{21}]$  jest dobrze określony, oto bowiem dla dowolnego  $h \in H_1$  zachodzi

$$(g \cdot h \cdot g_{21}^{-1})H_2 = (g \cdot g_{21} \cdot \text{Ad}_{g_{21}}(h))H_2 = (g \cdot g_{21}^{-1})H_2,$$

a nadto – jawnie G-niezmienniczy, wyznacza zatem odwracalny niezmiennik, czyli izomorfizm wiązek stowarzyszonych

$$\Phi[\wp_{21}] : P_G \times_{[\ell]} G/H_1 \xrightarrow{\cong} P_G \times_{[\ell]} G/H_2 : [(p, gH_1)] \mapsto [(p, (g \cdot g_{21}^{-1})H_2)],$$

który – jak łatwo widać – jest pokrywany przez odwzorowanie  $r_{g_{21}^{-1}}$ , oto bowiem dla dowolnego  $p \in P_G$  mamy równość

$$\begin{aligned} \phi_{\pi_{G/H_2}} \circ r_{g_{21}^{-1}}(p) &\equiv \phi_{\pi_{G/H_2}}(p \triangleleft g_{21}^{-1}) = [(p \triangleleft g_{21}^{-1}, H_2)] = [(p, g_{21}^{-1}H_2)] \\ &\equiv \Phi[\wp_{21}]([(p, H_1)]) = \Phi[\wp_{21}] \circ \phi_{\pi_{G/H_1}}(p). \end{aligned}$$

Ekwiwariantność  $r_{g_{21}^{-1}}$  względem działania grup  $H_1 \ni h_1$  i  $H_2$ ,

$$r_{g_{21}^{-1}}(p \triangleleft h_1) = p \triangleleft (h_1 \cdot g_{21}^{-1}) \equiv p \triangleleft (g_{21}^{-1} \cdot \text{Ad}_{g_{21}}(h_1)) \equiv r_{g_{21}^{-1}}(p) \triangleleft \text{Ad}_{g_{21}}(h_1),$$

pozwala ostatecznie zidentyfikować  $(r_{g_{21}^{-1}}, \Phi[\wp_{21}], \text{Ad}_{g_{21}})$  jako izomorfizm wiązek głównych. Wreszcie na koniec sprawdzamy przemienność poddiagramów zawierających oba wierzchołki G. Jest więc, nad dowolnym punktem  $p \in P_G$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} \circ [p]_{\ell} \circ \wp_{g_{21}^{-1}} \circ [p]_{\ell}^{-1} \circ \tilde{\tau}^{-1}(p) &= \tilde{\tau} \circ [p]_{\ell} \circ \wp_{g_{21}^{-1}} \circ [p]_{\ell}^{-1}([(p, e)]) = \tilde{\tau} \circ [p]_{\ell} \circ \wp_{g_{21}^{-1}}(e) \\ &= \tilde{\tau} \circ [p]_{\ell}(g_{21}^{-1}) = \tilde{\tau}([(p, g_{21}^{-1})]) = p \triangleleft g_{21}^{-1} \equiv r_{g_{21}^{-1}}(p), \end{aligned}$$

a ponadto, dla dowolnego elementu  $g \in G$ ,

$$\pi_{G/H_2} \circ \wp_{g_{21}^{-1}}(g) = \pi_{G/H_2}(g \cdot g_{21}^{-1}) = (g \cdot g_{21}^{-1})H_2 \equiv [\wp_{g_{21}^{-1}}](gH_1) \equiv [\wp_{g_{21}^{-1}}] \circ \pi_{G/H_1}(g).$$

□

**STWIERDZENIE 208.** *Przyjmijmy zapis Def. 134 i Przykł. 39 (2). Istnieje bijekcja*

$$\Gamma(P_G \times_{\lambda} M) \cong \text{Hom}_G(P_G, M),$$

w której zapisie  $\text{Hom}_G(P_G, M)$  jest zbiorem odwzorowań G-ekwiwariantnych z Def. 93.

■

Dowód: Niechaj  $\sigma = [(\pi, \mu)] \in \Gamma(P_G \times_{\lambda} M)$  będzie cięciem globalnym określonym przez cięcia (lokalne)  $\pi \in \Gamma_{\text{loc}}(P_G)$  i  $\mu \in \Gamma_{\text{loc}}(B \times M)$ . Korzystając z odwzorowania ilorazowego i rzutu kanonicznego na bazę wiązki  $P_G$ , możemy zdefiniować odwzorowanie

$$\Phi_{\lambda}[\sigma] : P_G \longrightarrow M : p \longmapsto \lambda_{\phi_{P_G}(p, \pi \circ \pi_{P_G}(p))}(\mu \circ \pi_{P_G}(p)).$$

Bez trudu upewniamy się, że powyższa definicja ma sens, oto bowiem dla dowolnej pary  $(\pi', \mu') = (\pi \triangleleft \text{Inv} \circ \gamma, \gamma \triangleright \mu)$  wyznaczonej w oczywisty sposób przez  $\gamma \in \Gamma_{\text{loc}}(B \times G)$  otrzymujemy – w odwołaniu do aksjomatyki działania grupy na zbiorze – pożądaną równość

$$\begin{aligned} \lambda_{\phi_{P_G}(p, \pi' \circ \pi_{P_G}(p))}(\mu' \circ \pi_{P_G}(p)) &= \lambda_{\phi_{P_G}(p, \pi \circ \pi_{P_G}(p) \triangleleft \gamma \circ \pi_{P_G}(p)^{-1})}(\lambda_{\gamma \circ \pi_{P_G}(p)}(\mu \circ \pi_{P_G}(p))) \\ &= \lambda_{\phi_{P_G}(p, \pi \circ \pi_{P_G}(p)) \cdot \gamma \circ \pi_{P_G}(p)^{-1} \cdot \gamma \circ \pi_{P_G}(p)}(\mu \circ \pi_{P_G}(p)) \end{aligned}$$

$$= \lambda_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p, \pi \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p))}(\mu \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p)).$$

Jego G-ekwiwariantność wynika wprost z rachunku:

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda[\sigma] \circ r_g(p) &= \lambda_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p \triangleleft g, \pi \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p \triangleleft g))}(\mu \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p \triangleleft g)) \\ &= \lambda_{g^{-1} \cdot \phi_{\mathbf{P}_G}(p, \pi \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p))}(\mu \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p)) = \lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_\lambda[\sigma](p), \end{aligned}$$

przeprowadzonego dla dowolnych  $(p, g) \in \mathbf{P}_G \times \mathbf{G}$ , a używającego Stw. 199 oraz wspomnianej wcześniej aksjomatyki.

Ażeby skonstruować odwrotność powyższego przyporządkowania, ustalmy (dowolnie) pokrycie trywializujące  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  wiązki  $\mathbf{P}_G$ , a następnie dowolnemu odwzorowaniu G-ekwiwariantnemu  $f : \mathbf{P}_G \rightarrow M$  przyporządkujmy rodzinę cięć lokalnych

$$S_\lambda[f]_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbf{P}_G \times_\lambda M : x \mapsto [(\tau_i^{-1}(x, e), f \circ \tau_i^{-1}(x, e))], \quad i \in I.$$

Każde z nich jest (lokalnie) gładkie jako superpozycja odnośnych odwzorowań gładkich  $(\tau_i^{-1}(\cdot, e), f \circ \tau_i^{-1}(\cdot, e)) : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbf{P}_G \times M$  i surjektywnej submersji  $\pi_{(\mathbf{P}_G \times_\lambda M)/\mathbf{G}}$ . Z łatwością przekonujemy się, że cięcia te są ograniczeniami (do odnośnych zbiorów  $\mathcal{O}_i$ ) cięcia globalnego, stwierdzając, że z racji G-ekwiwariantności odwzorowań  $\tau_i$  i  $f$  w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} S_\lambda[f]_j(x) &= [(\tau_j^{-1}(x, e), f \circ \tau_j^{-1}(x, e))] = [(\tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)), f \circ \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)))] \\ &= [(\tau_i^{-1}(x, e) \triangleleft g_{ij}(x), f(\tau_i^{-1}(x, e) \triangleleft g_{ij}(x)))] \\ &= [(\tau_i^{-1}(x, e) \triangleleft g_{ij}(x), g_{ij}(x)^{-1} \triangleright f \circ \tau_i^{-1}(x, e))] \\ &= [(\tau_i^{-1}(x, e), f \circ \tau_i^{-1}(x, e))] \equiv S_\lambda[f]_i(x). \end{aligned}$$

Bezpośredni rachunek obu superpozycji:

$$\Phi_\lambda[S_\lambda[f]] : \mathbf{P}_G \rightarrow M : p \mapsto \lambda_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p, p)}(f(p)) = \lambda_e(f(p)) = f(p)$$

oraz

$$\begin{aligned} S_\lambda[\Phi_\lambda[[\pi, \mu]]] &: B \rightarrow \mathbf{P}_G \times_\lambda M \\ &: x \mapsto [(\tau_i^{-1}(x, e), \lambda_{\phi_{\mathbf{P}_G}(\tau_i^{-1}(x, e), \pi \circ \pi_{\mathbf{P}_G} \circ \tau_i^{-1}(x, e))}(\mu \circ \pi_{\mathbf{P}_G} \circ \tau_i^{-1}(x, e)))] \\ &\equiv [(\tau_i^{-1}(x, e), \lambda_{\phi_{\mathbf{P}_G}(\tau_i^{-1}(x, e), \pi(x))}(\mu(x)))] = [(\pi, \mu)](x) \end{aligned}$$

pokazuje dowodnie, że prawdziwe są tożsamości

$$\Phi_\lambda \circ S_\lambda = \text{id}_{\text{Hom}_G(\mathbf{P}_G, M)}, \quad S_\lambda \circ \Phi_\lambda = \text{id}_{\Gamma(\mathbf{P}_G \times_\lambda M)}.$$

□

**STWIERDZENIE 209.** *Przyjmijmy zapis Def. 134 oraz Przykł. 21 (1) i 39 (2). Istnieje kanoniczna struktura wiązki grup na  $\text{Ad } \mathbf{P}_G$ , lokalnie modelowana na strukturze grupy na włóknie typowym  $\mathbf{G}$ , tj. są określone ( $C^k$ -gładkie): łączna operacja binarna*

$$[M] : \text{Ad } \mathbf{P}_G \times_B \text{Ad } \mathbf{P}_G \rightarrow \text{Ad } \mathbf{P}_G$$

posiadająca element neutralny oraz operacja unarna

$$[\text{Inv}] : \text{Ad } \mathbf{P}_G \curvearrowright,$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty grupy (G1)-(G3) z Def. 5. Struktura ta indukuje kanonicznie strukturę grupy (Fréchet) na przestrzeni cięć  $\Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G)$  tej wiązki, mającą swą realizację na przestrzeni cięć  $\Gamma(\mathbf{P}_G \times_\lambda M)$  wiązki stowarzyszonej  $\mathbf{P}_G \times_\lambda M$  indukowaną przez odwzorowanie ( $C^k$ -gładkie)

$$[\lambda] : \text{Ad } \mathbf{P}_G \times_B (\mathbf{P}_G \times_\lambda M) \longrightarrow \mathbf{P}_G \times_\lambda M$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty (LDG1) i (LDG2) działania grupy  $G$  na rozmaiłości  $M$  z Def. 12 i modelowane lokalnie na  $\lambda$ . ■

Dowód: Rozważmy na wstępie operację binarną

$$\begin{aligned} [M] : \text{Ad } \mathbf{P}_G \times_B \text{Ad } \mathbf{P}_G &\longrightarrow \text{Ad } \mathbf{P}_G \\ &: \left( [(p_1, g_1)], [(p_2, g_2)] \right) \longmapsto \left[ (p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2)) \right], \end{aligned}$$

wraz z przyporządkowaniem – włókno po włóknie –

$$[\varepsilon]_{\pi_{\mathbf{P}_G}(p)} : \{\bullet\} \longrightarrow \text{Ad } \mathbf{P}_G : \bullet \longmapsto [(p, e)], \quad p \in \mathbf{P}_G$$

oraz operacją unarną

$$[\text{Inv}] : \text{Ad } \mathbf{P}_G \curvearrowright : [(p, g)] \longmapsto [(p, g^{-1})].$$

Zacniemy od sprawdzenia, że wszystkie trzy odwzorowania są dobrze określone. Niech zatem  $(p_3, g_3) \in [(p_1, g_1)]$ , tj.  $(p_3, g_3) = (p_1 \triangleleft g_{13}, \text{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1))$  oraz  $(p_4, g_4) \in [(p_2, g_2)]$ , tj.  $(p_4, g_4) = (p_2 \triangleleft g_{24}, \text{Ad}_{g_{24}^{-1}}(g_2))$ , gdzie dla skrót u oznaczyliśmy  $g_{ij} \equiv \phi_{\mathbf{P}_G}(p_i, p_j)$ ,  $(i, j) \in \{(1, 3), (2, 4)\}$ , a wówczas – na mocy Stw. 199 – otrzymujemy

$$\begin{aligned} &[(p_3, g_3 \cdot \text{Ad}_{g_{34}}(g_4))] = [(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(g_3 \cdot \text{Ad}_{g_{34}}(g_4)))] \\ &= [(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(\text{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1) \cdot \text{Ad}_{g_{34} \cdot g_{24}^{-1}}(g_2)))] = [(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{g_{13} \cdot g_{34} \cdot g_{42}}(g_2))] \\ &= [(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{g_{12}}(g_2))] \end{aligned}$$

oraz

$$[(p_3, g_3^{-1})] = [(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(g_3^{-1}))] = [(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(g_3)^{-1})] = [(p_1, g_1^{-1})],$$

a nadto stwierdzamy, że wartość odwzorowania  $[\varepsilon]_{\pi_{\mathbf{P}_G}(p)}$  nie zależy od wyboru punktu we włóknie nad  $\pi_{\mathbf{P}_G}(p)$ , oto bowiem dla dowolnego  $\tilde{p} = p \triangleleft \phi_{\mathbf{P}_G}(p, \tilde{p})$  dostajemy

$$[(\tilde{p}, e)] = [(p \triangleleft \phi_{\mathbf{P}_G}(p, \tilde{p}), e)] = [(p, \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p, \tilde{p})}(e))] = [(p, e)].$$

Dowód stwierdzenia, że powyższa struktura jest w istocie lokalnie modelowana na  $G$ , sprowadza się do wykazania, że izomorfizmy modelujące włókna wiązki dołączonoj,

$$[p_*]_{\text{Ad}} : (\text{Ad } \mathbf{P}_G)_x \longrightarrow G : [(p, g)] \longmapsto \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p, p)}(g), \quad x \in B,$$

są one homomorfizmami grup, co czynimy poniżej (dla dowolnej pary punktów  $(p_1, g_1), (p_2, g_2) \in \mathbf{P}_G \times G$  o własności  $p_1, p_2 \in (\mathbf{P}_G)_x$ , w odwołaniu do Stw. 199,

$$[p_*]_{\text{Ad}} \circ [M]([(p_1, g_1)], [(p_2, g_2)]) = [p_*]_{\text{Ad}}([(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2))])$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_1)}(g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2)) \\
&= \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_1)}(g_1) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_1) \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2) \\
&= \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_1)}(g_1) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_2)}(g_2) \\
&\equiv M([p_*]_{\text{Ad}}([p_1, g_1]), [p_*]_{\text{Ad}}([p_2, g_2])).
\end{aligned}$$

Pierwszym krokiem na drodze do zrekonstruowania działania włókno po włóknie grupy  $\Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G)$  na przestrzeni  $\Gamma(\mathbb{P}_G \times_\lambda M)$  jest następujące lewe działanie wiązki dołączonej na  $\mathbb{P}_G$ :

$$[r] \cdot : \text{Ad } \mathbb{P}_G \times_B \mathbb{P}_G \longrightarrow \mathbb{P}_G : \left( [(p, g)], \tilde{p} \right) \longmapsto r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p)}(g)}(\tilde{p}).$$

Jest ono w pełni jednoznacznie określone, oto bowiem dla dowolnego reprezentanta  $(p_2, g_2) \in [(p_1, g_1)]$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}
r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_2)}(g_2)}(\tilde{p}) &= r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_1) \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2)}(\tilde{p}) = r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_1)}(\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2))}(\tilde{p}) \\
&= r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_1)}(g_1)}(\tilde{p}).
\end{aligned}$$

O jego gładkości przesądza Stw. 117 – istotnie,  $[r] \cdot$  jest (jedynym) gładkim odwzorowaniem indukowanym przez stałe na poziomicach rzutu kanonicznego  $\pi_{(\mathbb{P}_G \times G)/G}$  odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\tilde{r} \cdot : (\mathbb{P}_G \times G) \times_B \mathbb{P}_G \longrightarrow \mathbb{P}_G : \left( (p, g), \tilde{p} \right) \longmapsto r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p)}(g)}(\tilde{p}).$$

Bez trudu przekonujemy się, że  $[r] \cdot$  ma własności analogiczne do własności definiujących (lewego) działania grupy: oto element neutralny działa trywialnie,

$$[r]_{[(p, e)]}(\tilde{p}) = r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p)}(e)}(\tilde{p}) = r_e(\tilde{p}) = \tilde{p},$$

a odwzorowanie  $[r] \cdot$  jest masyplikatywne w pierwszym argumencie, tj. dla dowolnej pary  $[(p_1, g_1)], [(p_2, g_2)] \in (\mathbb{P}_G)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p})}$  zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned}
&[r]_{[M]([(p_1, g_1)], [(p_2, g_2)])}(\tilde{p}) = r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_1)}(g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2))}(\tilde{p}) \\
&= r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_1)}(g_1) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_1) \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2)}(\tilde{p}) = r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_1)}(g_1) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_2)}(g_2)}(\tilde{p}) \\
&= r_{\text{Ad}_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_2)}(g_2^{-1})}(\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_1)}(g_1)) \circ \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_2)}(g_2)}(\tilde{p}) \\
&\equiv \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{p}, p_2) \cdot g_2^{-1} \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(g_1) \circ [r]_{[(p_2, g_2)]}(\tilde{p}),
\end{aligned}$$

którą wobec równości

$$\begin{aligned}
&\phi_{\mathbb{P}_G}([r]_{[(p_2, g_2)]}(\tilde{p}), p_1) = \phi_{\mathbb{P}_G}(r_{g_2 \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, \tilde{p})}(p_2), p_1) \\
&\equiv \phi_{\mathbb{P}_G}(r_{g_2 \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, \tilde{p})}(p_2), r_{g_2 \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, \tilde{p})} \cdot (g_2 \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, \tilde{p}))^{-1} \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)(p_2)) \\
&= (g_2 \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, \tilde{p}))^{-1} \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)
\end{aligned}$$

możemy przepisać w pożądanym postaci

$$[r]_{[M]([(p_1, g_1)], [(p_2, g_2)])}(\tilde{p}) = r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}([r]_{[(p_2, g_2)]}(\tilde{p}), p_1)}(g_1)}([r]_{[(p_2, g_2)]}(\tilde{p}))$$

$$\equiv [r]_{[(p_1, g_1)]} \circ [r]_{[(p_2, g_2)]}(\tilde{p}).$$

Należy przy tym podkreślić, że zdefiniowane tu działanie wiązki dołączonej jest przemienne z działaniem prawostronnym definiującym  $r$ . – w rzeczy samej, dla dowolnych  $[(p, g)] \in \text{Ad } \mathbf{P}_G$ ,  $h \in G$  i  $\tilde{p} \in (\mathbf{P}_G)_{\pi_{\mathbf{P}_G}(p)}$  stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} [r]_{[(p, g)]} \circ r_h(\tilde{p}) &= r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(r_h(\tilde{p}), p)}(g)}(r_h(\tilde{p})) = r_{g \cdot \phi_{\mathbf{P}_G}(p, r_h(\tilde{p}))}(p) \\ &= r_{\phi_{\mathbf{P}_G}(\tilde{p}, p) \cdot \phi_{\mathbf{P}_G}(p, r_h(\tilde{p}))}(r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(\tilde{p}, p)}(g)}(\tilde{p})) \\ &\equiv r_{\phi_{\mathbf{P}_G}(\tilde{p}, r_h(\tilde{p}))}([r]_{[(p, g)]}(\tilde{p})) = r_h \circ [r]_{[(p, g)]}(\tilde{p}). \end{aligned}$$

Działanie to możemy następnie podnieść, z zachowaniem wszystkich sprawdzonych powyżej jego pożądaných własności, z przestrzeni totalnej wiązki dołączonej do przestrzeni cięć (globalnych) tejże wiązki, wedle schematu

$$\Gamma[r]. : \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) \times \mathbf{P}_G \longrightarrow \mathbf{P}_G : (\sigma, p) \longmapsto [r]_{\sigma \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p)}(p).$$

Przestrzeń  $\Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G)$  (wyposażona w naturalną strukturę rozmaitości Frécheta) objawia się w roli nośnika struktury grupy (Frécheta) o operacjach grupowych

$$\Gamma[M] : \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) \times \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) \longrightarrow \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) : (\sigma_1 \sigma_2) \longmapsto [M] \circ (\sigma_1, \sigma_2),$$

$$\Gamma[\text{Inv}] : \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) \curvearrowright : \sigma \longmapsto [\text{Inv}] \circ \sigma,$$

$$\Gamma[\varepsilon] : \{\bullet\} \longrightarrow \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) : \bullet \longmapsto [(\sigma(\cdot), e)],$$

indukowanych w oczywisty sposób (punktowo) z odnośnych operacji na  $\text{Ad } \mathbf{P}_G$ , i zarazem – w roli podgrupy grupy automorfizmów wiązki głównej  $\mathbf{P}_G$  (nad identycznością na bazie), przy czym odwzorowanie  $\Gamma[r]_\sigma$  utożsamiamy z automorfizmem  $(\Gamma[r]_\sigma, \text{id}_G, \text{id}_B)$  w zapisie Def. 132. Używając tak rozumianego działania grupy cięć wiązki dołączonej na  $\mathbf{P}_G$ , możemy następnie w oczywisty sposób rozszerzyć działanie tejże grupy cięć do wiązki  $\mathbf{P}_G \times M$  nad wyjściową bazą  $B$  kładąc

$$\begin{aligned} \Gamma[\tilde{r}]. := \Gamma[r]. \times \text{id}_M & : \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) \times (\mathbf{P}_G \times M) \longrightarrow \mathbf{P}_G \times M \\ & : (\sigma, (p, m)) \longmapsto ([r]_{\sigma \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p)}(p), m). \end{aligned}$$

Własnością tego działania o kluczowym znaczeniu dla naszych dalszych rozważań jest jego przemienność z działaniem  $\tilde{\lambda}$  zdefiniowanym w (4.1.14), stanowiącym podstawę konstrukcji wiązki stowarzyszonej  $\mathbf{P}_G \times_\lambda M$ . Istotnie, dla dowolnych  $\sigma \equiv [(\pi, \gamma)] \in \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G)$ ,  $g \in G$  oraz  $(p, m) \in \mathbf{P}_G \times M$ , otrzymujemy – przywoławszy sprawdzoną uprzednio przemienność działań:  $[r]$ . i  $r$ . –

$$\begin{aligned} \Gamma[\tilde{r}]_\sigma \circ \tilde{\lambda}_g(p, m) &= ([r]_{\sigma \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(r_g(p))}(r_g(p)), \lambda_{g^{-1}}(m)) \\ &\equiv ([r]_{\sigma \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p)} \circ r_g(p), \lambda_{g^{-1}}(m)) = (r_g \circ [r]_{\sigma \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p)}(p), \ell_{g^{-1}}(m)) \\ &= \tilde{\lambda}_g \circ \Gamma[\tilde{r}]_\sigma(p, m). \end{aligned}$$

W konsekwencji tego faktu działanie indukowane  $\Gamma[\tilde{r}]$ . zstępuje na rozmaitość orbit  $(\mathbf{P}_G \times M)/G \equiv \mathbf{P}_G \times_\lambda M$ , tj. kanonicznie indukuje działanie lewostronne grupy  $\Gamma(\mathbf{P}_{\text{Ad}} \mathbf{G})$  na rozmaitości  $\mathbf{P}_G \times_\lambda M$  dane wzorem

$$\Gamma[\tilde{r}]]^\lambda : \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) \times \mathbf{P}_G \times_\lambda M \longrightarrow \mathbf{P}_G \times_\lambda M$$



$$: (\sigma, [(p, m)]) \mapsto [([r]_{\sigma \circ \pi_{P_G}(p)}(p), m)].$$

Dotychczasowa nasza analiza przekonuje, że odwzorowanie to jest dobrze określone i ma wszystkie własności działania (lewostronnego) grupy. W ostatnim kroku indukujemy przy jego użyciu postulowane w treści dowodzonego stwierdzenia działanie grupy  $\Gamma(\text{Ad } P_G)$  na przestrzeni cięć (globalnych) wiązki stowarzyszonej,

$$\Gamma[\Gamma[\tilde{r}]]^\lambda : \Gamma(\text{Ad } P_G) \times \Gamma(P_G \times_\lambda M) \longrightarrow \Gamma(P_G \times_\lambda M)$$

$$(4.1.20) \quad : (\sigma, [(\pi, \mu)]) \mapsto [([r]_{\sigma \circ \pi_{P_G} \circ \pi(\cdot)} \circ \pi(\cdot), \mu(\cdot))] \equiv [([r]_{\sigma(\cdot)} \circ \pi(\cdot), \mu(\cdot))].$$

To ostatnie w oczywisty sposób stanowi podniesienie do przestrzeni cięć odwzorowania

$$\begin{aligned} [\lambda] : \text{Ad } P_G \times_B (P_G \times_\lambda M) &\longrightarrow P_G \times_\lambda M \\ &: ((p_1, g_1), [(p_2, m_2)]) \mapsto [(p_2, \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_2, p_1)}(g_1)}(m_2))], \end{aligned}$$

którego określoność i mnożliwość w pierwszym argumencie jest bezpośrednią konsekwencją zweryfikowanych przez nas odnośnych własności działania  $\Gamma[\Gamma[\tilde{r}]]$ . To, że – zgodnie z tezą stwierdzenia – działanie  $[\lambda]$  jest lokalnie modelowane na  $\lambda$ , stwierdzamy, używając wskazanych wcześniej izomorfizmów  $[p_*]_{\text{Ad}}$  oraz  $[p_*]_\lambda$ . Wykonujemy zatem prosty rachunek:

$$\begin{aligned} &\lambda_{[p_*]_{\text{Ad}}}([p_*]_\lambda([p_*]_\lambda([p_2, m_2]))) = \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_2, p_1)}(g_1)} \circ \lambda_{\phi_{P_G}(p_2, p_1)}(m_2) \\ &= \lambda_{\phi_{P_G}(p_2, p_1) \cdot \text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_2, p_1)}(g_1)}(m_2) = \lambda_{\phi_{P_G}(p_2, p_1)}(\lambda_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_2, p_1)}(g_1)}(m_2)) \\ &\equiv [p_*]_\lambda([p_2, \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_2, p_1)}(g_1)}(m_2)]) \equiv [p_*]_\lambda \circ [\lambda]_{[(p_1, g_1)]}([p_2, m_2]). \end{aligned}$$

□

STWIERDZENIE 210. *Bijekcja*

$$\Gamma(\text{Ad } P_G) \cong \text{Hom}_G(P_G, G),$$

o której mówi Stw. 208, jest izomorfizmem między grupą cięć wiązki dołączonej, o strukturze opisanej w dowodzie Stw. 209, i grupą odwzorowań  $P_G$  w  $G$  ekwiwariantnych względem odnośnych działań (lewostronnych)  $r_{\text{Inv}(\cdot)}$  i  $\text{Ad}$ , o strukturze indukowanej według schematu opisanego w Przykł. 1 (4). ■

*Dowód:* W notacji dowodów obu stwierdzeń z tezy stwierdzenia dowodzonego sprawdzamy – dla dowolnej pary cięć  $\sigma_\alpha = [(\pi_\alpha, \gamma_\alpha)] \in \Gamma(\text{Ad } P_G)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  oraz punktu  $p \in P_G$  –

$$\begin{aligned} &\Phi_{\text{Ad}}[\Gamma[M](\sigma_1, \sigma_2)](p) \\ &= \text{Ad}_{\phi_{P_G}(p, \pi_1 \circ \pi_{P_G}(p))}(\gamma_1 \circ \pi_{P_G}(p)) \cdot \text{Ad}_{\phi_{P_G}(p, \pi_2 \circ \pi_{P_G}(p))}(\gamma_2 \circ \pi_{P_G}(p)) \\ &= \text{Ad}_{\phi_{P_G}(p, \pi_1 \circ \pi_{P_G}(p))}(\gamma_1 \circ \pi_{P_G}(p)) \\ &\quad \cdot \text{Ad}_{\phi_{P_G}(p, \pi_1 \circ \pi_{P_G}(p)) \cdot \phi_{P_G}(\pi_1 \circ \pi_{P_G}(p), \pi_2 \circ \pi_{P_G}(p))}(\gamma_2 \circ \pi_{P_G}(p)) \\ &= \text{Ad}_{\phi_{P_G}(p, \pi_1 \circ \pi_{P_G}(p))}(\gamma_1 \circ \pi_{P_G}(p)) \cdot \text{Ad}_{\phi_{P_G}(p, \pi_2 \circ \pi_{P_G}(p))}(\gamma_2 \circ \pi_{P_G}(p)) \end{aligned}$$

$$= M \circ (\Phi_{\text{Ad}}(\sigma_1), \Phi_{\text{Ad}}(\sigma_2))(p).$$

□

STWIERDZENIE 211. *Przyjmijmy zapis Stw. 208 i 209 oraz ich dowodów. Bijekcja  $\Phi_\lambda$  jest (lewostronnie) ekwiwariantna względem działań grupy  $\Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G)$ : działania  $\Gamma[\Gamma[\tilde{\tau}]]^\lambda$  na przestrzeni  $\Gamma(\mathbb{P}_G \times_\lambda M)$ , zdefiniowanego w Równ. (4.1.20), oraz naturalnego działania*

$$\begin{aligned} [\Phi_{\text{Ad}}\lambda]. & : \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G) \times \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, M) \longrightarrow \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, M) \\ & : (\gamma, \mu) \longmapsto \lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)}(\mu(\cdot)) \end{aligned}$$

na przestrzeni odwzorowań  $G$ -ekwiwariantnych  $\text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, M)$ , czyli działanie

$$\Phi_{\text{Ad}}\lambda. \equiv [\Phi_{\text{Ad}}\lambda]. \circ (\Phi_{\text{Ad}}^{-1} \times \text{id}_{\text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, M)})$$

grupy  $\text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, G)$  czyni przemiennym poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G) \times \Gamma(\mathbb{P}_G \times_\lambda M) & \xrightarrow{\Gamma[\Gamma[\tilde{\tau}]]^\lambda} & \Gamma(\mathbb{P}_G \times_\lambda M) \\ \Phi_{\text{Ad}} \times \Phi_\lambda \downarrow & & \downarrow \Phi_\lambda \\ \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, G) \times \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, M) & \xrightarrow{\Phi_{\text{Ad}}\lambda.} & \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, M) \end{array} .$$

■

*Dowód:* Przede wszystkim upewnimy się, że odwzorowanie  $\Phi_{\text{Ad}}\lambda.$  jest dobrze określone. W tym celu wybieramy dowolną parę  $(\gamma, \mu) \in \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, G) \times \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, M)$  i rozważamy wynik ewaluacji  $\Phi_{\text{Ad}}\lambda_\gamma(\mu)$  – musimy udowodnić, że ten jest  $G$ -ekwiwariantny, co czynimy w rachunku bezpośrednim, wykonanym dla dowolnych  $(p, g) \in \mathbb{P}_G \times G$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{Ad}}\lambda_\gamma \circ r_g^*(\mu)(p) & = \lambda_{\gamma \circ r_g(p)}(\mu \circ r_g(p)) = \lambda_{\text{Ad}_{g^{-1}}(\gamma(p))} \circ \lambda_{g^{-1}}(\mu(p)) \\ & = \lambda_{g^{-1}}(\lambda_{\gamma(p)}(\mu(p))) \equiv \lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_{\text{Ad}}\lambda_\gamma(\mu)(p). \end{aligned}$$

To, że odwzorowanie  $\Phi_{\text{Ad}}\lambda.$  spełnia aksjomatykę działania, jest oczywiste. Pozostaje zatem zweryfikować jego ekwiwariantność. Dla dowolnych  $\tilde{\sigma} = [(\tilde{\pi}, \tilde{\gamma})] \in \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G)$  i  $\sigma = [(\pi, \mu)] \in \Gamma(\mathbb{P}_G \times_\lambda M)$  oraz  $p \in \mathbb{P}_G$  obliczamy więc

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda[\Gamma[\Gamma[\tilde{\tau}]]^\lambda_{\tilde{\sigma}}(\sigma)](p) & = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \lambda_{\tilde{\sigma} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)}(\pi \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)))}(\mu \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \\ & = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(\pi \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\tilde{\gamma} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\pi \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)))}(\mu \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \\ & = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, r_{\tilde{\gamma} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{\pi} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), \pi \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\tilde{\pi} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\mu \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \\ & = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{\pi} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \cdot \tilde{\gamma} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p) \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{\pi} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), \pi \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\mu \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \\ & = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{\pi} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \cdot \tilde{\gamma} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p) \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(\tilde{\pi} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p), p)} \circ \ell_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \pi \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\mu \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \\ & = \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{\pi} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\tilde{\gamma} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\Phi_\lambda[\sigma](p)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi_{\text{Ad}} \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{\text{P}_G}(\cdot, \tilde{\pi} \circ \pi_{\text{P}_G}(\cdot))}(\tilde{\gamma} \circ \pi_{\text{P}_G}(\cdot))}(\Phi_\lambda[\sigma])(p) \\
&\equiv \Phi_{\text{Ad}} \lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\tilde{\sigma}]}(\Phi_\lambda[\sigma])(p),
\end{aligned}$$

co jest rezultatem pożądanym.  $\square$

**STWIERDZENIE 212.** *Przyjmijmy zapis Stw. 209 i jego dowodu. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup*

$$\begin{aligned}
\Gamma(\text{Ad P}_G) &\cong \{ (\Phi, \text{id}_G, f) \in \text{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_G(B)}(\text{P}_G) \mid f = \text{id}_B \} \\
&=: \text{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_G(B)}(\text{P}_G | B).
\end{aligned}$$

■

*Dowód:* Zacniemy od wskazania bijekcji między zbiorem  $\text{Hom}_G(\text{P}_G, G)$  a zbiorem  $\text{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_G(B)}(\text{P}_G | B)$ . Wybierzmy (dowolnie)  $\gamma \in \text{Hom}_G(\text{P}_G, G)$  i zdefiniujmy odwzorowanie

$$\Psi[\gamma] : \text{P}_G \curvearrowright : p \mapsto r_{\gamma(p)}(p).$$

Jest ono jawnie G-ekwiwariantne,

$$\begin{aligned}
\forall_{(p,g) \in \text{P}_G \times G} : \Psi[\gamma] \circ r_g(p) &\equiv r_{\gamma \circ r_g(p)}(r_g(p)) = r_g \circ r_{\text{Ad}_{g^{-1}}(\gamma(p))}(p) = r_{\gamma(p) \cdot g}(p) \\
&= r_g \circ \Psi[\gamma](p),
\end{aligned}$$

i zachowuje włókna, a zatem definiuje automorfizm

$$(\Psi[\gamma], \text{id}_G, \text{id}_B) \in \text{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_G(B)}(\text{P}_G | B).$$

Jest przy tym homomorfizmem grup, o czym przekonuje bezpośredni rachunek

$$\begin{aligned}
\Psi[\widetilde{M}(\gamma_1, \gamma_2)](p) &= r_{\gamma_1(p) \cdot \gamma_2(p)}(p) \equiv r_{\gamma_2(p) \cdot \text{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))}(p) \\
&= r_{\text{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))} \circ r_{\gamma_2(p)}(p) = r_{\gamma_1(p \triangleleft \gamma_2(p))} \circ r_{\gamma_2(p)}(p) \\
&\equiv \Psi[\gamma_1] \circ \Psi[\gamma_2](p),
\end{aligned}$$

przeprowadzony w notacji Przykł. 1 (4) dla dowolnych  $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Hom}_G(\text{P}_G, G)$ . Na tym etapie wystarczy przywołać Stw. 208, aby uzyskać homomorfizm grup

$$(\Psi[\cdot], \text{id}_G, \text{id}_B) \circ \Phi_{\text{Ad}} : \Gamma(\text{Ad P}_G) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_G(B)}(\text{P}_G | B).$$

Idąc w kierunku odwrotnym, przyporządkujmy dowolnemu automorfizmowi  $(\Phi, \text{id}_G, \text{id}_B) \in \text{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_G(B)}(\text{P}_G | B)$  odwzorowanie

$$\chi[(\Phi, \text{id}_G, \text{id}_B)] : \text{P}_G \longrightarrow G : p \mapsto \phi_{\text{P}_G}(p, \Phi(p)),$$

którego G-ekwiwariantności dowodzimy w odwołaniu do Stw. 199, a dla dowolnych  $(p, g) \in \text{P}_G \times G$ ,

$$\begin{aligned}
\chi[(\Phi, \text{id}_G, \text{id}_B)] \circ r_g(p) &\equiv \phi_{\text{P}_G}(r_g(p), \Phi \circ r_g(p)) = \phi_{\text{P}_G}(r_g(p), r_g \circ \Phi(p)) \\
&= \text{Ad}_{g^{-1}}(\phi_{\text{P}_G}(p, \Phi(p))) \equiv \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \chi[(\Phi, \text{id}_G, \text{id}_B)](p).
\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że otrzymane tym sposobem odwzorowanie

$$\chi : \text{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_G(B)}(\text{P}_G | B) \longrightarrow \text{Hom}_G(\text{P}_G, G)$$

jest homomorfizmem grup – w rzeczy samej, dla dowolnej pary automorfizmów  $(\Phi_\alpha, \text{id}_G, \text{id}_B) \in \text{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_G(B)}(\mathbb{P}_G | B)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  obliczamy

$$\begin{aligned} \chi[(\Phi_1, \text{id}_G, \text{id}_B) \circ (\Phi_2, \text{id}_G, \text{id}_B)](p) &= \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_1 \circ \Phi_2(p)) \\ &= \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_1(p)) \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(\Phi_1(p), \Phi_1 \circ \Phi_2(p)), \end{aligned}$$

ale też

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{P}_G}(\Phi_1(p), \Phi_1 \circ \Phi_2(p)) &= \phi_{\mathbb{P}_G}(\Phi_1(p), \Phi_1(p \triangleleft \Phi_P(p, \Phi_2(p)))) \\ &= \phi_{\mathbb{P}_G}(\Phi_1(p), \Phi_1(p) \triangleleft \Phi_P(p, \Phi_2(p))) = \Phi_P(p, \Phi_2(p)), \end{aligned}$$

przeto

$$\begin{aligned} \chi[(\Phi_1, \text{id}_G, \text{id}_B) \circ (\Phi_2, \text{id}_G, \text{id}_B)](p) &= \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_1(p)) \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_2(p)) \\ &\equiv \widetilde{M}(\chi[(\Phi_1, \text{id}_G, \text{id}_B)], \chi[(\Phi_2, \text{id}_G, \text{id}_B)])(p), \end{aligned}$$

zgodnie z oczekiwaniami. Ostatecznie otrzymujemy homomorfizm grup

$$S_{\text{Ad}} \circ \chi : \text{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_G(B)}(\mathbb{P}_G | B) \longrightarrow \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G).$$

Ażeby stwierdzić, że jest to odwrotność wskazanego wcześniej homomorfizmu  $\Psi \circ \Phi_{\text{Ad}}$ , wystarczy sprawdzić, że  $\chi$  jest odwrotnością automorfizmu  $(\Psi[\cdot], \text{id}_G, \text{id}_B)$ , co czynimy wprost licząc – dla dowolnych  $(p, g, x) \in \mathbb{P}_G \times G \times B$  –

$$\begin{aligned} (\Psi[\cdot], \text{id}_G, \text{id}_B) \circ \chi[(\Phi, \text{id}_G, \text{id}_B)](p, g, x) &= (r_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi(p))}(p), g, x) = (\Phi(p), g, x) \\ &\equiv (\Phi, \text{id}_G, \text{id}_B)(p, g, x) \end{aligned}$$

oraz

$$\chi \circ (\Psi[\cdot], \text{id}_G, \text{id}_B)[\gamma](p) = \phi_{\mathbb{P}_G}(p, r_{\gamma(p)}(p)) = \gamma(p).$$

□

**STWIERDZENIE 213.** *Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi (a zatem także trywializacjami lokalnymi) klasy  $C^k$  wiązki reperów wiązki wektorowej klasy  $C^k$  i trywializacjami lokalnymi wiązki wektorowej (teżże klasy).*

■

Dowód: Dowolne cięcie lokalne  $\sigma : \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}$ ,  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(B)$  pozwala zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{x^n} : v \longmapsto (\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)),$$

jawnie  $\mathbb{K}$ -liniowe i gładkie, o oczywistej odwrotności

$$\tau_\sigma^{-1} : \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{x^n} \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) : (x, V) \longmapsto \sigma(x)(V),$$

także gładkiej (i  $\mathbb{K}$ -liniowej). Własności te pozwalają zidentyfikować  $\tau_\sigma$  jako trywializację lokalną wiązki  $\mathbb{V}$  stowarzyszoną z cięciem lokalnym  $\sigma$  wiązki reperów.

Odwracając powyższe rozumowanie, dowolnej trywializacji lokalnej  $\tau : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \rightsquigarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{x^n}$  przyporządkowujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau : \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) : x \longmapsto \tau^{-1}(x, \cdot).$$

Bez trudu przekonujemy się, że skonstruowane tu przyporządkowania są wzajemnie odwrotne. Istotnie, stwierdzamy równość

$$\forall_{(x,V) \in \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{n \times n}} : \sigma_{\tau_\sigma}(x)(V) = \tau_\sigma^{-1}(x, V) = \sigma(x)(V),$$

a z niej wyprowadzamy tożsamość

$$\sigma_{\tau_\sigma} = \sigma.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \forall_{v \in \pi_V^{-1}(\mathcal{O})} : \tau_{\sigma_\tau}(v) &= (\pi_V(v), (\sigma_\tau \circ \pi_V)(v)^{-1}(v)) = (\pi_V(v), \tau^{-1}(\pi_V(v), \cdot)^{-1}(v)) \\ &\equiv \tau \circ \tau^{-1}(\pi_V(v), \tau^{-1}(\pi_V(v), \cdot)^{-1}(v)) = \tau(v), \end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau} = \tau.$$

□

**STWIERDZENIE 214.** *Dowolna rodzina trywializacji lokalnych wiązki reperów wiązki wektorowej indukuje rodzinę trywializacji lokalnych wiązki wektorowej (stowarzyszonych z tą samą rodziną podzbiorów otwartych ich wspólnej bazy) o tych samych odwzorowaniach przejścia. W szczególności każda redukcja wiązki reperów pociąga za sobą także redukcję wiązki wektorowej.*

■

*Dowód:* Niechaj  $(V, B, \mathbb{K}^{n \times n}, \pi_V)$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ),  $(F_{\text{GL}}V, B, \text{GL}_{\mathbb{K}}(n), \pi_{F_{\text{GL}}V})$  zaś – wiązką jej reperów i niech  $\tau_i : \pi_{F_{\text{GL}}V}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \text{GL}_{\mathbb{K}}(n)$ ,  $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}(B)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  będą dwiema trywializacjami lokalnymi drugiej z nich, o niepustym przecięciu dziedzin,  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ , nad którym są określone odwzorowania przejścia  $g_{12} : \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(n)$ . Z każdą z trywializacji stowarzyszamy cięcie lokalne wedle formuły podanej w dowodzie Stw. 203,

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \pi_{F_{\text{GL}}V}^{-1}(\mathcal{O}_i) \subset F_{\text{GL}}V : y \mapsto \tau_i^{-1}(y, \mathbf{1}_n),$$

a następnie używamy ich do skonstruowania odnośnych gładkich trywializacji lokalnych wiązki  $V$  zgodnie z przepisem sformułowanym w dowodzie Stw. 213,

$$\tau_{\sigma_i} : \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{n \times n} : v \mapsto (\pi_V(v), (\sigma_i \circ \pi_V)(v)^{-1}(v)), \quad i \in \{1, 2\}.$$

O tym, że są to trywializacje o postulowanych odwzorowaniach przejścia, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnych  $(y, V) \in \mathcal{O}_{12} \times \mathbb{K}^{n \times n}$ ,

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma_1} \circ \tau_{\sigma_2}^{-1}(y, V) &= \tau_{\sigma_1}(\sigma_2(y)(V)) \\ &= (\pi_V(\sigma_2(y)(V)), (\sigma_1 \circ \pi_V)(\sigma_2(y)(V))^{-1}(\sigma_2(y)(V))) \\ &= (y, \sigma_1(y)^{-1} \circ \sigma_2(y)(V)), \end{aligned}$$

który po uwzględnieniu ciągu równości

$$\begin{aligned} \sigma_2(y) &\equiv \tau_2^{-1}(y, \mathbf{1}_n) = \tau_1^{-1}(y, g_{12}(y)) = \tau_1^{-1}(y, \mathbf{1}_n) \triangleleft g_{12}(y) \equiv \tau_1^{-1}(y, \mathbf{1}_n) \circ g_{12}(y) \\ &\equiv \sigma_1(y) \circ g_{12}(y) \end{aligned}$$

odtwarza pożądaną wynik

$$\tau_{\sigma_1} \circ \tau_{\sigma_2}^{-1}(y, V) = (y, \sigma_1(y)^{-1} \circ \sigma_1(y) \circ g_{12}(y)(V)) \equiv (y, g_{12}(y)(V)).$$

□

DEFINICJA 135. Przyjmijmy zapis Def. 132, Tw. 1.4.24 oraz Przykł. 36 (4) i niechaj  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  będzie wiązką główną (klasy  $C^k$ ) o trywializacjach lokalnych  $\tau_i^{P_G} : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$  stowarzyszonych z pokryciem  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , a  $(E, B, F, \pi_E)$  – wiązką włóknistą (klasy  $C^k$ ) o trywializacjach lokalnych  $\tau_i^E : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times F$ ,  $i \in I$  stowarzyszonych z tym samym pokryciem  $\mathcal{O}$ , na której jest określone ( $C^k$ -)gładkie działanie (lewostronne)  $\Lambda : G \times E \rightarrow E$  grupy Liego  $G$  wyznaczające rodzinę automorfizmów  $\{(\Lambda_g, \text{id}_B)\}_{g \in G}$  teje wiązki modelowanych lokalnie na automorfizmach  $\{\lambda_g\}_{g \in G}$  włókna typowego w sposób opisany przez diagram przemienny

$$(4.1.21) \quad \begin{array}{ccc} G \times \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\Lambda} & \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \text{id}_G \times \tau_i^E \downarrow & & \downarrow \tau_i^E \\ G \times \mathcal{O}_i \times F & \xrightarrow{(\text{pr}_2, \lambda \circ \text{pr}_{1,3})} & \mathcal{O}_i \times F \end{array}$$

**Wiązka produktowa stowarzyszona z  $P_G$  poprzez  $\Lambda$ .** klasy  $C^k$  to wiązka włóknista (teje klasy)

$$(P_G^\Lambda E, B, F, \pi_{P_G^\Lambda E})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna  $P_G^\Lambda E \equiv (P_G \times_B E)/G$  będąca rozmaitością ilorazową określoną – według ogólnych zasad zapisanych w (dowodzie) Tw. 1.5.7 – przez działanie

$$\tilde{\Lambda} : G \times (P_G \times_B E) \rightarrow P_G \times_B E : (g, (p, \epsilon)) \mapsto (r_{g^{-1}}(p), \Lambda_g(\epsilon)),$$

indukowane na produkcie włóknistym wiązek  $P_G$  i  $E$  przez  $\Lambda$  i działanie definiujące  $r$  grupy  $G$  na  $P_G$ ;

- rzut na bazę

$$\pi_{P_G^\Lambda E} : P_G^\Lambda E \rightarrow B : [(p, \epsilon)] \mapsto \pi_{P_G}(p).$$

Przy tym trywializacje lokalne indukowane przez trywializacje składowych przyjmują postać

$$[\tau_i] : \pi_{P_G^\Lambda E}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times F : [(p, \epsilon)] \mapsto (\pi_{P_G}(p), \lambda_{\text{pr}_2 \circ \tau_i^{P_G}(p)}(\text{pr}_2 \circ \tau_i^E(m))),$$

a odnośnie odwzorowania przejścia są określone przez odwzorowanie

$$[\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times F \rightarrow \mathcal{O}_{ij} \times F : (x, f) \mapsto (x, \lambda_{g_{ij}^{P_G}(x)} \circ g_{ij}^E(x)(f)).$$

▲

UWAGA 51. Pierwszym elementem powyższej definicji, który wymaga weryfikacji, jest właściwy charakter działania  $\tilde{\Lambda}$ , stanowiący punkt wyjścia do rozważań nad strukturą zbioru orbit  $(P_G \times_B E)/G$ . Dowodzimy go w odwołaniu do Stw. 140. W tym celu ustalamy (dowolnie) podzbiór zwarty  $\mathcal{K} \subset (P_G \times_B E)^{\times 2}$ , a następnie

– ciąg  $(g, p, \epsilon) \in (G \times (P_G \times E))^{\mathbb{N}}$  o obrazie zawartym w  $\tilde{\Lambda}^{-1}(\mathcal{K})$ . Zwartość  $\mathcal{K}$  przesądza o istnieniu podciągu  $((p_n, \epsilon_n), (p_n \triangleleft g_n^{-1}, g_n \triangleright \epsilon_n))$  zbieżnego do

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ((p_{n_k}, \epsilon_{n_k}), (p_{n_k} \triangleleft g_{n_k}^{-1}, g_{n_k} \triangleright \epsilon_{n_k})) =: ((p, \epsilon), (\tilde{p}, \tilde{\epsilon})),$$

a ponieważ – wobec ciągłości i G-ekwiwariantności  $\tau_i^{P_G}$  – zachodzi

$$\begin{aligned} \pi_{P_G}(\tilde{p}) &\equiv \pi_{P_G}(\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k} \triangleleft g_{n_k}^{-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_{n_k} \triangleleft g_{n_k}^{-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_{n_k}) \\ &= \pi_{P_G}(\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k}) = \pi_{P_G}(p) \end{aligned}$$

i – analogicznie –

$$\pi_E(\tilde{\epsilon}) = \pi_E(\epsilon),$$

przeto

$$p, \tilde{p} \equiv p \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}) \in (P_G)_{\pi_{P_G}(p)}, \quad \epsilon, \tilde{\epsilon} \in E_{\pi_E(\epsilon)},$$

przy czym jeśli  $\mathcal{O}_i$  jest elementem pokrycia trywializującego zawierającym

$$\pi_{P_G}(\tilde{p}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_E(\epsilon_{n_k}) \equiv \pi_E(\tilde{\epsilon}),$$

to istnieje taki indeks  $N \in \mathbb{N}$ , dla którego spełniony jest warunek

$$\forall_{k \geq N} : (p_{n_k}, p_{n_k} \triangleleft g_{n_k}^{-1} \in \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \quad \wedge \quad \epsilon_{n_k}, g_{n_k} \triangleright \epsilon_{n_k} \in \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)).$$

Oznaczmy

$$[\tau_i](p_{n_k}, \epsilon_{n_k}) =: (x_{n_k}, \gamma_{n_k}, f_{n_k}), \quad k \geq N, \quad [\tau_i](p, \epsilon) =: (x, \gamma, f),$$

a wtedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k}, \gamma_{n_k}, f_{n_k}) = (x, \gamma, f)$$

i ponadto – z opisanych wcześniej przyczyn –

$$\begin{aligned} [\tau_i](\tilde{p}, \tilde{\epsilon}) &\equiv [\tau_i](\lim_{k \rightarrow \infty} (p_{n_k} \triangleleft g_{n_k}^{-1}), \lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k} \triangleright \epsilon_{n_k})) \\ &= (\lim_{k \rightarrow \infty} (\tau_i^{P_G}(p_{n_k} \triangleleft g_{n_k}^{-1}), \lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k} \triangleright \text{pr}_2 \circ \tau_i^E(\epsilon_{n_k}))) \\ &= (\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k}, \gamma_{n_k} \cdot g_{n_k}^{-1}), \lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k} \triangleright f_{n_k})), \end{aligned}$$

a skoro zarazem

$$\begin{aligned} [\tau_i](\tilde{p}, \tilde{\epsilon}) &= (\tau_i^{P_G}(\tilde{p}), \text{pr}_2 \circ \tau_i^E(\tilde{\epsilon})) = (\tau_i^{P_G}(p) \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}), \text{pr}_2 \circ \tau_i^E(\tilde{\epsilon})) \\ &= (x, \gamma \cdot \phi_{P_G}(p, \tilde{p}), \text{pr}_2 \circ \tau_i^E(\tilde{\epsilon})), \end{aligned}$$

to w szczególności otrzymujemy relację

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_{n_k} \cdot g_{n_k}^{-1}) = \gamma \cdot \phi_{P_G}(p, \tilde{p}).$$

Z tej ostatniej wyprowadzamy – wobec ciągłości operacji grupowych w  $G$  – pożą-dany wniosek o istnieniu granicy (pod)ciągu

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k} &\equiv \lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k} \cdot \gamma_{n_k}^{-1} \cdot \gamma_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_{n_k} \cdot g_{n_k}^{-1})^{-1} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{n_k} \\ &= (\lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_{n_k} \cdot g_{n_k}^{-1}))^{-1} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{n_k} = (\gamma \cdot \phi_{P_G}(p, \tilde{p}))^{-1} \cdot \gamma = \phi_{P_G}(\tilde{p}, p). \end{aligned}$$

Na podstawie powyższego rozumowania konstatujemy, że zbiór orbit  $(P_G \times_B E)/G$  w istocie niesie strukturę rozmierności różniczkowalnej, na którą submersywnie rzutuje się produkt  $P_G \times_B E$ .

W następnej kolejności weryfikujemy gładkość rzutu na bazę  $\pi_{P_G^\Delta E}$  w odwołaniu do Stw. 117, którego tezę odnosimy do diagramu przemiennego

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow \pi_{P_G} \circ \text{pr}_1 & \uparrow \pi_{P_G^\Delta E} \\ P_G \times_B E & \xrightarrow{\pi_{(P_G \times_B E)/G}} & P_G^\Delta E \end{array} .$$

Przy tym surjektywność i submersywność odwzorowań oznaczonych strzałkami z podwójnym grotem implikuje te same cechy rzutu  $\pi_{P_G^\Delta E}$ . To samo Stw. 117 zastosowane do diagramu przemiennego

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O}_i \times F \\ & \nearrow \text{pr}_{1,2} \circ \tau_i^{P_G \times_B E} & \uparrow [\tau_i] \\ \pi_{P_G \times_B E}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\pi_{(P_G \times_B E)/G} \uparrow \pi_{P_G \times_B E}^{-1}(\mathcal{O}_i)} & \pi_{P_G^\Delta E}^{-1}(\mathcal{O}_i) \end{array} ,$$

na którym  $\tau_i^{P_G \times_B E} : \pi_{P_G \times_B E}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G \times F$  jest trywializacją lokalną produktu włóknistego wiązek  $P_G$  i  $E$  opisaną w Przykł. 36 (4), przesądza o gładkości trywializacji lokalnej  $[\tau_i]$ .

Wreszcie na koniec przyjrzymy się bliżej odwzorowaniom przejścia

$$[g]_{ij}(\cdot) \equiv \lambda_{g_{ij}^{P_G}(\cdot)} \circ g_{ij}^E(\cdot) : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Diff}^k(F).$$

$G$ -ekwiwariantny charakter trywializacji lokalnych wiązki  $E$ , zapisany w Diag. 4.1.21, prowadzi do tożsamości – słusznej dla dowolnych  $\epsilon \in E$  oraz  $(g, x, f) \in G \times \mathcal{O}_i \times F$

$$\text{pr}_2 \circ \tau_i^E \circ \Lambda_g(\epsilon) = \lambda_g \circ \text{pr}_2 \circ \tau_i^E(\epsilon)$$

oraz – po uwzględnieniu odwracalności trywializacji lokalnych –

$$\Lambda_g \circ \tau_i^{E-1}(x, f) = \tau_i^{E-1}(x, \lambda_g(f)),$$

z których wyprowadzamy relację przemierności:

$$\begin{aligned} \lambda_g \circ g_{ij}^E(x)(f) &\equiv \lambda_g \circ \text{pr}_2 \circ \tau_i^E \circ \tau_j^{E-1}(x, f) = \text{pr}_2 \circ \tau_i^E \circ \Lambda_g \circ \tau_j^{E-1}(x, f) \\ &= \text{pr}_2 \circ \tau_i^E \circ \tau_j^{E-1}(x, \lambda_g(f)) = \text{pr}_2(x, g_{ij}^E(x) \circ \lambda_g(f)) \\ &\equiv g_{ij}^E(x) \circ \lambda_g(f). \end{aligned}$$

Ta pozwala nam ostatecznie sprawdzić – nad dowolnymi punktami  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  oraz  $y \in \mathcal{O}_{ijk}$  – warunek skośnej symetrii:

$$[g]_{ji}(x) = \lambda_{g_{ji}^{P_G}(x)} \circ g_{ji}^E(x) = g_{ji}^E(x) \circ \lambda_{g_{ji}^{P_G}(x)} = g_{ij}^E(x)^{-1} \circ \lambda_{g_{ij}^{P_G}(x)^{-1}}$$



$$= g_{ij}^E(x)^{-1} \circ \lambda_{g_{ij}^{\mathbb{P}_G}(x)}^{-1} = \left( \lambda_{g_{ij}^{\mathbb{P}_G}(x)} \circ g_{ij}^E(x) \right)^{-1} \equiv [g]_{ij}(x)^{-1}$$

oraz warunek 1-kocyklu

$$\begin{aligned} & [g]_{ij}(y) \circ [g]_{kj}(y)^{-1} \circ [g]_{ki}(x) \\ &= \lambda_{g_{ij}^{\mathbb{P}_G}(x)} \circ g_{ij}^E(x) \circ g_{kj}^E(x)^{-1} \circ \lambda_{g_{kj}^{\mathbb{P}_G}(x)}^{-1} \circ \lambda_{g_{ki}^{\mathbb{P}_G}(x)} \circ g_{ki}^E(x) \\ &= \lambda_{g_{ij}^{\mathbb{P}_G}(x)} \circ g_{ij}^E(x) \circ g_{kj}^E(x)^{-1} \circ \lambda_{g_{kj}^{\mathbb{P}_G}(x)^{-1}} \circ \lambda_{g_{ki}^{\mathbb{P}_G}(x)} \circ g_{ki}^E(x) \\ &= \lambda_{g_{ij}^{\mathbb{P}_G}(x)} \circ g_{ij}^E(x) \circ g_{kj}^E(x)^{-1} \circ g_{ki}^E(x) \circ \lambda_{g_{kj}^{\mathbb{P}_G}(x)^{-1}} \circ \lambda_{g_{ki}^{\mathbb{P}_G}(x)} \\ &= \lambda_{g_{ij}^{\mathbb{P}_G}(x)} \circ \text{id}_F \circ \lambda_{g_{kj}^{\mathbb{P}_G}(x)^{-1}} \circ \lambda_{g_{ki}^{\mathbb{P}_G}(x)} = \lambda_{g_{ij}^{\mathbb{P}_G}(x) \cdot g_{kj}^{\mathbb{P}_G}(x)^{-1} \cdot g_{ki}^{\mathbb{P}_G}(x)} = \lambda_{e_G} = \text{id}_F, \end{aligned}$$

których spełnienie potwierdza istnienie struktury wiązki włóknistej na rozmaitości orbit  $\mathbb{P}_G^\Lambda E$ .

$\overline{\wedge}$

STWIERDZENIE 215. *Przyjmijmy zapis Def. 135. Istnieje bijekcja*

$$\Gamma(\mathbb{P}_G^\Lambda E) \cong \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, E) \cap \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, E|B) \equiv \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, E|B)^G.$$

■

*Dowód:* Punktem wyjścia jest tutaj stosowna adaptacja konstrukcji przedstawionej w dowodzie Stw. 208. Oto więc wybrawszy pokrycie  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  współtrywializujące  $\mathbb{P}_G$  i  $E$  (więc i  $\mathbb{P}_G^\Lambda E$ ), rozważamy odwzorowania

$$\Phi_\Lambda^\times : \Gamma(\mathbb{P}_G^\Lambda E) \longrightarrow \mathbf{Map}(\mathbb{P}_G, E),$$

$$\Phi_\Lambda^\times[(\pi, \varepsilon)] : \mathbb{P}_G \longrightarrow E : p \longmapsto \Lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \pi \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\varepsilon \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))$$

oraz

$$S_\Lambda^\times : \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, E|B)^G \longrightarrow \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{P}_G^\Lambda E),$$

$$S_\Lambda^\times[\Phi]_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{P}_G^\Lambda E : x \longmapsto [(\tau_i^{\mathbb{P}_G^{-1}}(x, e), \Phi \circ \tau_i^{\mathbb{P}_G^{-1}}(x, e))], \quad i \in I.$$

Zauważmy, że odwzorowanie  $\Phi_\Lambda^\times[(\pi, \varepsilon)]$  jest w istocie morfizmem wiązek włóknistych pokrywającym identyczność we wspólnej bazie jego dziedziny i przeciwdziedziny, co pokazuje prosty rachunek:

$$\pi_E \circ \Phi_\Lambda^\times[(\pi, \varepsilon)](p) = \pi_E \circ \varepsilon \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p) = \text{id}_B \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p) = \pi_{\mathbb{P}_G}(p).$$

Podobnie przekonujemy się, że  $S_\Lambda^\times[\Phi]_i$  odwzorowuje punkt bazy we włókno wiązki  $\mathbb{P}_G^\Lambda E$  nad tymże punktem,

$$\pi_E \circ \Phi \circ \tau_i^{\mathbb{P}_G^{-1}}(x, e) = \pi_{\mathbb{P}_G} \tau_i^{\mathbb{P}_G^{-1}}(x, e) = x.$$

O określoności obu odwzorowań, jak również o G-ekwiwariantności  $\Phi_\Lambda^\times[(\pi, \varepsilon)]$  i istnieniu cięcia globalnego

$$S_\Lambda^\times[\Phi] : B \longrightarrow \mathbb{P}_G^\Lambda E, \quad S_\Lambda^\times[\Phi] \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} \equiv S_\Lambda^\times[\Phi]_i$$

przesądzają argumenty w pełni analogiczne do tych przedłożonych w rzeczonym dowodzie.  $\square$

STWIERDZENIE 216. *Przyjmijmy zapis Def. 135 i Stw. 209. Struktura grupy (Fréchet) na przestrzeni cięć  $\Gamma(\text{Ad } P_G)$  wiązki dołączonej ma swą realizację na przestrzeni cięć  $\Gamma(P_G^\Lambda E)$  wiązki produktowej stowarzyszonej  $P_G^\Lambda E$  indukowaną przez odwzorowanie ( $C^k$ -gładkie)*

$$[\Lambda]^\times : \text{Ad } P_G \times_B P_G^\Lambda E \longrightarrow P_G^\Lambda E$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty (LDG1) i (LDG2) działania grupy  $G$  na rozmaiłości  $M$  z Def. 12 i modelowane lokalnie na  $\Lambda$ . ■

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Stw. 209. Oto więc przy użyciu działania  $\Gamma[r]$ . grupy cięć wiązki dołączonej na  $P_G$  definiujemy działanie tejże grupy cięć na produkcie włóknistym wiązek

$$\begin{aligned} \Gamma[\tilde{r}^\times] := \Gamma[r] \cdot \times \text{id}_E & : \Gamma(\text{Ad } P_G) \times P_G \times_B E \longrightarrow P_G \times_B E \\ & : (\sigma, (p, \varepsilon)) \longmapsto (r_{\sigma \circ \pi_{P_G}(p)}(p), \varepsilon). \end{aligned}$$

Sensowność tej definicji zapewnia charakter działania definiującego  $r$ . – włókno po włóknie,

$$\pi_{P_G}(r_{\sigma \circ \pi_{P_G}(p)}(p)) = \pi_{P_G}(p) = \pi_E(\varepsilon).$$

Grupa  $\Gamma(\text{Ad } P_G)$  realizuje się przeto w grupie automorfizmów wiązki  $P_G \times_B E$  pokrywających identyczność na bazie poprzez automorfizmy  $\{\Gamma[\tilde{r}^\times]_\sigma\}_{\sigma \in \Gamma(\text{Ad } P_G)}$ . Podobnie jak w przypadku wiązki stowarzyszonej  $P_G \times_\lambda M$ , zdefiniowane powyżej działanie jest przemienne z działaniem  $\tilde{\Lambda}$ . z Def. 135,

$$\forall_{(\sigma, g) \in \Gamma(\text{Ad } P_G) \times G} : \Gamma[\tilde{r}^\times]_\sigma \circ \tilde{\Lambda}_g = \tilde{\Lambda}_g \circ G[\tilde{r}^\times]_\sigma,$$

co pozwala nam indukować działanie grupy  $\Gamma(\text{Ad } P_G)$  na rozmaiłości orbit  $\tilde{\Lambda}$ ,

$$\begin{aligned} [\Gamma[\tilde{r}^\times]]^\Lambda & : \Gamma(\text{Ad } P_G) \times P_G^\Lambda E \longrightarrow P_G^\Lambda E \\ & : (\sigma, [(p, \varepsilon)]) \longmapsto [([r]_{\sigma \circ \pi_{P_G}(p)}(p), \varepsilon)], \end{aligned}$$

dostarczające realizacji tejże grupy w grupie automorfizmów wiązki  $P_G^\Lambda E$  poprzez automorfizmy  $\{[\Gamma[\tilde{r}^\times]]^\Lambda_\sigma\}_{\sigma \in \Gamma(\text{Ad } P_G)}$ , i wreszcie – na przestrzeni cięć (globalnych) wiązki produktowej stowarzyszonej,

$$\Gamma[\Gamma[\tilde{r}^\times]]^\Lambda : \Gamma(\text{Ad } P_G) \times \Gamma(P_G^\Lambda E) \longrightarrow \Gamma(P_G^\Lambda E)$$

$$(4.1.22) \quad : (\sigma, [(\pi, \epsilon)]) \longmapsto [([r]_{\sigma \circ \pi_P \circ \pi(\cdot)} \circ \pi(\cdot), \epsilon(\cdot))] \equiv [([r]_{\sigma(\cdot)} \circ \pi(\cdot), \mu(\cdot))],$$

przy czym mamy tu do czynienia z podniesieniem do przestrzeni cięć odwzorowania

$$\begin{aligned} [\Lambda]^\times & : \text{Ad } P_G \times_B P_G^\Lambda E \longrightarrow P_G^\Lambda E \\ & : ([p_1, g_1], [(p_2, \varepsilon_2)]) \longmapsto [(p_2, \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_2, p_1)}(g_1)}(\varepsilon_2))], \end{aligned}$$

dobrze określonego dzięki postaci działania  $G$  na  $E$  (włókno po włóknie). □

STWIERDZENIE 217. *Przyjmijmy zapis Stw. 215 i 216 oraz ich dowodów. Bijekcja  $\Phi_\Lambda^\times$  jest (lewostronnie) ekwiwariantna względem działań grupy  $\Gamma(\text{Ad } P_G)$ :*

działania  $\Gamma[\Gamma[\tilde{\tau}^\times]]^\Lambda$  na przestrzeni  $\Gamma(\mathcal{P}_G^\Lambda E)$ , zdefiniowanego w Równ. (4.1.22), oraz naturalnego działania

$$\begin{aligned} [\Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda] &: \Gamma(\text{Ad } \mathcal{P}_G) \times \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathcal{P}_G, E|B)^G \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathcal{P}_G, E|B)^G \\ &: (\gamma, \Phi) \longmapsto \Lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)}(\Phi(\cdot)) \end{aligned}$$

na przestrzeni odwzorowań  $G$ -ekwiwariantnych  $\text{Hom}_G(\mathcal{P}_G, M)$ , czyli działanie

$$\Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda \equiv [\Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda] \circ (\Phi_{\text{Ad}}^{-1} \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathcal{P}_G, E|B)^G})$$

grupy  $\text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathcal{P}_G, G|B)^G$  czyni przemiennym poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\text{Ad } \mathcal{P}_G) \times \Gamma(\mathcal{P}_G^\Lambda E) & \xrightarrow{\Gamma[\Gamma[\tilde{\tau}^\times]]^\Lambda} & \Gamma(\mathcal{P}_G^\Lambda E) \\ \downarrow \Phi_{\text{Ad}} \times \Phi_\Lambda^\times & & \downarrow \Phi_\Lambda^\times \\ \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathcal{P}_G, G|B)^G \times \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathcal{P}_G, E|B)^G & \xrightarrow{\Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda} & \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathcal{P}_G, E|B)^G \end{array}$$

■

*Dowód:* Jedynym, co nie wynika wprost ze stosownej adaptacji rozumowania przedstawionego w dowodzie Stw. 211, jest zawieranie się obrazu odwzorowania  $\Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda$  w zbiorze  $\text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathcal{P}_G, E|B)$ . Weryfikujemy to w bezpośrednim rachunku

$$\pi_E(\Lambda_{\Phi_{\text{Ad}}(\sigma)(p)}(\Phi(p))) = \pi_E \circ \Phi(p) = \pi_{\mathcal{P}_G}(p),$$

przeprowadzonym dla dowolnego  $p \in \mathcal{P}_G$ , a wykorzystującym strukturę działania  $\Lambda$ . (włókno po włóknie).  $\square$

**STWIERDZENIE 218.** *Przyjmijmy zapis Def. 135 i niechaj  $\mathcal{P}_G^\alpha \equiv (\mathcal{P}_G^\alpha, B, G, \pi_{\mathcal{P}_G^\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą wiązkami głównymi o grupie strukturalnej  $G$  nad wspólną bazą  $B$ , a  $(E, B, F, \pi_E)$  – wiązką włóknistą z działaniem  $\Lambda : G \times E \longrightarrow E$  opisanym tamże. Dowolny (izo)morfizm wiązek głównych  $(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G) : \mathcal{P}_G^1 \longrightarrow \mathcal{P}_G^2$  indukuje kanonicznie (izo)morfizm wiązek włóknistych*

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{P}_G^{1\Lambda} E \longrightarrow \mathcal{P}_G^{2\Lambda} E : [(p, \varepsilon)] \longmapsto [(\Phi(p), \varepsilon)],$$

ten zaś określa bijekcję między odnośnymi przestrzeniami cięć globalnych

$$\Gamma\tilde{\Phi} : \Gamma(\mathcal{P}_G^{1\Lambda} E) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{P}_G^{2\Lambda} E) : \phi \longmapsto \tilde{\Phi} \circ \phi.$$

■

*Dowód:* To, że  $\tilde{\Phi}$  jest morfizmem wiązek włóknistych, wynika wprost z postaci rzutu na bazę wiązki produktowej stowarzyszonej oraz natury morfizmu  $(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G)$ , oto bowiem dla dowolnego punktu  $[(p, \varepsilon)] \in \mathcal{P}_G^{1\Lambda} E$  otrzymujemy

$$\pi_{\mathcal{P}_G^{2\Lambda} E} \circ \tilde{\Phi}([(p, \varepsilon)]) \equiv \pi_{\mathcal{P}_G^{2\Lambda} E}([(\Phi(p), \varepsilon)]) \equiv \pi_{\mathcal{P}_G^2} \circ \Phi(p) = \pi_{\mathcal{P}_G^1}(p) \equiv \pi_{\mathcal{P}_G^{1\Lambda} E}([(p, \varepsilon)]).$$

Bijektywność odwzorowania między przestrzeniami cięć globalnych jest oczywista.  $\square$

UWAGA 52. Mając na uwadze przyszłe zastosowania powyższego stwierdzenia, warto przyjrzeć się odwzorowaniu  $\Gamma\tilde{\Phi}$  w obrazie trywializacji lokalnych  $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{P}_G^1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nad pokryciem  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$  współtrywializującym obie wiązki główne – w tym obrazie (izo)morfizm  $\Phi$  jest reprezentowany przez rodzinę  $\{h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G\}_{i \in I}$  odwzorowań lokalnie gładkich (patrz: Równ. (4.1.16)), które spełniają warunki (4.1.15), patrz: Tw. 4.1.3. Rozważmy cięcie globalne  $\phi \in \Gamma(\mathbb{P}_G^1 E)$  o ograniczeniach

$$\phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{P}_G^1 E : x \mapsto [(\tau_i^{1-1}(x, e), \varphi_i(x))]$$

utworzonych przy użyciu cięć lokalnych  $\varphi_i \in \Gamma(E \upharpoonright_{\mathcal{O}_i})$  i spełniających w dowolnym punkcie  $y \in \mathcal{O}_{ij}$  warunek zszycia

$$\begin{aligned} [(\tau_i^{1-1}(y, e), \varphi_i(y))] &= [(\tau_j^{1-1}(y, e), \varphi_j(y))] = [(\tau_i^{1-1}(y, e) \triangleleft g_{ij}^1(y), \varphi_j(y))] \\ &= [(\tau_i^{1-1}(y, e), g_{ij}^1(y) \triangleright \varphi_j(y))], \end{aligned}$$

czyli innymi słowy

$$\forall_{y \in \mathcal{O}_{ij}} : \varphi_i(y) = g_{ij}^1(y) \triangleright \varphi_j(y).$$

Tym samym informacja o istnieniu cięcia globalnego  $\phi \in \Gamma(\mathbb{P}_G^1 E)$  jest zawarta w rodzinie cięć lokalnych  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ . Cięcie  $\Gamma\tilde{\Phi}[\phi]$  jest reprezentowane lokalnie przez rodzinę odwzorowań gładkich (wszak powstają ze złożenia odwzorowań jawnie gładkich z surjektywną submersją  $\pi_{(\mathbb{P}_G^2 \times_B E)/G}$ )

$$\Gamma\tilde{\Phi}[\phi]_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{P}_G^2 E : x \mapsto [(\tau_i^{2-1}(x, e), h_i(x) \triangleright \varphi_i(x))].$$

Bez trudu upewniamy się, że tak określone cięcia lokalne wiązki  $\mathbb{P}_G^2 E$  są w istocie ograniczeniami cięcia globalnego

$$\Gamma\tilde{\Phi}[\phi] \in \Gamma(\mathbb{P}_G^2 E), \quad \Gamma\tilde{\Phi}[\phi] \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} \equiv \Gamma\tilde{\Phi}[\phi]_i.$$

W rzeczy samej, w punktach  $y \in \mathcal{O}_{ij}$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} [(\tau_j^{2-1}(y, e), h_j(y) \triangleright \varphi_j(y))] &= [(\tau_i^{2-1} \circ \tau_{ij}^2(y, e), (h_j(y) \cdot g_{ji}^1(y)) \triangleright \varphi_i(y))] \\ &= [(\tau_i^{2-1}(y, e) \triangleleft g_{ij}^2(y), (h_j(y) \cdot g_{ji}^1(y)) \triangleright \varphi_i(y))] \\ &= [(\tau_i^{2-1}(y, e), (g_{ij}^2(y) \cdot h_j(y) \cdot g_{ji}^1(y)) \triangleright \varphi_i(y))] \\ &= [(\tau_i^{2-1}(y, e), h_i(y) \triangleright \varphi_i(y))], \end{aligned}$$

▭

## 5. Wiązka styczną wiązki włóknistej

STWIERDZENIE 219. *Przyjmijmy zapis Def. 129 i niechaj  $(E, B, F, \pi_E)$  będzie wiązką włóknistą (klasy  $C^{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) nad bazą  $B$  wymiaru  $n = \dim B$ ,  $(TE, E, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{TE})$ ,  $N \equiv \dim E$  zaś – wiązką styczną nad jej przestrzenią totalną  $E$ . Czwórka*

$$(TE, B, \mathbb{R}^{\times n} \times TF, \pi_E \circ \pi_{TE})$$

*jest wiązką włóknistą (klasy  $C^k$ ).*

■

*Dowód:* Odwzorowanie  $\pi_E \circ \pi_{TE}$  jest surjekcją jako złożenie surjekcji, pozostaje zatem wskazać stosowne pokrycie trywializujące bazy  $B$ . Do tej roli wybieramy rozdrobnienie dowolnego pokrycia  $B$  trywializującego  $E$  względem (także dowolnego) pokrycia trywializującego wiązkę stryczną  $TE$ . Nad tak skonstruowanym pokryciem  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  mamy dobrze określone zarówno trywializacje lokalne  $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times F$ , jak i mapy lokalne  $\kappa_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{x_n}$ , a wraz z nimi – także mapy naturalne  $T\kappa_i : T\mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{x_n}$ , przy czym wszystkie te odwzorowania są dyfeomorfizmami (klasy  $C^k$ ). W odwołaniu do (i zapisie dowodu) Stw. 96 definiujemy pożądane trywializacje lokalne wiązki  $TE \rightarrow B$  w postaci superpozycji dyfeomorfizmów (klasy  $C^k$ )

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i : (\pi_E \circ \pi_{TE})^{-1}(\mathcal{O}_i) &\equiv T\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{T\tau_i} T(\mathcal{O}_i \times F) \xrightarrow{\tau_{\mathcal{O}_i, F}} T\mathcal{O}_i \times TF \\ &\xrightarrow{T\kappa_i \times \text{id}_{TF}} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{x_n} \times TF \xrightarrow{\kappa_i^{-1} \times \text{id}_{\mathbb{R}^{x_n} \times TF}} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n} \times TF. \end{aligned}$$

□

UWAGA 53. Wiązka  $TE \rightarrow E \rightarrow B$  należy do klasy tzw. **złożonych rozmaitości rozwłóknionych**. Więcej o tych strukturach i ich zastosowaniu w fizyce można znaleźć w monografii [GMS97].

λ

## 6. Wiązki główne z grupoidem strukturalnym, grupoidalne i modułowe

### 6.1. Wiązki główne z grupoidem strukturalnym.

DEFINICJA 136. Przyjmijmy zapis Def. 97 i niechaj  $\mathcal{G} = (\text{Obj } \mathcal{G}, \text{Mor } \mathcal{G}, s, t, \text{Id}, \text{Inv}, \circ)$  będzie grupoidem Liego<sup>4</sup>. **Wiązka główna o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$**  to piątka

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}} = (\mathbb{P}_{\mathcal{G}}, B, \pi_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}}, \mu_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}}, \rho_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}})$$

złożona z pary rozmaitości gładkich (klasy  $C^\infty$ ):

- $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$  zwanej **przestrzenią totalną (wiązki)**;
- $B$  zwanej **bazą (wiązki)**;

oraz trójki odwzorowań gładkich (klasy  $C^\infty$ ):

- surjektywnej submersji  $\pi_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}} : \mathbb{P}_{\mathcal{G}} \rightarrow B$ , zwanej **rzutem na bazę (wiązki)**;
- $\mu_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}} : \mathbb{P}_{\mathcal{G}} \rightarrow \text{Obj } \mathcal{G}$  zwanego **momentem**;
- $\rho_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}} : \mathbb{P}_{\mathcal{G}} \times_t \text{Mor } \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{G}}$  zwanego **działaniem**,

o następujących własnościach:

- (i)  $(\mathbb{P}_{\mathcal{G}}, \mu_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}}, \rho_{\mathbb{P}_{\mathcal{G}}})$  jest  $\mathcal{G}$ -rozmaitością prawostronną;

<sup>4</sup>Wybór kategorii gładkiej jako tej, w której osadzone są dalsze nasze rozważania, podyktowany jest wyłącznie względami pragmatycznymi.

- (ii)  $\pi_{P_{\mathcal{G}}}$  jest  $\mathcal{G}$ -niezmiennicze w znaczeniu, które precyzuje diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathcal{G}} \mu \times_t \text{Mor } \mathcal{G} & \xrightarrow{\rho_{P_{\mathcal{G}}}} & P_{\mathcal{G}} \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_{P_{\mathcal{G}}} \\ P_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\pi_{P_{\mathcal{G}}}} & B \end{array} ;$$

- (iii) odwzorowanie

$$(\text{pr}_1, \rho_{P_{\mathcal{G}}}) : P_{\mathcal{G}} \mu \times_t \text{Mor } \mathcal{G} \longrightarrow P_{\mathcal{G}} \pi_{P_{\mathcal{G}}} \times_{\pi_{P_{\mathcal{G}}}} P_{\mathcal{G}} \equiv P_{\mathcal{G}}^{[2]} : (p, \vec{g}) \longmapsto (p, p \cdot \vec{g})$$

jest dyfeomorfizmem.

Gładka odwrotność  $(\text{pr}_1, \rho_{P_{\mathcal{G}}})$  przyjmuje postać

$$(\text{pr}_1, \rho_{P_{\mathcal{G}}})^{-1} =: (\text{pr}_1, \phi_{P_{\mathcal{G}}}), \quad \phi_{P_{\mathcal{G}}} : P_{\mathcal{G}}^{[2]} \longrightarrow \text{Mor } \mathcal{G}.$$

Jej składowa  $\phi_{P_{\mathcal{G}}}$  jest określana mianem **odwzorowania ilorazowego**.

**Morfizm wiązek głównych**  $(P_{\mathcal{G}_\alpha}, B_\alpha, \pi_{P_{\mathcal{G}_\alpha}}, \mu_{P_{\mathcal{G}_\alpha}}, \rho_{P_{\mathcal{G}_\alpha}})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o **grupoidach strukturalnych**  $\mathcal{G}_\alpha$  to trójka

$$(\Theta, f, (\chi_0, \chi_1))$$

złożona z

- morfizmu  $(\Theta, (\chi_0, \chi_1))$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  pomiędzy odnośnymi rozmaitościami z działaniem prawostronnymi  $(P_{\mathcal{G}_\alpha}, \mu_{P_{\mathcal{G}_\alpha}}, \rho_{P_{\mathcal{G}_\alpha}})$ ;
- odwzorowania gładkiego  $f : B_1 \longrightarrow B_2$  pomiędzy bazami wiązek,

które spełniają warunki wyrażone przez diagram przemienny

$$(4.1.23) \quad \begin{array}{ccc} P_{\mathcal{G}_1 \mu_1 \times_{t_1}} \text{Mor } \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\Theta \times \chi_1} & P_{\mathcal{G}_2 \mu_2 \times_{t_2}} \text{Mor } \mathcal{G}_2 \\ \rho_1 \downarrow & & \downarrow \rho_2 \\ P_{\mathcal{G}_1} & \xrightarrow{\Theta} & P_{\mathcal{G}_2} \\ \mu_1 \swarrow & & \swarrow \mu_2 \\ \text{Obj } \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\chi_0} & \text{Obj } \mathcal{G}_2 \\ \pi_{P_{\mathcal{G}_1}} \downarrow & & \downarrow \pi_{P_{\mathcal{G}_2}} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

Wiązki główne o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  i bazie  $B$  wraz z odnośnymi morfizmami wiązek głównych (z grupoidem strukturalnym) między nimi o składowej na grupoidzie strukturalnym  $(\chi_0, \chi_1) = (\text{id}_{\text{Obj } \mathcal{G}}, \text{id}_{\text{Mor } \mathcal{G}})$  tworzą **kategorię**

**wiązek głównych o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  nad  $B$** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{GrpdBun}_{\mathcal{G}}(B).$$

▲

UWAGA 54. Odwracalność  $(\mathrm{pr}_1, \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}})$  implikuje swobodny i przechodni charakter działania  $\mathcal{G}$  na włóknach  $\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}$ . W rzeczy samej, założymy, że  $(\mathrm{pr}_1, \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}})$  jest odwracalne, czyli istnieje odwzorowanie ilorazowe  $\phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}$ . Wprost na mocy jego definicji konstatujemy przechodniość działania  $\rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}$  na włóknach. Niech też dla pewnych  $(p, \vec{g}) \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}\mu \times_t \mathrm{Mor} \mathcal{G}}$  zachodzi równość  $p = p \cdot \vec{g}$ , a wtedy

$$(\mathrm{pr}_1, \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}})(p, \mathrm{Id}_{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(p)}) = (p, p) = (p, p \cdot \vec{g}) \equiv (\mathrm{pr}_1, \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}})(p, \vec{g}),$$

co wobec odwracalności  $(\mathrm{pr}_1, \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}})$  implikuje pożądaną równość

$$\vec{g} = \mathrm{Id}_{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(p)}.$$

O tym, że rzeczona odwracalność jest w istocie równoznaczna ze swobodnym i przechodnim charakterem działania, przekonamy się już wkrótce, kiedy poznamy lokalny opis wiązki głównej z grupoidem strukturalnym.

▬

PRZYKŁAD(Y) 40.

- (1) **Wiązka jednostkowa grupoidu  $\mathcal{G}$**  to wiązka główna o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  postaci

$$\mathcal{U}_{\mathcal{G}} := (\mathrm{Mor} \mathcal{G}, \mathrm{Obj} \mathcal{G}, t, s, R)$$

gdzie  $R$  jest działaniem regularnym prawostronnym z Przykł. 30 (1). Aksjomaty (i) i (ii) z Def. 136 są w tym przypadku w sposób oczywisty spełnione, pozostaje zatem sprawdzić aksjomat (iii). Odwzorowanie

$$(\mathrm{pr}_1, R) : \mathrm{Mor} \mathcal{G}_s \times_t \mathrm{Mor} \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Mor} \mathcal{G}_t \times_t \mathrm{Mor} \mathcal{G} : (\vec{g}, \vec{h}) \longmapsto (\vec{g}, \vec{g} \circ \vec{h})$$

ma (jawnie) gładką odwrotność

$$(\mathrm{pr}_1, \phi_{\mathcal{U}_{\mathcal{G}}}) : \mathrm{Mor} \mathcal{G}_t \times_t \mathrm{Mor} \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{Mor} \mathcal{G}_s \times_t \mathrm{Mor} \mathcal{G} : (\vec{g}, \vec{h}) \longmapsto (\vec{g}, \vec{g}^{-1} \circ \vec{h}).$$

- (2) Niechaj  $B_1, B_2$  będą rozmaitościami gładkimi (klasy  $C^\infty$ ),  $f : B_1 \longrightarrow B_2$  – odwzorowaniem gładkim pomiędzy nimi, a  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$  – wiązką główną nad  $B_2$  o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$ . **Wiązka główna o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  cofnięta (wzdłuż  $f$ )** to wiązka główna o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  postaci

$$f^* \mathcal{P}_{\mathcal{G}} := (f^* \mathcal{P}_{\mathcal{G}}, B_1, \mathrm{pr}_1, \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \circ \mathrm{pr}_2, \rho_{f^* \mathcal{P}_{\mathcal{G}}}),$$

gdzie

$$f^* \mathcal{P}_{\mathcal{G}} := B_1 \times_{f \times \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}} \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$$

jest produktem włóknistym rozmaitości zapisanym w konwencji Tw. 1.4.24, na którym jest określone działanie prawostronne

$$\rho_{f^* \mathcal{P}_{\mathcal{G}}} : f^* \mathcal{P}_{\mathcal{G}\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \circ \mathrm{pr}_2} \times_t \mathrm{Mor} \mathcal{G} \longrightarrow f^* \mathcal{P}_{\mathcal{G}} : ((x, p), \vec{g}) \longmapsto (x, p \cdot \vec{g}).$$

Powyższe odwzorowanie jest dobrze określone, a przy tym – jak łatwo wiadać – spełnia aksjomaty (i) i (ii) z Def. 136. Przechodząc do ostatniego aksjomatu, zauważamy, że dla dowolnych dwóch punktów  $(x_1, p_1), (x_2, p_2) \in f^*P_G$  z tego samego włókna wiązki cofniętej zachodzi równość

$$x_2 = \text{pr}_1(x_2, p_2) = \text{pr}_1(x_1, p_1) = x_1,$$

więc też

$$\pi_{P_G}(p_2) = f(x_2) = f(x_1) = \pi_{P_G}(p_1),$$

co w świetle Stw. 220 pozwala nam zapisać

$$p_2 = p_1 \cdot \phi_{P_G}(p_1, p_2).$$

Oto więc gładką odwrotnością odwzorowania

$$\begin{aligned} (\text{pr}_1, \rho_{f^*P_G}) &: f^*P_{G_{\mu_{P_G} \circ \text{pr}_2} \times_t \text{Mor } \mathcal{G}} \longrightarrow f^*P_{G_{\text{pr}_1} \times_{\text{pr}_1} f^*P_G} \equiv f^*P_G^{[2]} \\ &: ((x, p), \vec{g}) \longmapsto ((x, p), (x, p, \vec{g})) \end{aligned}$$

jawi się odwzorowanie

$$\begin{aligned} (\text{pr}_1, \phi_{f^*P_G}) &: f^*P_G^{[2]} \longrightarrow f^*P_{G_{\mu_{P_G} \circ \text{pr}_2} \times_t \text{Mor } \mathcal{G}} \\ &: ((x, p_1), (x, p_2)) \longmapsto ((x, p_1), \phi_P(p_1, p_2)). \end{aligned}$$

- (3) **Trywialna wiązka główna o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$**  nad bazą  $B$  to wiązka główna  $f^*U_G$  o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  cofnięta wzdłuż dowolnego odwzorowania gładkiego  $f : B \rightarrow \text{Obj } \mathcal{G}$ .

✓

**STWIERDZENIE 220.** *Przyjmijmy zapis Def. 136. Odwzorowanie ilorazowe  $\phi_{P_G}$  ma następujące własności – wypisane dla dowolnych  $(p_1, p_2) \in P_G^{[2]}$  –*

- (i) *jego wartość jest jednoznacznie określona przez relację*

$$p_2 = p_1 \cdot \phi_{P_G}(p_1, p_2),$$

*w szczególności spełniona jest tożsamość*

$$\phi_{P_G} \circ (\text{id}_{P_G}, \text{id}_{P_G}) = \text{Id}_{\mu_{P_G}(\cdot)};$$

- (ii) *oznaczymy, dla dowolnych  $x, y \in \text{Obj } \mathcal{G}$ ,*

$$\mathcal{G}_{x,y} := s^{-1}(\{x\}) \cap t^{-1}(\{y\}),$$

*a wówczas*

$$\phi_{P_G}(p_1, p_2) \in \mathcal{G}_{\mu_{P_G}(p_2), \mu_{P_G}(p_1)} :$$

- (iii)  $\phi_{P_G} \circ \tau_{P_G, P_G} = \text{Inv} \circ \phi_{P_G}$ , *gdzie  $\tau_{P_G, P_G} : P_G^{[2]} \circlearrowleft : (p_1, p_2) \mapsto (p_2, p_1)$  jest transpozycją.*

■

Dowód: Oczywiście. □



STWIERDZENIE 221. *Przyjmijmy zapis Def. 136. Podkategoria*

$$\mathbf{GrpdBun}_{\mathcal{G}}(B|\mathrm{id}_B)$$

*kategorii  $\mathbf{GrpdBun}_{\mathcal{G}}(B)$  o tej samej klasie obiektów i o morfizmach o identycznościowej składowej na bazie,  $f = \mathrm{id}_B$  (i na grupoidzie strukturalnym,  $\Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}}$ ), jest grupoidem.*

■

*Dowód:* Rozważmy parę  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^{\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  obiektów kategorii  $\mathbf{GrpdBun}_{\mathcal{G}}(B|\mathrm{id}_B)$  oraz jej dowolny morfizm  $(\Theta, \mathrm{id}_B, \mathrm{Id}_{\mathcal{G}}) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{GrpdBun}_{\mathcal{G}}(B|\mathrm{id}_B)}(\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1, \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2)$ . Ilekroć punkty  $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1$  spełniają warunek

$$(4.1.24) \quad \Theta(p_1) = \Theta(p_2),$$

obliczamy

$$\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1}(p_1) = \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2}(\Theta(p_1)) = \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2}(\Theta(p_2)) = \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1}(p_2),$$

skąd dalej wyciągamy wniosek, że  $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^{1[2]}$ . Na podstawie punktu (iii) z Def. 136, a w odwołaniu do punktu (i) Stw. 220, otrzymujemy relację

$$p_2 = p_1 \cdot \phi_{\mathcal{P}_1}(p_1, p_2),$$

która w połączeniu z  $\mathcal{G}$ -ekwiwariantnością  $\Theta$ , wyrażoną przez diagram przemienny (1.6.2), implikuje równość

$$\Theta(p_2) = \Theta(p_1) \cdot \phi_{\mathcal{P}_1}(p_1, p_2).$$

Ta w połączeniu z założoną równością (4.1.24) daje nam

$$\begin{aligned} (\mathrm{pr}_1, \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2})(\Theta(p_1), \mathrm{Id}_{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2}(\Theta(p_1))}) &= (\Theta(p_1), \Theta(p_1)) = (\Theta(p_1), \Theta(p_2)) \\ &= (\Theta(p_1), \Theta(p_1) \cdot \phi_{\mathcal{P}_1}(p_1, p_2)) = (\mathrm{pr}_1, \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2})(\Theta(p_1), \phi_{\mathcal{P}_1}(p_1, p_2)), \end{aligned}$$

więc też, z racji odwracalności  $(\mathrm{pr}_1, \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2})$ ,

$$\mathrm{Id}_{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2}(\Theta(p_1))} = \phi_{\mathcal{P}_1}(p_1, p_2).$$

Przywoławszy własność  $\Theta$  zapisaną w diagramie przemiennym (4.1.23) (a konkretnie: poddiagramie o kształcie trapezu), otrzymujemy tym sposobem równość

$$\mathrm{Id}_{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1}(p_1)} = \mathrm{Id}_{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2}(\Theta(p_1))} = \phi_{\mathcal{P}_1}(p_1, p_2),$$

a zatem ostatecznie

$$p_2 = p_1 \cdot \phi_{\mathcal{P}_1}(p_1, p_2) = p_1 \cdot \mathrm{Id}_{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1}(p_1)} = p_1,$$

co dowodzi injektywności  $\Theta$ .

Następnie ustalwszy (dowolnie) punkt  $p_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2$ , wybierzmy dowolny punkt  $q_1 \in \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1}^{-1}(\{\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2}(p_2)\})$ . Zachodzi oczywiście równość  $\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2}(\Theta(q_1)) = \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2}(p_2)$ , możemy zatem zapisać

$$p_2 = \Theta(q_1) \cdot \phi_{\mathcal{P}_2}(\Theta(q_1), p_2).$$

Na mocy punktu (ii) Stw. 220 oraz, powtórnie, własności  $\Theta$  zapisanej w diagramie przemiennym (4.1.23), stwierdzamy, że

$$t(\phi_{\mathcal{P}_2}(\Theta(q_1), p_2)) = \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2}(\Theta(q_1)) = \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1}(q_1).$$

Zdefiniujmy

$$p_1 := q_1 \cdot \phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(\Theta(q_1), p_2) \in \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}^{-1}(\{\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(p_2)\}).$$

Wobec  $\mathcal{G}$ -ekwiwariantności  $\Theta$  i własności (i) opisanej w Stw. 220 zachodzi równość

$$\Theta(p_1) = \Theta(q_1) \cdot \phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(\Theta(q_1), p_2) = p_2,$$

która przesądza o surjektywnym charakterze  $\Theta$  i tym samym zamyka dowód.  $\square$

Osobliwie wydajnym narzędziem analizy wiązek głównych z grupoidem strukturalnym, o kluczowym znaczeniu dla naszej dalszej dyskusji inspirowanej przez problematykę teoriopolową, jest ich opis lokalny, który wprowadzimy teraz za Moerdijkem i Mrčunem (patrz: Ref. [MM03]).

**STWIERDZENIE 222.** *Przyjmijmy zapis Def. 136 oraz Przykł. 40 (3). Każda wiązka główna  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$  o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  jest lokalnie trywialna, tj. każdy punkt  $x \in B$  jej bazy  $B$  ma takie otoczenie otwarte  $\mathcal{O}_x$ , na którym jest określone odwzorowanie gładkie  $\mu_{\mathcal{O}_x} : \mathcal{O}_x \rightarrow \text{Obj } \mathcal{G}$  i izomorfizm (surjektywnych) submersji:*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_x} \cong \mu_{\mathcal{O}_x}^* \mathcal{U}_{\mathcal{G}},$$

tj. dyfeomorfizm zachowujący ich włókna.

■

*Dowód:* Niechaj  $\mathcal{O}_x$  będzie otoczeniem otwartym punktu  $x \in B$ , na którym określone jest cięcie lokalne  $\sigma_{\mathcal{O}_x} : \mathcal{O}_x \rightarrow \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_x)$  surjektywnej submersji  $\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} : \mathcal{P}_{\mathcal{G}} \rightarrow B$  (istnienie  $\mathcal{O}_x$  wynika wprost Stw. 116). Definiujemy odwzorowanie gładkie

$$\mu_{\mathcal{O}_x} := \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \circ \sigma_{\mathcal{O}_x},$$

a wraz z nim – odwzorowanie

$$\tau_{\mathcal{O}_x}^{-1} := \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \circ (\sigma_{\mathcal{O}_x} \times \text{Id}_{\text{Mor } \mathcal{G}}) : \mu_{\mathcal{O}_x}^* \text{Mor } \mathcal{G} \rightarrow \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_x) : (x, \vec{g}) \mapsto \sigma_{\mathcal{O}_x}(x) \cdot \vec{g}.$$

To ostatnie jest w oczywisty sposób dobrze określone, oto bowiem

$$(x, \vec{g}) \in \mu_{\mathcal{O}_x}^* \text{Mor } \mathcal{G} \implies t(\vec{g}) = \mu_{\mathcal{O}_x}(m) \equiv \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(\sigma_{\mathcal{O}_x}(x)),$$

a do tego gładkie (jako złożenie odwzorowań jawnie gładkich). Jeśli traktować je jako odwzorowanie pomiędzy odnośnymi wiązkami głównymi, to jest jasne, że zachowuje ono włókna, a to dzięki  $\mathcal{G}$ -ekwiwariantności  $\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}$ ,

$$\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \circ \tau_{\mathcal{O}_x}^{-1}(x, \vec{g}) = \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(\sigma_{\mathcal{O}_x}(x) \cdot \vec{g}) = \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \circ \sigma_{\mathcal{O}_x}(x) = \text{id}_{\mathcal{O}_x}(x) = x = \text{pr}_1(x, \vec{g})$$

Jest też  $\mathcal{G}$ -ekwiwariantne, tj. czyni przemiennymi stosowne diagramy z Def. 97. W rzeczy samej, w konsekwencji własności definiującej (i) momentu  $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}$  zachowuje ono moment,

$$\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \circ \tau_{\mathcal{O}_x}^{-1}(x, \vec{g}) = \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(\sigma_{\mathcal{O}_x}(x) \cdot \vec{g}) = s(\vec{g}) = s \circ \text{pr}_2(x, \vec{g}),$$

i splata odnośne działania grupoidu  $\mathcal{G}$ ,

$$\begin{aligned} & \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \circ (\tau_{\mathcal{O}_x}^{-1} \times \text{Id}_{\text{Mor } \mathcal{G}})((x, \vec{g}), \vec{h}) = \rho_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(\sigma_{\mathcal{O}_x}(x) \cdot \vec{g}, \vec{h}) = (\sigma_{\mathcal{O}_x}(x) \cdot \vec{g}) \cdot \vec{h} \\ & = \sigma_{\mathcal{O}_x}(x) \cdot (\vec{g} \circ \vec{h}) = \tau_{\mathcal{O}_x}^{-1}(x, \vec{g} \circ \vec{h}) = \tau_{\mathcal{O}_x}^{-1}(x, R(\vec{g}, \vec{h})) \\ & = \tau_{\mathcal{O}_x}^{-1} \circ \rho_{\mu_{\mathcal{O}_x}^* \mathcal{U}_{\mathcal{G}}}((x, \vec{g}), \vec{h}). \end{aligned}$$

Jest zatem  $\tau_{\mathcal{O}_x}^{-1}$  morfizmem wiązek głównych nad  $\mathcal{O}_x$  o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$ , czyli – w świetle Stw. 221 – izomorfizmem. Jego odwrotnością jest odwzorowanie

$$\tau_{\mathcal{O}_x}(p) = (\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(p), \phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(\sigma_{\mathcal{O}_x} \circ \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(p), p)).$$

□

W wyniku abstrakcji naszych dotychczasowych ustaleń otrzymujemy

DEFINICJA 137. Przyjmijmy zapis Def. 136 oraz Stw. 116 i niechaj  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie pokryciem otwartym bazy  $B$  wiązki głównej  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$  o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  wyznaczonym przez rodzinę cięć lokalnych  $\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ ,  $i \in I$  tejże wiązki. **Dane trywializacji lokalnej  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$**  to kolekcja

$$(\mathcal{O}, \mu_i, \gamma_{jk} \mid i \in I, (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}),$$

w której skład wchodzi dwie rodziny odwzorowań gładkich:

- **momenty lokalne**

$$\mu_i := \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \circ \sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Obj } \mathcal{G}, \quad i \in I;$$

- **strzałki przejścia**

$$\gamma_{jk} : \mathcal{O}_{jk} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{G} : x \mapsto \phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}(\sigma_j(x), \sigma_k(x)), \quad (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}.$$

Te ostatnie określają relację pomiędzy **trywializacjami lokalnymi**

$$\tau_i := (\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}, \phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \circ (\sigma_i \circ \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}, \text{id}_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}})) : \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G}$$

wedle formuły

$$\forall_{(x, \vec{g}) \in \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G}, x \in \mathcal{O}_{ij}} : \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, \vec{g}) = (x, \gamma_{ij}(x) \circ \vec{g}).$$

▲

Istotne własności danych trywializacji lokalnej wymienia poniższe stwierdzenie, które zarazem otwiera drogę do zrozumienia kryjącej się za nimi geometrii.

STWIERDZENIE 223. *Przyjmijmy zapis Def. 137. Dane trywializacji lokalnej wiązki głównej  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$  o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  stowarzyszone z pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$  mają następujące własności definiujące:*

- (i)  $\forall_{(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}} : (t \circ \gamma_{ij} = \mu_i \quad \wedge \quad s \circ \gamma_{ij} = \mu_j);$
- (ii)  $\forall_{(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}} : (\gamma_{ji} = \text{Inv} \circ \gamma_{ij} \quad \wedge \quad \gamma_{ii} = \text{Id} \circ \mu_i);$
- (iii) *warunek 1-kocyklu*  $\forall_{(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}, x \in \mathcal{O}_{ijk}} : \gamma_{ik}(x) = \gamma_{ij}(x) \circ \gamma_{jk}(x).$

*Dane te definiują kanoniczny izomorfizm pomiędzy wiązkami trywialnymi  $\mu_i^* \mathcal{U}_{\mathcal{G}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}$  i  $\mu_j^* \mathcal{U}_{\mathcal{G}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}$  nad  $\mathcal{O}_{ij}$ .*

■

Dowód: Własności (i), (ii) i (iii) wynikają bezpośrednio ze Stw. 220, pozostaje więc udowodnić ostatnią część tezy. Rozważmy odwzorowania

$$\tau_{ij} : \mu_j^* \text{Mor } \mathcal{G} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} \rightarrow \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} : (x, \vec{g}) \mapsto (x, \gamma_{ij}(x) \circ \vec{g}).$$

Są one dobrze określone, gdyż

$$(x, \vec{g}) \in \mu_j^* \text{Mor } \mathcal{G} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} \implies t(\vec{g}) = \mu_j(x) = s \circ \gamma_{ij}(x),$$

a to w konsekwencji własności (i) danych lokalnych, a ponadto

$$t(\gamma_{ij}(x) \circ \vec{g}) = t(\gamma_{ij}(x)) = \mu_i(x) \implies \tau_{ij}(x, g) \in \mu_i^* \mathcal{U}_{\mathcal{G}}.$$

Ich surjektywność jest następstwem prostej tożsamości

$$\begin{aligned} (x, \vec{g}) \in \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G} \downarrow_{\mathcal{O}_{ij}} &\implies (x, \vec{g}) = (x, \text{Id}_t(\vec{g}) \circ \vec{g}) = (x, \text{Id}_{\mu_i(x)} \circ \vec{g}) \\ &= (x, \gamma_{ii}(x) \circ \vec{g}) = (x, \gamma_{ij}(x) \circ \gamma_{ji}(x) \circ \vec{g}) \\ &= \tau_{ij}(x, \gamma_{ji}(x) \circ \vec{g}). \end{aligned}$$

Odwzorowania te zachowują włókna, pozostaje przeto jedynie upewnić się, że zachowują one momenty, co wynika z ciągu równości

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{O}_{ij} \mu_j^* \text{Mor } \mathcal{G}} \circ \tau_{ij}(x, \vec{g}) &= s \circ \text{pr}_2(x, \gamma_{ij}(x) \circ \vec{g}) = s(\vec{g}) = s \circ \text{pr}_2(x, \vec{g}) \\ &= \mu_{\mathcal{O}_{ij} \mu_j^* \text{Mor } \mathcal{G}}(x, \vec{g}), \end{aligned}$$

oraz że splatają ze sobą oba działania grupoidu  $\mathcal{G}$ ,

$$\begin{aligned} \tau_{ij}((x, \vec{g}) \cdot \vec{h}) &= \tau_{ij}(x, \vec{g} \circ \vec{h}) = (x, \gamma_{ij}(x) \circ \vec{g} \circ \vec{h}) = (x, \gamma_{ij}(x) \circ \vec{g}) \cdot \vec{h} \\ &= \tau_{ij}(x, \vec{g}) \cdot \vec{h}. \end{aligned}$$

Dowodzona teza wynika teraz wprost ze Stw. 221.  $\square$

Zależność trywializacji lokalnej od wyboru cięcia lokalnego użytego w jej definicji wyjaśnia

**STWIERDZENIE 224.** *Przyjmijmy zapis Def. 137 oraz Stw. 222. Niechaj  $\sigma_{\mathcal{O}}^\alpha : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dowolnymi dwoma cięciami lokalnymi wiązki głównej  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$  o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  nad podzbiorem otwartym  $\mathcal{O} \subset B$  bazy  $B$ . Stowarzyszone z nimi trywializacje lokalne  $\tau_{\mathcal{O}}^\alpha : \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mu_{\mathcal{O}}^* \mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  wiązki  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$  nad  $\mathcal{O}$  są równoważne w tym sensie, że odnośne wiązki trywialne  $\mu_{\mathcal{O}}^* \mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ , zdefiniowane w terminach odnośnych momentów lokalnych  $\mu_{\mathcal{O}}^\alpha$  określanych przez  $\sigma_{\mathcal{O}}^\alpha$ , są izomorficzne,*

$$\tau_{\mathcal{O}}^{2,1} := \tau_{\mathcal{O}}^2 \circ \tau_{\mathcal{O}}^{1-1} : \mu_{\mathcal{O}}^1 \mathcal{U}_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\cong} \mu_{\mathcal{O}}^2 \mathcal{U}_{\mathcal{G}}.$$

■

*Dowód:* Teza wynika ze Stw. 221 i udowodnionej wcześniej  $\mathcal{G}$ -ekwiwariantności trywializacji lokalnych.  $\square$

Zwieńczeniem dotychczasowych naszych analiz jest odpowiednik Tw. 4.1.1 w kategorii  $\mathbf{GrpdBun}_{\mathcal{G}}(B | \text{id}_B)$ .

**TWIERDZENIE 4.1.4** (O rekonstrukcji wiązki głównej z grupoidem strukturalnym). *Przyjmijmy zapis Def. 137. Zdefiniujmy rozmaitość*

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{O}} := \left( \bigsqcup_{i \in I} \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G} \right) / \sim_{\gamma..}$$

w duchu dowodu Tw. 4.1.1 jako rozmaitość ilorazową utworzoną przez klasy abstrakcji relacji równoważności

$$(4.1.25) \quad (x_i, \vec{g}_i, i) \sim_{\gamma..} (x_j, \vec{g}_j, j) \iff \begin{cases} x_j = x_i \in \mathcal{O}_{ij} \\ \vec{g}_i = \gamma_{ij}(x_i) \circ \vec{g}_j \end{cases},$$

a nadto odwzorowania

$$\mu_{\tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{O}}} : \tilde{\mathbf{P}}_{\mathcal{O}} \rightarrow \text{Obj } \mathcal{G} : [(x, \vec{g}, i)] \mapsto s(\vec{g})$$

$$\begin{aligned}\pi_{\vec{P}_\theta} &: \vec{P}_\theta \longrightarrow B : [(x, \vec{g}, i)] \longmapsto x, \\ \rho_{\vec{P}_\theta} &: \vec{P}_\theta \times_{\mu_{\vec{P}_\theta}} \times_t \text{Mor } \mathcal{G} \longrightarrow \vec{P}_\theta : ((x, \vec{g}, i), \vec{h}) \longmapsto [(x, \vec{g} \circ \vec{h}, i)].\end{aligned}$$

Piątka

$$\vec{\mathcal{P}}_\theta := (\vec{P}_\theta, B, \pi_{\vec{P}_\theta}, \mu_{\vec{P}_\theta}, \rho_{\vec{P}_\theta})$$

jest wiązką główną o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  nad  $B$ . ■

*Dowód:* Po pierwsze bez trudu przekonujemy się, że (4.1.25) jest relacją równoważności w konsekwencji własności definiujących obiektów  $\gamma_{ij}$ . Argumentując analogicznie jak w dowodzie Tw. 4.1.1 oraz Tw. 4.2.15, konstatujemy zatem, że zbiór  $\vec{P}_\theta$  można wyposażyć w strukturę rozmierności gładkiej, będącej obrazem surjektywnej submersji

$$\pi_\sim : \bigsqcup_{i \in I} \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G} \twoheadrightarrow \vec{P}_\theta : (x, \vec{g}, i) \longmapsto [(x, \vec{g}, i)]$$

i lokalnie dyfeomorficznej z  $\mu_i^* \mathcal{U}_\mathcal{G}$ , przy czym odwzorowanie  $\pi_{\vec{P}_\theta}$  zyskuje względem tej struktury status surjektywnej submersji, a  $\mu_{\vec{P}_\theta}$  i  $\rho_{\vec{P}_\theta}$  są gładkie na mocy Stw. 117 jako jedyne domknięcia stosownych diagramów przemiennych:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Obj } \mathcal{G} \\ & \nearrow \mu_\sqcup & \uparrow \mu_{\vec{P}_\theta} \\ \bigsqcup_{i \in I} \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G} & \xrightarrow{\pi_\sim} & \vec{P}_\theta \end{array},$$

oraz

$$\begin{array}{ccc} & & \vec{P}_\theta \\ & \nearrow \pi_\sim \circ \tilde{R} & \uparrow \rho_{\vec{P}_\theta} \\ \bigsqcup_{i \in I} \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G}_{\mu_\sqcup \times_t \text{Mor } \mathcal{G}} & \xrightarrow{\pi_\sim \times \text{id}_{\text{Mor } \mathcal{G}}} & \vec{P}_\theta \times_{\mu_{\vec{P}_\theta}} \times_t \text{Mor } \mathcal{G} \end{array},$$

w których zapisie występują odwzorowania jawnie gładkie:

$$\mu_\sqcup : \bigsqcup_{i \in I} \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G} \longrightarrow \text{Obj } \mathcal{G} : (x, \vec{g}, i) \longmapsto s(\vec{g})$$

oraz

$$\tilde{R} : \bigsqcup_{i \in I} \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G}_{\mu_\sqcup \times_t \text{Mor } \mathcal{G}} \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} \mu_i^* \text{Mor } \mathcal{G} : ((x, \vec{g}, i), \vec{h}) \longmapsto (x, \vec{g} \circ \vec{h}, i).$$

Jedynym, co należy okazać, jest to, że odwzorowanie gładkie  $\rho_{\vec{P}_\theta}$  określa na trójce  $(\vec{P}_\theta, \mu_{\vec{P}_\theta}, \rho_{\vec{P}_\theta})$  strukturę  $\mathcal{G}$ -rozmierności prawostronnej, odwzorowanie  $\pi_{\vec{P}_\theta}$  jest niezmiennicze względem działania grupoidu  $\mathcal{G}$ , a odwzorowanie  $(\text{pr}_1, \rho_{\vec{P}_\theta})$  jest dyfeomorfizmem, co implikuje swobodny i przechodni charakter działania  $\mathcal{G}$ . Prawdziwość pierwszej z tych stwierdzeń wynika wprost z (wcześniejszych ustaleń oraz

tożsamości

$$\begin{aligned}
\mu_{\bar{p}_\theta}([(x, \vec{g}, i)].\vec{h}) &= \mu_{\bar{p}_\theta}([(x, \vec{g} \circ \vec{h}, i)]) = s(\vec{g} \circ \vec{h}) = s(\vec{h}), \\
[(x, \vec{g}, i)].\text{Id}_{\mu_{\bar{p}_\theta}([(x, \vec{g}, i)])} &= [(x, \vec{g} \circ \text{Id}_{\mu_{\bar{p}_\theta}([(x, \vec{g}, i)])}, i)] \\
&= [(x, \vec{g} \circ \text{Id}_{s(\vec{g})}, i)] = [(x, \vec{g}, i)], \\
([(x, \vec{g}, i)].\vec{h}_1).\vec{h}_2 &= [(x, \vec{g} \circ \vec{h}_1, i)].\vec{h}_2 = [(x, \vec{g} \circ \vec{h}_1 \circ \vec{h}_2, i)] \\
&= [(x, \vec{g}, i)].(\vec{h}_1 \circ \vec{h}_2),
\end{aligned}$$

a  $\mathcal{G}$ -niezmienniczość  $\pi_{\bar{p}_\theta}$  jest oczywista. Ażeby udowodnić tezę ostatnią, zauważamy, że para  $([(x_i, \vec{g}_i, i)], [(x_j, \vec{g}_j, j)])$  o wspólnym rzucie na  $B$ , tj. taka o  $x_j = x_i =: x \in \mathcal{O}_{ij}$ , jednoznacznie określa morfizm

$$\vec{h}(x) := \vec{g}_i^{-1} \circ \gamma_{ij}(x) \circ \vec{g}_j,$$

przy czym powyższa definicja jest sensowna, co wynika z równości

$$t(\gamma_{ij}(x)) = \mu_i(x) = t(\vec{g}_i) = s(\vec{g}_i^{-1}), \quad s(\gamma_{ij}(x)) = \mu_j(x) = t(\vec{g}_j),$$

a do tego niezależna od wyboru przedstawicieli obu klas abstrakcji. W rzeczy samej, dla dowolnych  $[(x_k, \vec{g}_k, k)] = [(x_i, \vec{g}_i, i)]$  oraz  $[(x_l, \vec{g}_l, l)] = [(x_j, \vec{g}_j, j)]$  (spełniających nieodzownie warunek  $x_k = x_l = x \in \mathcal{O}_{ijkl}$ ), wyznaczamy

$$\begin{aligned}
\vec{g}_k^{-1} \circ \gamma_{kl}(x) \circ \vec{g}_l &= (\gamma_{ki}(x) \circ \vec{g}_i)^{-1} \circ \gamma_{kl}(x) \circ (\gamma_{lj}(x) \circ \vec{g}_j) \\
&= \vec{g}_i^{-1} \circ \gamma_{ik}(x) \circ \gamma_{kl}(x) \circ \gamma_{lj}(x) \circ \vec{g}_j = \vec{g}_i^{-1} \circ \gamma_{ij}(x) \circ \vec{g}_j.
\end{aligned}$$

Na tej podstawie możemy już zapostulować postać jawnie gładkiej odwrotności odwzorowania  $(\text{pr}_1, \rho_{\bar{p}_\theta})$ , a mianowicie

$$(\text{pr}_1, \rho_{\bar{p}_\theta})^{-1}([(x_i, \vec{g}_i, i)], [(x_j, \vec{g}_j, j)]) := ([x_i, \vec{g}_i, i], \vec{h}(x_i)),$$

a następnie zweryfikować jej pożądane własności:

$$\begin{aligned}
&(\text{pr}_1, \rho_{\bar{p}_\theta}) \circ (\text{pr}_1, \rho_{\bar{p}_\theta})^{-1}([(x_i, \vec{g}_i, i)], [(x_j, \vec{g}_j, j)]) \\
&= ([x_i, \vec{g}_i, i], [(x_i, \vec{g}_i \circ \vec{g}_i^{-1} \circ \gamma_{ij}(x) \circ \vec{g}_j, i)]) \\
&= ([x_i, \vec{g}_i, i], [(x_i, \gamma_{ij}(x) \circ \vec{g}_j, i)]) = ([x_i, \vec{g}_i, i], [(x_j, \vec{g}_j, j)])
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&(\text{pr}_1, \rho_{\bar{p}_\theta})^{-1} \circ (\text{pr}_1, \rho_{\bar{p}_\theta})([x_i, \vec{g}_i, i], \vec{g}) \\
&= (\text{pr}_1, \rho_{\bar{p}_\theta})^{-1}([(x_i, \vec{g}_i, i)], [(x_i, \vec{g}_i \circ \vec{g}, i)]) \\
&= ([x_i, \vec{g}_i, i], \vec{g}_i^{-1} \circ \gamma_{ii}(x_i) \circ (\vec{g}_i \circ \vec{g})) = ([x_i, \vec{g}_i, i], \vec{g}).
\end{aligned}$$

□

Opis lokalny można również rozwinąć w odniesieniu do morfizmów między wiązkami głównymi o wspólnym grupoidzie strukturalnych<sup>5</sup>. Zaczniemy od

<sup>5</sup>Nic nie stoi na przeszkodzie, aby rozważania te rozszerzyć na klasę wiązek głównych o dowolnych grupoidach strukturalnych. Mając na względzie przyszłe zastosowania rozwijanej tu

**TWIERDZENIE 4.1.5.** *Przyjmijmy zapis Def. 137. Niechaj  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^{\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema wiązkami głównymi o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$ , o odnośnych danych trywializacji lokalnej  $(\mathcal{O}, \mu_i^{\alpha}, \gamma_{jk}^{\alpha} \mid i \in I, (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}})$ ,  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ . Istnienie morfizmu  $(\Theta, \text{id}_B, (\text{id}_{\text{Obj } \mathcal{G}}, \text{id}_{\text{Mor } \mathcal{G}})) : \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1 \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2$  jest równoważne istnieniu rodziny  $\{\theta_i\}_{i \in I}$  odwzorowań lokalnie gładkich*

$$\theta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mor } \mathcal{G}$$

o własnościach:

- (i)  $\forall_{i \in I} : (s \circ \theta_i = \mu_i^1 \quad \wedge \quad t \circ \theta_i = \mu_i^2);$
- (ii)  $\forall_{(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}, x \in \mathcal{O}_{i, j}} : \theta_i(x) \circ \gamma_{ij}^1(x) = \gamma_{ij}^2(x) \circ \theta_j(x).$

■

*Dowód:* Rozważmy cięcia lokalne  $\sigma_i^{\alpha} : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{G}}^{\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  oraz odnośne trywializacje lokalne  $\tau_i^{\alpha} : \pi_{\mathbf{P}_{\mathcal{G}}^{\alpha}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mu_i^{\alpha} * \text{Mor } \mathcal{G}$  stowarzyszone z danymi lokalnymi z treści stwierdzenia i niech  $\phi_{\mathbf{P}_{\mathcal{G}}^{\alpha}} : \mathbf{P}_{\mathcal{G}}^{\alpha[2]} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{G}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą odwzorowaniami ilorazowymi. Jako że  $\Theta$  zachowuje włókna, stwierdzamy, nad dowolnym  $x \in \mathcal{O}_i$ , równość

$$\tau_i^2 \circ \Theta \circ \sigma_i^1(x) = \left( x, \phi_{\mathbf{P}_{\mathcal{G}}^2}(\sigma_i^2(x), \Theta \circ \sigma_i^1(x)) \right),$$

skąd też

$$\Theta \circ \sigma_i^1(x) = \sigma_i^2(x) \cdot \phi_{\mathbf{P}_{\mathcal{G}}^2}(\sigma_i^2(x), \Theta \circ \sigma_i^1(x)).$$

Definiujemy

$$\theta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{Mor } \mathcal{G} : x \mapsto \phi_{\mathbf{P}_{\mathcal{G}}^2}(\sigma_i^2(x), \Theta \circ \sigma_i^1(x)),$$

po czym, przywoławszy punkt (ii) Stw. 220 oraz definiującą własność morfizmu wiązek głównych o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$  zapisaną w poddiagramie wewnętrznym diagramu (4.1.23), bez trudu wyprowadzamy pożądaną tożsamość,

$$s \circ \theta_i(x) = \mu_{\mathbf{P}_2} \circ \Theta \circ \sigma_i^1(x) = \mu_{\mathbf{P}_1} \circ \sigma_i^1(x) \equiv \mu_i^1(x).$$

Następnie, raz jeszcze korzystając z punktu (ii) Stw. 220, sprawdzamy tożsamość

$$t \circ \theta_i(x) = \mu_{\mathbf{P}_2} \circ \sigma_i^2(x) \equiv \mu_i^2(x).$$

Wreszcie na koniec, własność morfizmu  $\Theta$  zapisana w diagramie (1.6.2), pozwala nam zweryfikować własność (ii),

$$\begin{aligned} & \sigma_j^2(x) \cdot (\theta_j(x) \circ \gamma_{ji}^1(x)) \equiv \tau_j^{2-1}(x, \text{Id}_{\mu_j^2(x)}) \cdot (\theta_j(x) \circ \gamma_{ji}^1(x)) \\ &= \left( \tau_j^{2-1}(x, \text{Id}_{\mu_j^2(x)}) \cdot \theta_j(x) \right) \cdot \gamma_{ji}^1(x) = \Theta \circ \tau_j^{1-1}(x, \text{Id}_{\mu_j^1(x)}) \cdot \gamma_{ji}^1(x) \\ &= \Theta \circ \tau_j^{1-1}(x, \gamma_{ji}^1(x)) = \Theta \circ \tau_j^{1-1} \circ \tau_j^1 \circ \tau_i^{1-1}(x, \text{Id}_{\mu_i^1(x)}) \equiv \Theta \circ \tau_i^{1-1}(x, \text{Id}_{\mu_i^1(x)}) \\ &= \tau_i^{2-1}(x, \theta_i(x)) = \tau_j^{2-1} \circ \tau_j^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, \text{Id}_{\mu_i^2(x)}) \cdot \theta_i(x) = \sigma_j^2(x) \cdot (\gamma_{ji}^2(x) \circ \theta_j(x)), \end{aligned}$$

przy czym skorzystaliśmy z tego, że działanie grupoidu  $\mathcal{G}$  na  $\mathbf{P}_{\mathcal{G}}^2$  jest swobodne.

---

teorii, nie uczynimy tego jednak, posłuszni zasadzie ekonomii rozumowania: *Frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora.*

I odwrotnie, niechaj  $\{\theta_i\}_{i \in I}$  będzie rodziną odwzorowań lokalnie gładkich spełniających warunki (i) i (ii). Pokażemy, że te indukują (izo)morfizmy wiązek głównych  $\mu_i^1 * \mathcal{U}_{\mathcal{G}} \cong \mu_i^2 * \mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ ,  $i \in I$  pomiędzy trywializacjami lokalnymi wiązek  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1$  i – odpowiednio –  $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2$ . Zdefiniujmy odwzorowania (jawnie gładkie)

$$\tilde{\theta}_i : \mathcal{O}_{i\mu_i^1 \times_t \text{Mor } \mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{O}_{i\mu_i^2 \times_t \text{Mor } \mathcal{G}} : (x, \bar{g}) \longmapsto (x, \theta_i(x) \circ \bar{g}), \quad i \in I.$$

Definicja powyższa ma sens, oto bowiem dla dowolnej pary  $(x, \bar{g})$  o własności  $\mu_i^1(x) = t(\bar{g})$  obliczamy

$$s(\theta_i(x)) = \mu_i^1(x) = t(\bar{g})$$

oraz

$$t(\theta_i(x) \circ \bar{g}) = t \circ \theta_i(x) = \mu_i^2(x).$$

Odwzorowanie to jest surjektywne,

$$(x, \bar{g}) \in \mathcal{O}_{i\mu_i^2 \times_t \text{Mor } \mathcal{G}} \quad \Rightarrow \quad (x, \bar{g}) = \tilde{\theta}_i(x, \theta_i(x)^{-1} \circ \bar{g}),$$

zachowuje włókna,

$$\pi_{\mu_i^2 * \text{Mor } \mathcal{G}} \circ \tilde{\theta}_i(x, \bar{g}) \equiv \text{pr}_1(x, \theta_i(x) \circ \bar{g}) = x = \text{pr}_1(x, \bar{g}) \equiv \pi_{\mu_i^1 * \text{Mor } \mathcal{G}}(x, \bar{g}),$$

splata ze sobą momenty,

$$\mu_{\mu_i^2 * \text{Mor } \mathcal{G}} \circ \tilde{\theta}_i(x, \bar{g}) \equiv s \circ \text{pr}_2(x, \theta_i(x) \circ \bar{g}) = s(\bar{g}) = s \circ \text{pr}_2(x, \bar{g}) \equiv \mu_{\mu_i^1 * \text{Mor } \mathcal{G}}(x, \bar{g}),$$

a do tego jest jawnie (prawo-) $\mathcal{G}$ -ekwiwariantne,

$$\tilde{\theta}_i((x, \bar{g}) \cdot \bar{h}) \equiv \tilde{\theta}_i(x, \bar{g} \circ \bar{h}) = (x, \theta_i(x) \circ \bar{g} \circ \bar{h}) = (x, \theta_i(x) \circ \bar{g}) \cdot \bar{h} \equiv \tilde{\theta}_i(x, \bar{g}) \cdot \bar{h},$$

co w sumie oznacza, że jest morfizmem (czyli izomorfizmem) wiązek głównych o grupoidzie strukturalnym  $\mathcal{G}$ . Warunek (ii) tłumaczy się bezpośrednio na tożsamości

$$\forall (i, j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}} : \tilde{\theta}_i \circ \tau_{ij}^1 = \tau_{ij}^2 \circ \tilde{\theta}_j \upharpoonright_{\mu_i^{\alpha} * \text{Mor } \mathcal{G} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}},$$

w których zapisie użyliśmy oznaczeń

$$\tau_{ij}^{\alpha} \equiv \tau_i^{\alpha} \circ \tau_j^{\alpha-1} \upharpoonright_{\mu_i^{\alpha} * \text{Mor } \mathcal{G} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}}, \quad \alpha \in \{1, 2\},$$

patrz: dowód Stw. 223. Tożsamości te pozwalają nam przekonać się, że lokalne izomorfizmy

$$\Theta_i := \tau_i^{2-1} \circ \tilde{\theta}_i \circ \tau_i^1 : \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2}^{-1}(\mathcal{O}_i)$$

są w istocie ograniczeniami postulowanego izomorfizmu wiązek głównych

$$\Theta : \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}_{\mathcal{G}}^2, \quad \Theta \upharpoonright_{\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} \equiv \Theta_i,$$

oto bowiem w dowolnym punkcie  $p \in \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}^1}^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$ ,  $(i, j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}}$  otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \Theta_j(p) &\equiv \tau_j^{2-1} \circ \tilde{\theta}_j \circ \tau_j^1(p) \equiv \tau_i^{2-1} \circ \tau_{ji}^{2-1} \circ \tilde{\theta}_j \circ \tau_{ji}^1 \circ \tau_i^1(p) \\ &= \tau_i^{2-1} \circ \tau_{ji}^{2-1} \circ \tau_{ji}^2 \circ \tilde{\theta}_i \circ \tau_i^1(p) = \tau_i^{2-1} \circ \tilde{\theta}_i \circ \tau_i^1(p) \equiv \Theta_i(p). \end{aligned}$$

□



## 6.2. Wiązki grupoidalne.

DEFINICJA 138. Przyjmijmy zapis Def. 96 i 127 oraz Tw. 1.4.24 i niechaj  $\mathcal{G} = (\text{Obj } \mathcal{G}, \text{Mor } \mathcal{G}, s, t, \text{Id}, \text{Inv}, \circ)$  będzie grupoidem Liego. **Wiązka grupoidalna nad  $B$  modelowana na  $\mathcal{G}$**  to dziesiątka

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}} = (E_0, E_1, B, \mathcal{G}, \pi_{E_0}, \pi_{E_1}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{A}d, \mathcal{I}nv, \diamond)$$

złożona z rozmaitości gładkiej (klasy  $C^\infty$ )  $B$ , zwanej **bazą (wiązki grupoidalnej)**, pary wiązek włóknistych (klasy  $C^\infty$ ):

- $(E_0, B, \text{Obj } \mathcal{G}, \pi_{E_0})$  zwanej **wiązką obiektów**;
- $(E_1, B, \text{Mor } \mathcal{G}, \pi_{E_1})$  zwanej **wiązką strzałek**

oraz piątki morfizmów wiązek włóknistych (klasy  $C^\infty$ ):

- surjektywnych submersji  $\mathcal{S}, \mathcal{T} : E_1 \rightarrow E_0$ , zwanych – odpowiednio – **morfizmem początku ( $\mathcal{S}$ )** oraz **morfizmem końca ( $\mathcal{T}$ )**;
- $\mathcal{A}d : E_0 \rightarrow E_1$  zwanego **morfizmem identyczności**;
- $\mathcal{I}nv : E_1 \circlearrowleft E_1$  zwanego **morfizmem inwersji**;
- $\diamond : E_1 \mathcal{S} \times \mathcal{T} E_1 \rightarrow E_1$  zwanego **morfizmem złożenia**,

wraz z trywializacjami lokalnymi wiązek  $E_\alpha$ ,  $\alpha \in \{0, 1\}$  nad wspólnym pokryciem  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$ ,

$$\tau_i^0 : \pi_{E_0}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \text{Obj } \mathcal{G}, \quad \tau_i^1 : \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \text{Mor } \mathcal{G}, \quad i \in I$$

splatającymi powyższe morfizmy wiązek z modelującymi je morfizmami strukturalnymi grupoidu  $\mathcal{G}$  w sensie określonym przez rodzinę diagramów przemiennych indeksowaną przez zbiór  $I \ni i$ :

$$\begin{array}{ccc} \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i^1} & \mathcal{O}_i \times \text{Mor } \mathcal{G} \\ \mathcal{S} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{O}_i} \times s \\ \pi_{E_0}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i^0} & \mathcal{O}_i \times \text{Obj } \mathcal{G} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i^1} & \mathcal{O}_i \times \text{Mor } \mathcal{G} \\ \mathcal{T} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{O}_i} \times t \\ \pi_{E_0}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i^0} & \mathcal{O}_i \times \text{Obj } \mathcal{G} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_{E_0}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i^0} & \mathcal{O}_i \times \text{Obj } \mathcal{G} \\ \mathcal{A}d \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{O}_i} \times \text{Id} \\ \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i^1} & \mathcal{O}_i \times \text{Mor } \mathcal{G} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i^1} & \mathcal{O}_i \times \text{Mor } \mathcal{G} \\ \mathcal{I}nv \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{O}_i} \times \text{Inv} \\ \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i^1} & \mathcal{O}_i \times \text{Mor } \mathcal{G} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \mathcal{S} \times \mathcal{T} \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\iota_\times \circ (\tau_i^1 \times \tau_i^1)} & \mathcal{O}_i \times (\text{Mor } \mathcal{G}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{G}) \\ \diamond \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{O}_i} \times \circ \\ \pi_{E_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\tau_i^1} & \mathcal{O}_i \times \text{Mor } \mathcal{G} \end{array},$$

z których ostatni został zapisany w terminach dyfeomorfizmu

$$\iota_\times \equiv \text{pr}_{1,2,4} : (\mathcal{O}_i \times \text{Mor } \mathcal{G})_{\text{id}_{\mathcal{O}_i} \times s} \times_{\text{id}_{\mathcal{O}_i} \times t} (\mathcal{O}_i \times \text{Mor } \mathcal{G}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times (\text{Mor } \mathcal{G}_s \times_t \text{Mor } \mathcal{G})$$

$$: ((x, \vec{g}), (x, \vec{h})) \mapsto (x, (\vec{g}, \vec{h})).$$

Jest więc wiązka grupoidalna szczególnym przykładem obiektu grupoidalnego w kategorii  $\mathbf{Bun}(B)$ .

**Morfizm wiązek grupoidalnych** pomiędzy wiązkami  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(\alpha)}}^\alpha = (E_0^{(\alpha)}, E_1^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}, \pi_{E_0^{(\alpha)}}, \pi_{E_1^{(\alpha)}})$ ,  $\mathcal{G}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{A}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{N}v^{(\alpha)}$ ,  $\diamond^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  **modelowany na morfizmie grupoidów**  $(\chi_0, \chi_1) : \mathcal{G}^{(1)} \rightarrow \mathcal{G}^{(2)}$  to piątka

$$(\Phi_0, \Phi_1, f, \phi, (\chi_0, \chi_1))$$

złożona z

- odwzorowania gładkiego  $f : B_1 \rightarrow B_2$  pomiędzy bazami wiązek;
- morfizmów wiązek włóknistych opisanych przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc} E_0^{(1)} & \xrightarrow{\Phi_0} & E_0^{(2)} \\ \pi_{E_0^{(1)}} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_0^{(2)}} \\ B^{(1)} & \xrightarrow{f} & B^{(2)} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} E_1^{(1)} & \xrightarrow{\Phi_1} & E_1^{(2)} \\ \pi_{E_1^{(1)}} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_1^{(2)}} \\ B^{(1)} & \xrightarrow{f} & B^{(2)} \end{array}$$

- odwzorowania  $\phi : I^{(1)} \rightarrow I^{(2)}$  pomiędzy zbiorami indeksującymi pokrycia trywializujące  $\mathcal{O}^{(\alpha)} = \{\mathcal{O}_{i^{(\alpha)}}\}_{i^{(\alpha)} \in I^{(\alpha)}}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  wiązek, o których mowa wyżej, o własności<sup>6</sup>

$$\forall_{i \in I^{(1)}} : f(\mathcal{O}_i^{(1)}) \subset \mathcal{O}_{\phi(i)}^{(2)},$$

które są przemienne ze wszystkimi morfizmami strukturalnymi obu wiązek w sensie określonym przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccccc} E_1^{(1)} & \xrightarrow{\mathcal{S}^{(1)}} & E_0^{(1)} & \xleftarrow{\mathcal{T}^{(1)}} & E_1^{(1)} \\ \Phi_1 \downarrow & & \downarrow \Phi_0 & & \downarrow \Phi_1 \\ E_1^{(2)} & \xrightarrow{\mathcal{S}^{(2)}} & E_0^{(2)} & \xleftarrow{\mathcal{T}^{(2)}} & E_1^{(2)} \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} E_0^{(1)} & \xrightarrow{\mathcal{A}^{(1)}} & E_1^{(1)} \\ \Phi_0 \downarrow & & \downarrow \Phi_1 \\ E_0^{(2)} & \xrightarrow{\mathcal{A}^{(2)}} & E_1^{(2)} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} E_1^{(1)} & \xrightarrow{\mathcal{N}v^{(1)}} & E_1^{(1)} \\ \Phi_1 \downarrow & & \downarrow \Phi_1 \\ E_1^{(2)} & \xrightarrow{\mathcal{N}v^{(2)}} & E_1^{(2)} \end{array},$$

<sup>6</sup>Jego istnienie nie narzuca dodatkowych warunków na opisywany tu obiekt, oto bowiem mając dowolne pokrycia otwarte  $B^{(1)}$  i  $B^{(2)}$  trywializujące odnośne wiązki grupoidalne (w sposób opisany wcześniej), możemy dokonać rozdrobnienia tego pierwszego względem przeciwobrazów tego ostatniego wzdłuż odwzorowania (ciągłego)  $f$ , otrzymując w ten sposób pokrycie o pożądanych własnościach.

$$\begin{array}{ccc}
 E_1^{(1)} \mathcal{S}^{(1)} \times \mathcal{T}^{(1)} E_1^{(1)} & \xrightarrow{\diamond^{(1)}} & E_1^{(1)} \\
 \Phi_1 \times \Phi_1 \downarrow & & \downarrow \Phi_1 \\
 E_1^{(2)} \mathcal{S}^{(2)} \times \mathcal{T}^{(2)} E_1^{(2)} & \xrightarrow{\diamond^{(2)}} & E_1^{(2)}
 \end{array} ,$$

a do tego są modelowane lokalnie na morfizmie (grupoidów Liego)  $(\chi_0, \chi_1)$  w sensie określonym przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{E_0^{(1)}}^{-1}(\mathcal{O}_i^{(1)}) & \xrightarrow{\tau_i^{0(1)}} & \mathcal{O}_i^{(1)} \times \text{Obj } \mathcal{G}^{(1)} \\
 \Phi_0 \downarrow & & \downarrow f \times \chi_0 \\
 \pi_{E_0^{(2)}}^{-1}(\mathcal{O}_{\phi(i)}^{(2)}) & \xrightarrow{\tau_{\phi(i)}^{0(2)}} & \mathcal{O}_{\phi(i)}^{(2)} \times \text{Obj } \mathcal{G}^{(2)}
 \end{array} ,$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{E_1^{(1)}}^{-1}(\mathcal{O}_i^{(1)}) & \xrightarrow{\tau_i^{1(1)}} & \mathcal{O}_i^{(1)} \times \text{Mor } \mathcal{G}^{(1)} \\
 \Phi_1 \downarrow & & \downarrow f \times \chi_1 \\
 \pi_{E_1^{(2)}}^{-1}(\mathcal{O}_{\phi(i)}^{(2)}) & \xrightarrow{\tau_{\phi(i)}^{1(2)}} & \mathcal{O}_{\phi(i)}^{(2)} \times \text{Mor } \mathcal{G}^{(2)}
 \end{array} .$$

Wiązki grupoidalne nad  $B$  modelowane na grupoidzie Liego  $\mathcal{G}$  wraz z odpowiednimi morfizmami wiązek grupoidalnych między nimi modelowanych na automorfizmie identycznościowym  $(\text{id}_{\text{Obj } \mathcal{G}}, \text{id}_{\text{Mor } \mathcal{G}})$  tworzą **kategorię wiązek grupoidalnych modelowanych na grupoidzie  $\mathcal{G}$  nad  $B$** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathcal{G}\text{-Bun}(B).$$

▲

UWAGA 55. O tym, że morfizm złożenia jest w istocie morfizmem wiązek włóknistych nad  $B$ , przesądza prosty rachunek bezpośredni przeprowadzony dla dowolnego  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E_1 \mathcal{S} \times \mathcal{T} E_1$ ,

$$\pi_{E_1}(\varepsilon_1) = \pi_{E_0} \circ \mathcal{S}(\varepsilon_1) = \pi_{E_0} \circ \mathcal{T}(\varepsilon_2) = \pi_{E_1}(\varepsilon_2),$$

a wykorzystujący to, że odwzorowania  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  są (z założenia) morfizmami wiązek włóknistych. Powyższy rachunek pozwala zapisać

$$E_1 \mathcal{S} \times \mathcal{T} E_1 \subset E_1 \pi_{E_1} \times \pi_{E_1} E_1.$$

▬

PRZYKŁAD(Y) 41. Grupoid działania  $G \rtimes E$  stowarzyszony z działaniem  $\Lambda : G \times E \rightarrow E$  grupy Liego  $G$  na przestrzeni totalnej  $E$  wiązki włóknistej  $(E, B, F, \pi_E)$  poprzez jej automorfizmy  $(\Lambda_g, \text{id}_B) : E \xrightarrow{\cong} E, g \in G$  modelowane

lokalnie, tj. w obrazie trywializacji lokalnych  $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times F$ ,  $i \in I$  stowarzyszonych z pokryciem otwartym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$ , na automorfizmach  $\lambda_g : F \xrightarrow{\cong} F$ ,  $g \in G$  włókna typowego  $F$  w sensie wyrażanym przez rodzinę diagramów przemiennych indeksowaną przez  $I \ni i$  (oraz  $G \ni g$ )

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\Lambda_g} & \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times F & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{O}_i} \times \lambda_g} & \mathcal{O}_i \times F \end{array},$$

nieśie naturalną strukturę wiązki grupoidalnej modelowanej na grupoidzie działania  $G \ltimes F$  z Przykł. 29 (2), o wiązce obiektów  $(E, B, F, \pi_E)$ , wiązce strzałek  $(G \times E, B, G \times F, \pi_E \circ \text{pr}_2)$  i morfizmach strukturalnych (wiązek) tożsamy z stosownymi morfizmami strukturalnymi (grupoidu)  $G \ltimes E$ .

✓

**STWIERDZENIE 225.** *Przyjmijmy zapis Def. 138. Morfizmy strukturalne wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_G = (E_0, E_1, B, \pi_{E_0}, \pi_{E_1}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{A}, \mathcal{I}nv, \diamond)$  modelowanej na grupoidzie Liego  $\mathcal{G}$  spełniają tożsamości wyrażone przez diagramy przemiennie*

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & E_0 & \\ \mathcal{A} \swarrow & & \searrow \mathcal{A} \\ E_1 & \parallel \text{id}_{E_0} & E_1 \\ \mathcal{S} \searrow & & \swarrow \mathcal{T} \\ & E_0 & \end{array} & , & \begin{array}{ccccc} & E_0 & \xleftarrow{\mathcal{S}} & E_1 & \xrightarrow{\mathcal{T}} & E_0 \\ \text{id}_{E_0} \parallel & & & \downarrow \mathcal{I}nv & & \parallel \text{id}_{E_0} \\ & E_0 & \xleftarrow{\mathcal{S}} & E_1 & \xrightarrow{\mathcal{S}} & E_0 \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccccc} E_1 & \xleftarrow{\text{pr}_1} & E_1 \times_{\mathcal{S} \times \mathcal{T}} E_1 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E_1 \\ \mathcal{T} \downarrow & & \downarrow \diamond & & \downarrow \mathcal{S} \\ E_0 & \xleftarrow{\mathcal{S}} & E_1 & \xrightarrow{\mathcal{S}} & E_0 \end{array} ; \\ \\ \begin{array}{ccccc} E_0 \times_{\text{id}_{E_0} \times \mathcal{T}} E_1 & \xrightarrow{\mathcal{A} \times \text{id}_{E_1}} & E_1 \times_{\mathcal{S} \times \mathcal{T}} E_1 & \xleftarrow{\text{id}_{E_1} \times \mathcal{A}} & E_1 \times_{\mathcal{S} \times \text{id}_{E_0}} E_0 \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \diamond & \swarrow \text{pr}_1 & \\ & & E_1 & & \end{array} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 E_1 & \xrightarrow{(\mathcal{I}nv, id_{E_1})} & E_1 \times_{\mathcal{S} \times \mathcal{T}} E_1 & \xleftarrow{(id_{E_1}, \mathcal{I}nv)} & E_1 \\
 \downarrow \mathcal{S} & & \downarrow \diamond & & \downarrow \mathcal{T} \\
 E_0 & \xrightarrow{\mathcal{A}} & E_1 & \xleftarrow{\mathcal{A}} & E_0
 \end{array} ,$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 \times_{\mathcal{S} \times \mathcal{T}} E_1 \times_{\mathcal{S} \times \mathcal{T}} E_1 & \xrightarrow{\diamond \times id_{E_1}} & E_1 \times_{\mathcal{S} \times \mathcal{T}} E_1 \\
 \downarrow id_{E_1} \times \diamond & & \downarrow \diamond \\
 E_1 \times_{\mathcal{S} \times \mathcal{T}} E_1 & \xrightarrow{\diamond} & E_1
 \end{array} .$$

■

*Dowód:* Tożsamości te są spełnione w obrazie trywializacji lokalnych współdefiniujących  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  wprost na mocy Def. 96, są zatem spełnione globalnie. □

DEFINICJA 139. Przyjmijmy zapis Def. 138 i niechaj  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} = (E_0, E_1, B, \pi_{E_0}, \pi_{E_1}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{A}, \mathcal{I}nv, \diamond)$  będzie wiązką grupoidalną modelowaną na grupoidzie Liego  $\mathcal{G} = (\text{Obj } \mathcal{G}, \text{Mor } \mathcal{G}, s, t, \text{Id}, \text{Inv}, \circ)$ . **Moduł lewostronny wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$**  to trójka

$$((M, B, \pi_M), \mathcal{M}, \mathcal{L})$$

złożona z surjektywnej submersji (klasy  $C^\infty$ )  $\pi_M : M \rightarrow B$  nad bazą  $B$ , współną<sup>7</sup> z wiązką grupoidalną  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ , oraz pary morfizmów (surjektywnych) submersji, w rozumieniu Def. 83,

- morfizmu

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & E_0 \\
 \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_{E_0} \\
 B & \xrightarrow{id_B} & B
 \end{array} ,$$

zwanego **morfizmem momentu (lewostronnego)**;

- morfizmu

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 \times_{\mathcal{S} \times \mathcal{T}} M & \xrightarrow{\mathcal{L}} & M \\
 \downarrow \pi_M \circ \text{pr}_2 & & \downarrow \pi_M \\
 B & \xrightarrow{id_B} & B
 \end{array} ,$$

zwanego **morfizmem działania (lewostronnego)**

<sup>7</sup>Rzecz jasna, moglibyśmy rozpatrywać także konstrukcje ogólniejsze od tej przedstawionej tutaj, w których bazy obu surjektywnych submersji (a wręcz bazy wiązki obiektów i wiązki strzałek współdefiniujących pierwszą z nich, czyli wiązkę grupoidalną) byłyby różne – tym, co decyduje o zawężeniu pola dociekań, jest po raz kolejny samoograniczający imperatyw pragmatyzmu i przejrzystości.

spełniających warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 \times_{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{M}} M & \xrightarrow{\mathcal{L}} & M \\
 \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \mathcal{M} \\
 E_1 & \xrightarrow{\mathcal{I}} & E_0
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\Delta} & M_{\pi_M \times \pi_M} M \\
 \mathcal{L} \uparrow & & \downarrow \mathcal{M} \times \text{id}_M \\
 E_1 \times_{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{M}} M & \xleftarrow{\mathcal{A} \times \text{id}_M} & E_0 \times_{\text{id}_{E_0}} \times_{\mathcal{M}} M
 \end{array}
 , \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 E_1 \times_{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{I}} E_1 \times_{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{M}} M & \xrightarrow{\diamond \times \text{id}_M} & E_1 \times_{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{M}} M \\
 \text{id}_{E_1} \times \mathcal{L} \downarrow & & \downarrow \mathcal{L} \\
 E_1 \times_{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{M}} M & \xrightarrow{\mathcal{L}} & M
 \end{array}
 ,$$

w których zapisie  $\Delta$  jest morfizmem submersji

$$\Delta : M \longrightarrow M_{\pi_M \times \pi_M} M : m \longmapsto (m, m).$$

**Moduł prawostronny wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$**  to trójka

$$((M, B, \pi_M), \mathcal{M}, \mathcal{R})$$

złożona z surjektywnej submersji (klasy  $C^\infty$ )  $(M, B, \pi_M)$  nad bazą  $B$ , wspólną z wiązką grupoidalną  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ , oraz pary morfizmów (surjektywnych) submersji:

- morfizmu

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\mathcal{M}} & E_0 \\
 \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_{E_0} \\
 B & \xlongequal{\text{id}_B} & B
 \end{array}
 ,$$

zwanego **morfizmem momentu (prawostronnego)**;

- morfizmu

$$\begin{array}{ccc}
 M \times_{\mathcal{M}} \times_{\mathcal{I}} E_1 & \xrightarrow{\mathcal{R}} & M \\
 \pi_M \circ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_M \\
 B & \xlongequal{\text{id}_B} & B
 \end{array}
 ,$$

zwanego **morfizmem działania (prawostronnego)**;

spełniających warunki wyrażone przez diagramy przemienne

$$\begin{array}{ccc}
 M \times_{\mathcal{M}} \times_{\mathcal{I}} E_1 & \xrightarrow{\mathcal{R}} & M \\
 \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \mathcal{M} \\
 E_1 & \xrightarrow{\mathcal{I}} & E_0
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\Delta} & M_{\pi_M \times \pi_M} M \\
 \mathcal{R} \uparrow & & \downarrow \text{id}_M \times \mathcal{M} \\
 M \times_{\mathcal{M}} \times_{\mathcal{I}} E_1 & \xleftarrow{\text{id}_M \times \mathcal{A}} & M \times_{\mathcal{M}} \times_{\text{id}_{E_0}} E_0
 \end{array}
 ,$$

$$\begin{array}{ccc}
M \times_{\mathcal{M} \times \mathcal{I}} E_1 \times_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}} E_1 & \xrightarrow{\text{id}_M \times \diamond} & M \times_{\mathcal{M} \times \mathcal{I}} E_1 \\
\mathcal{B} \times \text{id}_{E_1} \downarrow & & \downarrow \mathcal{R} \\
M \times_{\mathcal{M} \times \mathcal{I}} E_1 & \xrightarrow{\mathcal{R}} & M
\end{array}$$

Niechaj  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(\alpha)}} = (E_0^{(\alpha)}, E_1^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}, \pi_{E_0^{(\alpha)}}, \pi_{E_1^{(\alpha)}}, \mathcal{G}^{(\alpha)}, \mathcal{S}^{(\alpha)}, \mathcal{I}^{(\alpha)}, \mathcal{A}d^{(\alpha)}, \mathcal{I}nv^{(\alpha)}, \diamond^{(\alpha)})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema wiązkami grupoidalnymi modelowanymi na odnośnych grupoidach Liego  $\mathcal{G}^{(\alpha)} = (\text{Obj } \mathcal{G}^{(\alpha)}, \text{Mor } \mathcal{G}^{(\alpha)}, s^{(\alpha)}, t^{(\alpha)}, \text{Id}^{(\alpha)}, \text{Inv}^{(\alpha)}, \circ^{(\alpha)})$  i niech  $((M^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}, \pi_{M^{(\alpha)}}), \mathcal{M}^{(\alpha)}, \mathcal{L}^{(\alpha)})$  będą odnośnymi modułami lewostronnymi. **Morfizm modułów lewostronnych wiązek grupoidalnych** pomiędzy tymi ostatnimi to para

$$(\Theta, (\Phi_0, \Phi_1, f, \phi, (\chi_0, \chi_1)))$$

złożona z morfizmu (surjektywnych) submersji (klasy  $C^\infty$ )

$$\begin{array}{ccc}
M^{(1)} & \xrightarrow{\Theta} & M^{(2)} \\
\pi_{M^{(1)}} \downarrow & & \downarrow \pi_{M^{(2)}} \\
B^{(1)} & \xrightarrow{f} & B^{(2)}
\end{array}$$

oraz morfizmu wiązek grupoidalnych

$$(\Phi_0, \Phi_1, f, \phi, (\chi_0, \chi_1)) : \mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(1)}}^1 \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(2)}}^2,$$

które czynią poniższy diagram przemiennym:

$$\begin{array}{ccc}
E_1^{(1)} \times_{\mathcal{I}^{(1)} \times \mathcal{M}^{(1)}} M^{(1)} & \xrightarrow{\Phi_1 \times \Theta} & E_1^{(2)} \times_{\mathcal{I}^{(2)} \times \mathcal{M}^{(2)}} M^{(2)} \\
\mathcal{L}^{(1)} \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}^{(2)} \\
M^{(1)} & \xrightarrow{\Theta} & M^{(2)} \\
\mathcal{M}^{(1)} \downarrow & & \downarrow \mathcal{M}^{(2)} \\
E_0^{(1)} & \xrightarrow{\Phi_0} & E_0^{(2)}
\end{array}$$

Moduły lewostronne wiązek grupoidalnych  $\mathcal{G}$  wraz z odnośnymi morfizmami o składowej grupoidalnej  $(\Phi_0, \Phi_1, f, \phi, (\chi_0, \chi_1)) = (\text{id}_{E_0}, \text{id}_{E_1}, \text{id}_B, (\text{id}_{\text{Obj } \mathcal{G}}, \text{id}_{\text{Mor } \mathcal{G}}))$  tworzą **kategorię modułów lewostronnych wiązki grupoidalnej**  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ , którą oznaczamy symbolem

$$\mathbf{LMod}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}(B | \text{id}_B).$$

Niechaj  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(\alpha)}} = (E_0^{(\alpha)}, E_1^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}, \pi_{E_0^{(\alpha)}}, \pi_{E_1^{(\alpha)}}, \mathcal{G}^{(\alpha)}, \mathcal{S}^{(\alpha)}, \mathcal{I}^{(\alpha)}, \mathcal{A}d^{(\alpha)}, \mathcal{I}nv^{(\alpha)}, \diamond^{(\alpha)})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema wiązkami grupoidalnymi modelowanymi na odnośnych grupoidach Liego  $\mathcal{G}^{(\alpha)} = (\text{Obj } \mathcal{G}^{(\alpha)}, \text{Mor } \mathcal{G}^{(\alpha)}, s^{(\alpha)}, t^{(\alpha)}, \text{Id}^{(\alpha)}, \text{Inv}^{(\alpha)}, \circ^{(\alpha)})$  i

niech  $((M^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}, \pi_{M^{(\alpha)}}), \mathcal{M}^{(\alpha)}, \mathcal{R}^{(\alpha)})$  będą odnośnymi modułami prawostronnymi. **Morfizm modułów prawostronnych wiązek grupoidalnych** pomiędzy tymi ostatnimi to para

$$(\Theta, (\Phi_0, \Phi_1, f, \phi, (\chi_0, \chi_1)))$$

złożona z morfizmu (surjektywnych) submersji (klasy  $C^\infty$ )

$$\begin{array}{ccc} M^{(1)} & \xrightarrow{\Theta} & M^{(2)} \\ \pi_{M^{(1)}} \downarrow & & \downarrow \pi_{M^{(2)}} \\ B^{(1)} & \xrightarrow{f} & B^{(2)} \end{array}$$

oraz morfizmu wiązek grupoidalnych

$$(\Phi_0, \Phi_1, f, \phi, (\chi_0, \chi_1)) : \mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(1)}}^1 \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(2)}}^2,$$

które czynią poniższy diagram przemiennym:

$$\begin{array}{ccc} M^{(1)} \mathcal{M}^{(1)} \times_{\mathcal{T}^{(1)}} E_1^{(1)} & \xrightarrow{\Theta \times \Phi_1} & M^{(2)} \mathcal{M}^{(2)} \times_{\mathcal{T}^{(2)}} E_1^{(2)} \\ \mathcal{R}^{(1)} \downarrow & & \downarrow \mathcal{R}^{(2)} \\ M^{(1)} & \xrightarrow{\Theta} & M^{(2)} \\ \mathcal{M}^{(1)} \downarrow & & \downarrow \mathcal{M}^{(2)} \\ E_0^{(1)} & \xrightarrow{\Phi_0} & E_0^{(2)} \end{array} .$$

Moduły prawostronne wiązek grupoidalnych  $\mathcal{G}$  wraz z odnośnymi morfizmami o składowej grupoidalnej  $(\Phi_0, \Phi_1, f, \phi, (\chi_0, \chi_1)) = (\text{id}_{E_0}, \text{id}_{E_1}, \text{id}_B, (\text{id}_{\text{Obj } \mathcal{G}}, \text{id}_{\text{Mor } \mathcal{G}}))$  tworzą **kategorię modułów prawostronnych wiązki grupoidalnej**  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ , którą oznaczamy symbolem

$$\mathbf{RMod}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}(B | \text{id}_B).$$

▲

DEFINICJA 140. Przyjmijmy zapis Def. 139 i niechaj  $\mathcal{M} = ((M, B, \pi_M), \mathcal{M}, \mathcal{R})$  będzie modułem prawostronnym wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} = (E_0, E_1, B, \pi_{E_0}, \pi_{E_1}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{A}d, \mathcal{I}nv, \diamond)$  modelowanej na grupoidzie  $\mathcal{G}$ . Morfizm działania  $\mathcal{R}$  nazywamy

- **swobodnym włókno po włóknie** (lub **wolnym włókno po włóknie**), jeśli dla dowolnych  $(m, \varepsilon) \in M \mathcal{M} \times_{\mathcal{T}} E_1$  słuszną jest następująca implikacja

$$\mathcal{R}(m, \varepsilon) = p \quad \implies \quad \varepsilon = \mathcal{A}d \circ \mathcal{M}(p);$$

- **przechodnim włókno po włóknie** (lub **tranzytywnym włókno po włóknie**), jeśli dla dowolnych dwóch punktów  $p_1, p_2 \in M_{\pi_M(p_1)}$  istnieje strzałka  $\varepsilon \in E_1$  o własnościach:

$$\mathcal{T}(\varepsilon) = \mathcal{M}(p_1) \quad \wedge \quad p_2 = \mathcal{R}(p_1, \varepsilon).$$

Analogiczne pojęcia można wprowadzić w przypadku modułu lewostronnego wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ .





PRZYKŁAD(Y) 42. **Działanie regularne lewostronne** wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_G = (E_0, E_1, B, \pi_{E_0}, \pi_{E_1}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{A}, \mathcal{Inv}, \diamond)$  na (przestrzeni totalnej) surjektywnej submersji  $\mathcal{S} : E_1 \twoheadrightarrow E_0$ , które określamy przy użyciu morfizmu złożenia  $\diamond$  jako działanie o morfizmie momentu  $\mathcal{T}$  dane wzorem

$$\underline{\mathcal{L}} : E_1 \times_{\mathcal{S}} E_1 \longrightarrow E_1 : (\tilde{\varepsilon}, \varepsilon) \longmapsto \mathcal{L}(\tilde{\varepsilon}, \varepsilon),$$

indukuje na surjektywnej submersji  $(E_1, E_0, \mathcal{S})$  strukturę modułu lewostronnego wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_G$ . Podobnie **działanie regularne prawostronne** tejże wiązki grupoidalnej na (przestrzeni totalnej) surjektywnej submersji  $\mathcal{T} : E_1 \twoheadrightarrow E_0$  określone jako działanie o morfizmie momentu  $\mathcal{S}$  wedle formuły

$$\underline{\mathcal{R}} : E_1 \times_{\mathcal{T}} E_1 \longrightarrow E_1 : (\varepsilon, \tilde{\varepsilon}) \longmapsto \mathcal{L}(\varepsilon, \tilde{\varepsilon})$$

indukuje na surjektywnej submersji  $(E_1, E_0, \mathcal{T})$  strukturę modułu prawostronnego wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_G$ . Oba działania są jawnie swobodne i przechodnie wódkno po wódknie.



DEFINICJA 141. Przyjmijmy zapis Def. 139 i niechaj  $\mathcal{E}_G = (E_0, E_1, B, \pi_{E_0}, \pi_{E_1}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{A}, \mathcal{Inv}, \diamond)$  będzie wiązką grupoidalną modelowaną na grupoidzie Liego  $\mathcal{G} = (\text{Obj } \mathcal{G}, \text{Mor } \mathcal{G}, s, t, \text{Id}, \text{Inv}, \circ)$ . **Wiązka główna o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_G$  modelowanej na grupoidzie  $\mathcal{G}$**  to moduł prawostronny wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_G$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G} = (\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}, B, \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}}, \mathcal{R}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}}),$$

o składowych zwanych – odpowiednio – **przestrzenią totalną (wiązki)  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}$ , bazą (wiązki)  $B$ , rzutem na bazę (wiązki)  $\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}} : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G} \longrightarrow B$ , morfizmem momentu  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}} : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G} \longrightarrow E_0$  oraz morfizmem działania  $\mathcal{R}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}} : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G} \times_{\mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}}} E_1 \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}$ , dla którego morfizm**

$$(\text{pr}_1, \mathcal{R}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}}) : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G} \times_{\mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}}} E_1 \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G} \times_{\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}}} \times_{\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}}} \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G} \equiv \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}^{[2]}$$

jest dyfeomorfizmem, o gładkiej odwrotności postaci

$$(\text{pr}_1, \mathcal{R}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}})^{-1} =: (\text{pr}_1, \Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}}), \quad \Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}} : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}^{[2]} \longrightarrow E_1.$$

Jej składową  $\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}}$  nazwiemy **morfizmem ilorazowym**.

**Morfizm wiązek głównych  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(\alpha)}}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(\alpha)}}}, B^{(\alpha)}, \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(\alpha)}}}}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(\alpha)}}}}, \mathcal{R}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(\alpha)}}}})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o strukturalnych wiązkach grupoidalnych  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(\alpha)}} = (E_0^{(\alpha)}, E_1^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}, \pi_{E_0^{(\alpha)}}, \pi_{E_1^{(\alpha)}}, \mathcal{G}^{(\alpha)}, \mathcal{S}^{(\alpha)}, \mathcal{T}^{(\alpha)}, \mathcal{A}^{(\alpha)}, \mathcal{Inv}^{(\alpha)}, \diamond^{(\alpha)})$  modelowanych na grupoidach  $\mathcal{G}^{(\alpha)}$  to morfizm odnośnych modułów prawostronnych**

$$(\Theta, (\Phi_0, \Phi_1, f, \phi, (\chi_0, \chi_1))) : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(1)}}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}^{(2)}}}.$$

Wiązki główne o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_G$  modelowanej na grupoidzie  $\mathcal{G}$  i o bazie  $B$  wraz z odnośnymi morfizmami wiązek głównych (ze strukturalną wiązką grupoidalną) między nimi o składowej na wiązce strukturalnej  $(\Phi_0, \Phi_1, f, \phi,$

$(\chi_0, \chi_1) = (\text{id}_{E_0}, \text{id}_{E_1}, \text{id}_B, \text{id}_I, (\text{id}_{\text{Obj}\mathcal{G}}, \text{id}_{\text{Mor}\mathcal{G}}))$  tworzą kategorię wiązek głównych o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  modelowanej na grupoidzie  $\mathcal{G}$  nad  $B$ , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\text{GrpdBun}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}(B|\text{id}_B).$$

▲

UWAGA 56. Argumenty w pełni analogiczne do tych przywołanych w treści Uwagi 54 prowadzą nas do wniosku, że działanie  $\mathcal{R}$  wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  na (przestrzeni totalnej) submersji  $\pi_M : M \rightarrow B$  jest swobodne i przechodnie włókno po włóknie. Jest to zgodne z obserwacją, że oto w każdym z włókien modułu mamy do czynienia z działaniem modelowanym na działaniu grupoidu  $\mathcal{G}$ .

▯

PRZYKŁAD(Y) 43.

- (1) **Moduł jednostkowy wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$**  to wiązka główna o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  postaci

$$\mathcal{U}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} := (E_1, E_0, \mathcal{T}, \mathcal{S}, \underline{\mathcal{R}})$$

gdzie  $\underline{\mathcal{R}}$  jest działaniem regularnym prawostronnym z Przykł. 42. Aksjomaty z Def. 141 są tu spełniane z przyczyn analogicznych do tych, które decydują o sensowności konstrukcji wiązki jednostkowej grupoidu w Przykł. 40 (1).

- (2) Niechaj  $B_1, B_2$  będą różnościami gładkimi (klasy  $C^\infty$ ),  $f : B_1 \rightarrow B_2$  – odwzorowaniem gładkim pomiędzy nimi, a  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$  – wiązką główną nad  $B_2$  o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ . **Wiązka główna o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  cofnięta (wzdłuż  $f$ )** to wiązka główna o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  postaci

$$f^* \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} := (f^* \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}, B_1, \text{pr}_1, \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} \circ \text{pr}_2, \mathcal{R}_{f^* \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}),$$

gdzie

$$f^* \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} := B_1 \times_{f \times \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}} \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$$

jest produktem włóknistym różnościami zapisanym w konwencji Tw. 1.4.24, na którym jest określone działanie prawostronne

$$\mathcal{R}_{f^* \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} : f^* \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} \circ \text{pr}_2 \times_{\mathcal{T}} E_1 \rightarrow f^* \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} : ((x, p), \varepsilon) \mapsto (x, \mathcal{R}(p, \varepsilon)).$$

- (3) **Trywialna wiązka główna o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$**  nad bazą  $B$  to wiązka główna  $f^* \mathcal{U}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$  o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  cofnięta wzdłuż dowolnego odwzorowania gładkiego  $f : B \rightarrow E_0$ .

✓

STWIERDZENIE 226. *Przyjmijmy zapis Def. 141. Morfizm ilorazowy  $\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}$  ma następujące własności – wypisane dla dowolnych  $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^{[2]}$  –*

(i) jego wartość jest jednoznacznie określona przez relację

$$p_2 = \mathcal{R}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}(p_1, \Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}(p_1, p_2)),$$

w szczególności spełniona jest tożsamość

$$\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} \circ (\text{id}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}, \text{id}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}) = \mathcal{A}d \circ \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}(\cdot);$$

(ii) oznaczmy, dla dowolnych  $x, y \in \text{Obj } \mathcal{G}$ ,

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{G}})_{x,y} := \mathcal{S}^{-1}(\{x\}) \cap \mathcal{T}^{-1}(\{y\}),$$

a wówczas

$$\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}(p_1, p_2) \in (\mathcal{E}_{\mathcal{G}})_{\mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}(p_2), \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}(p_1)} :$$

(iii)  $\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} \circ \tau_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} = \mathcal{I}nv \circ \Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}$ , gdzie  $\tau_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}, \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^{[2]} \circlearrowleft : (p_1, p_2) \mapsto (p_2, p_1)$  jest transpozycją.

■

Dowód: Oczywisty. □

STWIERDZENIE 227. *Przyjmijmy zapis Def. 141. Kategoria*

$$\mathbf{GrpdBun}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}(B | \text{id}_B)$$

jest grupoidem.

■

Dowód: W pełni analogiczny do dowodu Stw. 221. □

STWIERDZENIE 228. *Przyjmijmy zapis Def. 136 oraz Przykł. 40 (3). Każda wiązka główna  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$  o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} = (E_0, E_1, B, \pi_{E_0}, \pi_{E_1}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{A}d, \mathcal{I}nv, \diamond)$  jest lokalnie trywialna, tj. każdy punkt  $x \in B$  jej bazy  $B$  ma takie otoczenie otwarte  $\mathcal{O}_x$ , na którym jest określone odwzorowanie gładkie  $\mathcal{M}_{\mathcal{O}_x} : \mathcal{O}_x \rightarrow E_0$  i izomorfizm (surjektywnych) submersji:*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_x} \cong \mathcal{M}_{\mathcal{O}_x}^* \mathcal{U}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}.$$

tj. dyfeomorfizm zachowujący ich włókna.

■

Dowód: Podobnie jak w dowodzie Stw. 222 używamy cięć lokalnych  $\sigma_{\mathcal{O}_x} : \mathcal{O}_x \rightarrow \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}^{-1}(\mathcal{O}_x)$ ,  $\mathcal{O}_x \in \mathcal{T}(B)$  surjektywnej submersji  $\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} \rightarrow B$ , aby zdefiniować odwzorowania gładkie

$$\mathcal{M}_{\mathcal{O}_x} := \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} \circ \sigma_{\mathcal{O}_x},$$

a wraz z nimi – morfizmy (surjektywnych) submersji

$$\tau_{\mathcal{O}_x}^{-1} := \mathcal{R}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} \circ (\sigma_{\mathcal{O}_x} \times \text{id}_{E_1}) : \mathcal{M}_{\mathcal{O}_x}^* E_1 \rightarrow \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}^{-1}(\mathcal{O}_x) : (x, \varepsilon) \mapsto \mathcal{R}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}(\sigma_{\mathcal{O}_x}(x), \varepsilon),$$

które są jawnie  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ -ekwiwariantne w tym sensie, że czynią przemiennymi stosowne diagramy z Def. 139. Są przeto morfizmami wiązek głównych nad  $\mathcal{O}_x$  o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ , czyli – w świetle Stw. 227 – izomorfizmami. Ich odwrotności są postaci

$$\tau_{\mathcal{O}_x}(p) = (\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}(p), \Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}(\sigma_{\mathcal{O}_x} \circ \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}(p), p)).$$

□

DEFINICJA 142. Przyjmijmy zapis Def. 141 oraz Stw. 116 i niechaj  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie pokryciem otwartym bazy  $B$  wiązki głównej  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$  o o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} = (E_0, E_1, B, \pi_{E_0}, \pi_{E_1}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{A}, \mathcal{I}nv, \diamond)$  wyznaczonym przez rodzinę cięć lokalnych  $\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ ,  $i \in I$  teźże wiązki. **Dane trywializacji lokalnej** wiązki  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$  to kolekcja

$$(\mathcal{O}, \mathcal{M}_i, \mathcal{G}_{jk} \mid i \in I, (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}),$$

w której skład wchodzi dwie rodziny odwzorowań gładkich:

- **lokalne cięcia momentu**

$$\mathcal{M}_i := \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} \circ \sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow E_0, \quad i \in I;$$

- **cięcia przejścia**

$$\mathcal{G}_{jk} : \mathcal{O}_{jk} \rightarrow E_1 : x \mapsto \Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}(\sigma_j(x), \sigma_k(x)), \quad (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}.$$

Te ostatnie określają relację pomiędzy **trywializacjami lokalnymi**

$$\tau_i := (\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}, \Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}} \circ (\sigma_i \circ \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}, \text{id}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}})) : \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_i^* E_1$$

wedle formuły

$$\forall_{(x, \varepsilon) \in \mathcal{M}_i^* E_1, x \in \mathcal{O}_{ij}} : \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, \varepsilon) = (x, \mathcal{G}_{ij}(x) \diamond \varepsilon).$$

▲

STWIERDZENIE 229. Przyjmijmy zapis Def. 142 i niechaj  $(\mathcal{O}, \mathcal{M}_i, \mathcal{G}_{jk} \mid i \in I, (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}})$  będą danymi trywializacji lokalnej wiązki głównej  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$  o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} = (E_0, E_1, B, \pi_{E_0}, \pi_{E_1}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{A}, \mathcal{I}nv, \diamond)$ . Lokalne cięcia momentu  $\mathcal{M}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow E_0$  są cięciami lokalnymi wiązki włóknistej  $(E_0, B, \text{Obj } \mathcal{G}, \pi_{E_0})$ , a cięcia przejścia  $\mathcal{G}_{jk} : \mathcal{O}_{jk} \rightarrow E_1$  – cięciami lokalnymi wiązki włóknistej  $(E_1, B, \text{Mor } \mathcal{G}, \pi_{E_1})$ .

■

*Dowód:* Na gruncie definicyjnych własności morfizmu momentu  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}$  oraz morfizmu ilorazowego  $\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}$  stwierdzamy prawdziwość pożądaných tożsamości:

$$\pi_{E_0} \circ \mathcal{M}_i \equiv (\pi_{E_0} \circ \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}) \circ \sigma_i = \pi_M \circ \sigma_i = \text{id}_{\mathcal{O}_i},$$

$$\pi_{E_1} \circ \mathcal{G}_{jk} \equiv (\pi_{E_1} \circ \Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}) \circ (\sigma_j, \sigma_k) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{jk}} = \pi_M \circ \sigma_i \upharpoonright_{\mathcal{O}_{jk}} = \text{id}_{\mathcal{O}_{jk}}.$$

□

STWIERDZENIE 230. Przyjmijmy zapis Def. 142. Dane trywializacji lokalnej wiązki głównej  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$  o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  stowarzyszone z pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$  mają następujące własności definiujące:

- $\forall_{(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}} : (\mathcal{T} \circ \mathcal{G}_{ij} = \mathcal{M}_i \wedge \mathcal{S} \circ \mathcal{G}_{ij} = \mathcal{M}_j);$
- $\forall_{(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}} : (\mathcal{G}_{ji} = \mathcal{I}nv \circ \mathcal{G}_{ij} \wedge \mathcal{G}_{ii} = \mathcal{A} \circ \mathcal{M}_i);$
- warunek 1-kocyklu  $\forall_{(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}, x \in \mathcal{O}_{ijk}} : \mathcal{G}_{ik}(x) = \mathcal{G}_{ij}(x) \diamond \mathcal{G}_{jk}(x).$

Dane te definiują kanoniczny izomorfizm pomiędzy wiązkami trywialnymi  $\mathcal{M}_i^* \mathcal{U}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_i}$  i  $\mathcal{M}_j^* \mathcal{U}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_j}$  nad  $\mathcal{O}_{ij}$ .

■

Dowód: Analogiczny do dowodu Stw. 223.  $\square$

STWIERDZENIE 231. *Przyjmijmy zapis Def. 142 oraz Stw. 228. Niechaj  $\sigma_{\mathcal{O}}^{\alpha} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dowolnymi dwoma cięciami lokalnymi wiązki głównej  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$  o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  nad podzbiorem otwartym  $\mathcal{O} \subset B$  bazy  $B$ . Stowarzyszone z nimi trywializacje lokalne  $\tau_{\mathcal{O}}^{\alpha} : \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}}^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{O}}^{\alpha} * \mathcal{U}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  wiązki  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$  nad  $\mathcal{O}$  są równoważne w tym sensie, że odnośne wiązki trywialne  $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}^{\alpha} * \mathcal{U}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}$ , zdefiniowane w terminach odnośnych lokalnych cięć momentu  $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}^{\alpha}$  określanych przez  $\sigma_{\mathcal{O}}^{\alpha}$ , są izomorficzne,*

$$\tau_{\mathcal{O}}^{2,1} := \tau_{\mathcal{O}}^2 \circ \tau_{\mathcal{O}}^{1-1} : \mathcal{M}_{\mathcal{O}}^{1*} \mathcal{U}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_{\mathcal{O}}^{2*} \mathcal{U}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}.$$

■

Dowód: Teza wynika ze Stw. 227 i udowodnionej wcześniej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ -ekwiwariantności trywializacji lokalnych.  $\square$

TWIERDZENIE 4.1.6 (O rekonstrukcji wiązki głównej ze strukturalną wiązką grupoidalną). *Przyjmijmy zapis Def. 142. Zdefiniujmy rozmaitość*

$$\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}} := \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{M}_i^* \mathcal{U}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}} \right) / \sim_{\mathcal{G}_..}$$

w duchu dowodu Tw. 4.1.1 jako rozmaitość ilorazową utworzoną przez klasy abstrakcji relacji równoważności

$$(x_i, \varepsilon_i, i) \sim_{\mathcal{G}_..} (x_j, \varepsilon_j, j) \iff \begin{cases} x_j = x_i \in \mathcal{O}_{ij} \\ \varepsilon_i = \mathcal{G}_{ij}(x_i) \diamond \varepsilon_j \end{cases},$$

a nadto odwzorowania

$$\mathcal{M}_{\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}} : \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}} \rightarrow E_0 : [(x, \varepsilon, i)] \mapsto s(\varepsilon)$$

$$\pi_{\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}} : \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}} \rightarrow B : [(x, \varepsilon, i)] \mapsto x,$$

$$\mathcal{R}_{\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}} : \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}} \times_{\mathcal{T}} E_1 \rightarrow \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}} : ([x, \varepsilon, i], \tilde{\varepsilon}) \mapsto [x, \varepsilon \diamond \tilde{\varepsilon}, i].$$

Piątką

$$\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}} := (\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}, B, \pi_{\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}}, \mathcal{M}_{\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}}, \mathcal{R}_{\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}})$$

jest wiązką główną o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$  nad  $B$ .  $\square$

Dowód: Analogiczny do dowodu Tw. 4.1.4.  $\square$

UWAGA 57. Mając na względzie przyszłe zastosowania powyższego twierdzenia, warto poświęcić chwilę na wyprowadzenie w jawnej postaci dodatkowych elementów opisu opisywanej przez nie wiązki głównej  $\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}$ . Zaczniemy od cięć lokalnych nad zbiorami  $\mathcal{O}_i$  – wybieramy je w wygodnej postaci

$$\check{\sigma}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}} : x \mapsto [(x, \mathcal{A} \circ \mathcal{M}_i(x), i)],$$

stwierdzając oczekiwaną tożsamość

$$\mathcal{M}_{\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}} \circ \check{\sigma}_i \equiv \mathcal{M}_i, \quad i \in I.$$

Mamy też oczywistą definicję morfizmu ilorazowego:

$$\Phi_{\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}}([(x, \varepsilon_1, i)], [(x, \varepsilon_2, i)]) = \mathcal{I}nv(\varepsilon_1) \diamond \varepsilon_2,$$

przy czym należy podkreślić, że postać relacji równoważności użytej w konstrukcji przestrzeni totalnej wiązki  $P_{\mathcal{O}}$  pozwala bez straty ogólności ograniczyć rozważania do sytuacji, w której oba indeksy pokryciowe występujące w powyższej formule są tożsame. Ostatecznie więc możemy zapisać trywializacje lokalne wiązki zrekonstruowanej w postaci

$$\check{\tau}_i : \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{O}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{M}_i^* E_1 : [(x, \varepsilon, i)] \longmapsto (x, \varepsilon),$$

zgodnej z Def. 142,

$$\begin{aligned} \check{\tau}_i([(x, \varepsilon, i)]) &\equiv (x, \Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{O}}}([[(x, \mathcal{A} \circ \mathcal{M}_i(x), i)], [(x, \varepsilon, i)]])) \\ &= (x, \mathcal{I}nv \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{M}_i(x) \diamond \varepsilon) \equiv (x, \varepsilon). \end{aligned}$$

▭

**TWIERDZENIE 4.1.7.** *Przyjmijmy zapis Def. 142. Niechaj  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^{\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema wiązkami głównymi o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ , o odnośnych danych trywializacji lokalnej  $(\mathcal{O}, \mathcal{M}_i^{\alpha}, \mathcal{G}_{jk}^{\alpha} \mid i \in I, (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}})$ ,  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ . Istnienie morfizmu  $(\Theta, (\text{id}_{E_0}, \text{id}_{E_1}, \text{id}_B, \text{id}_I, (\text{id}_{\text{Obj } \mathcal{G}}, \text{id}_{\text{Mor } \mathcal{G}}))) : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^1 \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^2$  jest równoważne istnieniu rodziny  $\{\vartheta_i\}_{i \in I}$  cięć lokalnych*

$$\vartheta_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow E_1$$

wiązki  $(E_1, B, \text{Mor } \mathcal{G}, \pi_{E_1})$  o własnościach:

- (i)  $\forall_{i \in I} : (\mathcal{S} \circ \vartheta_i = \mathcal{M}_i^1 \quad \wedge \quad \mathcal{T} \circ \vartheta_i = \mathcal{M}_i^2);$
- (ii)  $\forall_{(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}, x \in \mathcal{O}_{ij}} : \vartheta_i(x) \diamond \mathcal{G}_{ij}^1(x) = \mathcal{G}_{ij}^2(x) \diamond \vartheta_j(x).$

■

*Dowód:* Rozumując analogicznie jak w dowodzie Tw. 4.1.7, ustalamy cięcia lokalne  $\sigma_i^{\alpha} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^{\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}$  oraz odnośne trywializacje lokalne  $\tau_i^{\alpha} : \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^{\alpha}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{M}_i^{\alpha*} E_1$ , wykorzystując po drodze morfizmy ilorazowe  $\Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^{\alpha}} : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^{\alpha[2]} \longrightarrow E_1, \alpha \in \{1, 2\}$ , i na tej podstawie definiujemy odwzorowania gładkie

$$\vartheta_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow E_1 : x \longmapsto \Phi_{\mathcal{P}_2}(\sigma_i^2(x), \Theta \circ \sigma_i^1(x)),$$

o wszystkich pożądanym własnościach. Musimy jedynie upewnić się, że są to cięcia wiązki  $E_1$ , to jednak wynika wprost z bezpośredniego rachunku

$$\pi_{E_1} \circ \vartheta_i \equiv \pi_{E_1} \circ \Phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^2} \circ (\sigma_i^2, \Theta \circ \sigma_i^1) = \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}}}^2} \circ \sigma_i^2 = \text{id}_{\mathcal{O}_i}.$$

I odwrotnie, z dowolną rodziną cięć lokalnych  $\{\vartheta_i\}_{i \in I}$  wiązki  $E_1$  poddanych więzom (i) i (ii) stowarzyszymy, za pośrednictwem (izo)morfizmów modułów wiązki grupoidalnej  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$

$$\tilde{\vartheta}_i : \mathcal{O}_{i, \mathcal{M}_i^1 \times \mathcal{T}} E_1 \longrightarrow \mathcal{O}_{i, \mathcal{M}_i^2 \times \mathcal{T}} E_1 : (x, \varepsilon) \longmapsto (x, \vartheta_i(x) \diamond \varepsilon), \quad i \in I$$

spełniających w zapisie

$$\tau_{ij}^{\alpha} \equiv \tau_i^{\alpha} \circ \tau_j^{\alpha-1} \upharpoonright_{\mathcal{M}_i^{\alpha*} \text{Mor } \mathcal{G} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}}, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

tożsamości

$$\forall_{(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}} : \tilde{\vartheta}_i \circ \tau_{ij}^1 = \tau_{ij}^2 \circ \tilde{\vartheta}_j \upharpoonright_{\mathcal{M}_i^1 \times \text{Mor } \mathcal{G} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}},$$

lokalne izomorfizmy

$$\Theta_i := \tau_i^{2-1} \circ \tilde{\vartheta}_i \circ \tau_i^1 : \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}^1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}^2}^{-1}(\mathcal{O}_i).$$

Te okazują się być ograniczeniami postulowanego izomorfizmu wiązek głównych

$$\Theta : \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}^2, \quad \Theta \upharpoonright_{\pi_{\mathcal{P}_{\mathcal{E}_G}^1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} \equiv \Theta_i.$$

□

## Elementy teorii powiązania w wiązce włóknistej

W studiach nad strukturą stycznościową oraz w zastosowaniach teorii wiązek włóknistych – począwszy od badań ich topologii (topologia różniczkowa, zagadnienia wariacyjne *etc.*), a skończywszy na modelowaniu fizykalnym z ich wykorzystaniem („dynamika” cięć opisywana przez zasadę wariacyjną dla wyróżnionego funkcjonału działania określonego na zbiorze cięć, procedura cechowania symetrii globalnych modelu fizykalnego, opis tła grawitacyjnego wzgl. elektromagnetycznego dynamiki punktu materialnego oraz tła tego fluktuacji *etc.*) – nierzadko pojawia się potrzeba nadania sensu formalnego operacji różniczkowania cięć wiązki<sup>1</sup>, tj. wskazania takiej definicji pochodnej, która – na podobieństwo zwykłego różniczkowania (np. pochodnej kierunkowej) algebry funkcji na rozmaitości – przyporządkowywałaby cięciu klasy  $C^k$  nowe cięcie klasy  $C^{k-1}$ , o tych samych własnościach współzmienniczości względem wyboru trywializacji lokalnej oraz uzgodnione z ewentualną dodatkową strukturą na włóknie (np. strukturą modułu nad pierścieniem funkcji gładkich na bazie lub strukturą torsora grupy strukturalnej). Tymczasem najbardziej oczywista definicja pochodnej cięcia  $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(E)$  wiązki  $E$  nad bazą  $B$  wzdłuż pola wektorowego  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(B)$ , czyli pochodna kierunkowa

$$(\mathcal{V}, \sigma) \longmapsto \mathbb{T}\sigma(\mathcal{V}),$$

nie daje nam w ogólności cięcia  $E$ , ani nie uwzględnia dodatkowej struktury, jaką są lokalne trywializacje  $E|_{\mathcal{O}} \cong \mathcal{O} \times F$ , których obecność pociąga za sobą rozkład stycznościowy  $\mathbb{T}(E|_{\mathcal{O}}) \cong \mathbb{T}\mathcal{O} \times \mathbb{T}F$ . W przypadku trywialnej wiązki wektorowej można temu zaradzić rozpatrując, w dowolnym punkcie  $x \in B$ , wyrażenia postaci

$$D_{\mathcal{V}}\sigma(x) := \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \sigma \circ \gamma(t) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma \circ \gamma(t) - \sigma \circ \gamma(0)}{t}$$

dla dowolnej ścieżki

$$\gamma : ]\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow B, \quad \varepsilon > 0$$

klasy  $C^1$  o własnościach

$$\gamma(0) = x \quad \wedge \quad \dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x).$$

Kłopot pojawia się wtedy, gdy włókno traci strukturę liniową, co pozbawia sensu wyrażenie  $\sigma \circ \gamma(t) - \sigma \circ \gamma(0)$ , a w przypadku liniowym – ilekroć wiązka nie jest globalnie trywialna, oto bowiem w takiej sytuacji  $\sigma \circ \gamma(0)$  i  $\sigma \circ \gamma(t)$  dla  $t \neq 0$  należą w ogólności do różnych włókien, a te nie są *kanonicznie* izomorficzne. Oczywiście różniczkowanie jest – w założeniach – operacją lokalną, przeto można zawsze wybrać określoną trywializację lokalną wiązki (wektorowej), bez odpowiedzi pozostaje

<sup>1</sup>Ta potrzeba staje się oczywistą, kiedy pomyślimy o owych cięciach jako o obiektach modelujących pola fizyczne nad czasoprzestrzenią, a taką właśnie interpretację zyskują one w wielu konkretnych sytuacjach, o czym więcej w dalszej części kursu



wtedy jednak pytanie o geometryczno-różniczkowy statusu wyznaczonego tym sposobem obiektu. Pozostając w kategorii wiązek wektorowych, możemy próbować obejść napotkane trudności, zauważając, że wiązka  $TV_x$  styczna do włókna  $V_x$  nad ustalonym punktem bazy  $x \in B$ , zanurzona w przeciwdziedzinie  $TV$  odwzorowania  $T\sigma$ , jest wyposażona w strukturę liniową *izomorficzną* z  $V_x$ , co pozwala na utożsamienie pól wektorów pionowych na  $V$  z cięciami samej wiązki  $V$ . W świetle tej uwagi wystarczy rzutować  $T\sigma(V)$  na styczną do włókna, co jednak wymaga (patrz: Stw. 33) istnienia whitneyowskiego rozkładu wiązki stycznej nad przestrzenią totalną  $V$  na sumę prostą podwiązki pionowej i jej dopełnienia. I znów w obrazie trywializacji lokalnej wiązki wektorowej  $V$  operacja taka jest naturalnie zdefiniowana i daje oczekiwany wynik – wyjściowa trudność tłumaczy się tutaj na trudność ustalenia relacji (odwzorowania przejścia) między obiektami lokalnymi tożsamej z analogiczną relacją między różniczkowanymi cięciami lokalnymi. O ile zatem dotychczasowa dyskusja wskazuje jasno, jakie cechy powinno mieć poszukiwane rozwiązanie postawionego przez nas problemu, o tyle bezpośrednia próba jego ogólnego rozwiązania natrafia na rozmaite trudności (patrz także: dalej, kiedy przejdziemy do uzgadniania różniczkowania z dodatkową strukturą na włóknie). Poniżej zmierzmy się z każdą z nich z osobna, co doprowadzi nas do kilku różnych definicji pochodnej cięcia wzdłuż pola wektorowego na bazie. Ich równoważność, której dowiedzimy pod koniec naszych rozważań, stanowić będzie mocny argument potwierdzający *a posteriori* słuszność i naturalność wybranej przez nas drogi formalizacji wykorzystywanych przez nas intuicji geometrycznych.

UWAGA 58. Wszelkie rozważania prowadzone w niniejszym rozdziale są osadzone w kategorii gładkiej  $\mathbf{Man}^{(k)}$ ,  $k \geq 1$ . W szczególności więc ciała bazowe  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  wiązek wektorowych noszą w domyśle naturalną strukturę różniczkowalną, a grupy strukturalne wiązek głównych są grupami Liego.

$\bar{\wedge}$

### 1. Powiązanie – poczwórna ścieżka

DEFINICJA 143. Przyjmijmy zapis Def. 127 oraz Cor. 9 i niechaj  $(E, B, F, \pi_E)$  będzie wiązką włóknistą klasy  $C^k$ . Rozważmy (lokalną) ścieżkę klasy  $C^1$

$$\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow B, \quad \varepsilon > 0.$$

**Przeniesienie równoległe klasy  $C^l$ ,  $l \leq k$  w  $E$  wzdłuż  $\gamma$**  to rodzina dyfeomorfizmów klasy  $C^l$

$$P_{t_1, t_2}^\gamma : E_{\gamma(t_1)} \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t_2)}, \quad t_1, t_2 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$$

o własnościach

(PT1) odwzorowanie (w którym produkt włóknisty jest określony dla pary odwzorowań  $(\gamma \circ \text{pr}_1, \pi_E)$ )

$$P_{\cdot, \cdot}^\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[^{\times 2} \times_B E \longrightarrow E : ((t_1, t_2), x) \longmapsto P_{t_1, t_2}^\gamma(x)$$

jest klasy  $C^l$ ;

(PT2)  $P_{t_1, t_1}^\gamma = \text{id}_{E_{\gamma(t_1)}}$ ;

(PT3)  $\forall t_1, t_2, t_3 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ : P_{t_2, t_3}^\gamma \circ P_{t_1, t_2}^\gamma = P_{t_1, t_3}^\gamma$ ;

(PT4) dla dowolnego cięcia  $\sigma : \mathcal{O}_x \rightarrow E$  określonego na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x \in B$  jego **pochodna kowariantna** w  $x$  wzdłuż dowolnego pola wektorowego  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$ , zdefiniowana wzorem

$$\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x) := \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\mathbf{P}_{0,t}^{\gamma})^{-1} \circ \sigma \circ \gamma(t),$$

nie zależy od wyboru reprezentanta klasy współstyczności ścieżek przez  $x$  określonej przez warunki

$$\gamma(0) = x \quad \wedge \quad \dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x);$$

(PT5) odwzorowanie

$$\nabla \cdot \sigma : \mathbb{T}\mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{V}E \subset \mathbb{T}E$$

jest  $C^{\infty}(\mathcal{O}_x, \mathbb{R})$ -liniowe.

Ileokroć dany jest wybór przeniesienia równoległego klasy  $C^l$  dla dowolnej ścieżki  $\gamma$  na otoczeniu dowolnego punktu  $x \in B$ , mówimy, że zostało określone **powiązanie włókien w wiązce  $E$** . ▲

**STWIERDZENIE 232.** *Przyjmijmy zapis Def. 143. Jeśli dla dowolnej ścieżki w  $B$  istnieje przeniesienie równoległe, to wówczas dla dowolnego punktu  $p \in E$  we włóknie  $E_x$  nad dowolnym punktem  $x \in B$  istnieje jednoznacznie określona monomorfizm klasy  $C^l$*

$$(4.2.1) \quad \text{Hor}_p : \mathbb{T}_x B \rightarrow \mathbb{T}_p E$$

o własności

$$(4.2.2) \quad \text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbf{P}_{0,t}^{\gamma}(p)$$

dla dowolnej ścieżki  $\gamma$  spełniającej warunek  $\gamma(0) = x$ , która implikuje tożsamość

$$(4.2.3) \quad \mathbb{T}_p \pi \circ \text{Hor}_p = \text{id}_{\mathbb{T}_{\pi_E(p)} B}.$$

Ponadto przestrzeń styczna  $\mathbb{T}_p E$  ma rozkład

$$\mathbb{T}_p E = \mathbb{V}_p E \oplus \text{Im Hor}_p.$$

Odwzorowanie  $\text{Hor}_p$  określamy mianem **podniesienia poziomego** (lub **horyzontalnego**) **wektorów** z bazy do włókna. ■

Dowód: Zaczniemy od podkreślenia, że formuła (4.2.2) określa  $\text{Hor}_p$  jednoznacznie, a to z uwagi na dowolność wektora stycznego do ścieżki w danym punkcie bazy. Wystarczy zatem sprawdzić pożądane własności wyrażenia z prawej strony tej równości. To rzekłszy, zauważmy dalej, że rodzina dyfeomorfizmów  $\mathbf{P}_{t_1, t_2}^{\gamma}$ ,  $t_1, t_2 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  dla ścieżki o nigdzie nie znikającym wektorze stycznym  $\dot{\gamma}$  (dla dostatecznie małej wartości  $\varepsilon$ ) określa (lokalnie) gładkie pole wektorowe  $\mathcal{Y}$  nad  $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[)$  o potoku (albo, równoważnie, lokalnej grupie lokalnych dyfeomorfizmów – patrz: Tw. 1.4.20)

$$\Phi_{\mathcal{Y}} : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times \pi_E^{-1}(\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[)) \rightarrow \pi_E^{-1}(\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[))$$

$$: (t, p) \mapsto \mathbf{P}_{\gamma^{-1} \circ \pi_E(p), t}^{\gamma}(p) \equiv \Phi_{\mathcal{Y}}(t, p),$$

przy czym zachodzi, rzecz jasna, tożsamość

$$\Phi_{\mathcal{Y}}(\gamma^{-1} \circ \pi_E(p), p) = p,$$

a samo pole  $\mathcal{Y}$  spełnia równanie

$$\mathcal{Y}(p) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=\gamma^{-1} \circ \pi_E(p)} \Phi_{\mathcal{Y}}(t, p).$$

Rozważmy następnie dowolne cięcie lokalne

$$\sigma : \mathcal{O}_x \longrightarrow E, \quad \pi_E \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}_x}$$

o własności

$$\sigma \circ \gamma(0) \equiv \sigma(x) = p.$$

Jego pochodną kowariantną w  $x$  wzdłuż pola stycznego do  $\gamma$ ,

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t)),$$

obliczamy przy pomocy następującego zabiegu:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma}(P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t))) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \Phi_{\mathcal{Y}}(t, P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t))) \\ &= D_1 \Phi_{\mathcal{Y}}(0, P_{0,0}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(0))) + D_2 \Phi_{\mathcal{Y}}(0, P_{0,0}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(0))) (\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x)) \\ &= \mathcal{Y}(P_{0,0}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(0))) + \mathbb{T}_{P_{0,0}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(0))} P_{0,0}^{\gamma}(\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x)) \\ &\equiv \mathcal{Y}(\sigma(x)) + \mathbb{T}_{\sigma(x)} \text{id}_E(\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x)) = \mathcal{Y}(p) + \nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x), \end{aligned}$$

który pozwala nam ostatecznie zapisać

$$\mathcal{Y}(p) = \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) - \nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x),$$

a zatem także

$$\text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma}(p) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \Phi_{\mathcal{Y}}(t, p) = \mathcal{Y}(p) = \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) - \nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x).$$

Widzimy więc, że wprost na mocy definicji pochodnej kowariantnej (oraz odwzorowania stycznego) odwzorowanie  $\text{Hor}_p$  jest  $\mathbb{R}$ -liniowe, przy czym zależy od wyboru ścieżki wyłącznie poprzez  $\dot{\gamma}(0)$  (oraz  $\gamma(0) = x$ ). Jest ono także iniektywne, gdyż z jednej strony

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x) \in \mathbb{V}_p E,$$

a z drugiej

$$\mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) \in \mathbb{V}_p E \quad \iff \quad \dot{\gamma}(0) \equiv \mathbb{T}_{\sigma(x)} \pi \circ \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) = 0_{\mathbb{T}_{\sigma(x)} E},$$

przeto koniec końców

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) - \nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(x) \in \mathbb{V}_p E &\iff \mathbb{T}_x \sigma(\dot{\gamma}(0)) \in \mathbb{V}_p E \\ &\iff \dot{\gamma}(0) = 0_{\mathbb{T}_x B}, \end{aligned}$$

czyli

$$\text{Im Hor}_p \cap \mathbb{V}_p E = \{0_{\mathbb{T}_p E}\}.$$

Powyższe implikuje ciąg relacji między przestrzeniami  $\mathbb{R}$ -liniowymi (mamy tu do czynienia z wewnętrzną sumą prostą)

$$\text{Im Hor}_p \oplus \mathbb{V}_p E = \text{Im Hor}_p +_{\mathbb{T}_p E} \mathbb{V}_p E \subset \mathbb{T}_p E,$$

a ponieważ – z racji iniektywności  $\text{Hor}_p$ , która w świetle Tw. 1.1.5 czyni z niego izomorfizm na obraz – prawdziwą jest równość

$$\dim_{\mathbb{R}} (\text{Im Hor}_p \oplus \mathbb{V}_p E) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Im Hor}_p + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_p E = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x B + \dim F$$

$$= \dim B + \dim F = \dim E \equiv \dim_{\mathbb{R}} T_p E,$$

przeto w istocie

$$\text{Im Hor}_p \oplus V_p E = T_p E.$$

Tożsamość (4.2.3) wynika bezpośrednio z wyprowadzonego powyżej wyrażenia na  $\text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0))$ .  $\square$

DEFINICJA 144. Przyjmijmy zapis Def. 127, Cor. 9 oraz Przykł. 37 (3). **Powiązanie Ehresmanna** na wiązce włóknistej  $(E, B, F, \pi_E)$  to wybór takiej podwiązki wektorowej  $HE \subset TE$  wiązki stycznej do przestrzeni totalnej  $E$ , która dopełnia wiązkę pionową  $VE$  do wiązki stycznej  $TE$  wedle formuły

$$TE = VE \oplus_B HE.$$

Podwiązka  $HE$  nosi miano (**pod**)**wiązki poziomej** (lub **horyzontalnej**) nad  $E$ . Jej włókno  $H_p E \equiv (HE)_p$  nad  $p \in E$ , zwane (**pod**)**przestrzenią poziomą** (lub **horyzontalną**), rozpinają **wektory poziome** (lub **horyzontalne**).  $\blacktriangle$

TWIERDZENIE 4.2.1. *Powiązanie włókien na wiązce włóknistej określa na niej powiązanie Ehresmanna i vice versa.*  $\blacksquare$

*Dowód:* Pierwsza część tezy wynika wprost ze Stw. 232, oto bowiem zależność odwzorowań  $\text{Hor}_p$  od punktu  $p \in E$  jest – wprost z konstrukcji –  $(C^k)$ -gładka (jako zależność pola wektorowego  $\mathcal{V}$  od punktu w nośniku), mamy zatem jednoznaczny rozkład dowolnego pola wektorowego  $\mathcal{V}$  na  $E$  na składowe

$$\mathcal{V} = (\text{id}_{TE} - \text{Hor} \circ T\pi)(\mathcal{V}) + \text{Hor} \circ T\pi(\mathcal{V}),$$

z których pierwsza jest w świetle Równ. (4.2.3) pionowa,

$$T\pi((\text{id}_{TE} - \text{Hor} \circ T\pi)(\mathcal{V})) = T\pi(\mathcal{V}) - (T\pi \circ \text{Hor}) \circ T\pi(\mathcal{V}) = T\pi(\mathcal{V}) - T\pi(\mathcal{V}) = 0_{TE}.$$

Jest przy tym oczywiste, że para  $(\text{id}_{TE} - \text{Hor} \circ T\pi, \text{Hor} \circ T\pi)$  jest zupełną rodziną rzutów komplementarnych, pierwsza część tezy wynika zatem ze Stw. 33.

I odwrotnie, powiązanie Ehresmanna  $TE = VE \oplus_B HE$  określa jednoznacznie gładkie podniesienie poziome

$$(4.2.4) \quad \text{Hor} := (T\pi|_{HE})^{-1} : TB \xrightarrow{\cong} HE \subset TE,$$

to zaś na mocy Stw. 105 pozwala stowarzyszyć z dowolną ścieżką gładką  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow B$  przez  $x \equiv \gamma(0) \in B$  **podniesienie poziome** (lub **horyzontalne**) tejże **ścieżki**  $\tilde{\gamma}_p : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow E$  przez dowolny punkt  $p \in E_x$ , tj. krzywą całkową pola  $\text{Hor}_\gamma(\dot{\gamma})$  będącą rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$(4.2.5) \quad \tilde{\gamma}_p(t) = \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}_p(0) = p.$$

Podniósłszy  $\gamma$  do każdego z punktów włókna  $E_x$ , otrzymujemy rodzinę gładkich dyfeomorfizmów między tymże włóknem a włóknami w pewnym jego otoczeniu

$$(4.2.6) \quad P_{0,t}^\gamma : E_x \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t)} : p \mapsto \tilde{\gamma}_p(t).$$

Ich gładkość jest zagwarantowana przez gładką zależność potoku pola  $\text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p}(\dot{\gamma})$  od warunku początkowego  $p$ , ustaloną w Tw. 1.4.16 (dla której podstawą jest gładka

zależność  $\text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p}$  od  $p$ ), a lokalna jednoznaczność rozwiązania wypisanego powyżej zagadnienia początkowego, orzeczona w Stw. 105, przesądza o bijektywnym charakterze odwzorowań  $\text{P}_{0,t}^\gamma$ . Wreszcie też zasada superpozycji (PT3) z Def. 143, jak również warunek początkowy (PT2), wynikają bezpośrednio z konstrukcji potoku gładkiego pola wektorowego – patrz: (dowód) Tw. 1.4.20. Pozostaje zatem rozpatrzyć pochodną kowariantną definiowaną przez tak określone powiązanie włókien w  $E$ . Rozumując jak w dowodzie Stw. 232, wyznaczamy

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \text{P}_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t)) = -\text{Hor}_{\sigma(x)}(\dot{\gamma}(0)) + \text{T}_{\sigma(x)}\text{P}_{0,0}^{\gamma^{-1}}\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \sigma \circ \gamma(t)\right) \\ (4.2.7) \quad &= -\text{Hor}_{\sigma(x)}(\dot{\gamma}(0)) + \text{T}_x\sigma(\dot{\gamma}(0)), \end{aligned}$$

konstatujemy więc, że pochodna zależy od użytej w jej definicji ścieżki  $\gamma$  tylko poprzez  $\dot{\gamma}(0)$  (oraz  $\gamma(0) = x$ ), od samego zaś pola  $\dot{\gamma}$  – w sposób jawnie  $C^\infty(B, \mathbb{R})$ -liniowy, zgodnie z aksjomatem (PT4) w Def. 143.  $\square$

Na gruncie interpretacji sumy Whitneya jako geometryzacji sumy prostej przestrzeni wektorowych, a w odwołaniu do równoważnych opisów tejże konstrukcji, jakich dotarcza Stw. 33, wnioskujemy, że opis powiązania na wiązce włóknistej w terminach rozkładu wiązki stycznej do przestrzeni totalnej tejże wiązki na sumę (Whitneya) podwiązek: pionowej i poziomej niesie w sobie podpowieź dotyczącą kolejnego naturalnego przeformułowania definicji powiązania. Oto więc

DEFINICJA 145. Przyjmijmy zapis Cor. 9. **Forma powiązania** na wiązce włóknistej  $(E, B, F, \pi_E)$  klasy  $C^{k+1}$  to  $C^\infty(B, \mathbb{R})$ -liniowy morfizm wiązek wektorowych klasy  $C^k$

$$(A, \text{id}_B) : \text{T}E \longrightarrow \text{V}E$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{V}E & \xrightarrow{\mathcal{J}_{\text{V}E}} & \text{T}E \\ & \searrow \text{id}_{\text{V}E} & \downarrow A \\ & & \text{V}E \end{array} ,$$

na którym  $\mathcal{J}_{\text{V}E}$  jest włożeniem kanonicznym. ▲

TWIERDZENIE 4.2.2. *Powiązanie Ehresmanna na wiązce włóknistej określa na niej w sposób kanoniczny formę powiązania i vice versa.* ■

Dowód: Powiązanie Ehresmanna  $\text{T}E = \text{V}E \oplus_B \text{H}E$  wyznacza ( $C^\infty(B, \mathbb{R})$ -liniowy) epimorfizm wiązek wektorowych

$$A := \text{id}_{\text{T}E} - (\text{T}\pi_E \upharpoonright_{\text{H}E})^{-1} \circ \text{T}\pi_E : \text{T}E \twoheadrightarrow \text{V}E,$$

będący gładką rodziną rzutów na włókno pierwszej składowej sumy Whitneya (por.: Przykł. 37 (3)). Przy tym dla dowolnego pionowego pola wektorowego  $\mathcal{V}$  zachodzi

$$A(\mathcal{V}) \equiv \text{id}_{\text{T}E}(\mathcal{V}) - (\text{T}\pi_E \upharpoonright_{\text{H}E})^{-1} \circ \text{T}\pi_E(\mathcal{V}) = \mathcal{V} +_{\text{T}E} \mathbf{0}_{\text{T}E} = \mathcal{V}.$$

I odwrotnie, z dowolnym morfizmem wiązek wektorowych  $A : TE \longrightarrow VE$  o własności  $A|_{\vee E} = \text{id}_{\vee E}$  możemy – w świetle Stw. 198 – stowarzyszyć podwiązkę

$$HE := \text{Ker}(A, \text{id}_B) \subset TE.$$

Przy tym dla dowolnego  $v \in H_p E \cap \vee_p E$ ,  $p \in E$  otrzymujemy wynik

$$v = \text{id}_{\vee E}(v) = A(v) = 0_{T_p E},$$

zatem

$$HE \cap \vee E = \{0_{TE}\},$$

a zarazem dowolne pole wektorowe  $\mathcal{V}$  na  $E$  ma rozkład

$$\mathcal{V} = (\text{id}_{TE} - A)(\mathcal{V}) + A(\mathcal{V})$$

na gładkie składowe o wartościach w podwiązkach:

$$A(\mathcal{V}) : E \longrightarrow \vee E$$

oraz

$$\mathcal{V} - A(\mathcal{V}) : E \longrightarrow HE,$$

a to z racji tożsamości

$$A(\mathcal{V} - A(\mathcal{V})) = A(\mathcal{V}) - A|_{\vee E}(A(\mathcal{V})) = A(\mathcal{V}) - \text{id}_{\vee E}(A(\mathcal{V})) = A(\mathcal{V}) - A(\mathcal{V}) = 0_{TE}.$$

□

UWAGA 59. Na zakończenie ogólnej dyskusji konstrukcji powiązania w wiązce włóknistej sformułujemy lokalny jego opis stowarzyszony z trywializacjami lokalnymi  $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times F$ ,  $i \in I$  nad pokryciem  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Aut}(F)$ . Opis ten prześledzimy szczegółowo we współrzędnych lokalnych:  $(x^\mu, \xi^A)$ ,  $\mu \in \overline{1, \dim B}$ ,  $A \in \overline{1, \dim F}$  na pewnym otoczeniu  $(x, f) \equiv (\pi_{T\mathcal{O}_{ij}}(X), \pi_{TF}(V)) \in \mathcal{O}_{ij} \times F$  oraz  $(y^\mu \equiv x^\mu, \zeta^A)$  na pewnym otoczeniu  $(x, g_{ij}(x)(f)) \in \mathcal{O}_{ij} \times F$ . Trywializacje wiązki  $E$  indukują, w zgodzie z Def. 129, styczne trywializacje lokalne

$$T\tau_i : T\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow T(\mathcal{O}_i \times F) \equiv T\mathcal{O}_i \times TF.$$

Wykorzystując bazy współrzędniowe w przestrzeniach stycznych, oznaczymy

$$Tt_{ij} : T(\mathcal{O}_{ij} \times F) \circlearrowleft : ((x, f), X + V) \longmapsto ((x, g_{ij}(x)(f)), \tilde{X} + \tilde{V}),$$

$$X \equiv X^\mu \triangleright \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x), \quad V \equiv V^A \triangleright \frac{\partial}{\partial \xi^A}(f),$$

$$\tilde{X} \equiv \tilde{X}^\mu \triangleright \frac{\partial}{\partial y^\mu}(x), \quad \tilde{V} \equiv \tilde{V}^A \triangleright \frac{\partial}{\partial \zeta^A}(g_{ij}(x)(f)),$$

przy czym zachodzą tożsamości

$$t_{ij}^* dy^\mu(x, f) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}(x) \triangleright dx^\nu(x) = \delta_\nu^\mu \triangleright dx^\nu(x) = dx^\mu(x)$$

oraz

$$t_{ij}^* d\zeta^A(x, f) = \frac{\partial \zeta^A}{\partial x^\mu}((g_{ij}(x)(f)) \triangleright dx^\mu(x) + \frac{\partial \zeta^A}{\partial \xi^B}((g_{ij}(x)(f)) \triangleright d\xi^B(f),$$

które pozwalają zapisać

$$\begin{aligned} \tilde{X} &\equiv T_{(x,f)} t_{ij}(X + V) \lrcorner dy^\mu(x) \triangleright \frac{\partial}{\partial y^\mu}(x) = (X + V) \lrcorner t_{ij}^* dy^\mu(x, f) \triangleright \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \\ &= (X + V) \lrcorner dx^\mu(x) \triangleright \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) = X \lrcorner dx^\mu(x) \triangleright \frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \equiv X \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &\equiv \mathbb{T}_{(x,f)} t_{ij}(X+V) \lrcorner d\zeta^A(g_{ij}(x)(f)) \triangleright \frac{\partial}{\partial \zeta^A}(g_{ij}(x)(f)) \\
&= (X+V) \lrcorner t_{ij}^* d\zeta^A(g_{ij}(x), f) \triangleright \frac{\partial}{\partial \zeta^A}(g_{ij}(x)(f)) \\
&= \left( X^\mu \frac{\partial \zeta^A}{\partial x^\mu}((g_{ij}(x)(f)) + V^B \frac{\partial \zeta^A}{\partial \zeta^B}((g_{ij}(x)(f))) \right) \triangleright \frac{\partial}{\partial \zeta^A}(g_{ij}(x)(f)).
\end{aligned}$$

W dalszej części naszej dyskusji rzut na drugi składnik prosty  $\mathbb{T}F$  w rozkładzie Whitneya wiązki stycznej  $\mathbb{T}(\mathcal{O}_i \times F) \equiv \mathbb{T}\mathcal{O}_i \oplus_{\mathcal{O}_i} \mathbb{T}F$  (wzgl.  $\mathbb{T}(\mathcal{O}_{ij} \times F) \equiv \mathbb{T}\mathcal{O}_{ij} \oplus_{\mathcal{O}_{ij}} \mathbb{T}F$ ), z założenia trywialnej, będziemy oznaczać symbolem  $\varpi_i$  (wzgl.  $\varpi_{ij}$ ).

Ażeby postąpić dalej w naszym rachunku, musimy poczynić pewne założenia w odniesieniu do grupy  $\text{Aut}(F)$ , w której przyjmują wartości odwzorowania przejścia  $g_{ij}$ . Odtąd będziemy więc zakładać, że wyróżnione elementy  $g_{ij}(x)$  grupy  $\text{Aut}(F)$  należą do pewnej (skończenie wymiarowej) (pod)grupy Liego  $G \subset \text{Aut}(F)$ , co w szczególności nas interesujących przypadkach jest prawdą: w przypadku wiązki wektorowej rzędu  $n$  nad ciałem bazowym  $\mathbb{K}$  mamy do czynienia z grupą  $\text{GL}(n; \mathbb{K})$ , a w przypadku (gładkiej) wiązki głównej oraz wiązek z nią stowarzyszonych – z grupą strukturalną, która jest grupą Liego. Poczynione założenie pozwoli nam wykorzystać zgromadzoną w Rozdz. 1.5 wiedzę szczegółową na temat rachunku różniczkowego na różniczkowości grupowej oraz na różniczkowości z działaniem grupy Liego uzgodnionych z naturalnym działaniem grupy.

Rozważmy lokalne cięcie

$$\sigma : \mathcal{O} \longrightarrow E$$

i wybierzmy punkt  $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{ij}$ . W obrazie lokalnym definiujemy odwzorowania  $\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow F$  klasy  $C^k$ , jak następuje:

$$\tau_i \circ \sigma(x) =: (x, \sigma_i(x)),$$

przy czym zachodzi tożsamość

$$(x, \sigma_j(x)) \equiv \tau_j \circ \sigma(x) = \tau_j \circ \tau_i^{-1}(\tau_i \circ \sigma(x)) = \tau_j \circ \tau_i^{-1}(x, \sigma_i(x)) = (x, g_{ji}(x)(\sigma_i(x))),$$

z której wyprowadzamy regułę transformacyjną dla odwzorowań  $\sigma_i$  na  $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{ij}$ ,

$$\sigma_j(x) = g_{ji}(x)(\sigma_i(x)) \equiv \delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_i(x)).$$

Powyżej wprowadziliśmy symbol  $\delta : G \times F \longrightarrow F$  dla oznaczenia (definiującego) działania grupy Liego  $G \subset \text{Aut}(F)$  na  $F$ . Wprowadzone przez nas obiekty pozwalają nam skwantyfikować w obrazie lokalnym poprawkę do naturalnego różniczkowania wertykalnego  $\mathbb{T}\sigma_i$  cięcia  $\sigma$ , jaką wprowadza pochodna kowariantna. Oto więc dla dowolnego pola wektorowego  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^0(\mathcal{O})$  o wartości  $V \equiv \mathcal{V}(x)$  w punkcie  $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_i$  definiujemy

$$(4.2.8) \quad V \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x)) := \varpi_i \circ \mathbb{T}\tau_i(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma)(x) - \mathbb{T}_x\sigma_i(V),$$

gdzie

$$\alpha_i(\cdot, \sigma(\cdot)) \in \mathbb{T}.B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}.F \subset \mathbb{T}.B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{(\cdot, \sigma(\cdot))}(\mathcal{O}_i \times F)$$

jest miarą odstępstwa pochodnej kowariantnej od  $\mathbb{T}\sigma_i$ . Ten ostatni obiekt również możemy traktować jako element przestrzeni  $\Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}F$ , przy czym będziemy go wówczas oznaczać w sugestynny sposób jako  $d\sigma_i$ . Trzymając się tej wygodnej konwencji, zapiszemy zatem

$$\varpi_i \circ \mathbb{T}\tau_i(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma)(x) = V \lrcorner (d\sigma_i(x) + \alpha_i(x, \sigma(x))).$$

Rzecz jasna, przywołane tu kryterium naturalności w wyborze różniczkowania referencyjnego  $\mathbb{T}\sigma_i$  ma moc ograniczoną. Rzetelnego usprawiedliwienia dla poczynionego tu rozkładu pochodnej kowariantnej na części zależne od  $\sigma_i$  w sposób „stycznościowy” i „funkcjonalny” dostarczy nam dopiero szczegółowa dyskusja powiązania uzgodnionego z dodatkową strukturą na włóknie oraz jego zastosowań fizycznych, jaką podejmiemy w Rozdz. 2 i rozwiemy w Części 6. Tymczasem zbadamy własności transformacyjne obiektów lokalnych  $\alpha_i$  przy przejściu pomiędzy trywializacjami lokalnymi na przecięciu ich dziedzin. Oto więc w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{ij}$  znajdujemy

$$\begin{aligned} V \lrcorner (\mathbf{d}\sigma_i(x) + \alpha_i(x, \sigma(x))) &\equiv \varpi_{ij} \circ \mathbb{T}\tau_i(\nabla_V \sigma)(x) = \varpi_{ij} \circ \mathbb{T}t_{ij} \circ \mathbb{T}\tau_j(\nabla_V \sigma)(x) \\ &= V \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_j(x)} \delta_{g_{ij}(x)}) (\mathbf{d}\sigma_j(x) + \alpha_j(x, \sigma(x))), \end{aligned}$$

czyli – wobec dowolności  $V$  –

$$\begin{aligned} &(\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_j(x)} \delta_{g_{ij}(x)}) \alpha_j(x, \sigma(x)) - \alpha_i(x, \sigma(x)) \\ &= \mathbf{d}\sigma_i(x) - (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_j(x)} \delta_{g_{ij}(x)}) \mathbf{d}\sigma_j(x) \\ &= \mathbf{d}\sigma_i(x) - (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_j(x)} \delta_{g_{ij}(x)}) \mathbf{d}(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_i(x))). \end{aligned}$$

Celem uniknięcia nieporozumień na dalszych etapach analizy podkreślmy wyrażenie:  $\mathbb{T}_{\sigma_j(x)} \delta_{g_{ij}(x)}$  jest odwzorowaniem stycznym do dyfeomorfizmu  $\delta_{g_{ij}(x)} : F \curvearrowright$  w punkcie  $\sigma_j(x)$  dziedziny tego ostatniego, natomiast  $\mathbf{d}(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_i(x)))$  jest (tożsame z) odwzorowaniem stycznym do  $\delta_{g_{ji}(\cdot)}(\sigma_i(\cdot)) : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow F$  w punkcie  $x$ . Przywoławszy treść Uwagi 29 oraz Równ. (1.5.6), zapiszemy zatem

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_i(x))) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \mathbf{d}\sigma_i(x) + \theta_L^A(g_{ji}(x)) \otimes_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\delta_{\mathcal{L}_t^A(g_{ji}(x))}(\sigma_i(x))) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) (\mathbf{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\delta_{g_{ij}(x) \cdot \mathcal{L}_t^A(g_{ji}(x))}(\sigma_i(x)))) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) (\mathbf{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\delta_{g_{ij}(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot \mathcal{L}_t^A(e)}(\sigma_i(x)))) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) (\mathbf{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\delta_{\mathcal{L}_t^A(e)}(\sigma_i(x)))) , \end{aligned}$$

co w świetle Uwagi 30 prowadzi do wyniku

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_i(x))) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \mathbf{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)} (\mathcal{K}_{t_A}(\sigma_i(x))). \end{aligned}$$

Na podstawie Stw. 137 możemy – w odwołaniu do Równ. (1.5.9) – przepisać ten ostatni w postaci

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}(\delta_{g_{ji}(x)}(\sigma_i(x))) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \mathbf{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)}(t_A)}(\sigma_j(x)) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \mathbf{d}\sigma_i(x) + (\mathbb{T}_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)})_A^B \triangleright g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_B}(\sigma_j(x)) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ji}(x)}) \mathbf{d}\sigma_i(x) + g_{ji}^* \theta_R^B(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_B}(\sigma_j(x)), \end{aligned}$$



albo – raz jeszcze wyzyskując tezę Stw. 132 –

$$(4.2.9) \quad d(\delta_{g_{j_i}(x)}(\sigma_i(x))) = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{j_i}(x)}) d\sigma_i(x) - g_{ij}^* \theta_L^B(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_B}(\sigma_j(x)).$$

Ostatecznie otrzymujemy poszukiwaną formułę transformacyjną

$$\begin{aligned} \alpha_j(x, \sigma(x)) &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{j_i}(x)}) \alpha_i(x, \sigma(x)) - g_{ij}^* \theta_R^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}(\sigma_j(x)) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \delta_{g_{ij}(x)^{-1}}) \alpha_i(x, \sigma(x)) + g_{ij}^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}(\sigma_j(x)), \end{aligned}$$

o charakterze jawnie afinicznym. Formuła ta stanowi punkt wyjścia do dalszej analizy uwzględniającej dodatkową strukturę algebraiczną na włóknie, którą podejmiemy w Rozdz. 2.

▮

DEFINICJA 146. Przyjmijmy zapis Def. 143, 144 oraz 145 i niechaj  $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą wiązkami włóknistymi z powiązaniem (w dowolnym z równoważnych sformułowań). **Morfizm wiązek włóknistych z powiązaniem (nad dyfeomorfizmem baz)** pomiędzy  $E_1$  i  $E_2$  to morfizm wiązek włóknistych opisany przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \pi_{E_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

o składowej bazowej<sup>2</sup>  $f \in \text{Diff}^k(B_1, B_2)$  spełniający poniższe warunki

(FCM1) dla dowolnych: ścieżki  $\gamma : ] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow B_1$ ,  $\varepsilon > 0$  i  $t \in ] - \varepsilon, \varepsilon[$  zachodzi tożsamość

$$\Phi \circ \mathbf{P}_{0,t}^{(1)\gamma} = \mathbf{P}_{0,t}^{(2)f \circ \gamma} \circ \Phi,$$

przy czym wówczas dla dowolnych: cięcia (lokalnego)  $\sigma : \mathcal{O}_x \rightarrow E_1$  określonego na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x \in B_1$  oraz pola wektorowego  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$  spełniony jest **warunek kowariancji**

$$\mathbb{T}_{\sigma(x)} \Phi(\nabla_{\mathcal{V}}^{(1)} \sigma(x)) = \nabla_{\mathbb{T}f(\mathcal{V})}^{(2)} (\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x));$$

<sup>2</sup>Powód zawężenia wyboru składowej bazowej morfizmu jest oczywisty – zawężenie takie zapewnia istnienie naturalnego transportu pól wektorowych między bazami, a zatem także pomiędzy podwiązkami poziomymi. Możliwe jest uogólnienie podanej definicji, którego jednak nie będziemy tu rozważać.

(FCM2) para odwzorowań stycznych:  $(\mathbb{T}\Phi, \mathbb{T}f)$  ogranicza się do podwiązek poziomych  $\mathbb{H}E_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i zadaje tym sposobem morfizm wiązek wektorowych opisany przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}E_1 & \xrightarrow{\mathbb{T}\Phi \upharpoonright_{\mathbb{H}E_1}} & \mathbb{H}E_2 \\ \mathbb{T}\pi_{E_1} \upharpoonright_{\mathbb{H}E_1} \downarrow & & \downarrow \mathbb{T}\pi_{E_2} \upharpoonright_{\mathbb{H}E_1} \\ \mathbb{T}B_1 & \xrightarrow{\mathbb{T}f} & \mathbb{T}B_2 \end{array} ;$$

(FCM3) odwzorowanie styczne  $\mathbb{T}\Phi$  zachowuje formę powiązania w rozumieniu równości

$$\mathbb{T}\Phi \circ \mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2 \circ \mathbb{T}\Phi.$$

▲

UWAGA 60. Warunek kowariancji z punktu (FCM1) sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (przeprowadzonym z wykorzystaniem dowolnej ścieżki  $\gamma$  w  $B_1$  przez  $x = \gamma(0)$  o wektorze stycznym  $\dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x)$ ),

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\sigma(x)}\Phi(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x)) &\equiv \mathbb{T}_{\sigma(x)}\Phi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t))\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi \circ P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{0,t}^{f \circ \gamma^{-1}}((\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}) \circ (f \circ \gamma)(t)) \\ &= \nabla_{\mathbb{T}f(\mathcal{V})}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x)), \end{aligned}$$

przy czym identyfikacja pola wektorowego, wzdłuż którego różniczkowane jest cięcie  $\Phi \circ \sigma$  na końcu ciągu równości, wynika wprost z tożsamości

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \mathbb{T}_{\gamma(t)}f(\dot{\gamma}(t)).$$

To właśnie zweryfikowany powyżej warunek tłumaczy nazwę nadaną obiektowi  $\nabla_{\mathcal{V}}\sigma$ .

Należy też zauważyć, w odniesieniu do punktu (FCM2), że para  $(\mathbb{T}\Phi, \mathbb{T}f)$  zawsze jest morfizmem wiązek wektorowych z racji funktorialności  $\mathbb{T}$  i dopiero postulat zachowywania podwiązek poziomych stanowi nietrywialny warunek dodatkowo ograniczający morfizm wiązek  $(\Phi, f)$ .

▯

**TWIERDZENIE 4.2.3.** *Przyjmijmy zapis Def. 146. Warunki (FCM1), (FCM2) i (FCM3) są wzajemnie równoważne.*

■

Dowód:

(FCM1)  $\Rightarrow$  (FCM2) Wykorzystując izomorfizmy

$$\text{Hor}_p^{(1)} : \mathbb{T}_{\pi_{E_1}} B_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}_p E_1, \quad p \in E_1,$$

sprawdzamy – dla dowolnego  $V \equiv \dot{\gamma}(0) \in \mathbb{T}_{\pi_{E_1}} B_1$  (i w dowolnym punkcie  $p \in E_1$ ), a w nawiązaniu do argumentacji z drugiej części Uwagi 60 –

$$\mathbb{T}_p\Phi(\text{Hor}_p^{(1)}(V)) = \mathbb{T}_p\Phi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma}(p)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi \circ P_{0,t}^{\gamma}(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{0,t}^{f \circ \gamma}(\Phi(p))$$

$$\equiv \text{Hor}_{\Phi(p)}^{(2)}(\mathbb{T}_{\pi_{E_1}(p)}f(V)).$$

Liniowość ograniczonego morfizmu stycznego (włókno po włóknie) jest bezpośrednią konsekwencją jego konstrukcji.

(FCM2)  $\Rightarrow$  (FCM1) Przemienność diagramu z warunku (FCM2), który w ograniczeniu do punktu  $p \in E_{1,x}$ ,  $x \in B_1$  przybiera postać

$$(4.2.10) \quad \begin{array}{ccc} \text{H}_p E_1 & \xrightarrow{\mathbb{T}_p \Phi \upharpoonright_{\text{H}_p E_1}} & \text{H}_{\Phi(p)} E_2 \\ \text{Hor}_p^{(1)} \uparrow & & \uparrow \text{Hor}_{\Phi(p)}^{(2)} \\ \mathbb{T}_x B_1 & \xrightarrow{\mathbb{T}_x f} & \mathbb{T}_{f(x)} B_2 \end{array},$$

pozwala obliczyć, dla dowolnych ścieżek  $\tilde{\gamma}_p$ ,  $p \in E_{1,x}$  będących podniesieniami ścieżki  $\gamma$  w  $B_1$  przez  $x \equiv \gamma(0)$ , tj. będących rozwiązaniem zagadnienia początkowego (4.2.5) i definiujących tym samym powiązanie włókien wedle formuły (4.2.6), co następuje:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi \circ \tilde{\gamma}_p)(t) &= \mathbb{T}_{\tilde{\gamma}_p(t)} \Phi \left( \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_p(t) \right) = \mathbb{T}_{\tilde{\gamma}_p(t)} \Phi \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}^{(1)}(\dot{\gamma}(t)) \\ &= \text{Hor}_{\Phi \circ \tilde{\gamma}_p(t)}^{(2)} \circ \mathbb{T}_{\gamma(t)} f(\dot{\gamma}(t)) = \text{Hor}_{\Phi \circ \tilde{\gamma}_p(t)}^{(2)} \left( \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right). \end{aligned}$$

Z drugiej strony wprost na mocy definicji podniesienia poziomego ścieżki ( $f \circ \gamma$  w  $B_2$  przez  $f(x) \equiv f \circ \gamma(0)$  do  $\Phi(p)$ ) zachodzi równość

$$\text{Hor}_{\Phi(\tilde{\gamma}_p(t))}^{(2)} \left( \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) \right) = \frac{d}{dt} \widetilde{(f \circ \gamma)}_{\Phi(\tilde{\gamma}_p(0))}(t) \equiv \frac{d}{dt} \widetilde{(f \circ \gamma)}_{\Phi(p)}(t),$$

ewidentnie więc – wobec tożsamości punktów początkowych,  $\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\Phi(p)}(0) = \Phi(p) = \Phi \circ \tilde{\gamma}_p(0)$ , oraz wektorów stycznych, a na gruncie Stw. 105 – zachodzi równość

$$\widetilde{(f \circ \gamma)}_{\Phi(p)} = \Phi \circ \tilde{\gamma}_p,$$

która w dowolnym punkcie  $p \in E_1$  implikuje pożądaną relację

$$(\Phi \circ P_{0,t}^{(1)\gamma})(p) \equiv \Phi \circ \tilde{\gamma}_p(t) = \widetilde{(f \circ \gamma)}_{\Phi(p)}(t) \equiv P_{0,t}^{(2)f \circ \gamma}(\Phi(p)) = (P_{0,t}^{(2)f \circ \gamma} \circ \Phi)(p).$$

(FCM2)  $\Rightarrow$  (FCM3) Zważywszy, że  $A_\alpha$  jest rzutem na  $\forall E_\alpha$  wzdłuż  $\text{HE}_\alpha$ ,

$$A_\alpha = \text{id}_{\mathbb{T}E_\alpha} - \text{Hor}^{(\alpha)} \circ \mathbb{T}\pi_{E_\alpha}, \quad \alpha \in \{1, 2\},$$

obliczamy – w odwołaniu do Diag. (4.2.10) –

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\Phi \circ A_1 &= \mathbb{T}\Phi \circ \text{id}_{\mathbb{T}E_1} - (\mathbb{T}\Phi \circ \text{Hor}^{(1)}) \circ \mathbb{T}\pi_{E_1} = \mathbb{T}\Phi - (\text{Hor}_{\Phi(\cdot)}^{(2)} \circ \mathbb{T}f) \circ \mathbb{T}\pi_{E_1} \\ &= \mathbb{T}\Phi - \text{Hor}_{\Phi(\cdot)}^{(2)} \circ (\mathbb{T}f \circ \mathbb{T}\pi_{E_1}) = \text{id}_{\mathbb{T}E_2} \circ \mathbb{T}\Phi - \text{Hor}_{\Phi(\cdot)}^{(2)} \circ (\mathbb{T}\pi_{E_2} \circ \mathbb{T}\Phi) \\ &\equiv A_2 \circ \mathbb{T}\Phi. \end{aligned}$$

(FCM3)  $\Rightarrow$  (FCM2) Skoro  $\text{HE}_\alpha \equiv \text{Ker } A_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , to wystarczy wykazać, że

$$\mathbb{T}\Phi(\text{Ker } A_1) \subset \text{Ker } A_2,$$

to jednak wynika wprost z ciągu relacji

$$A_2(\mathbb{T}\Phi(\text{Ker } A_1)) = \mathbb{T}\Phi(A_1(\text{Ker } A_1)) = \mathbb{T}\Phi(\{\mathbf{0}_{\mathbb{T}E_1}\}) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{T}E_2}\}.$$

□

## 2. Uzgadnianie powiązania ze strukturą na włóknie

W fizycznie interesujących okolicznościach włókno (typowe) wiązki włóknistej niesie dodatkową strukturę, np. przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej nad ciałem  $\mathbb{K}$  lub torsora grupy topologicznej  $G$ . W takiej sytuacji naturalnym staje się wyszczególnienie tych powiązań, które respektują ową strukturę w sensie określonym poniżej na konkretnych przykładach spotykanych w zastosowaniach.

### 2.1. Powiązanie liniowe na wiązce wektorowej.

DEFINICJA 147. Przyjmijmy zapis Def. 130 i 143. Powiązanie włókien w wiązce wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{x^n}, \pi_{\mathbb{V}})$  nazywamy **zgodnym ze strukturą  $\mathbb{K}$ -liniową**, ilekroć dyfeomorfizmy (klasy  $C^k$ )

$$P_{t_1, t_2}^{\gamma} : \mathbb{V}_{\gamma(t_1)} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_{\gamma(t_2)}, \quad t_1, t_2 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$$

spełniają warunki

$$(4.2.11) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : P_{t_1, t_2}^{\gamma} \circ \mathbb{L}_{\lambda} \upharpoonright_{\mathbb{V}_{\gamma(t_1)}} = \mathbb{L}_{\lambda} \circ P_{t_1, t_2}^{\gamma},$$

przy czym wtedy

$$(4.2.12) \quad \nabla_{\mathbb{V}}(\mathbb{L}_{\lambda} \circ \sigma)(x) = \mathbb{T}_{\sigma(x)} \mathbb{L}_{\lambda}(\nabla_{\mathbb{V}} \sigma(x)).$$

Powiązanie takie określamy też mianem **powiązania  $\mathbb{K}$ -liniowego włókien w wiązce  $\mathbb{V}$** .

▲

UWAGA 61. Należy podkreślić, że spełnienie wskazanego przez nas warunku przemienności z odwzorowaniami  $\mathbb{L}_{\lambda}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  *pociąga za sobą* przemienność dyfeomorfizmów  $P_{t_1, t_2}^{\gamma}$  z  $\mathbb{A}$  i tym samym czyni powyższą definicję powiązania  $\mathbb{K}$ -liniowego w pełni naturalną. Dzieje się tak za sprawą

LEMAT 4.2.4. *Przyjmijmy zapis Def. 61 i niechaj  $((V_{\alpha}, +_{\alpha}, P_{\alpha}, \bullet \mapsto 0_{\alpha}), \ell_{\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  wymiaru  $n_{\alpha} \equiv \dim_{\mathbb{K}} V_{\alpha} < \infty$  z odnośnymi strukturami przestrzeni Banacha indukowanymi z  $\mathbb{K}^{x^{n_{\alpha}}}$ . Dowolne odwzorowanie  $L : V_1 \rightarrow V_2$  różniczkowalne w  $0_1$ , które jest  $\mathbb{K}$ -jednorodne, tj. spełnia warunek*

$$\forall_{(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V_1} : L(\lambda \triangleright_1 v) = \lambda \triangleright_2 L(v),$$

*jest  $\mathbb{K}$ -liniowe.*

■

Dowód: Wobec równości

$$L(0_1) \equiv L(0_{\mathbb{K} \triangleright_1 0_1}) = 0_{\mathbb{K} \triangleright_2} L(0_1) = 0_2,$$

możemy zatem zapisać – wprost na mocy Def. 63, a dla dowolnego  $v \in V_1$  –

$$F(v) = F(0_1) + DF(0_1)(v) + \|v\|_1 \triangleright \eta(v) = DF(0_1)(v) + \|v\|_1 \triangleright \eta(v)$$

w terminach pewnego odwzorowania  $\eta : V_1 \longrightarrow V_2$  o własności

$$\lim_{\|v\|_1 \rightarrow 0} \eta(v) = 0.$$

To daje nam pożądaną równość

$$\begin{aligned} F(v) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0_{\mathbb{K}}} \lambda^{-1} \triangleright_2 F(\lambda \triangleright_1 v) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0_{\mathbb{K}}} \lambda^{-1} \triangleright_2 \left( DF(0_1)(\lambda \triangleright_1 v) +_2 \|\lambda \triangleright_1 v\|_1 \triangleright_2 \eta(\lambda \triangleright_1 v) \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0_{\mathbb{K}}} \lambda^{-1} \triangleright_2 \left( \lambda \triangleright_2 DF(0_1)(v) +_2 |\lambda| \cdot \|v\|_1 \triangleright_2 \eta(\lambda \triangleright_1 v) \right) \\ &= DF(0_1)(v) + \|v\|_1 \triangleright_2 \left( \lim_{\lambda \rightarrow 0_{\mathbb{K}}} \frac{|\lambda|}{\lambda} \triangleright_2 \eta(\lambda \triangleright_1 v) \right) = DF(0_1)(v). \end{aligned}$$

□

Wreszcie też tożsamość (4.2.12) sprawdzamy w bezpośrednim rachunku odwodzącym się do jej definicji,

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\sigma(x)} \mathbb{L}_\lambda (\nabla_{\mathcal{V}} \sigma(x)) &\equiv \mathbb{T}_{\sigma(x)} \mathbb{L}_\lambda \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbb{P}_{0,t}^{\gamma-1} (\sigma \circ \gamma)(t) \right) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbb{L}_\lambda \circ \mathbb{P}_{0,t}^{\gamma-1} (\sigma \circ \gamma)(t) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbb{P}_{0,t}^{\gamma-1} \left( (\mathbb{L}_\lambda \circ \sigma) \circ \gamma \right)(t) \equiv \nabla_{\mathcal{V}} (\mathbb{L}_\lambda \circ \sigma)(x). \end{aligned}$$

□

DEFINICJA 148. Przyjmijmy zapis Def. 130 i 144. Powiązanie Ehresmanna na wiązce wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{x^n}, \pi_{\mathbb{V}})$  nazywamy **zgodnym ze strukturą K-liniową**, ilekroć odwzorowania  $\mathbb{L}_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  spełniają warunek

$$(4.2.13) \quad \forall v \in \mathbb{V} : \mathbb{H}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \mathbb{V} = \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda (\mathbb{H}_v \mathbb{V}).$$

Powiązanie takie określamy też mianem **K-liniowego powiązania Ehresmanna** na  $\mathbb{V}$ .

▲

UWAGA 62. Warto odnotować, że wypisany tu warunek jest jedynym nietrywialnym warunkiem naturalnym do pomyślenia w kategorii  $\mathbf{VectBun}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}(B)$  (w odniesieniu do odwzorowań  $\mathbb{L}_\lambda$  – resztę zapewnia Lemat 4.2.4), oto bowiem gładkie funktorialne podniesienia  $\mathbb{T}\mathbb{L}_\lambda : \mathbb{T}\mathbb{V} \curvearrowright$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$  dyfeomorfizmów  $\mathbb{L}_\lambda$  są dyfeomorfizmami wiązki stycznej, a nadto podwiązka pionowa tej ostatniej jest przez nie jawnie zachowywana w rozumieniu relacji

$$\mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda (\mathbb{V}_v \mathbb{V}) = \mathbb{V}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \mathbb{V}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

Istotnie, wykorzystując naturalne dyfeomorfizmy

$$(4.2.14) \quad \text{Vert}_v : \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_v \mathbb{V} : w \mapsto \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + t \triangleright_{\mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}} w),$$

(powyższa definicja ma sens, gdyż  $v, w \in \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$ , a do tego  $t \in \mathbb{R} \subset \mathbb{K}$ ), jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\begin{aligned} \text{Vert}_v (r \triangleright_{\mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}} w) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + t \triangleright (r \triangleright_{\mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}} w)) \\ &\equiv r \triangleright_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}} \left( \frac{d}{d(rt)} \upharpoonright_{rt=0} (v + rt \triangleright_{\mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}} w) \right) \equiv r \triangleright_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}} \text{Vert}_v(w), \end{aligned}$$

znajdujemy

$$\text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v^{-1} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + t \triangleright w) \right) \equiv \text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda(w)$$

$= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\mathbb{L}_\lambda(v) + t \triangleright \mathbb{L}_\lambda(w)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbb{L}_\lambda(v + t \triangleright w) = T_v \mathbb{L}_\lambda \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + t \triangleright w) \right)$ ,

czyli też – wobec dowolności  $\lambda \in \mathbb{K}^\times$  oraz  $v, w \in \mathbb{V}_{\pi_V(v)}$  – tożsamość

$$(4.2.15) \quad T_v \mathbb{L}_\lambda \upharpoonright_{\mathbb{V}_v \mathbb{V}} = \text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v^{-1},$$

której prawa strona jest superpozycją  $\mathbb{R}$ -liniowych dyfeomorfizmów, przeto własność tę ma także jej strona lewa,

$$T_v \mathbb{L}_\lambda \upharpoonright_{\mathbb{V}_v \mathbb{V}} : \mathbb{V}_v \mathbb{V} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \mathbb{V}.$$

$\overline{\lambda}$

**STWIERDZENIE 233.** *W dowolnym punkcie cięcia zerowego wiązki wektorowej (nad  $\mathbb{K}$ ) podprzestrzeń pozioma  $\mathbb{K}$ -liniowego powiązania Ehresmanna na tejże wiązce jest styczna do cięcia zerowego.*

■

*Dowód:* Wystarczy zauważyć, że w dowolnym punkcie  $\mathbf{0}_V(x)$ ,  $x \in B$  warunek (4.2.13) przyjmuje postać

$$\mathbf{H}_{\mathbf{0}_V(x)} \mathbb{V} \equiv \mathbf{H}_{\mathbb{L}_{0_K}(\mathbf{0}_V(x))} \mathbb{V} = T_{\mathbf{0}_V(x)} \mathbb{L}_{0_K}(\mathbf{H}_{\mathbf{0}_V(x)} \mathbb{V}),$$

przy czym odwzorowanie  $T_{\mathbf{0}_V(x)} \mathbb{L}_{0_K}$  anihiluje wektory styczne do włókna  $\mathbb{V}_x$ . □

**DEFINICJA 149.** Przyjmijmy zapis Def. 130 i 145. **Forma powiązania  $\mathbb{K}$ -liniowego** na wiązce wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_V)$  to morfizm wiązek włóknistych

$$(\mathcal{A}, \pi_V) : T\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

o  $\mathbb{R}$ -liniowych ograniczeniach do włókien,

$$\mathcal{A} \upharpoonright_{T_v \mathbb{V}} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_v \mathbb{V}, \mathbb{V}_{\pi_V(v)}),$$

oraz o własnościach

$$\forall v \in \mathbb{V} : \mathcal{A} \circ \text{Vert}_v = \text{id}_{\mathbb{V}_{\pi_V(v)}}.$$

oraz

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} : \mathcal{A} \circ T\mathbb{L}_\lambda = \mathbb{L}_\lambda \circ \mathcal{A}.$$

▲

**TWIERDZENIE 4.2.5.** *W dowolnej wiązce wektorowej (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ )  $\mathbb{K}$ -liniowe powiązanie Ehresmanna wyznacza formę powiązania  $\mathbb{K}$ -liniowego i vice versa. Ponadto powiązanie  $\mathbb{K}$ -liniowe włókien w tejże wiązce określa na niej  $\mathbb{K}$ -liniowe powiązanie Ehresmanna i vice versa.*

■

*Dowód:* Niechaj  $T\mathbb{V} = \mathbb{V}\mathbb{V} \oplus_B \mathbf{H}\mathbb{V}$  będzie  $\mathbb{K}$ -liniowym powiązaniem Ehresmanna na  $\mathbb{V}$ , a wtedy odnośna forma powiązania

$$\mathbf{A} := \text{id}_{T\mathbb{V}} - (T\pi_V \upharpoonright_{\mathbf{H}\mathbb{V}})^{-1} \circ T\pi_V : T\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}\mathbb{V},$$

określa formę  $\mathcal{A} : T\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  o jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowych ograniczeniach do włókien:

$$\mathcal{A} \upharpoonright_{T_v \mathbb{V}} := \text{Vert}_v^{-1} \circ \mathbf{A} \upharpoonright_{T_v \mathbb{V}},$$

spełniającą – dla dowolnego wektora  $(\text{Vert}_v(w), X) \in \text{Im Vert}_v \oplus H_v \mathbb{V} \equiv \mathbb{V}_v \mathbb{V} \oplus H_v \mathbb{V} \equiv \mathbb{T}_v \mathbb{V}$ ,  $w \in \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$  i dowolnego skalaru  $\lambda \in \mathbb{K}$  – tożsamość

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda(\text{Vert}_v(w), X) &= \mathcal{A}(\mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v(w), \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda(X)) \\ &= \text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}^{-1} \circ \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v(w) = \text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}^{-1} \circ (\text{Vert}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \circ \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v^{-1}) \circ \text{Vert}_v(w) \\ &= \mathbb{L}_\lambda(w) \equiv \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Vert}_v^{-1} \circ \mathcal{A}(\text{Vert}_v(w), X) \equiv \mathbb{L}_\lambda \circ \mathcal{A}(\text{Vert}_v(w), X), \end{aligned}$$

przy czym w pierwszej z wypisanych równości wykorzystaliśmy założenie o zachowywaniu przez  $\mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda$  wektorów poziomych i – niezależnie – pionowych, w drugiej – jawną postać  $\mathcal{A}$ , a w trzeciej – tożsamość (4.2.15). Z powyższego rachunku wywodzi się wprost drugą z tożsamości definiujących formę powiązania  $\mathbb{K}$ -liniowego. Pierwsza z nich wynika wprost z definicji  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \circ \text{Vert}_v \equiv \text{Vert}_v^{-1} \circ \mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}} \circ \text{Vert}_v = \text{Vert}_v^{-1} \circ \text{id}_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}} \circ \text{Vert}_v = \text{id}_{\mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}}.$$

I odwrotnie, niechaj będzie dane odwzorowanie  $\mathcal{A} : \mathbb{T}\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  o własnościach jak w Def. 149. Jego dziedziina i przeciwdziedzina niosą strukturę wiązki wektorowej nad  $\mathbb{R}$  (na  $\mathbb{V}$  struktura ta jest indukowana kanonicznie przez strukturę  $\mathbb{K}$ -liniową za pośrednictwem zanurzenia  $\mathbb{R} \subset \mathbb{K}$ ) i względem tych struktur  $\mathcal{A}$  jest – wprost z definicji – morfizmem wiązek  $\mathbb{R}$ -liniowych, zatem też na mocy Stw. 198 podzbiór

$$\text{HV} := \text{Ker } \mathcal{A} \subset \mathbb{T}\mathbb{V}$$

jest podwiązką wektorową (nad  $\mathbb{R}$ ). Przy tym wobec istnienia izomorfizmów (4.2.14) możemy dowolny element

$$w \in \text{Ker}(\mathbb{T}\pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{H_v \mathbb{V}}) = \text{Ker}(\mathbb{T}\pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{H_v \mathbb{V}}) \cap \text{Ker } \mathcal{A} \equiv \mathbb{V}_v \mathbb{V} \cap \text{Ker } \mathcal{A}$$

zapisać w postaci

$$w = \text{Vert}_v(\varpi)$$

dla pewnego  $\varpi \in \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$ , przeto

$$\varpi \equiv \mathcal{A} \circ \text{Vert}_v(\varpi) = \mathcal{A}(w) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}} \circ \pi_{\mathbb{V}}(v),$$

czyli też – z racji liniowości  $\text{Vert}_v$  –

$$w = \text{Vert}_v \circ \mathbf{0}_{\mathbb{V}} \circ \pi_{\mathbb{V}}(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}\mathbb{V}}(v).$$

W takim razie  $\mathbb{T}\pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{H_v \mathbb{V}}$  jest injekcją, a ponieważ  $\text{Im}(\mathcal{A} \circ \text{Vert}_v) \equiv \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$  przy  $\text{Im}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}}) \subset \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$ , co skutkuje równością  $\text{Im}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}}) = \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}$ , przeto standardowy bilans wymiarów

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_v \mathbb{V} - \dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}})$$

ze Stw. 17 przyjmuje w tym wypadku postać

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}}) &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_v \mathbb{V} - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} B + \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} B, \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku uwzględniliśmy izomorfizm  $\mathbb{V}_{\pi_{\mathbb{V}}(v)} \cong V$ . Ostatecznie więc konstatujemy, że odwzorowanie

$$\mathbb{T}\pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\text{Ker } \mathcal{A}} : \text{Ker } \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{T}B$$

jest izomorfizmem, co daje nam postulowany rozkład Whitneya

$$\mathbb{T}\mathbb{V} = \mathbb{V}\mathbb{V} \oplus_B \text{Ker } \mathcal{A} \equiv \mathbb{V}\mathbb{V} \oplus_B \text{HV}.$$

Pozostaje pokazać, że

$$\forall_{(\lambda, v) \in \mathbb{K}^x \times \mathbb{V}} : \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda(\text{Ker } \mathcal{A})_v = (\text{Ker } \mathcal{A})_{\mathbb{L}_\lambda(v)}.$$

W tym celu wybierzmy dowolny punkt  $X \in (\text{Ker } \mathcal{A})_v$  i obliczmy

$$\mathcal{A} \circ \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda(X) = \mathbb{L}_\lambda \circ \mathcal{A}(X) = \mathbb{L}_\lambda(\mathbf{0}_\mathbb{V} \circ \pi_\mathbb{V}(v)) = \mathbf{0}_\mathbb{V} \circ \pi_\mathbb{V}(v),$$

skąd wniosek:

$$\mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda(\text{Ker } \mathcal{A})_v \subseteq (\text{Ker } \mathcal{A})_{\mathbb{L}_\lambda(v)},$$

a ponieważ obrazem tej ostatniej relacji względem izomorfizmu  $\mathbb{T}\pi_\mathbb{V} \upharpoonright_{\text{Ker } \mathcal{A}}$  jest

$$\mathbb{T}_{\pi_\mathbb{V}(v)} B \equiv \mathbb{T}_v(\pi_\mathbb{V} \circ \mathbb{L}_\lambda)(\text{Ker } \mathcal{A})_v = \mathbb{T}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \pi_\mathbb{V}(\mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda(\text{Ker } \mathcal{A})_v)$$

$$\subseteq \mathbb{T}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} \pi_\mathbb{V}(\text{Ker } \mathcal{A})_{\mathbb{L}_\lambda(v)} = \mathbb{T}_{\pi_\mathbb{V} \circ \mathbb{L}_\lambda(v)} B = \mathbb{T}_{\pi_\mathbb{V}(v)} B,$$

przeto nieodzownie relacja ta jest w istocie równością.

Załóżmy następnie, że dane jest powiązanie na włóknach wiązki wektorowej zgodne – w rozumieniu Def. 147 – z obecną na nich strukturą  $\mathbb{K}$ -liniową. Różniczkując zapisaną dla dowolnego  $v \in \mathbb{V}_{\gamma(0)}$  tożsamość

$$\mathbb{P}_{0,t}^\gamma \circ \mathbb{L}_\lambda(v) = \mathbb{L}_\lambda \circ \mathbb{P}_{0,t}^\gamma(v)$$

względem parametru  $t$ , a następnie kładąc  $t = 0$ , otrzymujemy – wprost na mocy definicji (4.2.2) – tożsamość

$$\begin{aligned} \text{Hor}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}(\dot{\gamma}(0)) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbb{P}_{0,t}^\gamma(\mathbb{L}_\lambda(v)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbb{L}_\lambda \circ \mathbb{P}_{0,t}^\gamma(v) = \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbb{P}_{0,t}^\gamma(v)\right) \\ &= \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Hor}_v(\dot{\gamma}(0)), \end{aligned}$$

z której wobec dowolności  $\dot{\gamma}(0)$ , a zarazem bijektywności  $\text{Hor}_\cdot$  w (ko)ograniczeniu do  $\text{HV} \equiv \text{Im Hor}_\cdot$  wyprowadzamy relację (4.2.13).

Przyjmijmy na koniec, że istnieje na  $\mathbb{V}$  forma powiązania  $\mathbb{K}$ -liniowego, i w tych okolicznościach rozważmy – wykorzystując  $\text{Hor}_w \equiv (\mathbb{T}_w \pi \upharpoonright_{\text{H}_w \mathbb{V}})^{-1}$ ,  $w \in \mathbb{V}$  – podniesienia poziome  $\tilde{\gamma}_v, \tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}$  dowolnej ścieżki  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow B$  spełniającej warunki  $\gamma(0) = x \in B$  oraz  $\dot{\gamma}(0) = X \in \mathbb{T}_x B$  do punktów – odpowiednio –  $v \in \mathbb{V}_x$ ,

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_v(t) = \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_v(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}_v(0) = v,$$

oraz  $\mathbb{L}_\lambda(v) \in \mathbb{V}_x$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}(t) = \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}(0) = \mathbb{L}_\lambda(v).$$

Przekształciwszy pierwszą z nich przy użyciu  $\mathbb{L}_\lambda$ , otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v(t) = \mathbb{T}_{\tilde{\gamma}_v(t)} \mathbb{L}_\lambda\left(\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_v(t)\right) = \mathbb{T}_{\tilde{\gamma}_v(t)} \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_v(t)}(\dot{\gamma}(t)),$$

którą wobec oczywistej równoważności

$$\mathbb{T}_{\mathbb{L}_\lambda(w)} \pi_\mathbb{V} \circ \mathbb{T}_v \mathbb{L}_\lambda \upharpoonright_{\text{H}_v \mathbb{V}} = \mathbb{T}_v(\pi_\mathbb{V} \circ \mathbb{L}_\lambda) \upharpoonright_{\text{H}_v \mathbb{V}} = \mathbb{T}_v \pi_\mathbb{V} \upharpoonright_{\text{H}_v \mathbb{V}}$$

$$\iff \mathbb{T}_w \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Hor}_w = \text{Hor}_{\mathbb{L}_\lambda(w)}$$

możemy przepisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v(t) = \text{Hor}_{\mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v(t)}(\dot{\gamma}(t)).$$

Pchnięcie stycznosciowe  $\mathbb{T}_{\tilde{\gamma}_v(t)} \mathbb{L}_\lambda \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_v(t)}(\dot{\gamma}(t))$  podniesionego poziomo (do  $v$  w chwili  $t = 0$ ) pola stycznosciowego do  $\gamma$  jest zatem także podniesieniem poziomym tego



pola,  $\text{Hor}_{\mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v(t)}(\dot{\gamma}(t))$ , przy czym w chwili  $t = 0$  jest to podniesienie do punktu  $\mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v(0) \equiv \mathbb{L}_\lambda(v)$ . Lokalnie jedyną krzywą całkową podniesienia poziomego  $\dot{\gamma}$  do  $\mathbb{V}$  przez  $\mathbb{L}_\lambda(v)$  jest jednak – wprost z definicji –  $\tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)}$ , wnioskujemy więc o tożsamości

$$\tilde{\gamma}_{\mathbb{L}_\lambda(v)} = \mathbb{L}_\lambda \circ \tilde{\gamma}_v,$$

a ta w świetle konstrukcji operatorów  $P_{0,t}^\gamma$  podanej w Równ. (4.2.5) oznacza pożądaną ich  $\mathbb{K}$ -jednorodność wyrażoną w Równ. (4.2.11).  $\square$

DEFINICJA 150. Przyjmijmy zapis Def. 130. **Powiązanie Koszula** na wiązce wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  (klasy  $C^k$  nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ), zwane także **pochodną Koszula**, to odwzorowanie

$$\nabla^K : \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B) \times \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) \longrightarrow \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) : (\mathcal{V}, \sigma) \longmapsto \nabla_{\mathcal{V}}^K \sigma$$

spełniające następujące aksjomaty:

(KC1)  $C^k(B, \mathbb{R})$ -liniowość w pierwszym argumencie,

$$\forall (f_\alpha, \mathcal{V}_\alpha) \in C^k(B, \mathbb{R}) \times \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B), \alpha \in \{1, 2\} : \nabla_{f_1 \triangleright \mathcal{V}_1 + \mathbb{T}B f_2 \triangleright \mathcal{V}_2}^K = f_1 \triangleright \nabla_{\mathcal{V}_1}^K + f_2 \triangleright \nabla_{\mathcal{V}_2}^K;$$

(KC2) addytywność w drugim argumencie,

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) : \nabla^K(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla^K \sigma_1 + \nabla^K \sigma_2;$$

(KC3) **tożsamość Leibniza**, spełniona dla dowolnych  $(\sigma, f) \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) \times C^k(B, \mathbb{K})$ ,

$$(4.2.16) \quad \nabla^K(\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot))) = df \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_{f(\cdot)}) \circ \nabla^K \sigma.$$

▲

UWAGA 63. Przywoławszy Stw. 44 możemy równoważnie traktować pochodną Koszula jako odwzorowanie (które będziemy oznaczać tym samym symbolem, pozostawiając kontekstowi ujednoznacznienie używanego w przyszłości zapisu)

$$\nabla^K \in \text{Hom}_{C^k(B, \mathbb{R})}(\Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B) \otimes_{\mathbb{R}} \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}), \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}))$$

spełniające tożsamość Leibniza (KC3).

▯

TWIERDZENIE 4.2.6. *Na dowolnej wiązce wektorowej istnieje powiązanie Koszula.*

■

*Dowód:* W bezpośredniej konstrukcji powiązania na wiązce wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  wykorzystujemy jej lokalne trywializacje  $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}$ ,  $i \in I$ . Niechaj  $\{e_k\}_{k \in \overline{1, n}}$  będzie (dowolną) bazą przestrzeni  $\mathbb{K}^{\times n}$ . Dla dowolnego cięcia lokalnego

$$\sigma : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, \sigma^k(x) \triangleright e_k)$$

oraz (lokalnego) pola wektorowego  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_i)$  definiujemy

$$\nabla_{\mathcal{V}}^{(i)} \sigma(x) := \tau_i^{-1}(x, \mathcal{V}(\sigma^k)(x) \triangleright e_k).$$

Bez trudu stwierdzamy, że jest to (lokalnie) pochodna Koszula, oto bowiem aksjomaty (KC1) i (KC2) są spełnione trywialnie, a nadto obliczamy – w odwołaniu do Diag. (4.1.8), a dla dowolnej funkcji  $f \in C^k(B, \mathbb{K})$  –

$$\nabla_{\mathcal{V}}^{(i)}(\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(x) \equiv \tau_i^{-1}(x, \mathcal{V}(f \cdot \sigma^k)(x) \triangleright e_k),$$

czyli jest też spełniony aksjomat (KC3).

W następnej kolejności stwierdzamy, że dowolna wypukła kombinacja  $C^k(B, \mathbb{K})$ -liniowa pochodnych Koszula  $\nabla^{K,1}$  i  $\nabla^{K,2}$  na  $\mathbb{V}$  jest pochodną Koszula. Istotnie, niechaj  $\rho_\alpha \in C^k(B, \mathbb{K})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą odwzorowaniami spełniającymi warunek (wypukłości)

$$\forall_{x \in B} : \rho_1(x) + \rho_2(x) = 1_{\mathbb{K}},$$

a wtedy odwzorowanie

$$\nabla^{K,12} := \mathbb{L}_{\rho_1(\cdot)} \circ \nabla^{K,1} + \mathbb{L}_{\rho_2(\cdot)} \circ \nabla^{K,2}$$

w oczywisty sposób spełnia aksjomaty (KC1) i (KC2) (wszak mnożenie w ciele  $\mathbb{K}$  jest przemienne), a nadto dostajemy (w oczywistym zapisie skróconym)

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{V}}^{K,12}(\mathbb{L}_f \circ \sigma) &= \sum_{\alpha \in \{1,2\}} \mathbb{L}_{\rho_\alpha}(\mathbb{L}_{\mathcal{V}(f)} \circ \sigma + \mathbb{L}_f(\nabla_{\mathcal{V}}^{K,\alpha} \sigma)) \\ &= \mathbb{L}_{\sum_{\alpha \in \{1,2\}} \rho_\alpha}(\mathbb{L}_{\mathcal{V}(f)} \circ \sigma) + \mathbb{L}_f\left(\sum_{\alpha \in \{1,2\}} \mathbb{L}_{\rho_\alpha}(\nabla_{\mathcal{V}}^{K,\alpha} \sigma)\right) \\ &= \mathbb{L}_{\mathcal{V}(f)} \circ \sigma + \mathbb{L}_f(\nabla_{\mathcal{V}}^{K,12} \sigma), \end{aligned}$$

czyli spełniona jest także tożsamość Leibniza.

Łącząc obie powyższe obserwacje, możemy skonstruować poszukiwaną przez nas pochodną Koszula przy użyciu dowolnego rozkładu jedności  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  (klasy  $C^k$ ) stowarzyszonego z pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , a to wedle formuły

$$\nabla_{\mathcal{V}}^K \sigma(\cdot) := \sum_{i \in I} \mathbb{L}_{\lambda_i(\cdot)}(\nabla_{\mathcal{V} \upharpoonright \mathcal{O}_i}^{(i)}(\sigma \upharpoonright \mathcal{O}_i)),$$

której sensowność gwarantują podstawowe własności (w tym lokalna skończoność rodziny nośników) rozkładu wymienione w Def. 70.  $\square$

**TWIERDZENIE 4.2.7.** *Powiązanie  $\mathbb{K}$ -liniowe na wiązce wektorowej (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ), rozumiane w sensie dowolnej z wprowadzonych uprzednio definicji 147, 148 i 149, określa na niej powiązanie Koszula. I odwrotnie, dowolne powiązanie Koszula pochodzi od jednoznacznie określonego powiązania  $\mathbb{K}$ -liniowego.*  $\blacksquare$

*Dowód:* Niechaj  $\nabla$  będzie pochodną kowariantną powiązania na włóknach w wiązce wektorowej  $\mathbb{V}$ , o którym mówi Def. 143, przy czym zakładamy, że mamy do czynienia z powiązaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym. Rozważmy odwzorowanie

$$(4.2.17) \quad \begin{aligned} \nabla^K &: \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B) \times \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) \longrightarrow \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}) \\ &: (\mathcal{V}, \sigma) \longmapsto \text{Vert}_{\sigma(\cdot)}^{-1} \circ \nabla_{\mathcal{V}} \sigma(\cdot). \end{aligned}$$

Wprost na mocy definicji odwzorowanie to spełnia aksjomaty (KC1) i (KC2), a to w następstwie aksjomatów (PT4) i (PT5) z Def. 143. Ponadto wobec założonej  $\mathbb{K}$ -liniowości operatorów przeniesienia równoległego  $P_{0,t}^\gamma$ , Równ. (4.2.11), oraz tej samej własności odwzorowań  $\text{Vert}_v$ , Równ. (4.2.15), otrzymujemy – dla dowolnej

funkcji  $f \in C^k(B, \mathbb{K})$ , dowolnego pola wektorowego  $\mathcal{V} \in \Gamma_{\text{loc}}(B)$  oraz stowarzyszonej z nim (jak w punkcie (PT4) Def. 143) ścieżki  $\gamma$  – ciąg równości

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}}(\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(\gamma(0)) &= \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)}(\sigma \circ \gamma(\cdot))}^{-1} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma-1}(\mathbb{L}_{f \circ \gamma(t)}(\sigma \circ \gamma(t))) \right) \\
&= \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)}(\sigma \circ \gamma(0))}^{-1} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbb{L}_{f \circ \gamma(t)}(P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t))) \right) \\
&\equiv \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)}(\sigma \circ \gamma(0))}^{-1} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)} \circ P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t)) \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{L}_{T_{\gamma(0)}f(\dot{\gamma}(0))} \circ P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t)) + \mathcal{O}(t^2)) \right) \\
&= \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)}(\sigma \circ \gamma(0))}^{-1} \circ T_{\sigma \circ \gamma(0)} \mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t)) \right) \\
&\quad + \mathbb{L}_{T_{\gamma(0)}f(\dot{\gamma}(0))} \circ P_{0,0}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(0)) \\
&= \mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)} \circ \text{Vert}_{\sigma \circ \gamma(0)}^{-1} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma-1}(\sigma \circ \gamma(t)) \right) \\
&\quad + \mathbb{L}_{T_{\gamma(0)}f(\dot{\gamma}(0))} \circ \sigma(\gamma(0)) \\
&\equiv \mathbb{L}_{f \circ \gamma(0)}(\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}}\sigma)(\gamma(0)) + \mathbb{L}_{\dot{\gamma}(0) \lrcorner df(\gamma(0))} \circ \sigma(\gamma(0)),
\end{aligned}$$

w którym wykorzystaliśmy także bezpośrednio definicję odwzorowań  $\text{Vert}$ .. Powyższe stanowi jawny zapis postulowanej tożsamości Leibniza.

Odwracając bieg rozumowania, założmy najpierw, że powiązanie  $\mathbb{K}$ -liniowe na  $\mathbb{V}$ , którego pochodna kowariantna wyznacza pochodną Koszula jak w Równ. (4.2.17), istnieje, co oznacza, że są określone izomorfizmy

$$\text{Hor}_v : T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}B \xrightarrow{\cong} H_v \mathbb{V}, \quad v \in \mathbb{V},$$

przy czym w świetle tożsamości

$$(4.2.18) \quad \nabla_{\mathcal{V}}\sigma(\pi_{\mathbb{V}}(v)) = T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}\sigma(\mathcal{V})(\pi_{\mathbb{V}}(v)) - \text{Hor}_v(\mathcal{V}(\pi_{\mathbb{V}}(v))),$$

por. Równ. (4.2.7), obliczamy

$$\begin{aligned}
\text{Hor}_v(\mathcal{V}(\pi_{\mathbb{V}}(v))) &= T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}\sigma(\mathcal{V})(\pi_{\mathbb{V}}(v)) - \text{Vert}_v(\text{Vert}_v^{-1}(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(\pi_{\mathbb{V}}(v)))) \\
&= T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}\sigma(\mathcal{V})(\pi_{\mathbb{V}}(v)) - \text{Vert}_v(\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}}\sigma).
\end{aligned}$$

Izomorfizmy te są zatem zupełnie jednoznacznie określone przez  $\nabla^{\mathbb{K}}$ , same zaś determinują powiązanie, co dowodzi jednoznaczności powiązania  $\mathbb{K}$ -liniowego na  $\mathbb{V}$  odtwarzającego  $\nabla^{\mathbb{K}}$ . Pozostaje zweryfikować poczynione przez nas założenie o istnieniu rzeczonego powiązania.

Wychodząc od ustalonego powiązania Koszula, zdefiniujmy odwzorowanie

$$\begin{aligned}
(4.2.20) \quad \text{Hor}_v &: T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}B \longrightarrow T_v \mathbb{V} \\
&: X \longmapsto T_{\pi_{\mathbb{V}}(v)}\sigma(X) - \text{Vert}_v(\nabla_X^{\mathbb{K}}\sigma)(\pi_{\mathbb{V}}(v)),
\end{aligned}$$

używając do tego *dowolnych*: cięcia lokalnego  $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$  gładkiego na pewnym otoczeniu otwartym  $x \equiv \pi_{\mathbb{V}}(v)$  i spełniającego warunek  $\sigma(x) = v$  oraz pola wektorowego  $\tilde{X} \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B)$  o własności  $\tilde{X}(x) = X$ . Odwzorowanie to jest jawnie R-liniowe, a do tego spełnia tożsamość

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_v \pi_{\mathbb{V}} \circ \text{Hor}_v(X) &= \mathbb{T}_x(\pi_{\mathbb{V}} \circ \sigma)(X) - \mathbb{T}_v \pi_{\mathbb{V}} \circ \text{Vert}_v(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma)(x) \\ &= \mathbb{T}_x(\pi_{\mathbb{V}} \circ \sigma)(X) = \mathbb{T}_x \text{id}_B(X) = X, \end{aligned}$$

jest zatem injekcją, więc też izomorfizmem na obraz. Ten ostatni przecina się z  $\mathbb{V}_v \mathbb{V}$  w wektorze zerowym, oto bowiem dla  $\text{Hor}_v(X) \in \mathbb{V}_v \mathbb{V}$  zachodzi

$$0_{\mathbb{T}_x B} = \mathbb{T}_v \pi_{\mathbb{V}} \circ \text{Hor}_v(X) = X,$$

przeto na podstawie porównania wymiarów stwierdzamy istnienie rozkładu

$$\text{Im Hor}_v \oplus \mathbb{V}_v \mathbb{V} = \mathbb{T}_v \mathbb{V},$$

wyznaczanego przez operator rzutu

$$\text{Hor}_v \circ \mathbb{T}_v \pi_{\mathbb{V}} : \mathbb{T}_v \mathbb{V} \longrightarrow \text{Im Hor}_v.$$

Gładka zależność tego rozkładu od punktu w  $\mathbb{V}$  jest pochodną gładkości odwzorowań użytych w definicji powyższego rzutu. Musimy jeszcze tylko przekonać się, że  $\text{Hor}_v$  nie zależy od wyboru cięcia  $\sigma$  o założonej własności. Po pierwsze zauważamy więc, że jeśli na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x$  lokalnie gładkie cięcia  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$  pokrywają się,

$$(\sigma_2 - \sigma_1)|_{\mathcal{O}_x} = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}|_{\mathcal{O}_x},$$

to wówczas ich różnica  $\sigma_{21} \equiv (\sigma_2 - \sigma_1)|_{\mathcal{O}_x}$  spełnia tożsamości

$$\mathbb{T}_x \sigma_{21}(X) = 0_{\mathbb{T}_v \mathbb{V}}$$

oraz

$$\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_{21}(x) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}(x).$$

O ile pierwsza z nich jest oczywista, druga wymaga krótkiego komentarza. Rozważmy dowolną funkcję  $f \in C^k(B, \mathbb{K})$ , dla której istnieje otoczenie otwarte  $\mathcal{U}_x$  punktu  $x$  o własności  $\text{supp } f \subset \mathcal{U}_x$  i zawarte w nim otoczenie otwarte  $\mathcal{W}_x \subset \mathcal{U}_x$  tegoż punktu  $x$  o własności  $f|_{\mathcal{W}_x} = 1_{\mathbb{K}}$ . Przywoławszy aksjomat (KC3) (i uwzględnivszy pierwszą z tożsamości), obliczamy

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\mathbb{K}} (\mathbb{L}_{f(\cdot)} \circ \sigma_{21}(\cdot))(x) &= \mathbb{L}_{\mathbb{T}_x f(X)}(\sigma(x)) + \mathbb{L}_{f(x)}(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_{21}(x)) = \mathbb{L}_{1_{\mathbb{K}}}(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_{21}(x)) \\ &= \nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_{21}(x) \end{aligned}$$

i w konsekwencji możemy ograniczyć nasze rozważania do *dowolnie małego* otoczenia otwartego punktu  $x$ , w szczególności więc – do dowolnego elementu  $\mathcal{O}_i \ni x$  pokrycia trywializującego. W obrazie odnośnej trywializacji  $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}$ , o podstawowej własności

$$\forall (\lambda, y, w) \in \mathbb{K} \times \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} : \tau_i \circ \mathbb{L}_{\lambda} \circ \tau_i^{-1}(y, w) = (y, \lambda \triangleright_n w),$$

wybieramy bazę  $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n}}$  przestrzeni  $\mathbb{K}^{\times n}$  i stowarzyszymy z nią rodzinę cięć  $\epsilon_a^{(i)} := \tau_i^{-1}(\cdot, e_a)$  jak w Równ. (4.1.11) oraz – dla dowolnego  $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$  (nad  $\mathcal{O}_i$ ) –

$$(4.2.21) \quad \tau_i \circ \sigma(y) =: (y, \sigma_i(y)) \equiv (y, \sigma_i^a(y) \triangleright e_a),$$

czyli

$$\sigma(y) \equiv \mathbb{L}_{\sigma_i^a(y)}(\epsilon_a^{(i)}(y)).$$

Teraz już bez trudu obliczamy – kładąc  $v = \tau_i^{-1}(x, w)$  i przywołując po drodze rozkład  $\mathbb{T}_{\tau_i \circ \sigma(x)} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \equiv \mathbb{T}_x B \oplus \mathbb{K}^{\times n}$ , jak również strukturę  $\mathbb{K}$ -liniową na włóknach  $\mathbb{V}$  opisywaną przez Diag. (4.1.6) i (4.1.8) –

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_x \sigma(X) &\equiv \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1} \circ \mathbb{T}_x(\tau_i \circ \sigma)(X) = \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (x, w + t \triangleright \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) \right) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \tau_i^{-1}(x, w + t \triangleright \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + \tau_i^{-1}(x, t \triangleright \mathbb{T}_x \sigma_i(X))) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (v + \mathbb{L}_t \circ \mathbb{L}_{\mathbb{T}_x \sigma_i^a(X)}(\epsilon_a^{(i)}(x))) \\ &\equiv \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \text{Vert}_v \circ \mathbb{L}_{\mathbb{T}_x \sigma_i^a(X)}(\epsilon_a^{(i)}(x)), \end{aligned}$$

a dalej, na tej podstawie i w odwołaniu do aksjomatyki pochodnej Koszula,

$$\begin{aligned} \text{Hor}_v(X) &= \mathbb{T}_x \sigma(X) - \text{Vert}_v(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma(x)) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) + \text{Vert}_v \circ \mathbb{L}_{\mathbb{T}_x \sigma_i^a(X)}(\epsilon_a^{(i)}(x)) - \text{Vert}_v(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}}(\mathbb{L}_{\sigma_i^a(\cdot)}(\epsilon_a^{(i)}(\cdot)))(x)) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i(v)} \tau_i^{-1}(X, \mathbf{0}_n) - \text{Vert}_v \circ \mathbb{L}_{\sigma_i^a(x)}(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \epsilon_a^{(i)}(x)). \end{aligned}$$

Skoro jednak  $\text{Hor}_v(X)$  zależy od współczynników  $\sigma_i^k$  wyłącznie poprzez ich wartości w  $x$  (nie zaś pochodne), to ostatecznie w przypadku rozważanej wcześniej pary cięć  $\sigma_1, \sigma_2$  o własności  $\sigma_2(x) = v = \sigma_1(x)$  stwierdzamy tożsamość

$$\mathbb{T}_x \sigma_2(X) - \text{Vert}_v(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_2(x)) = \mathbb{T}_x \sigma_1(X) - \text{Vert}_v(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{K}} \sigma_1(x)),$$

która przesądza o tym, że odwzorowania  $\text{Hor}_v$  są dobrze określone.  $\square$

Jako wniosek z naszych rozważań możemy sformułować

**TWIERDZENIE 4.2.8.** *Na dowolnej wiązce wektorowej (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) istnieje powiązanie  $\mathbb{K}$ -liniowe.*  $\blacksquare$

Dowód: Oczywisty.  $\square$

**TWIERDZENIE 4.2.9.** *Przyjmijmy zapis Def. 130, 146 oraz 150 i niechaj*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{V}_2 \\ \pi_{\mathbb{V}_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{V}_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

będzie morfizmem wiązek wektorowych z powiązaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym (nad dyfeomorfizmem baz). Każdy z (wzajem równoważnych) warunków (FCM1), (FCM2) i (FCM3)

z Def. 146, które w przypadku wiązek wektorowych z powiązaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym uzupełniamy o wymóg (4.1.9)  $\mathbb{K}$ -liniowości ograniczeń do włókna, jest równoważny warunkowi:

(VFCM4) dla dowolnych: cięcia (lokalnego)  $\sigma : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{V}_1$  określonego na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x \in B_1$  oraz pola wektorowego  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$  spełniony jest warunek

$$\Phi(\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}(1)}\sigma(x)) = \nabla_{\mathbb{T}f(\mathcal{V})}^{\mathbb{K}(2)}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x)).$$

■

*Dowód:* W świetle Tw. 4.2.3 wystarczy zweryfikować poniższe implikacje (w których zapisie należy rozumieć, że warunki (FCM1) i (FCM2) zostały stosownie ograniczone do kategorii wiązek wektorowych).

(FCM1)  $\Rightarrow$  (VFCM4) Wykorzystując Równ. (4.2.17) oraz definicję (4.2.14), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi(\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}(1)}\sigma(x)) &= \Phi \circ \text{Vert}_{\sigma(x)}^{(1)-1}(\nabla_{\mathcal{V}}^{(1)}\sigma)(x) = \text{Vert}_{\Phi \circ \sigma(x)}^{(2)-1} \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)}\Phi(\nabla_{\mathcal{V}}^{(1)}\sigma)(x) \\ &= \text{Vert}_{\Phi \circ \sigma(x)}^{(2)-1}(\nabla_{\mathcal{V}}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x))) \\ &\equiv \nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}(2)}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x)). \end{aligned}$$

(VFCM4)  $\Rightarrow$  (FCM2) Na podstawie Równ. (4.2.20) ustalającego relację między podniesieniem poziomym a pochodną Koszula, a także – ponownie – definicji (4.2.14), obliczamy

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_v\Phi \circ \text{Hor}_v^{(1)}(X) &= \mathbb{T}_v\Phi \circ \mathbb{T}_x\sigma(X) - \mathbb{T}_v\Phi \circ \text{Vert}_v^{(1)}(\nabla_{\bar{X}}^{\mathbb{K}(1)}\sigma)(x) \\ &= \mathbb{T}_x(\Phi \circ \sigma)(X) - \text{Vert}_{\Phi(v)}^{(2)} \circ \Phi(\nabla_{\bar{X}}^{\mathbb{K}(1)}\sigma)(x) \\ &= \mathbb{T}_{f(x)}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(\mathbb{T}_x f(X)) - \text{Vert}_{\Phi(v)}^{(2)}(\nabla_{\mathbb{T}f(\bar{X})}^{\mathbb{K}(2)}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}))(f(x)), \end{aligned}$$

a ponieważ  $\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}$  jest cięciem lokalnym spełniającym warunek  $\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}(f(x)) = \Phi(v)$ , przeto możemy przepisać powyższą równość w postaci

$$\mathbb{T}_v\Phi \circ \text{Hor}_v^{(1)}(X) = \text{Hor}_{\Phi(v)}^{(2)} \circ \mathbb{T}_x f(X).$$

□

STWIERDZENIE 234. Przyjmijmy zapis Def. 143, 132 oraz Uwagi 59 i niechaj  $\nabla$  będzie pochodną kowariantną na wiązce wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{x^n}, \pi_{\mathbb{V}})$  (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) stowarzyszoną z powiązaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym. Zależność odwzorowań

$$\mathfrak{a}_i(\cdot_1, \cdot_2) := (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Vert}_{\cdot_2}^{-1}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{(\cdot_1, \cdot_2)}\tau_i^{-1}) \circ \alpha_i(\cdot_1, \cdot_2),$$

zdefiniowanych w terminach tych z Równ. (4.2.8), od drugiego argumentu jest  $C^k(B, \mathbb{K})$ -liniowa, tj. dla dowolnych: cięcia  $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$  oraz funkcji  $f \in C^k(B, \mathbb{K})$  zachodzi

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_i} : \mathfrak{a}_i(x, \mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))) = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \ell_{f(x)}^n) \circ \mathfrak{a}_i(x, \sigma(x)).$$

■

*Dowód:* Wykorzystamy związek (4.2.17) między pochodną kowariantną a pochodną Koszula, aby móc skorzystać z wygodnych własności tej ostatniej. Rozważmy cięcie lokalne  $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$ , (nad  $\mathcal{O}_i \ni x$ ) w obrazie trywializacji lokalnej jak w Równ. (4.2.21). Otrzymujemy (w zapisie dowodu Tw. 4.2.7)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i (\nabla_{\bar{X}} (\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(x)) \\
& \equiv \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} (\nabla_{\bar{X}}^{\text{K}} (\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(x)) \\
& = \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} (\mathbb{L}_{\mathbb{T}_x f(X)} \circ \sigma(x) + \mathbb{L}_{f(x)} (\nabla_{\bar{X}}^{\text{K}} \sigma(x))) \\
& = \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} (\mathbb{L}_{\mathbb{T}_x f(X)} \circ \tau_i^{-1})(x, \sigma_i(x)) \\
& \quad + \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ (\text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \text{Vert}_{\mathbb{L}_{\sigma(x)}}^{-1}) (\nabla_{\bar{X}} \sigma(x)) \\
& = \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} (\tau_i^{-1}(x, \mathbb{T}_x f(X) \triangleright_n \sigma_i(x))) \\
& \quad + (\mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \mathbb{L}_{f(x)} \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i^{-1}) \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i (\nabla_{\bar{X}} \sigma(x)) \\
& \equiv \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x)) + \mathbb{L}_t \circ \tau_i^{-1}(x, \mathbb{T}_x f(X) \triangleright_n \sigma_i(x))) \right) \\
& \quad + \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1}) (0_{\mathbb{T}_x B}, \mathbb{T}_x \sigma_i(X) + X \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x))) \\
& = \mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_i^{-1}(x, (f(x) + t \cdot \mathbb{T}_x f(X)) \triangleright_n \sigma_i(x)) \right) \\
& \quad + \mathbb{T}_{(x, \sigma_i(x))} (\text{id}_B \times \ell_{f(x)}^n) (0_{\mathbb{T}_x B}, \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) \\
& \quad + X \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)) \\
& = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x, (f(x) + t \cdot \mathbb{T}_x f(X)) \triangleright_n \sigma_i(x) + t \cdot f(x) \triangleright_n \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) \\
& \quad + X \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)) \\
& \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x, \ell_{f(x)+t \cdot \mathbb{T}_x f(X)}^n (\sigma_i(x) + t \triangleright_n \mathbb{T}_x \sigma_i(X)) + \mathcal{O}(t^2)) \\
& \quad + X \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)) \\
& \equiv \mathbb{T}_x (\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(X) + X \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)).
\end{aligned}$$

Z porównania powyższego wyniku z formułą (definicyjną – patrz: Równ. (4.2.8))

$$\mathbb{T}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))} \tau_i (\nabla_{\bar{X}} (\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(x)) = \mathbb{T}_x (\mathbb{L}_{f(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(X) + X \lrcorner \alpha_i(x, \mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x)))$$

i wobec dowolności  $X$  wyprowadzamy tożsamość

$$\alpha_i(x, \mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))) = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_{\sigma(x)} (\tau_i \circ \mathbb{L}_{f(x)} \circ \tau_i^{-1})) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)),$$

która w połączeniu z definicją obiektów  $\mathbf{a}_i$  oraz Równ. (4.2.15) odtwarza postulowaną regułę transformacyjną

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_i(x, \mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))) & = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \text{Vert}_{\mathbb{L}_{f(x)}(\sigma(x))}^{-1} \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \mathbb{L}_{f(x)} \circ \text{Vert}_{\sigma(x)}) \circ \mathbf{a}_i(x, \sigma(x)) \\
& = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{L}_{f(x)}) \circ \mathbf{a}_i(x, \sigma(x)).
\end{aligned}$$

□

DEFINICJA 151. Przyjmijmy zapis Def. 150 i niechaj  $x^\mu$ ,  $\mu \in \overline{1, \dim B}$  będą współrzędnymi lokalnymi na<sup>3</sup>  $\mathcal{O}_i \subset B$ , wyznaczającymi bazę  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu\}_{\mu \in \overline{1, \dim B}}$  przestrzeni stycznej do  $B$  o lokalnej trywializacji  $\tau_i : \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\dim B}$ , a nadto niech  $e_a^{(i)} \in C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K}^{\dim B})$ ,  $a \in \overline{1, \dim B}$  będzie indeksowaną przez  $y \in \mathcal{O}_i$  rodziną baz w  $\mathbb{K}^{\dim B}$ . Zdefiniujmy

$$E_a^{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, e_a^{(i)}(x)), \quad a \in \overline{1, \dim B}.$$

**Symbole Christoffela powiązania Koszula**  $\nabla^K$  na wiązce wektorowej  $V$  nad  $\mathcal{O}_i$  (stowarzyszone z bazami  $\{\partial_\mu\}_{\mu \in \overline{1, \dim B}}$  i  $\{e_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1, \dim B}}$ ) to rodzina odwzorowań klasy  $C^k$

$$\Gamma_{(i)\mu a}^b : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \mu \in \overline{1, \dim B}, \quad a, b \in \overline{1, \dim B}$$

wyznaczonych przez relacje

$$(4.2.22) \quad \mathbb{L}_{\Gamma_{(i)\mu a}^b}(E_b^{(i)}(y)) := \nabla_{\partial_\mu}^K E_a^{(i)}(y), \quad y \in \mathcal{O}_i.$$

▲

UWAGA 64. Warto zwrócić uwagę, że przy szczególnym wyborze bazy:

$$E_a^{(i)} := \epsilon_a^{(i)}$$

(patrz: Równ. (4.1.11)) wobec (lokalnej) stałości cięć bazowych  $\epsilon_a^{(i)}$  zachodzi równość

$$\mathbb{L}_{\Gamma_{(i)\mu a}^b}(\epsilon_b^{(i)}(y)) = \partial_\mu(y) \lrcorner a_i(y, \epsilon_a^{(i)}(y)),$$

która jednakowoż *nie* stanowi równoważnej definicji symboli Christoffela (względem tej bazy), albowiem obiekty  $a_i$  mają istotnie odmienne od pochodnej Koszula własności transformacyjne.

▭

STWIERDZENIE 235. *Przyjmijmy zapis Def. 151 i niechaj  $y^\alpha$ ,  $\alpha \in \overline{1, \dim B}$  będą współrzędnymi na  $\mathcal{O}_i$  o zależności od współrzędnych  $x^\mu$ ,  $\mu \in \overline{1, \dim B}$  opisanej funkcjami*

$$y^\alpha = f^\alpha(x^\mu), \quad \alpha \in \overline{1, \dim B},$$

*a nadto niech  $f_r^{(i)}(y) \in C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K}^{\dim B})$ ,  $r \in \overline{1, \dim B}$  będzie indeksowaną przez  $y \in \mathcal{O}_i$  rodziną baz w  $\mathbb{K}^{\dim B}$  powiązaną z  $e_a^{(i)}$ ,  $a \in \overline{1, \dim B}$  funkcjonalnymi relacjami liniowymi*

$$f_r^{(i)} = \ell_{A_{(i)r}^a}^n(e_a^{(i)}),$$

*w których zapisie  $(A_{(i)r}^a)_{a,r \in \overline{1, \dim B}} \in C^k(\mathcal{O}_i, \text{GL}(n; \mathbb{K}))$  są zależnymi od punktu macierzami przejścia między obiema bazami. Zdefiniujmy też odwzorowania*

$$F_r^{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, f_r^{(i)}(x)), \quad r \in \overline{1, \dim B},$$

*pozostające w liniowej relacji funkcjonalnej*

$$F_r^{(i)} = \mathbb{L}_{A_{(i)r}^a}(E_a^{(i)})$$

<sup>3</sup>Ikroć dziedzinę map lokalnych na  $B$  nie pokrywają się z dziedzinami trywializacji lokalnych  $V$ , możemy dokonać względnego rozdrobnienia tworzonych przez nie pokryć.



z odwzorowaniami stowarzyszonymi z rodziną baz  $e_a^{(i)}$ ,  $a \in \overline{1, n}$ . Symbole Christoffela  $\Gamma_{(i)\alpha r}^s$  stowarzyszone z bazami  $\{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\}_{\alpha \in \overline{1, \dim B}}$  i  $\{f_r^{(i)}\}_{r \in \overline{1, n}}$  zgodnie z formułą (4.2.22) pozostają względem symboli Christoffela  $\Gamma_{(i)\mu a}^b$ , stowarzyszonych z bazami  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}_{\mu \in \overline{1, \dim B}}$  i  $\{e_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1, n}}$  w relacji

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \Gamma_{(i)\alpha r}^s = A_{(i)b}^{-1s} \left( \Gamma_{(i)\mu a}^b A_{(i)r}^a + \frac{\partial A_{(i)r}^b}{\partial x^\mu} \right)$$

■

*Dowód:* Bezpośredni rachunek wykorzystujący aksjomatykę pochodnej Koszula prowadzi do ciągu równości

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\Gamma_{(i)\mu a}^b} (E_b^{(i)}) &\equiv \nabla_{\partial^\mu}^K E_a^{(i)} = \nabla_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^K (\mathbb{L}_{A_{(i)a}^{-1r}} (F_r^{(i)})) = \mathbb{L}_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^K (\mathbb{L}_{A_{(i)a}^{-1r}} (F_r^{(i)}))) \\ &= \mathbb{L}_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}} \left( \mathbb{L}_{\frac{\partial A_{(i)a}^{-1r}}{\partial y^\alpha}} (F_r^{(i)}) + \mathbb{L}_{A_{(i)a}^{-1r}} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^K F_r^{(i)} \right) \right) \\ &= \mathbb{L}_{\frac{\partial A_{(i)a}^{-1r}}{\partial x^\mu}} (F_r^{(i)}) + \mathbb{L}_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}} A_{(i)a}^{-1r} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^K F_r^{(i)} \right) \\ &= \mathbb{L}_{\frac{\partial A_{(i)a}^{-1r}}{\partial x^\mu}} A_{(i)r}^b (E_b^{(i)}) + \mathbb{L}_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}} A_{(i)a}^{-1r} \Gamma_{(i)\alpha r}^s (F_s^{(i)}) \\ &= \mathbb{L}_{A_{(i)a}^{-1r}} \circ \left( -\mathbb{L}_{\frac{\partial A_{(i)r}^b}{\partial x^\mu}} + \mathbb{L}_{\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu}} \Gamma_{(i)\alpha r}^s A_{(i)s}^b \right) (E_b^{(i)}), \end{aligned}$$

z których już wprost wynika postulowana relacja, a to z racji liniowej niezależności wektorów  $e_b^{(i)}$ . □

STWIERDZENIE 236. *Przyjmijmy zapis Def. 151, Stw. 1.2.11 i Przykł. 7 (4). Wybierzmy przy tym w  $\mathbb{K}^{x^n}$  rodzinę baz i stowarzyszoną z nią rodzinę cięć  $\mathbb{V}$  w postaci*

$$E_a^{(i)} := \epsilon_a^{(i)} \equiv \tau_i^{-1}(\cdot, e_a), \quad a \in \overline{1, n}$$

nad elementem  $\mathcal{O}_i$  pokrycia trywializującego  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  wiązki  $\mathbb{V}$ , jak w Równ. (4.1.11), gdzie  $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n}}$  jest ustaloną (dowolnie) bazą w  $\mathbb{K}^{x^n}$ , o dualnej do niej – w rozumieniu Stw. 7 – bazie  $\{e_a^*\}_{a \in \overline{1, n}}$  w  $\mathbb{K}^{x^n*} \cong \mathbb{K}^{x^n}$ . W dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  należącym do przecięcia dziedzin trywializacji lokalnych  $\tau_i$  i  $\tau_j$  rozważmy macierz odwzorowań przejścia

$$g_{ij}(x) := g_{ijab}(x) \triangleright \theta_{\mathbb{K}^{x^n}}(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b) \in \text{GL}(n; \mathbb{K})$$

oraz 1-formy o wartościach macierzowych

$$\Gamma_k(x) := \Gamma_{(k)\mu a}^b(x) \triangleright dx^\mu(x) \otimes_{\mathbb{R}} \theta_{\mathbb{K}^{x^n}}(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b), \quad k \in \{i, j\}.$$

Prawdziwa jest tożsamość

$$\Gamma_j(x) = (\text{id}_{\Gamma^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}}) \Gamma_i(x) + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x).$$

■

*Dowód:* Zaczniemy od prostej obserwacji:

$$\begin{aligned} \epsilon_a^{(j)}(x) &\equiv \tau_j^{-1}(x, e_a) = \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)(e_a)) = \tau_i^{-1}(x, g_{ijab}(x) \triangleright e_b) \\ &= \mathbb{L}_{g_{ijab}(x)}(\epsilon_b^{(i)}(x)), \end{aligned}$$

z której wyprowadzamy tożsamość

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\Gamma_{(j)\mu a}^b}(x)(\epsilon_b^{(j)}(x)) &\equiv \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}} \epsilon_a^{(j)}(x) = \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}} (\mathbb{L}_{g_{ij ac}(\cdot)}(\epsilon_c^{(i)}(\cdot)))(x) \\ &= \mathbb{L}_{\partial_\mu g_{ij ac}(x) g_{j i cb}(x)}(\epsilon_b^{(j)}(x)) + \mathbb{L}_{g_{ij ac}(x)}(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}} \epsilon_c^{(i)}(x)) \\ &= \mathbb{L}_{\partial_\mu g_{ij ac}(x) g_{j i cb}(x)}(\epsilon_b^{(j)}(x)) + \mathbb{L}_{g_{ij ac}(x) \Gamma_{(i)\mu c}^d(x) g_{j i db}(x)}(\epsilon_b^{(j)}(x)), \end{aligned}$$

‘ a z niej – pożądaną równość

$$(4.2.23) \quad \Gamma_{(j)\mu a}^b(x) = g_{j i db}(x) \Gamma_{(i)\mu c}^d(x) g_{ij ac}(x) + g_{j i cb}(x) \partial_\mu g_{ij ac}(x).$$

□

**TWIERDZENIE 4.2.10** (O rekonstrukcji wiązki wektorowej z powiązaniem). *Przyjmijmy zapis Def. 66, 80 i 150 oraz Przykł. 7 (4) i 12 (7). Każda wiązka wektorowa  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) z powiązaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym, rozumianym w sensie dowolnej z wprowadzonych uprzednio definicji 147, 148 i 149, wyznacza nad swym pokryciem trywializującym<sup>4</sup>  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$*

- rodzinę  $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}}$  lokalnie gładkich odwzorowań

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$$

spełniających warunek 1-kocyklu (4.1.2);

- rodzinę  $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  lokalnie gładkich 1-form o wartościach macierzowych

$$\Gamma_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}(n)$$

spełniających warunki

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}, x \in \mathcal{O}_{ij}} : \Gamma_j(x) = (\mathrm{id}_{T^*B} \otimes \mathrm{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}}) \Gamma_i(x) + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x).$$

I odwrotnie, niechaj  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie pokryciem otwartym  $C^k$ -rozmaitości  $B$ . Dowolna stowarzyszona z  $\mathcal{O}$  para rodzin odwzorowań lokalnie gładkich

$$(\{g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}}, \{\Gamma_k\}_{k \in I})$$

spełniających powyższe warunki określa – zgodnie z (konstruktywnym dowodem) Tw. 4.1.1 – wiązkę wektorową  $\mathbb{V} = (\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n})/g_{\cdot}$  rzędu  $n$  nad  $\mathbb{K}$  o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z  $\mathcal{O}_{ij}$  tożsamych z  $g_{ij}$ ,  $(i, j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}$  oraz pochodnej Koszula zadawanej formułą (w duchu Uwagi 63)

$$(4.2.24) \quad \nabla_{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}} \sigma(x) = \mathcal{V} \lrcorner d\sigma_i(x) + \Gamma_i(\mathcal{V} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K}^{\times n})} \sigma_i)(x), \quad x \in \mathcal{O}_i$$

w której zapisie

- pochodna zewnętrzna  $d$  (na  $B$ ) działa na drugą składową cięcia  $\sigma \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} \equiv (\cdot, \sigma_i(\cdot))$ ,  $\sigma_i \in C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K}^{\times n})$  w obrazie lokalnej trywializacji, dając  $d\sigma_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}^{\times n}$ ;
- $\Gamma_i$  działa na  $\mathcal{V} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K}^{\times n})} \sigma_i$ ,  $\mathcal{V} \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(T\mathcal{O}_i)$  jako standardowy iloczyn tensorowy odwzorowań liniowych, przy czym do wyniku przykładamy izomorfizm kanoniczny  $\kappa_{\mathbb{K}^{\times n}}$  ze Stw. 45.

Ilekość odwzorowania te są danymi lokalnymi pewnej wiązki wektorowej nad  $B$  o włóknie typowym  $\mathbb{K}^{\times n}$ , ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez  $g_{ij}$  i  $\Gamma_i$ .

<sup>4</sup>Nie zakładamy, że pokrycie to jest dobre w rozumieniu Def. 66.

■

Dowód: Pierwsza część tezy stanowi podsumowanie naszych dotychczasowych doświadczeń i wynika wprost z Tw. 4.1.1 i Stw. 236. Należy jedynie określić strukturę  $\mathbb{K}$ -liniową na włóknach wiązki zrekonstruowanej według schematu przedstawionego w dowodzie Tw. 4.1.1,

$$\mathbb{V} = \left( \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) \right) / g_{\sim}.$$

Definiujemy odwzorowania

$$\mathbb{A} : \mathbb{V} \times_B \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} : \left( [(x, v, i)], [(x, w, j)] \right) \longmapsto \left[ (x, A^n(v, g_{ij}(x)(w)), i) \right],$$

$$\mathbb{L} : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} : \left( \lambda, [(x, v, i)] \right) \longmapsto \left[ (x, \ell_{\lambda}^n(v), i) \right].$$

Ich gładkość wynika z surjektywnej submersywności odwzorowania  $\pi_{\sim}$  zadanego w Równ. (4.1.3) oraz ze Stw. 117, oto bowiem  $\mathbb{A}$  jest (jedynym) odwzorowaniem domykającym diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{V} \\ & \nearrow^{\pi_{\sim} \circ S} & \uparrow \mathbb{A} \\ \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) \times_B \bigsqcup_{j \in I} (\mathcal{O}_j \times \mathbb{K}^{\times n}) & \xrightarrow{\pi_{\sim} \times \pi_{\sim}} & \mathbb{V} \times_B \mathbb{V} \end{array} \quad , ,$$

w którym

$$\begin{aligned} S : \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) \times_B \bigsqcup_{j \in I} (\mathcal{O}_j \times \mathbb{K}^{\times n}) &\longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) \\ &: \left( (x, v, i), (x, w, j) \right) \longmapsto \left( x, A^n(v, g_{ij}(x)(w)), i \right) \end{aligned}$$

jest odwzorowaniem jawnie gładkim, a  $\mathbb{L}$  domyka (także jako jedyne) diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{V} \\ & \nearrow^{\pi_{\sim} \circ \Lambda} & \uparrow \mathbb{L} \\ \mathbb{K} \times \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{K}} \times \pi_{\sim}} & \mathbb{K} \times \mathbb{V} \end{array} \quad , ,$$

w którym

$$\Lambda : \mathbb{K} \times \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}) : \left( \lambda, (x, v, i) \right) \longmapsto \left( x, \ell_{\lambda}^n(v), i \right)$$

również jest jawnie gładkie.

W celu udowodnienia drugiej części tezy rozważmy wypisaną wyżej wiązkę w obrazie trywializacji lokalnych  $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}$  i  $\tau_j : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_j) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_j \times \mathbb{K}^{\times n}$  dla pary indeksów  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ . Po ustaleniu bazy (dowolnej)  $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n}}$  w  $\mathbb{K}^{\times n}$  lokalne cięcie  $\sigma$  przyjmuje tu postać

$$\tau_k \circ \sigma(x) = (x, \sigma_k^a(x) \triangleright e_a), \quad x \in \mathcal{O}_k, \quad k \in \{i, j\},$$

przy czym w punkcie  $y \in \mathcal{O}_{ij}$  spełniona jest relacja

$$(4.2.25) \quad \sigma_j^a(y) = \sigma_i^b(y) g_{ji ba}(y).$$

Wybierzmy lokalny układ współrzędnych  $\{x^\mu\}^{\mu \in \overline{1, \dim B}}$  na  $\mathcal{O}_i$  i stowarzyszoną z nim bazę  $\{\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}_{\mu \in \overline{1, \dim B}}$  przestrzeni stycznej  $T\mathcal{O}_i$ . Przykładając do  $\sigma$  wypisany w treści twierdzenia operator  $\nabla_{\mathcal{V}}^K$  z Równ. (4.2.24), otrzymujemy formułę lokalną

$$\nabla_{\mathcal{V}}^K \sigma(x) = \mathcal{V}^\mu(x) (\partial_\mu \sigma_i^b(x) + \Gamma_{(i)\mu a}^b(x) \sigma_i^a(x)) \triangleright e_b,$$

z której jasno wynika, że  $\nabla^K$  spełnia lokalnie aksjomaty (KC1)-(KC3), a ponieważ na mocy Równ. (4.2.23) i (4.2.25) (oraz skośnej symetrii odwzorowań  $g_{ij}$ ) w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  zachodzi

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}^\mu(x) (\partial_\mu \sigma_j^b(x) + \Gamma_{(j)\mu a}^b(x) \sigma_j^a(x)) \triangleright e_b = [\partial_\mu (\sigma_i^a g_{j i a b})(x) \\ & + (g_{j i d b}(x) \Gamma_{(i)\mu c}^d(x) g_{i j a c}(x) + g_{j i c b}(x) \partial_\mu g_{i j a c}(x)) g_{j i e a}(x) \sigma_i^e(x)] \triangleright e_b \\ = & (\partial_\mu \sigma_i^a(x) g_{j i a b}(x) + g_{j i d b}(x) \Gamma_{(i)\mu c}^d(x) g_{i j a c}(x) g_{j i e a}(x) \sigma_i^e(x) \\ & + \sigma_i^a(x) \partial_\mu g_{j i a b}(x) + g_{j i c b}(x) \partial_\mu g_{i j a c}(x) g_{j i e a}(x) \sigma_i^e(x)) \triangleright e_b \\ = & (\partial_\mu \sigma_i^a(x) + \Gamma_{(i)\mu c}^a(x) \delta_{ec} \sigma_i^e(x)) g_{j i a b}(x) \triangleright e_b, \end{aligned}$$

por.: Równ. (4.2.25), przeto te lokalne własności zstępują do przestrzeni ilorazowej  $(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{n_n})/g.$

Na koniec bez trudu weryfikujemy trzecią część tezy ustalając wprost na gruncie definicji (4.2.22) symboli Christoffela, że znaleziony wcześniej izomorfizm  $\iota$  o lokalnej postaci jak w Równ. (4.1.4) jest izomorfizmem wiązek wektorowych z powiązaniem w rozumieniu Def. 146.  $\square$

**TWIERDZENIE 4.2.11.** *Przyjmijmy zapis Def. 146, Stw. 236 oraz dowodu Tw. 4.1.2 i niechaj  $(V_\alpha, B, \mathbb{K}^{n_\alpha}, \pi_{V_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema wiązkami wektorowymi (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) z powiązaniem  $\mathbb{K}$ -liniowym nad wspólną bazą  $B$ , o odnośnych trywializacjach lokalnych  $\tau_i^\alpha : \pi_{V_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{n_\alpha}$  stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , przy czym wprowadzamy dwie rodziny cięć bazowych (lokalnych):*

$$E_a^{(i)} := \epsilon_a^{(i)} \equiv \tau_i^{1-1}(\cdot, e_a) : \mathcal{O}_i \longrightarrow V_1, \quad a \in \overline{1, n_1}$$

na wiązce  $V_1$  oraz

$$F_r^{(i)} := \phi_r^{(i)} \equiv \tau_i^{2-1}(\cdot, f_r) : \mathcal{O}_i \longrightarrow V_2, \quad r \in \overline{1, n_2},$$

na wiązce  $V_2$ , a wraz z nimi – macierzowe odwzorowania przejścia

$$g_{ij}^1(x) = g_{ij}^1(x) \triangleright \varepsilon(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b), \quad g_{ij}^2(x) = g_{ij}^2(x) \triangleright \varepsilon(f_r^* \otimes_{\mathbb{K}} f_s).$$

oraz 1-formy o wartościach macierzowych

$$\Gamma_i^1(x) = \Gamma_{(i)\mu a}^b(x) \triangleright dx^\mu(x) \otimes_{\mathbb{R}} \theta_{\mathbb{K}^{n_1}}(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b),$$

$$\Gamma_i^2(x) = \Gamma_{(i)\mu r}^s(x) \triangleright dx^\mu(x) \otimes_{\mathbb{R}} \theta_{\mathbb{K}^{n_2}}(f_r^* \otimes_{\mathbb{K}} f_s).$$

Dowolny morfizm wiązek wektorowych z powiązaniem

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\Phi} & V_2 \\ \pi_{V_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{V_2} \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę  $\{h_i\}_{i \in I}$  odwzorowań macierzowych (lokalnie) klasy  $C^k$

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2, \mathbb{K}), \quad i \in I$$

spełniających warunki: (4.1.10) oraz

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_i} : \Gamma_i^2(x) \circ (\text{id}_{\tau_B} \otimes h_i(x)) = (\text{id}_{\tau^* B} \otimes h_i(x)) \circ \Gamma_i^1(x) - dh_i(x).$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu. W szczególności w przypadku izomorfizmu wiązek wektorowych z powiązaniem (nad dyfeomorfizmem baz), nieodzownie tego samego rzędu  $n_1 = n_2 \equiv n$ , zachodzi

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \text{GL}(n; \mathbb{K}), \quad i \in I.$$

■

Dowód: W świetle Tw. 4.1.2 do udowodnienia pierwszej części tezy brakuje jedynie uzasadnienia relacji spełnianej przez macierze symboli Christoffela. Przywoławszy reprezentację

$$h_i(x) := h_{i ar}(x) \triangleright \varepsilon(e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} f_r), \quad x \in \mathcal{O}_i$$

danych lokalnych morfizmu  $(\Phi, \text{id}_B)$  z dowodu Tw. 4.1.2, a w odwołaniu do aksjomatyki pochodnej Koszula oraz Tw. 4.2.9, obliczamy tę ostatnią bezpośrednio na każdej ze stron wyprowadzonej tam równości (4.1.12) z osobna, co daje nam – odpowiednio –

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\mu}^{K(2)}(\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) &= \mathbb{L}_{\partial_\mu h_{i ar}(x)}^2(\phi_r^{(i)}(x)) + \mathbb{L}_{h_{i ar}(x)}^2(\nabla_{\partial_\mu}^{K(2)}\phi_r^{(i)}(x)) \\ &= \mathbb{L}_{\partial_\mu h_{i as}(x)}^2(\phi_s^{(i)}(x)) + \mathbb{L}_{h_{i ar}(x) \cdot \Gamma_{i \mu r}^{(2)s}(x)}^2(\phi_s^{(i)}(x)) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\mu}^{K(2)}(\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) &= \Phi(\nabla_{\partial_\mu}^{K(1)}\varepsilon_a^{(i)})(x) = \Phi \circ \mathbb{L}_{\Gamma_{i \mu a}^{(1)b}(x)}^{(1)}(\varepsilon_b^{(i)}(x)) \\ &= \mathbb{L}_{\Gamma_{i \mu a}^{(1)b}(x)}^{(2)} \circ \Phi(\varepsilon_b^{(i)}(x)) = \mathbb{L}_{\Gamma_{i \mu a}^{(1)b}(x) \cdot h_{i bs}(x)}^{(2)}(\phi_s^{(i)}(x)). \end{aligned}$$

Z porównania obu wyników wyprowadzamy postulowaną tożsamość.

I odwrotnie, niechaj  $h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \text{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})$  będą odwzorowaniami macierzowymi opisanymi w treści stwierdzenia. Wówczas możemy zdefiniować odwzorowania lokalne

$$\begin{aligned} \Phi_i &: \pi_{V_1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{V_2}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ &: \tau_i^{1-1}(x, v^a \triangleright_{n_1} e_a) \longmapsto \tau_i^{2-1}(x, v^a h_{i ar}(x) \triangleright_{n_2} f_r), \quad i \in I. \end{aligned}$$

W dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  zachodzi przy tym równość

$$\Phi_j \circ \tau_i^{1-1}(x, e_a) = \Phi_j \circ \tau_j^{1-1}(x, g_{j i ab}^1(x) \triangleright_{n_1} e_b)$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_j^{2-1}(x, g_{j i a b}^1(x) h_{j b r}(x) \triangleright_{n_2} f_r) \\
&= \tau_j^{2-1}(x, h_{i a s}(x) g_{j i s r}^2(x) \triangleright_{n_2} f_r) \\
&= \tau_i^{2-1}(x, h_{i a s}(x) \triangleright_{n_2} f_s) = \Phi_i \circ \tau_i^{1-1}(x, e_a),
\end{aligned}$$

która w połączeniu z dowodem  $\mathbb{K}$ -liniowości odwzorowań  $\Phi_i$ ,

$$\begin{aligned}
&\Phi_i \circ \mathbb{L}_\lambda^1(\tau_i^{1-1}(x, v^a \triangleright_{n_1} e_a)) = \Phi_i \circ \tau_i^{1-1}(x, \lambda v^a \triangleright_{n_1} e_a) \\
&= \tau_i^{2-1}(x, \lambda v^a h_{i a r}(x) \triangleright_{n_2} f_r) = \mathbb{L}_\lambda^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, v^a h_{i a r}(x) \triangleright_{n_2} f_r) \\
&\equiv \mathbb{L}_\lambda^2 \circ \Phi_i(\tau_i^{1-1}(x, v^a \triangleright_{n_1} e_a)),
\end{aligned}$$

pokazuje dowodnie, że mamy do czynienia z odwzorowaniem globalnie gładkim  $\Phi : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$  o ograniczeniach  $\Phi|_{\pi_{\mathbb{V}_1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$ . Pozostaje sprawdzić warunek (VFCM4) z Tw. 4.2.9, co czynimy najpierw na cięciach bazowych

$$\begin{aligned}
\Phi(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} \varepsilon_a^{(i)})(x) &= \Phi \circ \mathbb{L}_{\Gamma_{i \mu a}^1(x)}^1(\varepsilon_b^{(i)}(x)) = \Phi \circ \tau_i^{1-1}(x, \Gamma_{i \mu a}^1(x) \triangleright_{n_1} e_a) \\
&\equiv \tau_i^{2-1}(x, \Gamma_{i \mu a}^1(x) h_{i a r}(x) \triangleright_{n_2} f_r) \\
&= \tau_i^{2-1}(x, (h_{i a r}(x) \Gamma_{i \mu r}^{2s}(x) + \partial_\mu h_{i a s}(x)) \triangleright_{n_2} f_s) \\
&\equiv \mathbb{L}_{h_{i a r}(x) \Gamma_{i \mu r}^{2s}(x)}^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, f_s) + \mathbb{L}_{\partial_\mu h_{i a s}(x)}^2 \circ \tau_i^{2-1}(x, f_s) \\
&\equiv \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} \tau_i^{2-1}(\cdot, h_{i a r}(\cdot) \triangleright_{n_2} f_r)(x) \\
&\equiv \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} (\Phi \circ \tau_i^{1-1}(\cdot, e_a))(x) = \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} (\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x),
\end{aligned}$$

a na zakończenie – na ogólnych, postaci  $\sigma(x) = \tau_i^{1-1}(x, \sigma_i^a(x) \triangleright_{n_1} e_a)$ , wykorzystując oba ostatnie rezultaty,

$$\begin{aligned}
\Phi(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} \sigma)(x) &= \Phi(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} (\mathbb{L}_{\sigma_i^a(\cdot)}^1(\varepsilon_a^{(i)}(\cdot))))(x) \\
&= \Phi(\mathbb{L}_{\sigma_i^a(\cdot)}^1(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} \varepsilon_a^{(i)}(\cdot)) + \mathbb{L}_{\partial_\mu \sigma_i^a(\cdot)}^1(\varepsilon_a^{(i)}(\cdot)))(x) \\
&= \mathbb{L}_{\sigma_i^a(x)}^2 \circ \Phi(\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} \varepsilon_a^{(i)}(\cdot))(x) + \mathbb{L}_{\partial_\mu \sigma_i^a(x)}^2 \circ \Phi(\varepsilon_a^{(i)}(x)) \\
&= \mathbb{L}_{\sigma_i^a(x)}^2 (\nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} (\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)}))(x) + \mathbb{L}_{\partial_\mu \sigma_i^a(x)}^2 \circ (\Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) \\
&= \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} (\mathbb{L}_{\sigma_i^a(\cdot)}^2 \circ \Phi \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) = \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} (\Phi \circ \mathbb{L}_{\sigma_i^a(\cdot)}^2 \circ \varepsilon_a^{(i)})(x) \\
&\equiv \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} (\Phi \circ \sigma)(x).
\end{aligned}$$

Uwaga dotycząca postaci danych lokalnych izomorfizmu wiązek wektorowych jest oczywista.  $\square$

DEFINICJA 152. Przyjmijmy zapis Stw. 236. Lokalne 1-formy powiązania  $\Gamma_i$  na wiązce wektorowej  $\mathbb{V}$  zadają rodzinę lokalnie gładkich 2-form na bazie o

wartościach macierzowych

$$F_i := d\Gamma_i + \Gamma_i \wedge \Gamma_i, \quad i \in I$$

spełniających warunki

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\emptyset}, x \in \mathcal{O}_{ij}} : F_j(x) = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}}) F_i(x).$$

Są one nazywane **lokalnymi 2-formami krzywizny powiązania liniowego na wiązce**  $\mathbb{V}$ . **Powiązanie liniowe płaskie** to takie, którego lokalne 2-formy krzywizny są tożsamościowo równe zeru. ▲

UWAGA 65. O prawdziwości powyższej formuły transformacyjnej przekonujemy się w bezpośrednim rachunku wykorzystującym Stw. 236, oto bowiem w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} d\Gamma_j(x) + \Gamma_j(x) \wedge \Gamma_j(x) &= d((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x)) \\ &\quad + ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x)) \\ &\quad \wedge ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x)) \\ &= -g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \wedge ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) \\ &\quad + ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})d\Gamma_i(x) \\ &\quad - ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) \wedge g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \\ &\quad - g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \wedge g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \\ &\quad + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})(\Gamma_i(x) \wedge \Gamma_i(x)) \\ &\quad + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) \wedge g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \\ &\quad + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \wedge (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})\Gamma_i(x) \\ &\quad + g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \wedge g_{ij}(x)^{-1} dg_{ij}(x) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}})(d\Gamma_i(x) + \Gamma_i(x) \wedge \Gamma_i(x)). \end{aligned}$$

▬

STWIERDZENIE 237. *Przyjmijmy zapis Def. 152 i niechaj  $\{F_i^\alpha\}_{i \in I}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą lokalnymi 2-formami krzywizny powiązania liniowego na wiązce wektorowych (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) nad ustaloną bazą  $B$ , stowarzyszonymi ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , przy czym zakładamy, że między wiązkami tymi istnieje izomorfizm wiązek wektorowych z powiązaniem pokrywający identyczność na bazie, o danych lokalnych  $\{h_i\}_{i \in I}$  zdefiniowanych w treści Tw. 152. Wówczas zachodzą tożsamości*

$$F_i^2 = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})F_i^1.$$

■

Dowód: W świetle Tw. 4.2.11 wystarczy sprawdzić zachowanie 2-form względem transformacji

$$\Gamma_i \longmapsto (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i - dh_i h_i^{-1} =: \Gamma_i^\theta.$$

Czynimy to w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} d\Gamma_i^\theta + \Gamma_i^\theta \wedge \Gamma_i^\theta &= d((\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i - dh_i h_i^{-1}) \\ &\quad + ((\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i - dh_i h_i^{-1}) \wedge ((\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i - dh_i h_i^{-1}) \\ &= dh_i h_i^{-1} \wedge (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i + (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})d\Gamma_i \\ &\quad + (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i \wedge dh_i h_i^{-1} - dh_i h_i^{-1} \wedge dh_i h_i^{-1} \\ &\quad + (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})(\Gamma_i \wedge \Gamma_i) - (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i \wedge dh_i h_i^{-1} \\ &\quad - dh_i h_i^{-1} \wedge (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})\Gamma_i + dh_i h_i^{-1} \wedge dh_i h_i^{-1} \\ &= (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})(d\Gamma_i + \Gamma_i \wedge \Gamma_i), \end{aligned}$$

z którego już wprost wynika pożądana własność lokalnych 2-form krzywizny.  $\square$

## 2.2. Powiązanie główne na wiązce głównej.

DEFINICJA 153. Przyjmijmy zapis Def. 132 i 143. Powiązanie włókien w wiązce głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  nazywamy **zgodnym z działaniem grupy strukturalnej**, ilekroć dyfeomorfizmy (klasy  $C^k$ )

$$P_{t_1, t_2}^\gamma : P_G \gamma(t_1) \xrightarrow{\cong} P_G \gamma(t_2), \quad t_1, t_2 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$$

spełniają warunki

$$(4.2.26) \quad \forall g \in G : P_{t_1, t_2}^\gamma \circ r_g \upharpoonright_{P_G \gamma(t_1)} = r_g \circ P_{t_1, t_2}^\gamma,$$

przy czym wtedy

$$(4.2.27) \quad \nabla_{\mathcal{V}}(r_g \circ \sigma)(x) = T_{\sigma(x)} r_g (\nabla_{\mathcal{V}} \sigma(x)).$$

Powiązanie takie określamy również mianem **powiązania głównego włókien w wiązce**  $P_G$ . ▲

DEFINICJA 154. Przyjmijmy zapis Def. 132 i 144. Powiązanie Ehresmanna na wiązce głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  nazywamy **zgodnym z działaniem grupy strukturalnej**, ilekroć odwzorowania  $r_g, g \in G$  spełniają warunek

$$(4.2.28) \quad \forall p \in P_G : H_{r_g(p)} P_G = T_p r_g (H_p P_G).$$

Powiązanie takie określamy również mianem **Ehresmanna powiązania głównego** na  $P_G$ . ▲



STWIERDZENIE 238. Przyjmijmy zapis Def. 9 i 132 oraz Stw. 123 i niechaj  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego grupy strukturalnej  $G$  wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$ . Podwiązka pionowa  $VP_G$  wiązki stycznej  $TP_G$  nad przestrzenią totalną  $P_G$  jest trywialna w rozumieniu Przykł. 38 (1) i istnieje kanoniczny izomorfizm wiązek wektorowych (nad  $\mathbb{R}$ )

$$(VP_G, P_G, \mathbb{K}^{\dim G}, \pi_{TP_G} \upharpoonright_{VP_G}) \cong (P_G \times \mathfrak{g}, P_G, \mathbb{K}^{\dim G}, \text{pr}_1).$$

■

Dowód: Rozważmy odwzorowanie (jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe i  $C^k$ -gładkie)

$$\widetilde{\text{Vert.}} : P_G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{(\mathbf{0}_{TP_G}, \text{id}_{\mathfrak{g}})} TP_G \times \mathfrak{g} \cong T_{(\cdot, e)}(P_G \times G) \xrightarrow{T_{(\cdot, e)}r} VP_G \subset TP_G$$

$$(4.2.30) \quad : (p, X) \mapsto (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) \mapsto T_{(p, e)}r \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) \equiv \widetilde{\text{Vert}}_p(X),$$

w którego definicji wykorzystujemy zerowe cięcie  $\mathbf{0}_{TP_G}$  wiązki wektorowej  $TP_G$  nad  $P_G$ . Przeciwdziedzina powyższego odwzorowania jest poprawnie określona, oto bowiem z uwagi na charakter działania definiującego  $r$ , mamy

$$\begin{aligned} T_p \pi_{P_G}(\widetilde{\text{Vert}}_p(X)) &\equiv T_p \pi_{P_G} \circ T_{(p, e)}r \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) = T_{(p, e)}(\pi_{P_G} \circ r) \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) \\ &= T_{(p, e)}(\pi_{P_G} \circ \text{pr}_1) \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) = T_{(p, e)}(\pi_{P_G} \circ \mathbf{0}_{TP_G}(p)) \\ &= \mathbf{0}_{TB} \circ \pi_{P_G}(p), \end{aligned}$$

czyli – w istocie – nad dowolnym punktem  $p \in P_G$  zachodzi inkluzja

$$\text{Im } \widetilde{\text{Vert}}_p \subset V_p P_G,$$

a przy tym odwzorowanie  $\widetilde{\text{Vert.}}$  pokrywa identyczność na wspólnej bazie obu wiązek,

$$\pi_{P_G}(\widetilde{\text{Vert}}_p(X)) = p \equiv \text{pr}_1(p, X),$$

mamy przeto do czynienia z morfizmem wiązek wektorowych nad  $P_G$ , a ponieważ obrazem pola (stałego)  $(\cdot, X)$  jest pole fundamentalne na  $P_G$  stowarzyszone z  $X \ni \mathfrak{g}$ ,

$$(4.2.31) \quad T_{(\cdot, e)}r \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(\cdot), X) = \mathcal{K}_X$$

co pokazuje poniższy rachunek, przeprowadzony dla dowolnej  $f \in C^1(P_G, \mathbb{R})$  w punkcie (dowolnym)  $p \in P_G$ ,

$$\begin{aligned} T_{\cdot, e}r \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(\cdot), X)(f)(p) &= T_{p, e}r \cdot (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) \lrcorner df(p) \\ &= (\mathbf{0}_{TP_G}(p), X) \lrcorner d(r^*f)(p, e) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f(p \triangleleft \exp(t \triangleright X)), \end{aligned}$$

więc też wobec swobodnego charakteru działania  $G$  na  $P_G$  otrzymujemy równoważność

$$\widetilde{\text{Vert}}_p(X) = 0_{TP_G} \iff X = 0_{\mathfrak{g}},$$

czyli  $\widetilde{\text{Vert.}}$  jest monomorfizmem. Na podstawie porównania rzędów obu wiązek,

$$\text{rk}(P_G \times \mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim G \equiv \dim \pi_{P_G}(p) = \dim_{\mathbb{R}} T_p(\pi_{P_G}(p)) \equiv \text{rk } VP_G,$$

wnioskujemy, że  $\widetilde{\text{Vert.}}$  jest w istocie postulowanym izomorfizmem. □

UWAGA 66. Powyższe stwierdzenie pozwala przekonać się, że analogicznie jak w przypadku wiązek wektorowych (por.: Uwagę 62) podwiązka pionowa jest automatycznie zachowywana przez  $\mathbb{T}r_g$ . Istotnie, dla dowolnego wektora  $v \equiv \mathbb{V}_p \mathbb{P}_G$ ,  $p \in \mathbb{P}_G$  będącego przeciwobrazem  $X = \text{pr}_2 \circ \widetilde{\text{Vert}}_p^{-1}(v) \in \mathfrak{g}$  i dowolnego elementu  $g \in G$  obliczamy

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_p r_g(v) &= \mathbb{T}_p r_g \circ \widetilde{\text{Vert}}_p(X) \equiv \mathbb{T}_p r_g \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p \triangleleft \exp(t \triangleright X) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r_g(p \triangleleft \exp(t \triangleright X)) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r_g(p) \triangleleft \text{Ad}_{g^{-1}}(\exp(t \triangleright X)), \end{aligned}$$

ale też w świetle Stw. 130 zachodzi tożsamość

$$\text{Ad}_{g^{-1}}(\exp(t \triangleright X)) = \exp(t \triangleright \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(X)),$$

możemy zatem powyższą równość przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_p r_g(v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} r_g(p) \triangleleft \exp(t \triangleright \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(X)) \\ &\equiv \widetilde{\text{Vert}} \circ (r_g \times \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \widetilde{\text{Vert}}_p^{-1}(v), \end{aligned}$$

skąd wniosek, że

$$(4.2.32) \quad \mathbb{T}_p r_g \Big|_{\mathbb{V}_p \mathbb{P}_G} = \widetilde{\text{Vert}} \circ (r_g \times \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \widetilde{\text{Vert}}_p^{-1},$$

ten zaś dowodzi izomorficznego charakteru odwzorowania

$$\mathbb{T}_p r_g \Big|_{\mathbb{V}_p \mathbb{P}_G} : \mathbb{V}_p \mathbb{P}_G \longrightarrow \mathbb{V}_{r_g(p)} \mathbb{P}_G.$$

▭

DEFINICJA 155. Przyjmijmy zapis Def. 78, 132 i 145, Stw. 238 oraz Przykł. 7 (4). **Forma powiązania głównego** na wiązce głównej  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  to morfizm wiązek wektorowych nad  $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{A}, \text{id}_B) : \mathbb{T}\mathbb{P}_G \longrightarrow \mathbb{P}_G \times \mathfrak{g}$$

o własnościach

$$(4.2.33) \quad \mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert}} = \text{id}_{\mathbb{P}_G \times \mathfrak{g}}.$$

oraz

$$(4.2.34) \quad \forall_{g \in G} : \mathcal{A} \circ \mathbb{T}r_g = (r_g \times \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}.$$

Wyznacza ona **potencjał powiązania głównego**

$$\underline{\mathcal{A}} := \underline{\mathcal{A}} \in \Omega^1(\mathbb{P}_G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}.$$

▲

**TWIERDZENIE 4.2.12.** *W dowolnej wiązce głównej powiązanie główne włókien wyznacza Ehresmanna powiązanie główne i vice versa. Ponadto Ehresmanna powiązanie główne w tejże wiązce określa na niej formę powiązania głównego i vice versa.*

■

Dowód: Różniczkując tożsamość (4.2.26), zapisaną dla  $(t_1, t_2) = (0, t)$ , względem  $t$  w  $t = 0$ , otrzymujemy – dla dowolnego  $p \in P_G \gamma(0)$  –

$$\begin{aligned} \text{Hor}_{r_g(p)}(\dot{\gamma}(0)) &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^\gamma(r_g(p)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} r_g \circ P_{0,t}^\gamma(p) = T_p r_g \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^\gamma(p) \right) \\ &= T_p r_g \circ \text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0)), \end{aligned}$$

co wobec dowolności  $\gamma$  i bijektywności  $\text{Hor}_p$  pozwala stwierdzić, że spełniony jest warunek (4.2.28).

I odwrotnie, wybrawszy dowolną ścieżkę  $\gamma : ] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow B$ ,  $\varepsilon > 0$  spełniającą warunki  $\gamma(0) = x$  i  $\dot{\gamma}(0) = X \in T_x B$ , a następnie – punkty:  $p \in P_x$  i  $g \in G$ , podnosimy  $\gamma$  poziomo do  $P_G$  tworząc ścieżkę

$$\tilde{\gamma}_p : ] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow P_G$$

całkującą zaganienie początkowe

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_p(t) = \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}_p(0) = p,$$

gdzie – przypomnijmy –  $\text{Hor}_q = (T_q \pi_{P_G} \upharpoonright_{H_q P_G})^{-1}$ . Niech też  $\tilde{\gamma}_{r_g(p)}$  będzie podniesieniem poziomym  $\gamma$  do  $P_G$  przez  $\tilde{\gamma}_{r_g(p)}(0) = r_g(p)$ . Obliczamy

$$\frac{d}{dt} r_g \circ \tilde{\gamma}_p(t) = T_{\tilde{\gamma}_p(t)} r_g \left( \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_p(t) \right) = T_{\tilde{\gamma}_p(t)} r_g \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t)) = \text{Hor}_{r_g \circ \tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t)),$$

przy czym ostatnia równość, odzwierciedlająca założoną zgodność powiązania Ehresmanna z działaniem grupy, pokazuje, że pchnięcie podniesienia (do  $p$  w  $t = 0$ ) pola stycznego do  $\gamma$ , czyli  $T_{\tilde{\gamma}_p(t)} r_g \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t))$ , jest także polem poziomym, czyli pewnym podniesieniem poziomym  $\dot{\gamma}(t)$  (do  $r_g \circ \tilde{\gamma}_p(0) = r_g(p)$  w  $t = 0$ ). Krzywą całkową (lokalnie jedyną) poziomego podniesienia  $\dot{\gamma}$  do  $TP_G$  przez  $r_g(p)$  jest jednak – wprost z definicji – ścieżka  $\tilde{\gamma}_{r_g(p)}$ , zatem nieodzownie

$$\tilde{\gamma}_{r_g(p)} = r_g \circ \tilde{\gamma}_p,$$

a to w świetle konstrukcji dyfeomorfizmu  $P_{t_1, t_2}^\gamma$  oznacza pożądaną jego  $G$ -ekwiwariantność, (4.2.26).

Przechodząc do drugiej części tezy dowodzonego twierdzenia, rozważamy powiązanie główne  $TP_G = VP_G \oplus_{\mathbb{R}, P_G} HP_G$ ,  $H_{r_g(p)} P_G = T_p r_g(H_p P_G)$ , które pozwala – w świetle Stw. 238 – zdefiniować morfizm wiązek wektorowych (nad  $\mathbb{R}$ )

$$(4.2.35) \quad (\mathcal{A}, \text{id}_B) := (\widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ P_{VP_G}^{(HP_G)}, \text{id}_B) : TP_G \twoheadrightarrow VP_G \xrightarrow{\cong} P_G \times \mathfrak{g},$$

w którego zapisie  $P_{VP_G}^{(HP_G)}$  jest gładką (klasy  $C^k$ ) rodziną rzutów na podprzestrzeni wektorów pionowych wzdłuż podprzestrzeni wektorów poziomych. Morfizm ten ma pożądaną własność:

$$\mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert.}} = \widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ P_{VP_G}^{(HP_G)} \circ \widetilde{\text{Vert.}} \equiv \widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ \widetilde{\text{Vert.}} = \text{id}_{P_G \times \mathfrak{g}}.$$

Ponadto na mocy Równ. (4.2.32) i założonej  $G$ -niezmienniczości rozkładu  $TP_G = VP_G \oplus_{\mathbb{R}, P_G} HP_G$  otrzymujemy, zgodnie z oczekiwaniami,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ T r_g &\equiv \widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ P_{VP_G}^{(HP_G)} \circ T r_g = \widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ T r_g \circ P_{VP_G}^{(HP_G)} \\ &= \widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ (\widetilde{\text{Vert.}} \circ (r_g \times T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \widetilde{\text{Vert.}}^{-1}) \circ P_{VP_G}^{(HP_G)} \\ &\equiv (r_g \times T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}. \end{aligned}$$

I odwrotnie, forma powiązania głównego definiuje – w świetle Stw. 198 – podwiązkę wektorową

$$(4.2.36) \quad \text{HP}_G := \text{Ker } \mathcal{A} \subset \text{TP}_G.$$

Przy tym dla dowolnego  $v \in \text{Ker}(\text{T}\pi_{\text{P}_G} \upharpoonright_{\text{H}_p\text{P}_G}) \equiv \text{Ker}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\text{T}_p\text{P}_G}) \cap \text{Ker}(\text{T}\pi_{\text{P}_G} \upharpoonright_{\text{T}_p\text{P}_G})$  stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} v &= \widetilde{\text{Vert.}} \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v) \equiv \widetilde{\text{Vert.}} \circ \text{id}_{\text{P}_G \times \mathfrak{g}} \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v) = \widetilde{\text{Vert.}} \circ (\mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert.}}) \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v) \\ &= \widetilde{\text{Vert.}} \circ \mathcal{A}(v) = 0_{\text{T}_p\text{P}_G}, \end{aligned}$$

co przesądza o iniektywności  $\text{T}\pi_{\text{P}_G} \upharpoonright_{\text{H}_p\text{P}_G}$  i (tym samym) dowodzi istnienia izomorfizmu

$$\text{Im}(\text{T}\pi_{\text{P}_G} \upharpoonright_{\text{H}_p\text{P}_G}) \cong \text{H}_p\text{P}_G.$$

Zarazem dla  $\mathcal{A} \upharpoonright_{\text{T}_p\text{P}_G} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{T}_p\text{P}_G, \mathfrak{g})$  jest spełniona równość

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\text{T}_p\text{P}_G}) &= \dim_{\mathbb{R}} \text{T}_p\text{P}_G - \dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\text{T}_p\text{P}_G}) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \text{V}_p\text{P}_G + \dim_{\mathbb{R}} \text{T}_{\pi_{\text{P}_G}(p)}B - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{R}} \text{T}_{\pi_{\text{P}_G}(p)}B, \end{aligned}$$

co oznacza, że  $\text{T}\pi_{\text{P}_G} \upharpoonright_{\text{H}_p\text{P}_G}$  jest w istocie izomorfizmem. Na koniec przekonamy się o  $G$ -niezmienniczości tak określonej podwiązki poziomej. Niech zatem  $\xi \in \text{H}_p\text{P}_G \equiv \text{Ker}(\mathcal{A} \upharpoonright_{\text{T}_p\text{P}_G})$ , a wtedy

$$\mathcal{A} \circ \text{T}_p r_g(\xi) = (r_g \times \text{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}(\xi) = (r_g(p), \text{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(0_{\mathfrak{g}})) = (r_g(p), 0_{\mathfrak{g}}),$$

więc prawdziwą jest inkluzja

$$\text{T}_p r_g(\text{H}_p\text{P}_G) \subset \text{H}_{r_g(p)}\text{P}_G,$$

ale też w takim razie – wobec odwracalności  $\text{T}_p r_g$  –

$$\text{T}_{r_g(p)} r_{g^{-1}}(\text{H}_{r_g(p)}\text{P}_G) \subset \text{H}_{r_g^{-1} \circ r_g(p)}\text{P}_G = \text{H}_p\text{P}_G,$$

czyli

$$\text{H}_{r_g(p)}\text{P}_G \equiv \text{T}_p r_g \circ \text{T}_{r_g(p)} r_{g^{-1}}(\text{H}_{r_g(p)}\text{P}_G) \subset \text{T}_p r_g(\text{H}_p\text{P}_G),$$

co koniec końców daje nam pożądaną równość

$$\text{T}_p r_g(\text{H}_p\text{P}_G) = \text{H}_{r_g(p)}\text{P}_G.$$

□

**TWIERDZENIE 4.2.13.** *Na dowolnej wiązce głównej istnieje powiązanie główne.*

■

*Dowód:* Niechaj  $(\text{P}_G, B, G, \pi_{\text{P}_G})$  będzie wiązką główną o lokalnych trywializacjach  $\tau_i : \pi_{\text{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$ . Wykorzystując relacje

$$\text{T}_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times G) \equiv \text{T}_x \mathcal{O}_i \oplus \text{T}_g G \equiv \text{T}_x \mathcal{O}_i \oplus \text{T}_e \ell_g(\mathfrak{g}),$$

wywiedzione ze Stw. 96 (i jego dowodu), nad każdym z elementów pokrycia trywializującego  $\mathcal{O}_i$  definiujemy odwzorowanie

$$\mathcal{A}_i : \text{T}\pi_{\text{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{\text{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathfrak{g} : \text{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, V) \longmapsto (\tau_i^{-1}(x, g), \text{T}_e \ell_{g^{-1}}(V)),$$

jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe i zachowujące włókna. Sprawdzamy, że odwzorowania te mają własności wymienione w Def. 155. Po pierwsze więc, korzystając z przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times G & \xrightarrow{r} & \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times G \times G & \xrightarrow{\text{id}_B \times m} & \mathcal{O}_i \times G \end{array}$$

oraz Równ. (1.5.4), obliczamy – dla dowolnego wektora  $X \in \mathfrak{g}$  –

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\tau_i^{-1}(x,g)}(X) \equiv \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)} r. (\mathbf{0}_{\text{TP}_G} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X) \\ &= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ \mathbb{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)} (\tau_i \circ r.) (\mathbf{0}_{\text{TP}_G} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X) \\ &= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ \mathbb{T}_{(x,g,e)} (\text{id}_B \times m) \circ \mathbb{T}_{(\tau_i^{-1}(x,g),e)} (\tau_i \times \text{id}_G) (\mathbf{0}_{\text{TP}_G} \circ \tau_i^{-1}(x,g), X) \\ &= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ (\mathbb{T}_x \text{id}_B \oplus \mathbb{T}_{(g,e)} m) (\mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i \circ \mathbf{0}_{\text{TP}_G} \circ \tau_i^{-1}(x,g), \mathbb{T}_e \text{id}_G(X)) \\ &= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ (\text{id}_{\mathbb{T}_x B} \oplus \mathbb{T}_{(g,e)} m) (\mathbf{0}_{\mathbb{T}_x B}, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_g G}, \text{id}_{\mathbb{T}_e G}(X)) \\ &\equiv (\tau_i^{-1}(x,g), \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_{(g,e)} m(\mathbf{0}_{\mathbb{T}_g G}, X)) = (\tau_i^{-1}(x,g), \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_e \ell_g(X)) \\ &= (\tau_i^{-1}(x,g), X) \equiv \text{id}_{\mathbb{P}_G \times \mathfrak{g}}(\tau_i^{-1}(x,g), X), \end{aligned}$$

przy czym przywołaliśmy po drodze Stw. 96 (i jego dowód). Po drugie w dotychczasowych oznaczeniach i dla dowolnego elementu  $h \in G$ , a w odwołaniu do diagramu przemiennego

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{r_h} & \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i^{-1} \uparrow & & \uparrow \tau_i^{-1} \\ \mathcal{O}_i \times G & \xrightarrow{\text{id}_B \times \wp_h} & \mathcal{O}_i \times G \end{array}$$

sprawdzamy warunek  $G$ -ekwiwariantności  $\mathcal{A}_i$ ,

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T} r_h \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, V) = \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,gh)} \tau_i^{-1} \circ \mathbb{T}_{(x,g)} (\text{id}_B \times \wp_h)(v, V) \\ &= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,gh)} \tau_i^{-1} \circ (\mathbb{T}_x \text{id}_B \oplus \mathbb{T}_g \wp_h)(v, V) \\ &= \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,gh)} \tau_i^{-1} (\text{id}_{\mathbb{T}_x B}(v), \mathbb{T}_g \wp_h(V)) \equiv (\tau_i^{-1}(x,gh), \mathbb{T}_{gh} \ell_{(gh)^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \wp_h(V)) \\ &= (r_h \circ \tau_i^{-1}(x,g), \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}(V)) \\ &\equiv (r_h \times \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \mathcal{A}_i \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, V), \end{aligned}$$

także w odwołaniu do Stw. 96 (i jego dowodu). W świetle powyższych wyników  $\mathcal{A}_i$  tworzą rodzinę lokalnych form powiązania głównego. Na gruncie rozumowania w pełni analogicznego do tego przedstawionego w dowodzie Tw. 4.2.6, więc w szczególności wykorzystując w tym celu dowolny rozkład jedności  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  (klasy  $C^k$ ) stowarzyszony z pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , tworzymy z nich formę określoną (gładką) globalnie

$$\mathcal{A}(\cdot) := \sum_{i \in I} \lambda_i \circ \pi_{P_G} \circ \pi_{TP_G}(\cdot) \triangleright \mathcal{A}_i(\cdot),$$

o pożądanых własnościach.  $\square$

**TWIERDZENIE 4.2.14.** *Przyjmijmy zapis Def. 132, 146 oraz 155 i niechaj*

$$\begin{array}{ccc} P_G^1 & \xrightarrow{\Phi} & P_G^2 \\ \pi_{P_G^1} \downarrow & & \downarrow \pi_{P_G^2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

będzie morfizmem wiązek głównych (o tej samej grupie strukturalnej) z powiązaniem głównym (nad dyfeomorfizmem baz). Każdy z (wzajem równoważnych) warunków (FCM1), (FCM2) i (FCM3) z Def. 146, które w przypadku wiązek głównych z powiązaniem głównym uzupełniamy o wymóg  $G$ -ekwiwariantności (4.1.13), jest równoważny warunkowi:

(PFCM4) *morfizm  $\Phi$  zachowuje formę powiązania głównego w rozumieniu równości*

$$\mathcal{A}_2 \circ T\Phi = (\Phi \times \text{id}_g) \circ \mathcal{A}_1.$$

■

*Dowód:* Na gruncie Tw. 4.2.3 możemy ograniczyć się do sprawdzenia prawdziwości poniższych implikacji.

(FCM2)  $\Rightarrow$  (PFCM4) Wziąwszy pod uwagę definicję (4.2.30) oraz warunek (4.1.13), a także przywoławszy Stw. 96 (i jego dowód), ustalamy tożsamość:

$$\begin{aligned} & \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_p \Phi \circ \widetilde{\text{Vert}}^1(p, X) \equiv \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_p \Phi \circ T_{(p,e)} r^1(\mathbf{0}_{TP_G^1}(p), X) \\ &= \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_{(p,e)}(\Phi \circ r^1)(\mathbf{0}_{TP_G^1}(p), X) \\ &= \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_{(p,e)}(r^2 \circ (\Phi \times \text{id}_G))(\mathbf{0}_{TP_G^1}(p), X) \\ &= \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_{(\Phi(p),e)} r^2 \circ (T_p \Phi \oplus T_e \text{id}_G)(\mathbf{0}_{TP_G^1}(p), X) \\ &= \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_{(\Phi(p),e)} r^2(T_p \Phi \circ \mathbf{0}_{TP_G^1}(p), \text{id}_{T_e G}(X)) \\ &= \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T_{(\Phi(p),e)} r^2(\mathbf{0}_{TP_G^2} \circ \Phi(p), X) = (\Phi(p), X) \equiv (\Phi \times \text{id}_g)(p, X), \end{aligned}$$

zapisaną tu dla dowolnych  $(p, X) \in P_G^1 \times g$ . Wobec powyższego oraz Równ. (4.2.35) zachodzi

$$\mathcal{A}_2 \circ T\Phi \equiv \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ P_{VP_G^2}^{(HP_G^2)} \circ T\Phi = \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ T\Phi \circ P_{VP_G^1}^{(HP_G^1)}$$

$$\equiv \widetilde{\text{Vert}}_{\Phi(p)}^{2-1} \circ \text{T}\Phi \circ \widetilde{\text{Vert}}^1 \circ \mathcal{A}_1 = (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1.$$

(PFCM4)  $\Rightarrow$  (FCM2) W świetle Równ. (4.2.36) wystarczy jedynie upewnić się, że nad dowolnym punktem  $p \in \mathbb{P}_G^1$  zachodzi inkluzja

$$\text{T}_p\Phi(\text{Ker}(\mathcal{A}_1 \upharpoonright_{\text{T}_p\mathbb{P}_G^1})) \subset \text{Ker}(\mathcal{A}_2 \upharpoonright_{\text{T}_{\Phi(p)}\mathbb{P}_G^2}),$$

co czynimy w bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 \circ \text{T}_p\Phi(\text{Ker}(\mathcal{A}_1 \upharpoonright_{\text{T}_p\mathbb{P}_G^1})) &= (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1(\text{Ker}(\mathcal{A}_1 \upharpoonright_{\text{T}_p\mathbb{P}_G^1})) \\ &= (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}})(\{(p, 0_{\mathfrak{g}})\}) = \{(\Phi(p), 0_{\mathfrak{g}})\}. \end{aligned}$$

□

**STWIERDZENIE 239.** *Przyjmijmy zapis Def. 143, 132 oraz Uwagi 59 i niechaj  $\nabla$  będzie pochodną kowariantną na wiązce głównej  $(\mathbb{P}_G, B, \mathfrak{G}, \pi_{\mathbb{P}_G})$  stowarzyszoną z powiązaniem głównym. Odwzorowania  $\alpha_i$ ,  $i \in I$  o definicji (4.2.8) są  $C^k(B, \mathfrak{G})$ -ekwiwariantne w drugim argumencie, tj. dla dowolnych: odwzorowania  $g \in C^k(B, \mathfrak{G})$  oraz cięcia  $\sigma \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{P}_G)$  przyjmującego postać  $\tau_i \circ \sigma(\cdot) = (\cdot, \sigma_i(\cdot))$  w obrazie trywializacji lokalnej  $\tau_i : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \mathfrak{G}$  zachodzi*

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_i} : \alpha_i(x, r_{g(x)}(\sigma(x))) = (\text{id}_{\text{T}^*B} \otimes \text{T}_{\sigma_i(x)}\wp_{g(x)}) \circ \alpha_i(x, \sigma(x)).$$

■

*Dowód:* Podobnie jak we wcześniejszym dowodzie Stw. 234 kluczowym dla naszych rozważań okaże się związek między pochodną kowariantną a formą powiązania głównego. W świetle równości

$$P_{\mathbb{V}\mathbb{P}_G}^{(\text{HP}_G)} \upharpoonright_{\text{T}_p\mathbb{P}_G} \equiv \text{id}_{\text{T}_p\mathbb{P}_G} - \text{Hor}_p \circ \text{T}_p\pi_{\mathbb{P}_G}$$

oraz Równ. (4.2.7) możemy ustalić – dla dowolnego cięcia  $\sigma$  jak w treści stwierdzenia oraz dowolnego pola wektorowego  $\mathcal{V} \in \Gamma_{(\text{loc})}(\text{T}B)$  – związek

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{V}\mathbb{P}_G}^{(\text{HP}_G)} \circ \text{T}_x\sigma(\mathcal{V}) &= \text{T}_x\sigma(\mathcal{V}) - \text{Hor}_{\sigma(\cdot)} \circ \text{T}_{\sigma(\cdot)}\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \text{T}_x\sigma(\mathcal{V}) \\ &= \text{T}_x\sigma(\mathcal{V}) - \text{Hor}_{\sigma(\cdot)} \circ \text{T}_x(\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \sigma)(\mathcal{V}) = \text{T}_x\sigma(\mathcal{V}) - \text{Hor}_{\sigma(\cdot)} \circ \text{T}_x\text{id}_B(\mathcal{V}) \\ &= \text{T}_x\sigma(\mathcal{V}) - \text{Hor}_{\sigma(\cdot)}(\mathcal{V}) \equiv \nabla_{\mathcal{V}}\sigma(\cdot) \end{aligned}$$

W połączeniu z Równ. (4.2.35) daje nam to przydatną równość

$$(4.2.37) \quad \nabla_{\mathcal{V}}\sigma(\cdot) = \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(\cdot)} \circ \mathcal{A} \circ \text{T}_x\sigma(\mathcal{V}).$$

Ta pozwala zapisać – w odwołaniu do szczegółowego rachunku przedstawionego w treści Uwagi 59 –

$$\begin{aligned} &\text{T}_x(\wp_{g(\cdot)}(\sigma_i(\cdot)))(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, r_{g(x)}(\sigma(x))) \\ &\equiv \varpi_i \circ \text{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i(\nabla_{\mathcal{V}}r_{(\cdot)}(\sigma(\cdot))(x)) \\ &= \varpi_i \circ \text{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A} \circ \text{T}_x(r_{(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(V) \\ &= \varpi_i \circ \text{T}_{r_{g(x)}(\sigma(x))}\tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A}(\text{T}_{\sigma(x)}r_{g(x)} \circ \text{T}_x\sigma(V) \\ &\quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^*\theta_R^A)(x) R_A(r_{(\cdot)}(\sigma(\cdot)))(g(x))), \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej linijce mamy do czynienia z pochodną odwzorowania  $r.(\sigma(x)) : G \rightarrow P_G$  w kierunku pola prawoniezmienniczego  $R_A$ . Pochodną tę obliczamy bezpośrednio,

$$\begin{aligned} R_A(r.(\sigma(x)))(g(x)) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} r.(\sigma(x))(\exp(t \triangleright t_A) \cdot g(x)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} r_{g(x)} \circ r_{\exp(t \triangleright t_A)}(\sigma(x)) = T_{\sigma(x)} r_{g(x)} \left( \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} r_{\exp(t \triangleright t_A)}(\sigma(x)) \right) \\ &\equiv T_{\sigma(x)} r_{g(x)}(\mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))), \end{aligned}$$

gdzie  $\mathcal{K}_{t_A}$  jest polem wektorowym fundamentalnym (prawostronnym) na  $P_G$  stowarzyszonym z generatorem  $t_A$  algebry Liego  $\mathfrak{g}$ . Podstawiając powyższy wynik do naszego wcześniejszego rachunku, a następnie wykorzystując tożsamości (4.2.34) oraz (4.2.32), otrzymujemy

$$\begin{aligned} &T_x(\wp_{g(\cdot)}(\sigma_i(\cdot)))(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, r_{g(x)}(\sigma(x))) \\ &\equiv \varpi_i \circ T_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i(\nabla_{\mathcal{V}} r(\cdot)(\sigma(\cdot))(x)) \\ &= \varpi_i \circ T_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A}(T_{\sigma(x)} r_{g(x)} \circ T_x \sigma(V) \\ &\quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) T_{\sigma(x)} r_{g(x)}(\mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x)))) \\ &= \varpi_i \circ T_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ \mathcal{A} \circ T_{\sigma(x)} r_{g(x)}(T_x \sigma(V) \\ &\quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\ &= \varpi_i \circ T_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \circ (r_{g(x)} \times T_e \text{Ad}_{g(x)^{-1}}) \circ \mathcal{A}(T_x \sigma(V) \\ &\quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\ &= \varpi_i \circ T_{r_{g(x)}(\sigma(x))} \tau_i \circ T_{\sigma(x)} r_{g(x)} \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}(T_x \sigma(V) \\ &\quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\ &= \varpi_i \circ T_{\tau_i \circ \sigma(x)}(\text{id}_B \times \wp_{g(x)}) \circ T_{\sigma(x)} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}(T_x \sigma(V) \\ &\quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\ &= T_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)} \circ \varpi_i \circ T_{\sigma(x)} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A}(T_x \sigma(V) \\ &\quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\ &\equiv T_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)}(T_x \sigma_i(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x)) \\ &\quad + (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \varpi_i \circ T_{\sigma(x)} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))). \end{aligned}$$

Jeśli teraz uwzględnić pionową naturę pól fundamentalnych  $\mathcal{K}_A$  (wynikającą z charakteru działania definiującego  $r.$ ), to można powyższe przepisać w postaci

$$T_x(\wp_{g(\cdot)}(\sigma_i(\cdot)))(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, r_{g(x)}(\sigma(x)))$$



$$\begin{aligned}
&= \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)} (\mathbb{T}_x \sigma_i(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x))) \\
&+ (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \varpi_i \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)} \circ (\mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)}) \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)}^{-1} (\mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))) \\
&= \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)} (\mathbb{T}_x \sigma_i(V) + V \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x))) \\
&+ (\mathcal{V} \lrcorner g^* \theta_{\mathbb{R}}^A)(x) \triangleright \varpi_i \circ \mathbb{T}_{\sigma(x)} \tau_i (\mathcal{K}_{t_A}(\sigma(x))),
\end{aligned}$$

a stąd już wprost wynika pożądana równość

$$V \lrcorner \alpha_i(x, r_{g(x)}(\sigma(x))) = \mathbb{T}_{\sigma_i(x)} \wp_{g(x)} (V \lrcorner \alpha_i(x, \sigma(x))).$$

□

DEFINICJA 156. Przyjmijmy zapis Def. 155 i niechaj  $\tau_i : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightsquigarrow \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$  będą trywializacjami lokalnymi wiązki głównej  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$ . Zdefiniujmy

$$s_{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, e).$$

**Potencjał lokalny powiązania głównego**  $\mathcal{A}$  na wiązce głównej  $\mathbb{P}_G$  nad  $\mathcal{O}_i$  (stowarzyszony z cięciami  $s_{(i)}$ ) to odwzorowanie (klasy  $C^k$ )

$$A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

przyjmujące w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_i$  postać

$$(4.2.38) \quad A_i(x) := (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}) \circ \mathbb{T}_x s_{(i)}.$$

▲

UWAGA 67. Na podstawie relacji (4.2.37) między pochodną kowariantną a formą powiązania głównego oraz treści Stw. 239, a w odwołaniu do tych samych obserwacji co w dowodzie Stw. 239 oraz do Równ. (4.2.31) wyprowadzamy (w użytych wcześniej oznaczeniach) dla cięcia

$$\sigma(x) = \tau_i^{-1}(x, \sigma_i(x)) = r_{\sigma_i(x)}(\tau_i^{-1}(x, e)) \equiv r_{\sigma_i(x)}(s_{(i)}(x))$$

wiązek

$$\begin{aligned}
&(\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\sigma(x)}^{-1})(\nabla \cdot \sigma(x)) = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}) \circ \mathbb{T}_x \sigma \\
&\equiv (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}) \circ \mathbb{T}_x (r_{\sigma_i(\cdot)}(s_{(i)}(\cdot))) \\
&= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_{s_{(i)}(x)} r_{\sigma_i(x)}) \circ (\mathbb{T}_x s_{(i)} + \sigma_i^* \theta_{\mathbb{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}(s_{(i)}(x))) \\
&= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}) \circ (\mathbb{T}_x s_{(i)} + \sigma_i^* \theta_{\mathbb{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}(s_{(i)}(x))) \\
&= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}) \circ (A_i(x) \\
&\quad + \sigma_i^* \theta_{\mathbb{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \text{pr}_2 \circ (\mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert}}_{s_i(x)}) \circ \widetilde{\text{Vert}}_{s_i(x)}^{-1} (\mathcal{K}_{t_A}(s_{(i)}(x)))) \\
&= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}) \circ (A_i(x) + \sigma_i^* \theta_{\mathbb{R}}^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \text{pr}_2(s_{(i)}(x), t_A)) \\
&\equiv (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}) \circ (A_i(x) + (\sigma_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_{\mathbb{R}}(x))
\end{aligned}$$

$$= (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}}) \circ A_i(x) + (\sigma_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x),$$

przy czym w ostatnim przejściu skorzystaliśmy z tożsamości (1.5.9).

—

**STWIERDZENIE 240.** *Przyjmijmy zapis Def. 91 i 156. W dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  należącym do przecięcia dziedzin trywializacji lokalnych  $\tau_i$  i  $\tau_j$  wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$  zachodzi tożsamość*

$$A_j(x) = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)}) A_i(x) + (g_{ij}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x).$$

■

*Dowód:* Wystarczy zauważyć, że

$$s_{(j)}(x) \equiv \tau_j^{-1}(x, e) = \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)) = r_{g_{ij}(x)}(\tau_i^{-1}(x, e)) \equiv r_{g_{ij}(x)}(s_{(i)}(x)),$$

a następnie przeprowadzić rachunek analogiczny do tego z Uwagi 67. □

**STWIERDZENIE 241.** *Przyjmijmy zapis Def. 156. W obrazie trywializacji lokalnej  $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times G$  forma powiązania głównego wyraża się przez potencjał tegoż powiązania, jak następuje:*

$$\underline{A} \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i(x) + \theta_L(g),$$

przy czym obiekt po prawej stronie znaku równości należy traktować – na gruncie Stw. 96 (i jego dowodu) – jako wektor z przestrzeni  $T_{(x,g)}^*(\mathcal{O}_i \times G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \equiv (T_x^*B \oplus T_x^*G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  w dowolnym punkcie  $(x, g) \in \mathcal{O}_i \times G$ .

■

*Dowód:* Uwzględniając powyższy rozkład przestrzeni  $T_{(x,g)}^*(\mathcal{O}_i \times G)$ , możemy zawsze zapisać

$$(4.2.39) \quad \underline{A} \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} = a_i(x; g) + \vartheta_i(g; x),$$

gdzie  $a_i(x; g) \in T_x^*B \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  oraz  $\vartheta_i(g; x) \in T_x^*G \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  są 1-formami o własnościach

$$\forall (v, V) \in T_x B \oplus T_x G : V \lrcorner a_i(x; g) = 0_{\mathfrak{g}} = v \lrcorner \vartheta_i(g; x).$$

Rozłożywszy 1-formę  $\vartheta_i(g; x)$  w bazie utworzonej przez formy lewo niezmiennicze,

$$\vartheta_i(g; x) =: \vartheta_{iA}^B(x, g) \triangleright \theta_L^A(g) \otimes_{\mathbb{R}} t_B,$$

obliczamy najpierw obie strony Równ. (4.2.39) na wektorze pionowym  $(0_{T_x B}, L_A(g))$ , dostając – w odwołaniu do definicji (4.2.30) i Równ. (4.2.31), jak również Równ. (4.2.33)

–

$$\begin{aligned} \vartheta_{iA}^B(x, g) \triangleright t_A &= L_A(g) \lrcorner \vartheta_i(g; x) = (0_{T_x B}, L_A(g)) \lrcorner (a_i(x; g) + \vartheta_i(g; x)) \\ &= \underline{A} \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} (0_{T_x B}, L_A(g)) = \underline{A}(\mathcal{K}_{t_A}(\tau_i^{-1}(x, g))) \\ &= \underline{A} \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\tau_i^{-1}(x,g)}(t_A) = \text{pr}_2(\tau_i^{-1}(x, g), t_A) = t_A. \end{aligned}$$

Wnioskujemy na tej podstawie, że

$$\vartheta_i(g; x) \equiv \theta_L(g).$$

W następnej kolejności w miejsce wektora pionowego wstawiamy  $(v, 0_{\mathbb{T}_g G})$  i wykorzystujemy tożsamość

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, 0_{\mathbb{T}_g G}) = \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ \mathbb{T}_{(x,e)}(\text{id}_B \times \wp_g)(v, 0_{\mathbb{T}_e G}) \\ &= \mathbb{T}_{(x,e)}(\tau_i^{-1} \circ (\text{id}_B \times \wp_g))(v, 0_{\mathbb{T}_e G}) = \mathbb{T}_{(x,e)}(r_g \circ \tau_i^{-1})(v, 0_{\mathbb{T}_e G}) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, 0_{\mathbb{T}_e G}) \equiv \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1} \circ \mathbb{T}_x(\cdot, e)(v) \\ &= \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathbb{T}_x(\tau_i^{-1} \circ (\cdot, e))(v) = \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathbb{T}_x s(i)(v) \end{aligned}$$

która pozwala (dzięki Równ. (4.2.34)) zastosować bezpośrednio definicję (4.2.38) potencjału powiązania głównego i tym sposobem otrzymać

$$\begin{aligned} v \lrcorner a_i(x; g) &= (v, 0_{\mathbb{T}_g G}) \lrcorner (a_i(x; g) + \vartheta_i(g; x)) = \underline{A} \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i^{-1}(v, 0_{\mathbb{T}_g G}) \\ &= \underline{A} \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{-1}(x,e)} r_g \circ \mathbb{T}_x s(i)(v) = \text{pr}_2 \circ (r_r \times \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \underline{A} \circ \mathbb{T}_x s(i)(v) \\ &= \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \underline{A} \circ \mathbb{T}_x s(i)(v) \equiv \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (v \lrcorner A_i(x)), \end{aligned}$$

więc też – wobec dowolności  $v$  –

$$a_i(x; g) = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i(x).$$

Ostatecznie zatem odtwarzamy postulowaną prezentację lokalną formy powiązania głównego.  $\square$

**TWIERDZENIE 4.2.15** (O rekonstrukcji wiązki głównej z powiązaniem). *Przyjmijmy zapis Def. 66, 91 i 155. Każda wiązka główna  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  z powiązaniem głównym, rozumianym w sensie dowolnej z wprowadzonych uprzednio definicji 153, 154 i 155, wyznacza nad swym pokryciem trywializującym<sup>5</sup>  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$*

- rodzinę  $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset}$  lokalnie gładkich odwzorowań

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$$

spełniających warunek 1-kocyklu (4.1.2);

- rodzinę  $\{A_i\}_{i \in I}$  lokalnie gładkich 1-form o wartościach w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$  grupy Liego  $G$

$$A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathfrak{g}$$

spełniających warunki

$$\forall (i,j) \in (I \times 2)_\emptyset, x \in \mathcal{O}_{ij} : A_j(x) = (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)}) \circ A_i(x) + (g_{ij}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x).$$

I odwrotnie, niechaj  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie pokryciem otwartym  $C^k$ -rozmaitości  $B$ . Dowolna stowarzyszona z  $\mathcal{O}$  para rodzin odwzorowań lokalnie gładkich

$$(\{g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset}, \{A_k\}_{k \in I})$$

spełniających powyższe warunki określa – zgodnie z (konstruktywnym dowodem) Tw. 4.1.1 – wiązki główną  $P_G = (\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times G)/g.$  o grupie strukturalnej  $G$  i o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z  $\mathcal{O}_{ij}$  tożsamych z  $g_{ij}$ ,  $(i, j) \in (I \times 2)_\emptyset$  oraz formie powiązania głównego zadawanej formułą

$$\mathcal{A}(v, V) := (x, g, v \lrcorner (\text{id}_{\mathbb{T}^* B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ A_i(x) + V \lrcorner \theta_L(g)), \quad (x, g) \in \mathcal{O}_i \times G, \quad (4.2.40)$$

<sup>5</sup>Nie zakładamy, że pokrycie to jest dobre w rozumieniu Def. 66.

zapisaną dla dowolnego wektora  $(v, V) \in T_x \mathcal{O}_i \oplus T_g G \equiv T_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times G)$ , w odwołaniu do Stw. 96 (i jego dowodu). Ilekroć odwzorowania te są danymi lokalnymi pewnej wiązki głównej nad  $B$  o włóknie typowym  $G$ , ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez  $g_{ij}$  i  $A_i$ . ■

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost z wcześniejszej analizy oraz z Tw. 4.1.1. Trzeba jeszcze tylko określić stosowne działanie grupy strukturalnej  $G$  na włóknach wiązki zrekonstruowanej według schematu przedstawionego w dowodzie Tw. 4.1.1,

$$P_G = \left( \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times G) \right) / g.$$

Definiujemy odwzorowanie

$$r : P_G \times G \longrightarrow P_G : \left( [(x, g, i)], h \right) \longmapsto [(x, g \cdot h, i)],$$

którego gładkość jest konsekwencją surjektywnej submersywności odwzorowania  $\pi_{\sim}$  zadanego w Równ. (4.1.3) oraz Stw. 117 – istotnie,  $r$  jest (jedynym) odwzorowaniem domykającym diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & P_G \\ & \nearrow^{\pi_{\sim} \circ \tilde{R}} & \uparrow r \\ \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times G) \times G & \xrightarrow{\pi_{\sim} \times \text{id}_G} & P_G \times G \end{array} , ,$$

w którym

$$\tilde{R} : \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times G) \times G \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times G) : \left( (x, g, i), h \right) \longmapsto (x, g \cdot h, i)$$

jest jawnie gładkie.

Naz obecnym etapie pozostaje jedynie upewnić się, że zrekonstruowana z danych lokalnych forma powiązania jest obiektem globalnie gładkim (klasy  $C^k$ ) o własnościach opisanych w Def. 155. Zasadniczo wniosek taki daje się prosto wyprowadzić ze Stw. 241, niemniej jednak my mozolnie sprawdzimy wszystkie własności. Mamy zatem do porównania, w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ , wynik ewaluacji na dowolnym wektorze  $(v, V) \in T_x \mathcal{O}_i \oplus T_g G$  1-formy  $\mathcal{A}$  wyrażonej w terminach potencjału lokalnego  $A_i$  z wynikiem ewaluacji na obrazie tegoż wektora względem odwzorowania stycznego do transformacji przejścia  $(x, g) \longmapsto (x, g_{ji}(x) \cdot g)$  1-formy  $\mathcal{A}$  wyrażonej w terminach potencjału lokalnego  $A_j$ . Przy tym zamiast pchać  $(v, V)$  wzdłuż odwzorowania przejścia, moglibyśmy równoważnie cofnąć wzdłuż tegoż odwzorowania 1-formę  $A_j$ , a następnie obliczyć ją na  $(v, V)$ . Wystarczy zatem porównać wynik cofnięcia 1-formy  $\mathcal{A}$  zapisanej przy użyciu potencjału  $A_j$  z tą samą 1-formą wyrażoną w terminach potencjału  $A_i$ , co czyniąc w odwołaniu do Stw. 240, 136 oraz 132, otrzymujemy pożądaną wynik:

$$\begin{aligned} & (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{(g_{ji}(x) \cdot g)^{-1}}) \circ A_j(x) + \theta_L(g_{ji}(x) \cdot g) \\ = & (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}) \circ \left( (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)}) \circ A_i(x) \right) \\ & + (g_{ij}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) + \theta_L(g) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathbf{A}_i(x) + \theta_L(g) + (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\
&\quad + (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \circ (\mathrm{Inv}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\
&= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathbf{A}_i(x) + \theta_L(g) + (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\
&\quad - (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R(x) \\
&= (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathbf{A}_i(x) + \theta_L(g) + (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\
&\quad - (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}}) \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}) \\
&\quad \circ (g_{ji}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \theta_L(x) = (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathbf{A}_i(x) + \theta_L(g).
\end{aligned}$$

Drugą z oczekiwanych własności, Równ. (4.2.33), sprawdzamy w bezpośrednim odwołaniu do Równ. (4.2.31), zauważając na wstępie, że postać (włókna) wiązki odtworzonej z danych lokalnych w konstruktywnym dowodzie Tw. 4.1.1 prowadzi do utożsamienia  $\mathcal{K}_X(x, g) \equiv (0_{\mathbb{T}_{x,B}}, L_X(g))$  w dziedzinie  $\pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ni (x, g)$  trywializacji lokalnej wiązki zrekonstruowanej  $\mathbb{P}_G$ . W obrazie tejże trywializacji otrzymujemy więc – dla dowolnego wektora  $X \in \mathfrak{g}$  – równość

$$\mathcal{A} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{(x,g)}(X) \equiv \mathcal{A}(0_{\mathbb{T}_{x,B}}, L_X(g)) = (x, g, L_X \lrcorner \theta_L(g)) \equiv (x, g, X).$$

Na koniec wreszcie upewniamy się o G-ekwiwariantności zapostulowanej formy powiązania głównego. W równości

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} \circ \mathbb{T}_{(x,g)}(\mathrm{id}_B \times \wp_h)(v, V) = \mathcal{A} \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \oplus \mathbb{T}_g \wp_h)(v, V) \\
&= (x, g \cdot h, v \lrcorner (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{(g \cdot h)^{-1}}) \circ \mathbf{A}_i(x) + \mathbb{T}_g \wp_h(V) \lrcorner \theta_L(g \cdot h)),
\end{aligned}$$

rozpisanej przy użyciu Stw. 96 (i jego dowodu), uwzględniamy więc raz jeszcze Stw. 132, które pozwala przepisać

$$\mathbb{T}_g \wp_h(V) \lrcorner \theta_L(g \cdot h) = V \lrcorner (\wp_h^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(g) = V \lrcorner (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*G} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g),$$

a zatem także

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \circ \mathbb{T}_{(x,g)}(\mathrm{id}_B \times \wp_h)(v, V) &= ((\mathrm{id}_B \times \wp_h) \times (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{h^{-1}}))(x, g, \\
&\quad v \lrcorner (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathbf{A}_i(x) + V \lrcorner \theta_L(g)) \\
&\equiv ((\mathrm{id}_B \times \wp_h) \times (\mathrm{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \mathrm{Ad}_{h^{-1}})) \circ \mathcal{A}(v, V).
\end{aligned}$$

□

**TWIERDZENIE 4.2.16.** *Przyjmijmy zapis Def. 146, Stw. 240 oraz dowodu Tw. 4.1.3 i niechaj  $(\mathbb{P}_G^\alpha, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G^\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema wiązkami głównymi (o grupie strukturalnej  $G$ ) z powiązaniem głównym nad wspólną bazą  $B$ , o odnośnych trywializacjach lokalnych  $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{P}_G^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_i \times G$  stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , przy czym wprowadzamy dwie rodziny cięć lokalnych:*

$$s_{(i)}^\alpha := \tau_i^{\alpha-1}(\cdot, e) : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{P}_G^\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\},$$

a wraz z nimi – odwzorowania przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  oraz 1-formy  $A_i^\alpha \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathfrak{g}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o wartościach w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$  grupy Liego  $G$ . Dowolny morfizm wiązek głównych z powiązaniem

$$\begin{array}{ccc} P_G^1 & \xrightarrow{\Phi} & P_G^2 \\ \pi_{P_G^1} \downarrow & & \downarrow \pi_{P_G^2} \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę  $\{h_i\}_{i \in I}$  odwzorowań (lokalnie) klasy  $C^k$

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G, \quad i \in I$$

spełniających warunki: (4.1.15) oraz

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_i} : A_i^2(x) = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{h_i(x)}) \circ A_i^1(x) + ((\text{Inv} \circ h_i)^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x). \quad (4.2.41)$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu. ■

*Dowód:* Po uwzględnieniu Tw. 4.1.3 pozostaje zweryfikować zapostulowaną formułę transformacyjną dla potencjału powiązania. W tym celu przywołujemy warunek (PFCM4) z Tw. 4.2.14 i podstawiamy go do definicji (4.2.38) tegoż potencjału, wykorzystując prostą zależność (4.1.16), którą przepisujemy w obecnej notacji jako

$$\Phi \circ s_{(i)}^1(x) = r_{h_i(x)}(s_{(i)}^2(x)).$$

Otrzymujemy tym sposobem z jednej strony równość

$$\begin{aligned} & (\text{id}_{T^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}_2 \circ T_{s_{(i)}^1(x)} \Phi) \circ T_x s_{(i)}^1 = (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{pr}_2 \circ (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \underline{\mathcal{A}}_1) \circ T_x s_{(i)}^1 \\ & = (\text{id}_{T^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}_1) \circ T_x s_{(i)}^1 \equiv A_i^1(x), \end{aligned}$$

z drugiej zaś – w świetle szczegółowych rachunków z Uwagi 67 –

$$\begin{aligned} & (\text{id}_{T^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}_2 \circ T_{s_{(i)}^1(x)} \Phi) \circ T_x s_{(i)}^1 = (\text{id}_{T^*B} \otimes \underline{\mathcal{A}}_2) \circ T_x (r_{h_i(\cdot)}(s_{(i)}^2(\cdot))) \\ & = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{h_i(x)^{-1}}) \circ A_i^2(x) + (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x). \end{aligned}$$

Zestawiwszy powyższe wyniki, uzyskujemy – w odwołaniu do Stw. 132 – oczekiwaną tożsamość,

$$\begin{aligned} A_i^2(x) & = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{h_i(x)}) \circ A_i^1(x) - (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{h_i(x)}) \circ (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\ & = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{h_i(x)}) \circ A_i^1(x) - (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R(x) \\ & = (\text{id}_{T^*B} \otimes T_e \text{Ad}_{h_i(x)}) \circ A_i^1(x) + ((\text{Inv} \circ h_i)^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R(x). \end{aligned}$$

I odwrotnie, mając rodzinę  $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G$ ,  $i \in I$  odwzorowań z treści dowodzonego stwierdzenia, określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i : \pi_{P_G^1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \pi_{P_G^2}^{-1}(\mathcal{O}_i) : \tau_i^{-1-1}(x, g) \mapsto \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g), \quad i \in I.$$

Łatwo przekonujemy się, że są to w istocie ograniczenia odwzorowania globalnie gładkiego  $\Phi : \mathbb{P}_G^1 \rightarrow \mathbb{P}_G^2$  do poszczególnych elementów pokrycia trywializującego,  $\Phi|_{\pi_{\mathbb{P}_G^1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$ , oto bowiem w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{i_j}$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} \Phi_j \circ s_{(i)}^1(x) &= \Phi_j \circ \tau_j^{1-1}(x, g_{j_i}^1(x)) = \tau_j^{2-1}(x, h_j(x) \cdot g_{j_i}^1(x)) \\ &= \tau_j^{2-1}(x, g_{j_i}^2(x) \cdot h_i(x)) = \tau_i^{1-1}(x, h_i(x)) \equiv \Phi_i \circ s_{(i)}^1(x), \end{aligned}$$

a nadto odwzorowania  $\Phi_i$  są G-ekwiwariantne, co sprawdzamy dla dowolnych  $x \in \mathcal{O}_i$  oraz  $g, h \in G$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_i \circ r_h^1 \circ \tau_i^{1-1}(x, g) &= \Phi_i \circ \tau_i^{1-1}(x, g \cdot h) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g \cdot h) \\ &= r_h^2(\tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g)) \equiv r_h^2 \circ \Phi_i \circ \tau_i^{1-1}(x, g). \end{aligned}$$

Na zakończenie dowodu sprawdzamy warunek (PFCM4) z Tw. 4.2.14. Czynimy to w obrazie trywializacji lokalnej  $\tau_i$ , posilując się przy tym Stw. 241. Oto więc stwierdzamy równość

$$\begin{aligned} &\underline{\mathcal{A}}_2 \circ \mathbb{T}\Phi \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{1-1}(x, g)} \tau_i^{1-1} \\ &\equiv (\underline{\mathcal{A}}_2 \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{2-1}(x, g)} \tau_i^{2-1}) \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{1-1}(x, g)} (\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1}) \\ &\equiv (\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1})^* ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv} \circ \text{pr}_2(\cdot)}) \circ \text{pr}_1^* \mathcal{A}_i^2 + \text{pr}_2^* \theta_L)(x, g) \\ &= ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv} \circ \text{pr}_2(\cdot)}) \circ \text{pr}_1^* \mathcal{A}_i^2 + \text{pr}_2^* \theta_L)(x, h_i(x) \cdot g) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{(h_i(x) \cdot g)^{-1}}) \circ \mathcal{A}_i^2(x) + \theta_L(h_i(x) \cdot g) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{h_i(x)^{-1}}) \circ \mathcal{A}_i^2(x) + \theta_L(h_i(x) \cdot g), \end{aligned}$$

którą w świetle przyjętych założeń oraz Stw. 136 możemy przepisać w oczekiwanej postaci

$$\begin{aligned} &\underline{\mathcal{A}}_2 \circ \mathbb{T}\Phi \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{1-1}(x, g)} \tau_i^{1-1} \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (\mathcal{A}_i^1(x) - (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\ &\quad + \theta_L(g) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\ &= (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}_i^1(x) + \theta_L(g) \equiv \underline{\mathcal{A}}_1 \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{1-1}(x, g)} \tau_i^{1-1} \\ &= \text{pr}_2 \circ (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1 \circ \mathbb{T}_{\tau_i^{1-1}(x, g)} \tau_i^{1-1} \end{aligned}$$

□

DEFINICJA 157. Przyjmijmy zapis Def. 156. Potencjały powiązania głównego  $\mathcal{A}_i$  na wiązce głównej  $\mathbb{P}_G$  zadają rodzinę lokalnie gładkich 2-form na bazie o wartościach w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$

$$F_i := d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i, \quad i \in I$$

spełniających warunki

$$\forall (i, j) \in (I \times 2)_{\emptyset}, x \in \mathcal{O}_{i_j} : F_j(x) = (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \text{Ad}_{g_{i_j}(x)^{-1}}) F_i(x).$$

Są one nazywane **lokalnymi 2-formami krzywizny powiązania głównego na wiązce**  $V$ . **Powiązanie główne płaskie** to takie, którego lokalne 2-formy krzywizny są tożsamościowo równe zeru. ▲

UWAGA 68. Sensowności powyższej definicji dowodzimy podobnie jak w przypadku Def. 65. ▯

STWIERDZENIE 242. *Przyjmijmy zapis Def. 157 i niechaj  $\{F_i^\alpha\}_{i \in I}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą lokalnymi 2-formami krzywizny powiązania głównego na wiązках głównych nad ustaloną bazą  $B$ , stowarzyszonymi ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , przy czym zakładamy, że między wiązками tymi istnieje izomorfizm wiązek głównych z powiązaniem pokrywający identyczność na bazie, o danych lokalnych  $\{h_i\}_{i \in I}$  zdefiniowanych w treści Tw. 4.2.16. Wówczas zachodzą tożsamości*

$$F_i^2 = (\text{id}_{T^*B} \otimes \text{Ad}_{h_i})F_i^1.$$
■

*Dowód:* W pełni analogiczny do dowodu Stw. 237. □

### 3. Indukcja powiązania wzdłuż odwzorowania gładkiego

STWIERDZENIE 243. *Przyjmijmy zapis Def. 152 oraz Przykł. 36 (3) i niechaj  $(V, B_2, \mathbb{K}^n, \pi_V)$  będzie wiązką wektorową (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) o powiązaniu Koszula  $\nabla^K$  reprezentowaną nad pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B_2$  przez 1-formy o wartościach macierzowych  $\Gamma_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}(n)$ , a nadto niech  $f : B_1 \rightarrow B_2$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^k$ .  $(f^*V, B_1, \mathbb{K}^n, \text{pr}_1)$*  ■

*Dowód:* □

### 4. Powiązanie Crittendena na wiązce stowarzyszonej

Stając przed zadaniem skonstruowania powiązania na wiązce stowarzyszonej, warto powrócić do pierwotnego zagadnienia, jakie doprowadziło nas do rozważań nad powiązaniem w ogólności. Oto celem naszym, umotywowanym naturalną potrzebą fizykalną, było zdefiniowanie takiego różniczkowania cięć (lokalnych) wiązki włóknistej  $E$  (o włóknie typowym  $F$ ) wzdłuż pól wektorowych na bazie  $B$  te same wiązki, które przyjmowałyby wartości w podwiązce pionowej  $VE \subset TE$  i tym samym, poprzez stosowny dyfeomorfizm strukturalny  $VE|_{E_x} \cong TF$  nad dowolnym punktem  $x \in B$ , pozwalałoby przetransportować funktorialnie (za pośrednictwem funktora stycznego  $T$ ) dowolną istotną (np. fizykalnie) strukturę z przestrzeni cięć  $\Gamma(E)$  (na której jest ona indukowaną z włókna typowego  $F$ ) na przestrzeń ich określonych przez to różniczkowanie pochodnych kierunkowych. W kontekście konstrukcji wiązki stowarzyszonej  $P_G \times_\lambda M$  tą strukturą jest struktura rozmaitości z działaniem  $\lambda : G \times M \rightarrow M$  grupy  $G$  występującej w roli grupy strukturalnej wiązki głównej  $P_G$  nad  $B$  i zarazem w roli włókna typowego wiązki grup (dołączonej)  $\text{Ad}P_G$ , o grupie cięć globalnych  $\Gamma(\text{Ad}P_G)$  realizującej się na  $\Gamma(P_G \times_\lambda M)$  w sposób lokalnie modelowany na  $\lambda$ . Nasze poszukiwania różniczkowania na  $\Gamma(P_G \times_\lambda M)$



ekwiwariantnego względem działania grupy  $\Gamma(\text{Ad}P_G)$  komplikuje nieoczywisty charakter realizacji tejże grupy na  $V(P_G \times_\lambda M)$ . Miast przemyśliwać nad abstrakcyjną konstrukcją wygodnego modelu wiązki  $V(P_G \times_\lambda M)$  (rozumianego jako wybór reprezentanta jej klasy izomorfizmu), który byłby przestrzenią naturalnego takiego działania, wykorzystamy raczej dotychczasowe nasze obserwacje dotyczące wiązek głównych i stowarzyszonych z nimi w celu skonstruowania różniczkowania przyjmującego wartości *wprost* w różnaitości  $TM$ , co ma tę oczywistą zaletę, że pozwala zapostulować naturalną postać gładkiego działania grupy  $G$ :

$$T_2\lambda : G \times TM \longrightarrow TM : (g, v) \longmapsto T_{\pi_{TM}(v)}\lambda_g(v),$$

którego splecenie z  $\lambda$  ma realizować w obrazie trywializacji lokalnej poszukiwana przez nas pochodna kowariantna na  $\Gamma(P_G \times_\lambda M)$ . Łatwość, z jaką zidentyfikowaliśmy działanie na przestrzeni modelowej przeciwdziedziny tejże pochodnej, ma swoją cenę: jest nią nieoczywisty charakter nieodzownego przejścia – o naturze różniczkowej – od cięć wiązki stowarzyszonej  $P_G \times_\lambda M$  do odwzorowań liniowych pomiędzy wiązkami stycznymi  $TB$  i  $TM$ . Instrumentalnymi w jego zrozumieniu okazują się obserwacje poczynione w kontekście dyskusji strukturalnej wiązek stowarzyszonych, a konkretnie Stw. 208, które pozwala nam wypisać dwie istotne dla naszych rozważań bijekcje:

$$\Phi_\lambda : \Gamma(P_G \times_\lambda M) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_G(P_G, M),$$

$$\Phi_{T_2\lambda} : \Gamma(P_G \times_{T_2\lambda} TM) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_G(P_G, TM).$$

Te w połączeniu z konstrukcją powiązania (głównego) na wiązce głównej z Def. 154, w szczególności zaś – z konstrukcją podniesienia poziomego

$$\text{Hor.} : TB \twoheadrightarrow TP_G, \quad \text{Hor.}(TB) = HP_G$$

ze Stw. 232, pozwala nam przeformułować zagadnienie różniczkowania cięcia  $\phi \in \Gamma(P_G \times_\lambda M)$  wiązki stowarzyszonej wzdłuż pola wektorowego  $\mathcal{X} \in \Gamma(TB)$  nad jej bazą w terminach różniczkowania odnośnego odwzorowania  $G$ -ekwiwariantnego  $\Phi_\lambda[\phi] \in \text{Hom}_G(P_G, M)$  wzdłuż pola wektorowego  $\text{Hor.}(\mathcal{X}) \in \Gamma(TP_G)$  nad przestrzenią totalną wiązki głównej  $P_G$ . Taki zabieg formalny jest o tyle wygodny, że pozwala prosto narzucić warunek  $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -ekwiwariantności, oto bowiem jeśli oznaczymy poszukiwaną pochodną symbolem

$$\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi] : P_G \longrightarrow TM,$$

to możemy zażądać, iżby dla dowolnego cięcia globalnego  $\gamma \in \Gamma(\text{Ad}P_G)$  była spełniona tożsamość

$$\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\Gamma[\Gamma[\tilde{r}]]_\gamma(\phi)](\cdot) = T_2\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)}(\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}(\Phi_\lambda[\phi]))(\cdot),$$

a jeśli wyprowadzone na podstawie takiego żądania odwzorowanie okaże się  $G$ -ekwiwariantnym,

$$\forall_{g \in G} : \mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}(\Phi_\lambda[\phi]) \circ r_g = T_2\lambda_{g^{-1}} \circ \mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}(\Phi_\lambda[\phi]),$$

to wówczas – raz jeszcze w odwołaniu do Stw. 208 – będziemy mogli zdefiniować pochodną kowariantną

$$\nabla_{\mathcal{X}}\phi := \Phi_{T_2\lambda}^{-1}[\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi]] \in \Gamma(P_G \times_{T_2\lambda} TM),$$

która wprost na mocy swej definicji będzie miała pożądaną własność

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\mathcal{X}}(\Gamma[\Gamma[\tilde{r}]]_{\gamma}^{\lambda}(\phi)) \equiv \Phi_{T_2\lambda}^{-1}[\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_{\lambda}[\Gamma[\Gamma[\tilde{r}]]_{\gamma}^{\lambda}(\phi)]] \\
& = \Phi_{T_2\lambda}^{-1}[T_2\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}(\Phi_{\lambda}[\phi]))] \equiv \Phi_{T_2\lambda}^{-1}[[\Phi_{\text{Ad}}T_2\lambda]_{\gamma}(\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}(\Phi_{\lambda}[\phi]))] \\
& = \Gamma[\Gamma[\tilde{r}]]_{\gamma}^{T_2\lambda}(\Phi_{T_2\lambda}^{-1}[\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_{\lambda}[\phi]]) \equiv \Gamma[\Gamma[\tilde{r}]]_{\gamma}^{T_2\lambda}(\nabla_{\mathcal{X}}\phi),
\end{aligned}$$

wyprowadzoną na gruncie (i w zapisie) Stw. 211. Po tych wyjaśnieniach możemy przystąpić do bezpośredniej konstrukcji pochodnej  $\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}$ .

Punktem wyjścia do ustalenia poprawki do zwykłej pochodnej kierunkowej,  $\mathcal{D} - d$ , jaką wymuszają narzucone przez nas więzy ekwariantności operatora  $\mathcal{D}$ , jest analiza własności transformacyjnych tejże pochodnej względem transformacji cechowania  $\gamma \in \Gamma(\text{Ad}P_G)$  różniczkowanego cięcia  $\phi \in \Gamma(P_G \times_{\lambda} M)$ , w odwołaniu do Stw. 211, wyprowadzenia równości (4.2.9) oraz Stw. 137,

$$\begin{aligned}
& d\Phi_{\lambda}[\Gamma[\Gamma[\tilde{r}]]_{\gamma}^{\lambda}(\phi)] = d(\Phi_{\text{Ad}}\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\Phi_{\lambda}[\phi])) \\
& = (\text{id}_{T^*P_G} \otimes T_{\Phi_{\lambda}[\phi](\cdot)}\Phi_{\text{Ad}}\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\cdot)) \circ d\Phi_{\lambda}[\phi] \\
& \quad - (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_L^A \otimes_{C^k(P_G, \mathbb{R})} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_{\text{Ad}}\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\Phi_{\lambda}[\phi](\cdot))),
\end{aligned}$$

przy czym  $t_A$ ,  $A \in \overline{1, \dim G}$  jest tutaj bazą algebry Liego  $\mathfrak{g}$  grupy Liego  $G$ . Uwzględniwszy reguły transformacyjne dla potencjału powiązania głównego  $\underline{A} \equiv \underline{A}^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A \in \Omega^1(P_G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  na  $P_G \ni p$  (wprowadzonego w Def. 155),

$$\begin{aligned}
{}^{\gamma}\underline{A}(p) & \equiv dy^{\alpha}(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \underline{A}_{\alpha}(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \\
& = (T_{p^r\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}})_{\mu}^{\alpha} \triangleright (dx^{\mu}(p) \\
& \quad + (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_L^A(p)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}^{\mu}(p) \triangleright \underline{A}_{\alpha}(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \\
& = \underline{A}(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \circ T_{p^r\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}} \\
& \quad + (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_L^A(p) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}^{\alpha} \triangleright \underline{A}_{\alpha}(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \\
& = T_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)} \circ \underline{A}(p) + (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_L(p),
\end{aligned}$$

wywiezione wprost z jej definicji (patrz: Równ. (4.2.34) oraz Stw. 137 (w połączeniu z Równ. (1.5.9)) w zapisie wykorzystującym wybór współrzędnych lokalnych na  $P_G$ :  $\{y^{\alpha}\}_{\mu \in \overline{1, \dim P_G}}$  w otoczeniu  $p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)$  oraz  $\{x^{\mu}\}_{\mu \in \overline{1, \dim P_G}}$  w otoczeniu  $p$ , konstatujemy, że

$$\begin{aligned}
& d\Phi_{\lambda}[\Gamma[\Gamma[\tilde{r}]]_{\gamma}^{\lambda}(\phi)] = (\text{id}_{T^*P_G} \otimes T_{\Phi_{\lambda}[\phi](\cdot)}\Phi_{\text{Ad}}\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\cdot)) \circ d\Phi_{\lambda}[\phi] \\
& - ({}^{\gamma}\underline{A} - (\text{id}_{T^*P_G} \otimes T_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\cdot)) \circ \underline{A})^A \otimes_{C^k(P_G, \mathbb{R})} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_{\text{Ad}}\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\Phi_{\lambda}[\phi](\cdot))),
\end{aligned}$$

czyli w zapisie

$${}^{\gamma}\phi := \Gamma[\Gamma[\tilde{r}]]_{\gamma}^{\lambda}(\phi)$$

otrzymujemy, po ponownym przywołaniu Stw. 137, tożsamość strukturalną:

$$d\Phi_{\lambda}[^{\gamma}\phi] + {}^{\gamma}\underline{A}^A \otimes_{C^k(P_G, \mathbb{R})} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_{\lambda}[^{\gamma}\phi])$$

$$= (\text{id}_{T^*P_G} \otimes T_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)} \Phi_{\text{Ad}\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)}}) \circ (\text{d}\Phi_\lambda[\phi] + \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_{C^k(P_G, \mathbb{R})} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\lambda[\phi])),$$

a ponieważ dla dowolnego elementu  $g \in G$  zachodzi też tożsamość

$$\begin{aligned} & \text{d}\Phi_\lambda[\phi](p \triangleleft g) + \underline{\mathcal{A}}^A(p \triangleleft g) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\lambda[\phi](p \triangleleft g)) \\ &= \text{d}(g^{-1} \triangleright \Phi_\lambda[\phi](\cdot))(p) + \underline{\mathcal{A}}^B(p) \otimes_{\mathbb{R}} (\text{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}})_B^A \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\lambda[\phi](p \triangleleft g)) \\ &= (\text{id}_{T^*P_G} \otimes \text{T}_2 \lambda_{g^{-1}}) \circ (\text{d}\Phi_\lambda[\phi] + \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_{C^k(P_G, \mathbb{R})} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\lambda[\phi]))(p), \end{aligned}$$

przezo z powyższych dociekań ekstrahujemy

DEFINICJA 158. Przyjmijmy zapis Def. 94 i 155 oraz (dowodu) Stw. 208 i niechaj  $G$  będzie grupą Liego o algebrze Liego  $\mathfrak{g}$ , w której wybrano bazę  $\{t_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ , a  $M$  – rozmaitością (klasy  $C^k$ ) z działaniem  $(C^k)$ -gładkim  $\lambda : G \times M \rightarrow M$  grupy  $G$ , indukującym działanie

$$\text{T}_2 \lambda : G \times TM \rightarrow TM : (g, v) \mapsto \text{T}_{\pi_{TM}(v)} \lambda_g(v),$$

i niech  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  będzie wiązką główną nad bazą  $B$ , o potencjale powiązania głównego  $\underline{\mathcal{A}} \equiv \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A \in \Omega^1(P_G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ . Dla dowolnego cięcia (globalnego)  $\phi \in \Gamma(P_G \times_\lambda M)$  określamy jego **pochođną  $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -kowariantną**

$$\nabla^{\underline{\mathcal{A}}} \phi := (\text{id}_{T^*P_G} \otimes \Phi_{\text{T}_2 \lambda}^{-1}) \circ (\text{d}\Phi_\lambda[\phi] + \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_{C^k(P_G, \mathbb{R})} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\lambda[\phi])).$$

▲

STWIERDZENIE 244. Przyjmijmy zapis Def. 158 oraz (dowodu) Stw. 208 i niechaj  $(\phi, \gamma) \in \Gamma(P_G \times_\lambda M) \times \Gamma(\text{Ad}P_G)$ , a dalej oznaczymy

$$\gamma \underline{\mathcal{A}}(\cdot) := \text{T}_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)} \circ (\underline{\mathcal{A}} - \Phi_{\text{Ad}}[\gamma]^* \theta_L)(\cdot)$$

oraz

$$\gamma \phi := \Gamma[\Gamma[\tilde{\tau}]]_\gamma^\lambda(\phi).$$

Zachodzi tożsamość

$$\nabla^{\gamma \underline{\mathcal{A}}} \gamma \phi = (\text{id}_{T^*P_G} \otimes T_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)} \Phi_{\text{Ad}\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)}}) \circ \nabla^{\underline{\mathcal{A}}} \phi.$$

■

Dowód: Patrz: Równ. (4.2.42). □

DEFINICJA 159. Przyjmijmy zapis Def. 158. **Pochodna Crittendena na wiązce stowarzyszonej**  $P_G \times_\lambda M$  nad  $B$  to odwzorowanie

$$\begin{aligned} \nabla^C & : \Gamma(P_G \times_\lambda M) \times \Gamma(TB) \rightarrow \Gamma(P_G \times_{\text{T}_2 \lambda} TM) \\ & : (\phi, \mathcal{X}) \mapsto \Phi_{\text{T}_2 \lambda}^{-1}[\text{T}(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \text{Hor.}(\mathcal{X})]. \end{aligned}$$

▲

Opis prostej relacji pomiędzy obiema konstrukcjami, a zarazem dowód *a posteriori* zasadności tej ostatniej zawiera

STWIERDZENIE 245. *Przyjmijmy zapis Def. 159. Dla dowolnego cięcia (globalnego)  $\phi \in \Gamma(\mathbb{P}_G \times_\lambda M)$  i dowolnego pola wektorowego  $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathbb{T}B)$  zachodzi tożsamość*

$$\nabla_{\mathcal{X}}^C \phi = \nabla_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}^A \phi.$$

■

*Dowód:* Równość obu wyrażeń, w których pojawia się pole wektorowe  $\mathcal{X}$  na bazie wiązki głównej  $\mathbb{P}_G$  (i stowarzyszonej z nią  $\mathbb{P}_G \times_\lambda M$ ), wynika wprost z definicji  $\text{HP}_G \equiv \text{Ker } \mathcal{A}$ , oto bowiem ta ostatnia implikuje redukcję wyrażenia na pochodną  $\Gamma(\text{Ad}\mathbb{P}_G)$ -kowariantną:

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}^A \phi &= \Phi_{\mathbb{T}_2\lambda}^{-1} \left[ \text{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner (d\Phi_\lambda[\phi] + \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_{C^k(\mathbb{P}_G, \mathbb{R})} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\lambda[\phi])) \right] \\ &= \Phi_{\mathbb{T}_2\lambda}^{-1} \left[ \text{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner d\Phi_\lambda[\phi] + \text{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner \underline{\mathcal{A}}^A \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\lambda[\phi]) \right] \\ &= \Phi_{\mathbb{T}_2\lambda}^{-1} \left[ \text{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner d\Phi_\lambda[\phi] + \mathcal{K}_{\text{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner \underline{\mathcal{A}}^A \triangleright t_A}(\Phi_\lambda[\phi]) \right] \\ &\equiv \Phi_{\mathbb{T}_2\lambda}^{-1} \left[ \text{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner d\Phi_\lambda[\phi] + \mathcal{K}_{\text{pr}_2 \circ \mathcal{A}(\text{Hor.}(\mathcal{X}))}(\Phi_\lambda[\phi]) \right] \\ &= \Phi_{\mathbb{T}_2\lambda}^{-1} \left[ \text{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner d\Phi_\lambda[\phi] \right] \equiv \nabla_{\mathcal{X}}^C \phi. \end{aligned}$$

□

Konstrukcje i wnioski z dotychczasowych naszych rozważań dotyczących różniczkowania cięć wiązek stowarzyszonych uogólniają się bez znaczących zmian na klasę wiązek produktowych  $\mathbb{P}_G^\Lambda E$  opisaną w Def. 135. Oto więc mamy

DEFINICJA 160. Przyjmijmy zapis Def. 94 i 155 oraz (dowodu) Stw. 215 i niechaj  $G$  będzie grupą Liego o algebrze Liego  $\mathfrak{g}$ , w której wybrano bazę  $\{t_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ , a  $(E, B, F, \pi_E)$  – wiązką włóknistą (klasy  $C^k$ ) nad bazą  $B$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^\times$ , z działaniem  $(C^k)$ -gładkim  $\Lambda : G \times E \rightarrow E$  grupy  $G$  opisanym w Def. 135 i indukującym działanie

$$\mathbb{T}_2\Lambda : G \times \mathbb{T}E \rightarrow \mathbb{T}E : (g, v) \mapsto \mathbb{T}_{\pi_{\mathbb{T}E}(v)}\Lambda_g(v),$$

które wyznaczają rodzinę automorfizmów  $\{(\mathbb{T}_2\Lambda_g, \text{id}_B)\}_{g \in G}$  wiązki  $(\mathbb{T}E, B, \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}F, \pi_E \circ \pi_{\mathbb{T}E})$ , opisaney w Stw. 219. Niech też  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  będzie wiązką główną nad bazą  $B$ , o potencjale powiązania głównego  $\underline{\mathcal{A}} \equiv \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A \in \Omega^1(\mathbb{P}_G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ . Dla dowolnego cięcia (globalnego)  $\phi \in \Gamma(\mathbb{P}_G^\Lambda E)$  określamy jego **pochodną**  $\Gamma(\text{Ad}\mathbb{P}_G)$ -kowariantną

$$\nabla^{\times A} \phi := (\text{id}_{\mathbb{T}^* \mathbb{P}_G} \otimes \Phi_{\mathbb{T}_2\Lambda}^{\times -1}) \circ (d\Phi_\Lambda^\times[\phi] + \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_{C^k(\mathbb{P}_G, \mathbb{R})} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\Lambda^\times[\phi])).$$

**Pochodna Crittendena na wiązce produktowej stowarzyszonej  $\mathbb{P}_G^\Lambda E$  nad  $B$  to odwzorowanie**

$$\begin{aligned} \nabla^{\times C} &: \Gamma(\mathbb{P}_G^\Lambda E) \times \Gamma(\mathbb{T}B) \rightarrow \Gamma(\mathbb{P}_G^{\mathbb{T}_2\Lambda} \mathbb{T}E) \\ &: (\phi, \mathcal{X}) \mapsto \Phi_{\mathbb{T}_2\Lambda}^{\times -1} \left[ \mathbb{T}(\Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \text{Hor.}(\mathcal{X}) \right], \end{aligned}$$

w którego zapisie

$$\mathbb{P}_G^{\mathbb{T}_2\Lambda} \mathbb{T}E \equiv (\mathbb{P}_{G \times_{\pi_{\mathbb{P}_G}} \times_{\pi_E \circ \pi_{\mathbb{T}E}}} \mathbb{T}E) / G$$

jest wiązką produktową stowarzyszoną otrzymaną – w procedurze określonej w Def. 135 – z produktu włóknistego  $P_G \times_B TE \equiv P_G \times_{\pi_{P_G} \times \pi_E \circ \pi_{TE}} TE$ .

▲

UWAGA 69. Dowód G-ekwiwariantności wyrażenia:  $d\Phi_\Lambda^\times[\phi] + \underline{A}^A \otimes_{C^k(P_G, \mathbb{R})} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\Lambda^\times[\phi])$  przebiega identycznie jak w przypadku pochodnej  $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -ekwiwariantnej na wiązce stowarzyszonej, patrz: dyskusja poprzedzającą Def. 158, i gwarantuje, że pochodna  $\nabla^{\times A} \phi$  jest dobrze określona. Taką ekwiwariantności wyrażenia  $\mathbb{T}(\Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \text{Hor.}(\mathcal{X})$  zapewnia zgodność powiązania na  $P_G$  z działaniem grupy strukturalnej oraz G-ekwiwariantny charakter odwzorowania  $\Phi_\Lambda^\times[\phi]$ , oto bowiem dla dowolnego  $g \in G$  zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \text{Hor.}(\mathcal{X}) \circ r_g &= \mathbb{T}(\Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \text{Tr}_g \circ \text{Hor.}(\mathcal{X}) \\ &= \mathbb{T}(\Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ r_g) \circ \text{Hor.}(\mathcal{X}) = \mathbb{T}(\Lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \text{Hor.}(\mathcal{X}) \\ &= \mathbb{T}\Lambda_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}(\Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \text{Hor.}(\mathcal{X}). \end{aligned}$$

Wobec przemienności diagramów

$$\begin{array}{ccc} \text{TP}_G & \xrightarrow{\mathbb{T}(\Phi_\Lambda^\times[\phi])} & TE \\ \pi_{\text{TP}_G} \downarrow & & \downarrow \pi_{TE} \\ P_G & \xrightarrow{\Phi_\Lambda^\times[\phi]} & E \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} P_G & \xrightarrow{\Phi_\Lambda^\times[\phi]} & E \\ \pi_{P_G} \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array}$$

tak określone odwzorowanie pomiędzy przestrzeniami totalnymi wiązek  $P_G$  i  $TE$  nad wspólną bazą  $B$  zachowuje przy tym włókna,

$$\begin{aligned} (\pi_E \circ \pi_{TE}) \circ \mathbb{T}(\Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \text{Hor.}(\mathcal{X}) &= \pi_E \circ \Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ \pi_{\text{TP}_G} \circ \text{Hor.}(\mathcal{X}) \\ &= \pi_{P_G} \circ \pi_{\text{TP}_G} \circ \text{Hor.}(\mathcal{X}) = \pi_{P_G}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika stąd, że  $\text{Hor.}(\mathcal{X})$  jest cięciem podwiązki poziomej  $\text{HP}_G \subset \text{TP}_G$ . Odwzorowanie to jest zatem w istocie G-ekwiwariantnym morfizmem wiązek. Wreszcie  $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -ekwiwariantny charakter pierwszej ze zdefiniowanych tu pochodnych weryfikujemy analogicznie jak poprzednio.

▭

STWIERDZENIE 246. *Przyjmijmy zapis Def. 160. Dla dowolnego cięcia (globalnego)  $\phi \in \Gamma(P_G^\Lambda E)$  i dowolnego pola wektorowego  $\mathcal{X} \in \Gamma(\text{TB})$  zachodzi tożsamość*

$$\nabla_{\mathcal{X}}^{\times C} \phi = \nabla_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}^{\times A} \phi.$$

■

*Dowód:* Analogiczny jak w przypadku Stw. 245.

□

## Naturalne konstrukcje

### 1. Geometryzacje konstrukcji liniowych

#### 1.1. Suma prosta wiązek wektorowych.

DEFINICJA 161. Przyjmijmy zapis Def. 130 i Przykł. 21 (1). **Suma Whitneya wiązek wektorowych**  $(V_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{V_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nad  $\mathbb{K}$ , o wspólnej bazie  $B$  to wiązka wektorowa

$$(V_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} V_2 \equiv V_1 \times_B V_2, B, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \mathbb{K}^{\times n_2} \equiv \mathbb{K}^{\times n_1 + n_2}, \pi_{V_1} \circ \text{pr}_1 \uparrow_{V_1 \times_B V_2}),$$

w której  $V_1 \times_B V_2$  jest produktem włóknistym rozmaiłości  $V_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  domykającym kopowłokę  $((\pi_{V_1}, \pi_{V_2}), B)$  do diagramu przemienneo

$$\begin{array}{ccc}
 & V_1 \times_B V_2 & \\
 \text{pr}_1 \uparrow_{V_1 \times_B V_2} & \swarrow & \searrow \text{pr}_2 \uparrow_{V_1 \times_B V_2} \\
 V_1 & & V_2 \\
 \pi_{V_1} \searrow & & \swarrow \pi_{V_2} \\
 & B & 
 \end{array}$$

i wyposażonym w strukturę podrozmaiłości gładko włożonej w rozmaiłość produktową  $V_1 \times V_2$ , zgodnie z tezą Tw. 1.4.24.

▲

Włókno sumy Whitneya nad dowolnym punktem bazy  $x \in B$  przyjmuje postać

$$(V_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} V_2)_x \equiv V_{1x} \oplus V_{2x},$$

stanowi więc suma Whitneya naturalną adaptację konstrukcji sumy prostej przestrzeni wektorowych do geometrycznej kategorii przestrzeni modelowanych lokalnie na produktach (elementów topologii) rozmaiłości różniczkowalnej z topologicznymi przestrzeniami wektorowymi  $\mathbb{K}^{\times n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Wiązkę tę można również opisać – w duchu Tw. 4.1.1 – w terminach danych lokalnych jej składników, tj. wspólnego pokrycia trywializującego  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  wiązek  $V_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  (otrzymanego np. poprzez wspólne rozdrobienie odnośnych pokryć trywializujących) wraz z określonymi dlań odwzorowaniami przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha)$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ . Odwzorowania przejścia sumy Whitneya obu wiązek, stowarzyszone z tym samym pokryciem trywializującym i stanowiące podstawę rekonstrukcji (klasy równoważności) wiązki  $V_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} V_2$ , to

$$g_{ij}^{1 \oplus 2} := g_{ij}^1 \oplus g_{ij}^2 : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(n_1) \oplus \text{GL}_{\mathbb{K}}(n_2) \subset \text{GL}_{\mathbb{K}}(n_1 + n_2).$$

Z sumą Whitneya wiązek wektorowych stowarzyszona jest para epimorfizmów wiązek wektorowych

$$\text{pr}_\alpha : \mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2 \rightarrow \mathbb{V}_\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\}$$

przyjmujących nad (dowolnym) punktem  $x \in B$  postać

$$\text{pr}_{\alpha x} : \mathbb{V}_{1x} \oplus \mathbb{V}_{2x} \rightarrow \mathbb{V}_{\alpha x} : (x, (v_1, v_2)) \mapsto (x, v_\alpha).$$

**STWIERDZENIE 247.** *Przyjmijmy zapis Def. 152 oraz 161 i niechaj  $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą wiązkami wektorowymi (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) o odnośnych powiązaniach Koszula  $\nabla^{\mathbb{K}(\alpha)}$  reprezentowanych w (lokalnych) bazach przestrzeni cięć  $\{\varepsilon_{a_\alpha}^{(i)(\alpha)}\}_{a_\alpha \in \overline{1, n_\alpha}}$  nad wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  przez 1-formy o wartościach macierzowych  $\Gamma_i^\alpha \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}(n_\alpha)$ . Powiązania  $\nabla^{\mathbb{K}(\alpha)}$  indukują na wiązce  $\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2$  powiązanie Koszula*

$$\nabla^{\mathbb{K}^\oplus} := \nabla^{\mathbb{K}(1)} \oplus \nabla^{\mathbb{K}(2)},$$

reprezentowane w (lokalnej) bazie

$$\{\varepsilon_{a_1}^{(i)\oplus} \equiv (\varepsilon_{a_1}^{(i)(1)}, \mathbf{0}_{\mathbb{V}_2 \upharpoonright \mathcal{O}_i}), \varepsilon_{n_1+a_2}^{(i)\oplus} \equiv (\mathbf{0}_{\mathbb{V}_1 \upharpoonright \mathcal{O}_i}, \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)})\}_{a_\alpha \in \overline{1, n_\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}}$$

nad pokryciem  $\mathcal{O}$  przez 1-formy o wartościach macierzowych

$$\Gamma_i^\oplus = \Gamma_i^1 \oplus \Gamma_i^2.$$

Jego krzywizna jest zatem dana wzorem

$$\text{curv}(\nabla^{\mathbb{K}^\oplus}) = \text{curv}(\nabla^{\mathbb{K}(1)}) + \text{curv}(\nabla^{\mathbb{K}(2)}).$$

■

*Dowód:* Jedyną (względnie) nieoczywistą pożądaną własnością operatora zdefiniowanego w treści dowodzonego stwierdzenia jest spełnianie przezeń tożsamości Leibniza, którą sprawdzamy bezpośrednio biorąc pod uwagę działanie  $\mathbb{K}$  na sumie prostej dane oczywistym wzorem:

$$\mathbb{L}_\lambda^\oplus \equiv \mathbb{L}_\lambda^1 \oplus \mathbb{L}_\lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

i licząc – dla dowolnego cięcia  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  wiązki  $\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2$  nad  $\mathcal{O}_i$  danego w postaci pary cięć lokalnych  $\sigma_\alpha \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  oraz dla dowolnej funkcji  $f \in C^k(B, \mathbb{K})$  –

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbb{K}^\oplus}(\mathbb{L}_f^\oplus(\sigma)) &= \nabla^{\mathbb{K}^\oplus}(\mathbb{L}_f^1(\sigma_1), \mathbb{L}_f^2(\sigma_2)) = (\nabla^{\mathbb{K}(1)}(\mathbb{L}_f^1(\sigma_1)), \nabla^{\mathbb{K}(2)}(\mathbb{L}_f^2(\sigma_2))) \\ &= (\text{df} \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma_1 + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^1)(\nabla^{\mathbb{K}(1)}\sigma_1), \text{df} \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma_2 \\ &\quad + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^2)(\nabla^{\mathbb{K}(2)}\sigma_2)) \\ &= (\text{df} \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma_1, \text{df} \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma_2) \\ &\quad + ((\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^1)(\nabla^{\mathbb{K}(1)}\sigma_1), (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^2)(\nabla^{\mathbb{K}(2)}\sigma_2)) \\ &\equiv \text{dx}^\mu \otimes_{C^\infty(B, \mathbb{R})} \mathbb{L}_{\partial_\mu f}^\oplus(\sigma) + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^\oplus)(\nabla^{\mathbb{K}^\oplus}\sigma), \end{aligned}$$

co (w połączeniu z oczywistymi własnościami powyższego operatora) przesądza o tym, że mamy w istocie do czynienia z pochodną Koszula. Postulowana postać symboli Christoffela we wskazanej (lokalnej) bazie przestrzeni cięć jest oczywistą

konsekwencją struktury  $\nabla^{K\oplus}$  oraz  $L^\oplus$  i implikuje wprost postać krzywizny powiązania indukowanego jak w treści stwierdzenia.  $\square$

### 1.2. Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych.

DEFINICJA 162. Przyjmijmy zapis Def. 41 i 130. **Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych**  $(V_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{V_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nad  $\mathbb{K}$ , o wspólnej bazie  $B$  i odnośnych odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha)$  stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  to dowolna wiązka wektorowa

$$(V_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} V_2, B, \mathbb{K}^{\times n_1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\times n_2} \cong \mathbb{K}^{\times n_1 \cdot n_2}, \pi_{V_1} \circ \mathrm{pr}_1)$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 4.1.1, z danych lokalnych

$$g_{ij}^{1 \otimes 2} := g_{ij}^1 \otimes g_{ij}^2 : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1) \otimes \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_2) \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1 \cdot n_2).$$

▲

Iloczyn tensorowy wiązek wektorowych można w szczególności utworzyć dokonując stosownej topologizacji sumy rozłącznej włókien nad punktami bazy  $B \ni x$ , wybierając je w postaci

$$(V_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} V_2)_x \cong V_{1x} \otimes_{\mathbb{K}} V_{2x}.$$

Mamy tu zatem do czynienia z naturalną adaptacją konstrukcji iloczynu tensorowego przestrzeni wektorowych.

PRZYKŁAD(Y) 44. **Wiązka tensorów typu  $(k, l)$**  nad rozmaitością różniczkowalną klasy  $C^{k+1}$   $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^\times$  to wiązka wektorowa rzędu  $n^{k+l}$  nad  $\mathbb{R}$  postaci

$$\mathcal{T}_l^k M := \underbrace{T^* M \otimes_{M, \mathbb{R}} T^* M \otimes_{M, \mathbb{R}} \cdots \otimes_{M, \mathbb{R}} T^* M \otimes_{M, \mathbb{R}}}_{k \text{ razy}} \underbrace{TM \otimes_{M, \mathbb{R}} TM \otimes_{M, \mathbb{R}} \cdots \otimes_{M, \mathbb{R}} TM}_{l \text{ razy}}.$$

Jej cięcia globalne określamy mianem **pól tensorowych typu  $(k, l)$**  na  $M$ . Dovolny dyfeomorfizm (klasy  $C^{k+1}$ )  $F : M_1 \rightarrow M_2$  pomiędzy dwiema rozmaitościami różniczkowalnymi (klasy  $C^{k+1}$ )  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  podnosi się do izomorfizmu  $\mathcal{T}_l^k M_2 \xrightarrow{\cong} \mathcal{T}_l^k M_1$  odnośnych wiązek tensorów typu  $(k, l)$ , który na przestrzeniach cięć realizuje się jako odwzorowanie

$$\begin{aligned} F_{(k,l)}^* & : \Gamma(\mathcal{T}_l^k M_2) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}_l^k M_1) \\ & : \mathcal{T} \mapsto \underbrace{(F^* \otimes F^* \otimes \cdots \otimes F^*)}_{k \text{ razy}} \otimes \underbrace{(F_*^{-1} \otimes F_*^{-1} \otimes \cdots \otimes F_*^{-1})}_{l \text{ razy}} \circ \mathcal{T}, \end{aligned}$$

przy czym skorzystaliśmy z zapisu Def. 72 oraz 81. Odwzorowanie to nazywamy **cofnięciem pola tensorów typu  $(k, l)$**  wzdłuż dyfeomorfizmu  $F$ .

✓

STWIERDZENIE 248. *Przyjmijmy zapis Def. 152 i 162 oraz Tw. 1.2.7 i niechaj  $(V_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{V_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą wiązkami wektorowymi (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) o odnośnych powiązaniach Koszula  $\nabla^{K(\alpha)}$  reprezentowanych w (lokalnych) bazach przestrzeni cięć  $\{\varepsilon_{a_\alpha}^{(i)(\alpha)}\}_{a_\alpha \in \overline{1, n_\alpha}}$  nad wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} =$*



$\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  przez 1-formy o wartościach macierzowych  $\Gamma_i^\alpha \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}(n_\alpha)$ .  
Powiązania  $\nabla^{\mathbb{K}(\alpha)}$  indukują na wiązce  $V_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} V_2$  powiązanie Koszula

$$\nabla^{\mathbb{K}^\otimes} := \nabla^{\mathbb{K}(1)} \otimes \text{id}_{V_2} + (\text{id}_{V_1} \otimes \nabla^{\mathbb{K}(2)}) \circ (\sigma_{\mathbb{T}B, V_1} \otimes \text{id}_{V_2}),$$

reprezentowane w (lokalnej) bazie

$$\left\{ \varepsilon_{(a_1, a_2)}^{(i) \otimes} \equiv \varepsilon_{a_1}^{(i)(1)} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)} \right\}_{a_\alpha \in \overline{1, n_\alpha}, \alpha \in \{1, 2\}}$$

nad pokryciem  $\mathcal{O}$  przez 1-formy o wartościach macierzowych

$$\Gamma_i^\otimes = \Gamma_i^1 \otimes \mathbf{1}_{n_2} + dx^\mu \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} (\mathbf{1}_{n_1} \otimes \partial_\mu \lrcorner \Gamma_i^2).$$

Jego krzywizna jest zatem dana wzorem

$$\text{curv}(\nabla^{\mathbb{K}^\otimes}) = \text{curv}(\nabla^{\mathbb{K}(1)}) + \text{curv}(\nabla^{\mathbb{K}(2)}).$$

■

Dowód: Uwzględnivszy postać działania  $\mathbb{K}$  na iloczynie tensorowym:

$$\mathbb{L}_\lambda^\otimes \equiv \mathbb{L}_\lambda^1 \otimes \text{id}_{V_2} \equiv \text{id}_{V_1} \otimes \mathbb{L}_\lambda^2,$$

obliczamy – dla dowolnego cięcia prostego  $\sigma = \sigma_1 \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \sigma_2$  wiązki  $V_1 \otimes_{\mathbb{K}, B} V_2$  nad  $\mathcal{O}_i$  utworzonego z cięć lokalnych  $\sigma_\alpha \in \Gamma_{\text{loc}}(V_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  oraz dla dowolnej funkcji  $f \in C^k(B, \mathbb{K})$  –

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathbb{K}^\otimes}(\mathbb{L}_f^\otimes(\sigma)) &= \nabla^{\mathbb{K}^\otimes}(\mathbb{L}_f^1(\sigma_1) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \sigma_2) \\ &= \nabla^{\mathbb{K}(1)}(\mathbb{L}_f^1(\sigma_1)) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \sigma_2 \\ &\quad + (\sigma_{\mathbb{T}^*B, V_1} \otimes \text{id}_{V_2})(\mathbb{L}_f^1(\sigma_1) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \nabla^{\mathbb{K}(2)} \sigma_2) \\ &= df \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} (\sigma_1 \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \sigma_2) \\ &\quad + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^1 \otimes \text{id}_{V_2})(\nabla^{\mathbb{K}(1)} \sigma_1 \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \sigma_2) \\ &\quad + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^1 \otimes \text{id}_{V_2}) \circ (\sigma_{\mathbb{T}^*B, V_1} \otimes \text{id}_{V_2})(\sigma_1 \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \nabla^{\mathbb{K}(2)} \sigma_2) \\ &\equiv df \otimes_{C^k(B, \mathbb{R})} \sigma + (\text{id}_{\mathbb{T}^*B} \otimes \mathbb{L}_f^\otimes)(\nabla^{\mathbb{K}^\otimes} \sigma), \end{aligned}$$

co jest pożądaną tożsamością. Na koniec wyznaczamy symbole Christoffela  $\Gamma_{i\mu(a_1, a_2)}^{\otimes(b_1, b_2)}$  w bazie wskazanej w treści dowodzonego stwierdzenia,

$$\begin{aligned} &\mathbb{L}_{\Gamma_{i\mu(a_1, a_2)}^{\otimes(b_1, b_2)}}^{\otimes}(\varepsilon_{(a_1, a_2)}^{(i) \otimes}) \equiv \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}^\otimes}(\varepsilon_{a_1}^{(i)(1)} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)}) \\ &= \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(1)} \varepsilon_{a_1}^{(i)(1)} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)} + \varepsilon_{a_1}^{(i)(1)} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \nabla_{\partial_\mu}^{\mathbb{K}(2)} \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)} \\ &= \mathbb{L}_{\Gamma_{i\mu a_1}^{(1) b_1}}^1(\varepsilon_{b_1}^{(i)(1)}) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \varepsilon_{a_2}^{(i)(2)} + \varepsilon_{a_1}^{(i)(1)} \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{K})} \mathbb{L}_{\Gamma_{i\mu a_2}^{(2) b_2}}^1(\varepsilon_{b_2}^{(i)(2)}) \\ &= \mathbb{L}_{\Gamma_{i\mu a_1}^{(1) b_1} \delta_{a_2}^{b_2} + \delta_{a_1}^{b_1} \Gamma_{i\mu a_2}^{(2) b_2}}^{\otimes}(\varepsilon_{(b_1, b_2)}^{(i) \otimes}), \end{aligned}$$

a stąd już bezpośrednio wynika postulowana postać krzywizny powiązania indukowanego. □

### 1.3. Wiązka homomorfizmów i wiązka dualna.

DEFINICJA 163. Przyjmijmy zapis Def. 130 oraz Stw. 30. **Wiązka homomorfizmów** (zwana także **wiązką Hom**) wiązek wektorowych  $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nad  $\mathbb{K}$ , o wspólnej bazie  $B$  i odnośnych odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha)$  stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  to dowolna wiązka wektorowa

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}, B}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2), B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \cong \mathbb{K}^{\times n_1 \cdot n_2}, \pi_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)})$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 4.1.1, z danych lokalnych

$$\begin{aligned} g_{ij}^{1 \rightarrow 2} &:= \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_2}, g_{ij}^2(\cdot)) \circ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(g_{ij}^1(\cdot)^{-1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \\ &: \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2})), \end{aligned}$$

zapisanych w terminach odwzorowań  $\mathbb{K}$ -liniowych, które w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  przyjmują postać – odpowiednio –

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(g_{ij}^1(x)^{-1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) &: \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \curvearrowright \\ &: \chi \mapsto \chi \circ g_{ij}^1(x)^{-1}, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_2}, g_{ij}^2(x)) &: \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1}, \mathbb{K}^{\times n_2}) \curvearrowright \\ &: \chi \mapsto g_{ij}^2(x) \circ \chi. \end{aligned}$$

▲

Włókno wiązki homomorfizmów nad dowolnym punktem bazy  $x \in B$  jest postaci

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)_x \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_{1x}, \mathbb{V}_{2x}),$$

mamy przeto do czynienia z naturalną adaptacją konstrukcji przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej homomorfizmów między (ustalonymi) przestrzeniami wektorowymi.

DEFINICJA 164. Przyjmijmy zapis Def. 163. **Wiązka dualna** (zwana także **wiązką dwoistą**) wiązki wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  to wiązka wektorowa (o oczywistym rzucie na bazę)

$$(\mathbb{V}^* \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}, B}(\mathbb{V}, B \times \mathbb{K}), B, \mathbb{K}^{\times n^*} \cong \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}^*}),$$

w której definicji  $(B \times \mathbb{K}, B, \mathbb{K}, \mathrm{pr}_1)$  jest trywialną wiązką wektorową rzędu 1 nad  $\mathbb{K}$ .

▲

STWIERDZENIE 249. Przyjmijmy zapis Def. 152 oraz 164 i niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową (nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) o powiązaniu Koszula  $\nabla^{\mathbb{K}}$  reprezentowaną w (lokalnej) bazie przestrzeni cięć  $\{\varepsilon_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1, n}}$  nad pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  przez 1-formy o wartościach macierzowych  $\Gamma_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})} \mathbb{K}(n)$ . Powiązanie  $\nabla^{\mathbb{K}}$  indukuje na wiązce dualnej  $\mathbb{V}^*$  powiązanie Koszula zadane formułą

$$\nabla_{\mathbb{V}^*}^{\mathbb{K}} \sigma^* = \mathcal{V} \circ \sigma^* - \sigma^* \circ \nabla_{\mathbb{V}}^{\mathbb{K}}, \quad \sigma^* \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathbb{V}^*),$$

w której zapisie pole wektorowe  $\mathcal{V} \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{T}B)$  jest traktowane jako różniczkowanie algebry funkcji lokalnie gładkich  $\Gamma_{\text{loc}}(B \times \mathbb{K})$ , a cięcie  $\sigma^*$  – jako rodzina form liniowych gładko parametryzowana przez punkty w swej dziedzinie. Niechaj  $\{\varepsilon_a^{(i)*}\}_{a \in \overline{1, n}}$  będzie (lokalną) bazą dualną względem  $\{\varepsilon_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1, n}}$  w rozumieniu relacji

$$\forall_{a, b \in \overline{1, n}} : \left\langle \varepsilon_a^{(i)*}(\cdot), \varepsilon_b^{(i)}(\cdot) \right\rangle = \delta_{ab},$$

w której  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  jest standardową ewaluacją formy na wektorze. Powyższe powiązanie Koszula jest reprezentowane w tejże (lokalnej) bazie dualnej nad pokryciem  $\mathcal{O}$  przez 1-formy o wartościach macierzowych

$$\Gamma_i^* = -\Gamma_i^{\text{T}},$$

gdzie górny indeks  $\text{T}$  symbolizuje transpozycję czynnika macierzowego. Krzywizna tego powiązania jest zatem dana wzorem

$$\text{curv}(\nabla^{\text{K}*}) = -\text{curv}(\nabla^{\text{K}}).$$

■

*Dowód:* Tożsamość Leibniza jest tutaj pochodną analogicznej tożsamości spełnianej przez różniczkowanie  $\mathcal{V}$ , oto bowiem dla dowolnej funkcji  $f \in C^k(B, \mathbb{K})$  obliczamy

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{V}}^{\text{K}*}(\mathbb{L}_f(\sigma^*)) &= \mathcal{V} \circ \mathbb{L}_f(\sigma^*) - \mathbb{L}_f(\sigma^*) \circ \nabla_{\mathcal{V}}^{\text{K}} \\ &= \mathbb{L}_{\mathcal{V}(f)}(\sigma^*) + \mathbb{L}_f(\mathcal{V} \circ \sigma^*) - \mathbb{L}_f(\sigma^*) \circ \nabla_{\mathcal{V}}^{\text{K}} \\ &\equiv \mathbb{L}_{\mathcal{V}(f)}(\sigma^*) + \mathbb{L}_f(\nabla_{\mathcal{V}}^{\text{K}*} \sigma^*). \end{aligned}$$

Postać symboli ustala rachunek

$$\begin{aligned} \Gamma_{i\mu a}^{*b} &= \left\langle \mathbb{L}_{\Gamma_{i\mu a}^{*c}}(\varepsilon_c^{(i)*})(\cdot), \varepsilon_b^{(i)}(\cdot) \right\rangle \equiv \left\langle \nabla_{\partial_\mu}^{\text{K}*}(\varepsilon_a^{(i)*})(\cdot), \varepsilon_b^{(i)}(\cdot) \right\rangle \\ &= \partial_\mu \left\langle \varepsilon_a^{(i)*}(\cdot), \varepsilon_b^{(i)}(\cdot) \right\rangle - \left\langle \varepsilon_a^{(i)*}(\cdot), \nabla_{\partial_\mu}^{\text{K}} \varepsilon_b^{(i)}(\cdot) \right\rangle \\ &= \partial_\mu \delta_{ab} - \left\langle \varepsilon_a^{(i)*}(\cdot), \mathbb{L}_{\Gamma_{i\mu b}^c}(\varepsilon_c^{(i)})(\cdot) \right\rangle = -\Gamma_{i\mu b}^c \delta_{ac} = -\Gamma_{i\mu b}^a, \end{aligned}$$

a wypisana formuła na krzywiznę jest jego trywialną konsekwencją. □

UWAGA 70. Konstrukcje i stwierdzenia przedstawione w poprzednich rozdziałach otwierają drogę ku naturalnej indukcji powiązania  $\mathbb{K}$ -liniowego na wiązkach homomorfizmów  $\text{Hom}_{\mathbb{K}, B}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$  na gruncie oczywistego izomorfizmu

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}, B}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2) \cong \mathbb{V}_1^* \otimes_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}_2,$$

por.: Równ. (1.2.26).

□

#### 1.4. Wiązka wyznacznikowa.

DEFINICJA 165. Przyjmijmy zapis Def. 20 i 130. **Wiązka wyznacznikowa wiązki wektorowej**  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  (nad  $\mathbb{K}$ ) o bazie  $B$  i odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{K}}(n)$  stowarzyszonych z pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  to dowolna wiązka wektorowa

$$(\det \mathbb{V}, B, \mathbb{K}, \pi_{\det \mathbb{V}})$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 4.1.1, z danych lokalnych

$$g_{ij}^{\det} := \det_{(n)} \circ g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

▲

Wiązkę wyznacznikową otrzymujemy chociażby w procedurze topologizacji sumy rozłącznej nad bazą  $B \ni x$  włókien postaci

$$(\det V)_x \equiv \bigwedge^n V_x^*,$$

w zgodzie z interpretacją tejże wiązki jako geometryzacji konstrukcji wyznacznika na przestrzeni wektorowej.

### 1.5. Wiązka cofnięta.

DEFINICJA 166. Przyjmijmy zapis Def.

▲

STWIERDZENIE 250. ■

## 2. Redukcja wiązki głównej

DEFINICJA 167. Przyjmijmy zapis Def. 132 i niechaj  $G, H$  będą grupami topologicznymi (wzgl. Liego), dla których określony jest monomorfizmem grup topologicznych (wzgl. Liego)

$$\check{\varphi} : H \rightarrow G.$$

**Redukcja wiązki głównej** wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  (zwana także **redukcją grupy strukturalnej**) **wzdłuż monomorfizmu**  $\check{\varphi}$  to para

$$((P_H, B, H, \pi_{P_H}), (\Phi, \text{id}_B, \check{\varphi}))$$

złożona z

- wiązki głównej  $(P_H, B, H, \pi_{P_H})$ ;
- morfizmu wiązek głównych

$$(\Phi, \text{id}_B, \check{\varphi}) : (P_H, B, H, \pi_{P_H}) \longrightarrow (P_G, B, G, \pi_{P_G}),$$

którego wszystkie składowe są zanurzeniami topologicznymi (wzgl. włożeniami) w rozumieniu Def. 55 (wzgl. Def. 82).

Wyznaczaną przezeń podwiązkę

$$(\Phi(P_H), B, \check{\varphi}(H), \pi_{\Phi(P_H)} \equiv \pi_{P_G} \upharpoonright_{\Phi(P_H)})$$

określamy mianem **wiązki głównej zredukowanej**.

▲

**TWIERDZENIE 4.3.1.** *Przyjmijmy zapis Def. 167. Redukcja wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż monomorfizmu  $\check{\varphi}$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące tejże wiązki i stowarzyszone z nim jej trywializacje lokalne, dla których odwzorowania przejścia przyjmują wartości w podgrupie  $\check{\varphi}(H) \subset G$ . W takiej sytuacji mówimy, że grupa strukturalna  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  jest **redukowalna** do  $\check{\varphi}(H)$ .*

■

*Dowód:* Załóżmy na początku, że istnieje wiązka  $(P_H, B, H, \pi_{P_H})$  i wyznaczona przez nią podwiązka  $(\Phi(P_H), B, \check{\varphi}(H), \pi_{\Phi(P_H)})$ . Wybierzmy pokrycie trywializujące tej ostatniej,  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , a wraz z nim – odnośne trywializacje lokalne  $\tau_i^{\check{\varphi}(H)} : \pi_{\Phi(P_H)}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \check{\varphi}(H)$  o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^{\check{\varphi}(H)} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \check{\varphi}(H)$ . Następnie zdefiniujmy odwzorowania (jawnie ciągłe wzgl. gładkie)

$$\tau_i^G : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times G : p \longmapsto (\pi_{P_G}(p), \phi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{P_G}(p), e_G), p)).$$

W świetle Stw. 199 odwzorowania te są G-ekwiwariantne. Bez trudu konstruujemy ich odwrotności:

$$\tau_i^{G-1} : \mathcal{O}_i \times G \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) : (x, g) \longmapsto \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g,$$

upewniwszy się, że wobec relacji  $\pi_{\Phi(P_H)}^{-1}(\mathcal{O}_i) \subset \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)$  zachodzą równości:

$$\tau_i^{G-1} \circ \tau_i^G(p) = \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{P_G}(p), e_G) \triangleleft_{P_G} \phi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{P_G}(p), e_G), p) \equiv p$$

oraz

$$\begin{aligned} \tau_i^G \circ \tau_i^{G-1}(x, g) &= \tau_i^G(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g) \\ &= (\pi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g), \phi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g), e_G), \\ &\quad \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g)) \\ &= (\pi_{P_G} \circ \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), \phi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{P_G} \circ \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), e_G), \\ &\quad \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g)) \\ &= (x, \phi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g)) \equiv (x, g). \end{aligned}$$

Są to zatem trywializacje lokalne wiązki  $P_G$ , a przy tym odnośne odwzorowania przejścia, wyznaczone w rachunku bezpośrednim:

$$\begin{aligned} \tau_i^G \circ \tau_j^{G-1}(x, g) &= \tau_i^G(\tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g) \\ &= (\pi_{P_G}(\tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g), \phi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{P_G}(\tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g), e_G), \\ &\quad \tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g)) \\ &= (x, \phi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), \tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} g)) \\ &= (x, \phi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, g_{ij}^{\check{\varphi}(H)}(x)) \triangleleft_{P_G} g)) \\ &= (x, \phi_{P_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{P_G} (g_{ij}^{\check{\varphi}(H)}(x) \cdot_G g))) \\ &= (x, g_{ij}^{\check{\varphi}(H)}(x) \cdot_G g), \end{aligned}$$

należą do  $\check{\varphi}(H) \subset G$ .

I odwrotnie, niechaj  $\tau_i^G : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$  będą trywializacjami lokalnymi wiązki  $P_G$ , stowarzyszonymi z pokryciem  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^{(H)} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \check{\varphi}(H) \subset G$ . W świetle Stw. 1 możemy jednoznacznie

zdefiniować odwzorowania

$$h_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

narzucając warunki

$$\check{\varphi} \circ h_{ij} = g_{ij}^{(\mathbb{H})}.$$

Dla dowolnych  $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}$  zachodzi tożsamość

$$\check{\varphi} \circ (h_{jk} \cdot \text{Inv} \circ h_{ik} \cdot h_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = (g_{jk}^{(\mathbb{H})} \cdot \text{Inv} \circ g_{ik}^{(\mathbb{H})} \cdot g_{ij}^{(\mathbb{H})}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_G,$$

z której wobec monomorficznego charakteru  $\check{\varphi}$  wynika warunek 1-kocyklu

$$(h_{jk} \cdot \text{Inv} \circ h_{ik} \cdot h_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\mathbb{H}}.$$

Możemy zatem przywołać Tw. 4.1.1 i zrekonstruować nad  $\mathcal{O}$  wiązkę główną  $(P_{\mathbb{H}}, B, \mathbb{H}, [\text{pr}_1])$  o grupie strukturalnej  $\mathbb{H}$ , przestrzeni totalnej

$$P_{\mathbb{H}} \equiv \left( \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{H}) \right) / \sim_{h..}$$

i odwzorowaniach przejścia  $h_{ij}$  stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi  $[\tau_i]$  zdefiniowanymi w dowodzie rzeczzonego twierdzenia. Wykorzystując te homeomorfizmy (wzgl. dyfeomorfizmy) oraz ich odpowiedniki  $\tau_i^G$  na  $P_G$  w połączeniu z zanurzeniami topologicznymi (wzgl. włożeniami)  $\check{\varphi}$ , określamy lokalne zanurzenia topologiczne (wzgl. włożenia)

$$\Phi_i : [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \mathbb{H} \xrightarrow{\text{id}_B \times \check{\varphi}} \mathcal{O}_i \times G \xrightarrow{\tau_i^{G-1}} \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I,$$

odwzorowujące włókna  $P_{\mathbb{H}}$  we włókna  $P_G$  w sposób ewidentnie  $\mathbb{H}$ -ekwiwariantny (wszak  $\check{\varphi}$  jest homomorfizmem grup). Pozostaje zatem upewnić się, że zanurzenia te są ograniczeniami (do elementów pokrycia trywializującego) zadanego globalnie morfizmu wiązek głównych, co czynimy w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym nad dowolnym punktem  $[(x, i, h)] \in [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_j([(x, i, h)]) &\equiv \tau_j^{G-1} \circ (\text{id}_B \times \check{\varphi}) \circ [\tau_j]([(x, i, h)]) \\ &= \tau_j^{G-1} \circ (\text{id}_B \times \check{\varphi}) \circ [\tau_j]([(x, j, h_{ji}(x) \cdot_{\mathbb{H}} h)]) = \tau_j^{G-1}(x, \check{\varphi}(h_{ji}(x) \cdot_{\mathbb{H}} h)) \\ &= \tau_j^{G-1}(x, \check{\varphi} \circ h_{ji}(x) \cdot_G \check{\varphi}(h)) = \tau_j^{G-1}(x, g_{ji}^{(\mathbb{H})}(x) \cdot_G \check{\varphi}(h)) = \tau_i^{G-1}(x, \check{\varphi}(h)) \\ &\equiv \Phi_i([(x, i, h)]). \end{aligned}$$

□

### 3. Prolongacja wiązki głównej

DEFINICJA 168. Przyjmijmy zapis Def. 132 i niechaj  $\Gamma$  będzie grupą dyskretną,  $G, \widehat{G}$  zaś – grupami topologicznymi (wzgl. Liego), dla których określony jest krótki ciąg dokładny grup

$$\mathbf{1} \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\mathcal{J}_\Gamma} \widehat{G} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} G \longrightarrow \mathbf{1}$$

czyniący z trójki  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \widehat{\varphi})$  dyskretne rozszerzenie centralne grupy  $G$  przez grupę  $\Gamma$  w rozumieniu Def. 53, przy czym zakładamy, że epimorfizm  $\widehat{\varphi}$  jest nakryciem

topologicznym (wzgl. dodatkowo też submersją odpowiedniej klasy gładkości) w rozumieniu Def. 60. **Prolongacją wiązki głównej**  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  **wzdłuż rozszerzenia centralnego**  $(\widehat{G}, \mathcal{I}_\Gamma, \varphi)$  (albo  $\widehat{G}$ -strukturą na wiązce głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$ ) nazywamy parę

$$((P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}}), (\Phi, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$$

złożoną z

- wiązki głównej  $(P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}})$ ;
- morfizmu wiązek głównych

$$(\Phi, \text{id}_B, \widehat{\varphi}) : (P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}}) \longrightarrow (P_G, B, G, \pi_{P_G}).$$

Prolongacje  $((P_{\widehat{G}}^\alpha, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^\alpha}), (\Phi_\alpha, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nazywamy **równoważnymi**, ilekroć istnieje izomorfizm wiązek głównych

$$(\Psi, \text{id}_B, \text{id}_{\widehat{G}}) : (P_{\widehat{G}}^1, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^1}) \xrightarrow{\cong} (P_{\widehat{G}}^2, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^2}).$$

▲

**TWIERDZENIE 4.3.2.** *Przyjmijmy zapis Def. 168. Prolongacja wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{I}_\Gamma, \varphi)$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy tejże wiązki, z którym stowarzyszona jest rodzina odwzorowań lokalnie ciągłych (wzgl. gładkich klasy  $C^k$ )*

$$\widehat{\gamma}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{G}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

o własnościach – zapisanych dla dowolnych  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  –

$$\widehat{\gamma}_{ji} = \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij}$$

oraz

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij},$$

gdzie  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$  są odwzorowaniami przejścia wiązki  $P_G$  stowarzyszonymi z pokryciem  $\mathcal{O}$ , i takich, dla których są określone odwzorowania lokalnie stałe

$$\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma(\Gamma), \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

spełniające warunki:

$$\forall_{i \in I} : \gamma_{ii} = e_{\widehat{G}}, \quad \forall_{(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}} : \gamma_{ji} = \text{Inv} \circ \gamma_{ij}$$

oraz

$$\forall_{(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}} : (\widehat{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = (\gamma_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}}.$$

■

**Dowód:** Załóżmy, że istnieje prolongacja  $((P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}}), (\Phi, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$  wiązki  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  i oznaczmy jako  $\widehat{r}$ . (wzgl.  $r$ .) działanie definiujące grupy strukturalnej  $\widehat{G}$  (wzgl.  $G$ ) na pierwszej (wzgl. drugiej) z tych wiązek. Wybrawszy trywializacje lokalne:  $\widehat{\tau}_i : \pi_{P_{\widehat{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \widehat{G}$  o odwzorowaniach przejścia  $\widehat{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{G}$  (dla wiązki  $P_{\widehat{G}}$ ) oraz  $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times G$  o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$  (dla wiązki  $P_G$ ), stowarzyszamy z morfizmem  $\Phi$  jego dane lokalne

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow G, \quad i \in I,$$

które w analogii do (dowodu) Tw. 4.1.3 definiujemy, jak następuje:

$$\tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) =: (x, h_i(x)), \quad x \in \mathcal{O}_i.$$

Powyższa definicja prowadzi do tożsamości, zapisanej dla dowolnego elementu  $g \in \widehat{G}$ , a wynikającej z  $\widehat{G}$ -ekwiwariantności  $\widehat{\tau}_i$  i  $\Phi$  oraz  $G$ -ekwiwariantności  $\tau_i$ ,

$$\begin{aligned} \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, g) &\equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{r}_g \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) = \tau_i \circ r_{\widehat{\varphi}(g)} \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) \\ &= (\text{id}_B \times \wp_{\widehat{\varphi}(g)}^G) \circ \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) \equiv (\text{id}_B \times \wp_{\widehat{\varphi}(g)}^G)(x, h_i(x)) \\ &= (x, h_i(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(g)), \end{aligned}$$

na podstawie której bez trudu wyprowadzamy związek pomiędzy odwzorowaniami przejścia obu wiązek (nad  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ ),

$$\begin{aligned} (x, h_i(x) \cdot_G \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}(x)) &\equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, \widehat{g}_{ij}(x)) \equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1} \circ (\widehat{\tau}_i \circ \widehat{\tau}_j^{-1})(x, e_{\widehat{G}}) \\ &= \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_j(x, e_{\widehat{G}}) = (\tau_i \circ \tau_j^{-1}) \circ \tau_j \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_j(x, e_{\widehat{G}}) \\ &= \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, h_j(x)) = (x, g_{ij}(x) \cdot_G h_j(x)), \end{aligned}$$

czyli

$$(4.3.1) \quad \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}(x) = h_i(x)^{-1} \cdot_G g_{ij}(x) \cdot_G h_j(x).$$

Ustalmy dowolne ciągle (wzgl. gładkie) przeciwobrazy  $\widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{G}$  odwzorowań  $h_i$ ,

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{h}_i = h_i, \quad i \in I.$$

Ich istnienie gwarantuje sama definicja nakrycia (wzgl. Stw. 116), która zapewnia, że każdy punkt w  $G$  ma pewne (spójne) otoczenie otwarte równomiernie pokryte przez  $\widehat{\varphi}$  (wzgl. takie, na którym jest określone gładkie cięcie lokalne), zatem możemy zawsze tak dobrać (rozdrobnic) pokrycie trywializujące  $\mathcal{O}$ , iżby ciągle obrazy jego elementów względem odwzorowań  $h_i$  zawierały się w rzeczonych otoczeniach elementów grupy  $G$ . Wybór przeciwobrazów  $\widehat{h}_i$  pozwala nam przepisać wyprowadzoną wcześniej relację w postaci

$$\widehat{\varphi}(\widehat{h}_i(x) \cdot_G \widehat{g}_{ij}(x) \cdot_G \widehat{h}_j(x)^{-1}) = g_{ij}(x),$$

z której jasno wynika, że odwzorowania (lokalnie) ciągle (wzgl. gładkie)

$$(4.3.2) \quad \widehat{\gamma}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G} : x \mapsto \widehat{h}_i(x) \cdot_G \widehat{g}_{ij}(x) \cdot_G \widehat{h}_j(x)^{-1}$$

spełniają warunki wymienione w tezie dowodzonego twierdzenia przy wyborze

$$\forall_{(i,j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}}} : \gamma_{ij} = e_{\widehat{G}} \in \mathcal{J}\Gamma(\Gamma).$$

Odwracając tok rozumowania, przyjmijmy, że dane są trywializacje lokalne  $\tau_i^G : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$  wiązki  $\mathbb{P}_G$  o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$ ,  $(i, j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}}$  wraz ze stowarzyszonymi z nimi odwzorowaniami  $\widehat{\gamma}_{ij}$  oraz  $\gamma_{ij}$  jak w tezie twierdzenia, a wtedy możemy zdefiniować odwzorowania

$$(4.3.3) \quad \widetilde{\gamma}_{ij} := \widehat{\gamma}_{ij} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ij} \equiv \widehat{\gamma}_{ij} \cdot \gamma_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}, \quad (i, j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}}$$

które wobec relacji  $\text{Ker } \widehat{\varphi} = \mathcal{J}\Gamma(\Gamma)$  spełniają tożsamości

$$\widehat{\varphi} \circ \widetilde{\gamma}_{ij} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij},$$



a nadto – w konsekwencji inkluzji  $\mathcal{J}_\Gamma(\Gamma) \subset \mathcal{L}^\circ(\widehat{G})$  – także

$$\begin{aligned} (\widetilde{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widetilde{\gamma}_{ik} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} &= (\widehat{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \cdot \text{Inv} \circ (\gamma_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \\ &= e_{\widehat{G}}, \end{aligned}$$

Rodzina  $\{\widetilde{\gamma}_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset}$  definiuje przeto – na mocy Tw. 4.1.1 – wiązkę główną  $(P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, [\text{pr}_1])$  o grupie strukturalnej  $\widehat{G}$ , przestrzeni totalnej

$$P_{\widehat{G}} \equiv \left( \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \widehat{G}) \right) / \sim_{\widetilde{\gamma}_\cdot}$$

i odwzorowaniach przejścia  $\widetilde{\gamma}_{ij}$  stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi  $[\tau_i]$  zdefiniowanymi w dowodzie tegoż twierdzenia. Na rozmaitości  $P_{\widehat{G}}$  możemy przy tym określić odwzorowania lokalnie ciągle (wzgl. gładkie)

$$\Phi_i : [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \widehat{G} \xrightarrow{\text{id}_B \times \widehat{\varphi}} \mathcal{O}_i \times G \xrightarrow{\tau_i^{G^{-1}}} \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I,$$

odwzorowujące włókna  $P_{\widehat{G}}$  we włókna  $P_G$  w sposób jawnie  $\widehat{G}$ -ekwiwariantny, o czym przekonujemy się nad dowolnym punktem  $x \in \mathcal{O}_i$  i dla dowolnych elementów  $\widehat{g}, \widehat{h} \in \widehat{G}$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_i([[(x, i, \widehat{g})] \triangleleft_{P_{\widehat{G}}} \widehat{h}]) &= \Phi_i([[(x, i, \widehat{g} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h})]]) = \tau_i^{G^{-1}}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h})) \\ &= \tau_i^{G^{-1}}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h})) = \tau_i^{G^{-1}}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \triangleleft_{P_G} \varphi(\widehat{h}) \\ &\equiv \Phi_i([[(x, i, \widehat{g})]]) \triangleleft_{P_G} \varphi(\widehat{h}). \end{aligned}$$

Łatwo przekonujemy się, że odwzorowania te określają odwzorowanie globalnie ciągle (wzgl. gładkie)

$$\Phi : P_{\widehat{G}} \longrightarrow P_G$$

o ograniczeniach

$$\Phi \upharpoonright_{[\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i,$$

albowiem dla dowolnych  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  i  $\widehat{g} \in \widehat{G}$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} \Phi_j([[(x, i, \widehat{g})]]) &= \Phi_j([[(x, j, \widetilde{g}_{ji}(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g})]]) \equiv \tau_j^{G^{-1}}(x, \widehat{\varphi} \circ \widetilde{g}_{ji}(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\ &= \tau_j^{G^{-1}}(x, g_{ji}(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) = \tau_i^{G^{-1}}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \equiv \Phi_i([[(x, i, \widehat{g})]]). \end{aligned}$$

Jest zatem  $\Phi$  postulowanym morfizmem wiązek głównych.  $\square$

UWAGA 71. Zauważmy, że każda rodzina odwzorowań  $\{\widehat{\gamma}_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset}$  o własnościach

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset} : \left( \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij} \quad \wedge \quad \widehat{\gamma}_{ji} = \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij} \right)$$

oraz

$$\forall_{i \in I} : \widehat{\gamma}_{ii} = e_{\widehat{G}}$$

spełnia – dla dowolnych  $(i, j, k) \in (I \times 3)_\emptyset$  – warunki

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} \circ (\widehat{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} &= (\widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{jk}) \cdot (\widehat{\varphi} \circ \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik}) \cdot (\widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \\ &= g_{jk} \cdot \text{Inv} \circ g_{ik} \cdot g_{ij} = e_G, \end{aligned}$$

które wobec założeń poczynionych w odniesieniu do epimorfizmu  $\widehat{\varphi}$  implikują

$$\forall_{(i,j,k) \in (I^{\times 3})_{\mathcal{O}}} : \widehat{w}_{ijk} := \widehat{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij} : \mathcal{O}_{ijk} \longrightarrow \text{Ker } \widehat{\varphi} = \text{Im } \mathcal{J}_{\Gamma} \equiv \mathcal{J}_{\Gamma}(\Gamma).$$

Z racji inkluzji  $\mathcal{J}_{\Gamma}(\Gamma) \subset \mathcal{L}(\widehat{G})$  otrzymujemy zatem – dla dowolnych  $(i, j, k, l) \in (I^{\times 4})_{\mathcal{O}}$  – tożsamość

$$\begin{aligned} \check{\delta} \widehat{w}_{ijkl} &:= (\widehat{w}_{jkl} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{w}_{ikl}) \cdot \widehat{w}_{ijl} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{w}_{ijk})) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &\equiv ((\widehat{\gamma}_{kl} \cdot \widehat{\gamma}_{lj} \cdot \widehat{\gamma}_{jk}) \cdot (\widehat{\gamma}_{ki} \cdot \widehat{\gamma}_{il} \cdot \widehat{\gamma}_{lk}) \cdot (\widehat{\gamma}_{jl} \cdot \widehat{\gamma}_{li} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \cdot (\widehat{\gamma}_{ji} \cdot \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{kj})) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &= ((\widehat{\gamma}_{ki} \cdot \widehat{\gamma}_{il} \cdot \widehat{\gamma}_{lk}) \cdot (\widehat{\gamma}_{kl} \cdot \widehat{\gamma}_{lj} \cdot \widehat{\gamma}_{jk}) \cdot (\widehat{\gamma}_{jl} \cdot \widehat{\gamma}_{li} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \cdot (\widehat{\gamma}_{ji} \cdot \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{kj})) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &= (\widehat{\gamma}_{ki} \cdot \widehat{\gamma}_{il} \cdot \widehat{\gamma}_{lj} \cdot \widehat{\gamma}_{jk} \cdot (\widehat{\gamma}_{jl} \cdot \widehat{\gamma}_{li} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \cdot (\widehat{\gamma}_{ji} \cdot \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{kj})) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &= (\widehat{\gamma}_{ki} \cdot \widehat{\gamma}_{il} \cdot \widehat{\gamma}_{lj} \cdot (\widehat{\gamma}_{jl} \cdot \widehat{\gamma}_{li} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \cdot (\widehat{\gamma}_{ji} \cdot \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{kj}) \cdot \widehat{\gamma}_{jk}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \equiv e_{\widehat{G}}, \end{aligned}$$

określaną mianem **warunku 2-kocyklu**. Stwierdzamy bez trudu, że tożsamość powyższa nie zmienia się, jeśli wybawczy dowolne odwzorowania ciągle (wzgl. gładkie)

$$\psi_{ij} \equiv \text{Inv} \circ \psi_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{J}_{\Gamma}(\Gamma),$$

dokonamy w niej podstawienia

$$\widehat{w}_{ijk} \longmapsto \widehat{w}_{ijk} \cdot (\psi_{ji} \cdot (\text{Inv} \circ \psi_{ki}) \cdot \psi_{kj}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} =: \widehat{w}_{ijk} \cdot \check{\delta} \psi_{ijk}.$$

Topologia nakrycia  $\widehat{\varphi}$  zapewnia istnienie lokalnie ciągłych (wzgl. gładkich) podniesień  $\widehat{\gamma}_{ij}$  odwzorowań przejścia  $g_{ij}$ , przy czym (pełna) swoboda wyboru podniesienia jest opisywana przez powyższe podstawienia, możemy więc – w świetle Tw. 4.3.2 – wyciągnąć z naszych dotychczasowych rozważań następujący

**WNIOSEK 1.** *Ilościową miarą obstrukcji topologicznej dla istnienia prolongacji wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_{\Gamma}, \varphi)$  jest nieznikająca przy dowolnie rozdrobionym pokryciu trywializującym  $\mathcal{O}$  klasa zdefiniowanych powyżej danych lokalnych  $\{ \widehat{w}_{ijk} : \mathcal{O}_{ijk} \longrightarrow \mathcal{J}_{\Gamma}(\Gamma) \}_{(i,j,k) \in (I^{\times 3})_{\mathcal{O}}}$ , spełniających warunek 2-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k,l) \in (I^{\times 4})_{\mathcal{O}}} : \check{\delta} \widehat{w}_{ijkl} = e_{\widehat{G}},$$

względem relacji równoważności

$$\widehat{w}_{\dots}^2 \sim_{\check{\delta}} \widehat{w}_{\dots}^1 \iff$$

$$\exists \{ \psi_{ij} = \text{Inv} \circ \psi_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{J}_{\Gamma}(\Gamma) \}_{(i,j) \in (I^{\times 2})_{\mathcal{O}}} \forall_{(i,j,k) \in (I^{\times 3})_{\mathcal{O}}} : \widehat{w}_{ijk}^2 = \widehat{w}_{ijk}^1 \cdot \check{\delta} \psi_{ijk}.$$

Klasę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia<sup>1</sup>) określamy mianem **klasy obstrukcji dla istnienia prolongacji** wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_{\Gamma}, \varphi)$ .

⊗

⌈

<sup>1</sup>O tym, że granica ta jest dobrze określona, przekonamy się w Części 7.

**TWIERDZENIE 4.3.3.** *Przyjmijmy zapis Def. 168. Niechaj  $((P_{\widehat{G}}^\alpha, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^\alpha}), (\Phi_\alpha, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą prolongacjami wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$  i niech  $\widehat{g}_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O}$  będą odnośnymi odwzorowaniami przejścia stowarzyszonymi z trywializacjami lokalnymi  $\tau_i^\alpha : \pi_{P_{\widehat{G}}^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \widehat{G}$ ,  $i \in I$  nad wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ . Wówczas istnieją odwzorowania lokalnie ciągłe (wzgl. gładkie klasy  $C^k$ )*

$$\widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{G}, \quad i \in I$$

i odwzorowania lokalnie stałe

$$\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma)$$

spełniające dla dowolnych indeksów  $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_\mathcal{O}$  warunek 1-kocyklu

$$(\gamma_{jk} \cdot \gamma_{ik}^{-1} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{G}},$$

które ustalają relację pomiędzy odwzorowaniami przejścia w postaci

$$(4.3.4) \quad \widehat{g}_{ij}^2 = \gamma_{ij} \cdot (\widehat{h}_i \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O}.$$

I odwrotnie, każda rodzina odwzorowań ciągłych (wzgl. gładkich)  $\widehat{g}_{ij}^2$  pozostająca w powyższej relacji z odwzorowaniami przejścia  $\widehat{g}_{ij}^1$  ustalonej prolongacji dla pewnych odwzorowań  $\widehat{h}_i$  i  $\gamma_{ij}$  spełniających wymienione wcześniej warunki określa prolongację o odwzorowaniach przejścia tożsamy z  $\widehat{g}_{ij}^2$ .

Prolongacje o odwzorowaniach przejścia  $\widehat{g}_{ij}^1$  i  $\widehat{g}_{ij}^2$  są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie  $\mathcal{O}$  (współ)trywializujące odnośne wiązki  $P_{\widehat{G}}^1$  i  $P_{\widehat{G}}^2$ , w którym relacja (4.3.4) jest spełniona dla

$$\gamma_{ij} = (\eta_j \cdot \text{Inv} \circ \eta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O},$$

gdzie

$$\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma), \quad i \in I$$

są pewnymi odwzorowaniami lokalnie stałymi. ■

*Dowód:* Niechaj  $\widehat{g}_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą odwzorowaniami przejścia wiązek głównych  $P_{\widehat{G}}^\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  wyznaczających prolongacje wiązki głównej  $P_G$  i niech

$$(4.3.5) \quad \widehat{\gamma}_{ij}^\alpha = \widehat{h}_i^\alpha \cdot \widehat{g}_{ij}^\alpha \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$$

będą odwzorowaniami, o których mowa w Tw. 4.3.2, stowarzyszonymi z nimi zgodnie z Równ. (4.3.2). Jako że

$$\widehat{\varphi} \circ (\widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^1) = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \widehat{\varphi} \circ \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^1 = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^1 = g_{ij} \cdot \text{Inv} \circ g_{ij} = e_G,$$

a przy tym  $\text{Ker } \widehat{\varphi} = \text{Im } \mathcal{J}_\Gamma$ , przeto z powyższej równości wynika istnienie odwzorowań lokalnie stałych

$$\gamma_{ij}^{12} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma), \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O}$$

o własności

$$\widehat{\gamma}_{ij}^2 = \gamma_{ij}^{12} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}^1.$$

Na jej podstawie wyprowadzamy – w zapisie Uwagi 71 – tożsamość (por.: dowód Tw. 4.3.2)

$$\check{\delta}\gamma_{ijk}^{12} = \check{\delta}\check{\gamma}_{ijk}^2 \cdot \text{Inv} \circ \check{\delta}\check{\gamma}_{ijk}^1 = e_{\widehat{G}} \cdot e_{\widehat{G}}^{-1} = e_{\widehat{G}}.$$

Przywoławszy definicje (4.3.5), ustalamy postulowaną relację

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{ij}^2 &= \text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \check{\gamma}_{ij}^2 \cdot \widehat{h}_j^2 = \gamma_{ij}^{12} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \check{\gamma}_{ij}^1 \cdot \widehat{h}_j^2 \\ &= \gamma_{ij}^{12} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{h}_i^1) \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{h}_i^1 \cdot \check{\gamma}_{ij}^1 \cdot \widehat{h}_j^1) \cdot \text{Inv} \circ (\text{Inv} \circ \widehat{h}_j^2 \cdot \widehat{h}_j^1) \\ &= \gamma_{ij}^{12} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{h}_i^1) \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ (\text{Inv} \circ \widehat{h}_j^2 \cdot \widehat{h}_j^1), \end{aligned}$$

w której identyfikujemy odwzorowania

$$\widehat{h}_i = \text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{h}_i^1, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{12}$$

o pożądanym własnościach.

Następnie przypuścimy, odwrotnie, że są dane odwzorowania  $\widehat{h}_i$  i  $\gamma_{ij}$  o własnościach wypisanych w treści dowodzonego twierdzenia, które w połączeniu z odwzorowaniami przejścia  $\widehat{g}_{ij}^1$  wiązki głównej  $P_{\widehat{G}}^1$  zadającej prolongację wiązki  $P_G$  definiują odwzorowania  $\widehat{g}_{ij}^2 = \gamma_{ij} \cdot (\widehat{h}_i \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j)$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\emptyset}$ . Te ostatnie spełniają warunek 1-kocyklu – dla dowolnych  $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\emptyset}$  –

$$\check{\delta}\widehat{g}_{ijk}^2 = \check{\delta}\gamma_{ijk} \cdot (\widehat{h}_j \cdot \check{\delta}\widehat{g}_{ijk}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{G}} \cdot (\widehat{h}_j \cdot e_{\widehat{G}} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{G}},$$

zatem określają – na mocy Tw. 4.1.1 – wiązkę główną  $(P_{\widehat{G}}^2, B, \widehat{G}, [\text{pr}_1])$  o grupie strukturalnej  $\widehat{G}$ , przestrzeni totalnej

$$P_{\widehat{G}}^2 \equiv \left( \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \widehat{G}) \right) / \sim_{\check{\gamma}^2}$$

i odwzorowaniach przejścia  $\widehat{g}_{ij}^2$  pomiędzy trywializacjami lokalnymi  $[\tau_i]$  wskazanymi w dowodzie tegoż twierdzenia. Niechaj  $h_i^1 : \mathcal{O}_i \rightarrow G$ ,  $i \in I$  będą danymi lokalnymi morfizmami prolongacji  $\Phi_1 : P_{\widehat{G}}^1 \rightarrow P_G$  określonymi w ścisłej analogii do Równ. (4.3.1), tj. poprzez równości

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}^1 = (\text{Inv} \circ h_i \cdot g_{ij} \cdot h_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}},$$

a wtedy używamy odwzorowań

$$h_i^{12} := h_i^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G, \quad i \in I,$$

aby na przestrzeni totalnej  $P_{\widehat{G}}^2$  zadać odwzorowania lokalnie ciągłe (wzgl. gładkie)

$$\Phi_i : [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \widehat{G} \xrightarrow{\text{id}_B \times \ell_{h_i^{12}} \circ \widehat{\varphi}} \mathcal{O}_i \times G \xrightarrow{\tau_i^{G-1}} \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I,$$

odwzorowujące włókna  $P_{\widehat{G}}^2$  we włókna  $P_G$  w sposób jawnie  $\widehat{G}$ -ekwiwariantny, czego dowodzi bezpośredni rachunek, wykonany nad dowolnym punktem  $x \in \mathcal{O}_i$  i dla dowolnych elementów  $\widehat{g}, \widehat{h} \in \widehat{G}$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_i([[(x, i, \widehat{g})] \triangleleft_{P_G} \widehat{h}]) &= \Phi_i([[(x, i, \widehat{g} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h})]]) = \tau_i^{G-1}(x, h_i^{12}(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h})) \\ &= \tau_i^{G-1}(x, h_i^{12}(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h})) = \tau_i^{G-1}(x, h_i^{12}(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \triangleleft_{P_G} \varphi(\widehat{h}) \\ &\equiv \Phi_i([[(x, i, \widehat{g})]]) \triangleleft_{P_G} \varphi(\widehat{h}). \end{aligned}$$

O istnieniu odwzorowania globalnie ciągłego (wzgl. gładkiego)

$$\Phi : P_{\widehat{G}} \longrightarrow P_G$$

spełniającego warunki

$$\Phi \upharpoonright_{[\text{pr}_i]^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$$

przesądza bezpośredni rachunek, przeprowadzony dla dowolnych  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  i  $\widehat{g} \in \widehat{G}$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} \Phi_j([(x, i, \widehat{g})]) &= \Phi_j([(x, j, \widehat{g}_{ji}^2(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g})]) \\ &\equiv \tau_j^{G-1}(x, h_j^{12}(x) \cdot_G \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ji}^2(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\ &= \tau_j^{G-1}(x, h_j^1(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h}_j(x)^{-1} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}_j(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ji}^1(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}_i(x)^{-1}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\ &= \tau_j^{G-1}(x, h_j^1(x) \cdot_G h_j^1(x)^{-1} \cdot_G g_{ji}(x) \cdot_G h_i^1(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h}_i(x)^{-1}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\ &= \tau_i^{G-1}(x, h_i^1(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h}_i(x)^{-1}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \equiv \tau_i^{G-1}(x, h_i^{12}(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\ &\equiv \Phi_i([(x, i, \widehat{g})]). \end{aligned}$$

Wraz z podaną wcześniej definicją wiązki głównej  $P_{\widehat{G}}$  morfizm ten określa poszukiwaną prolongację wiązki  $P_G$ .

Na zakończenie zajmujemy się opisem lokalnym prolongacji (nie)równoważnych. Niechaj więc  $P_{\widehat{G}}^\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema wiązkami głównymi współdefiniującymi prolongację wiązki  $P_G$ , o odnośnych odwzorowaniach przejścia  $\widehat{g}_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{G}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ , przy czym założymy, że istnieje morfizm wiązek głównych  $\Psi : P_{\widehat{G}}^1 \longrightarrow P_{\widehat{G}}^2$  pokrywający identyczność na bazie. W świetle Tw. 4.1.3 dane lokalne  $\widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \widehat{G}$ ,  $i \in I$  takiego morfizmu zadają relację między odwzorowaniami przejścia w postaci

$$\widehat{g}_{ij}^2 = (\widehat{h}_i \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ij}^1 \cdot_{\widehat{G}} \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

to jednak oznacza, że dla dowolnej pary  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  mamy

$$\gamma_{ij} \equiv e_{\widehat{G}}$$

i możemy położyć

$$\eta_i = e_{\widehat{G}} \in \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma), \quad i \in I.$$

Odwracając bieg rozumowania, rozpatrzmy parę prolongacji o odwzorowaniach przejścia powiązanych relacją (4.3.4), w której odwzorowania lokalnie stałe  $\gamma_{ij} = (\eta_j \cdot \text{Inv} \circ \eta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  są wyznaczone przez także odwzorowania  $\eta_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma)$ ,  $i \in I$ . Wykorzystując inkluzję  $\mathcal{J}_\Gamma(\Gamma) \subset \mathcal{L}(\widehat{G})$ , przepisujemy Równ. (4.3.4) w postaci

$$\widehat{g}_{ij}^2 = ((\text{Inv} \circ \eta_i \cdot \widehat{h}_i) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ij}^1 \cdot_{\widehat{G}} \text{Inv} \circ (\text{Inv} \circ \eta_j \cdot \widehat{h}_j)) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}},$$

z której odczytujemy – ponownie w odwołaniu do Tw. 4.1.3 – dane lokalne morfizmu wiązek głównych

$$\widetilde{h}_i := \text{Inv} \circ \eta_i \cdot \widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \widehat{G}, \quad i \in I.$$

Teza Stw. 204 przesądza, że jest to w istocie izomorfizm, i tym samym zamyka dowód.  $\square$

UWAGA 72. Należy odnotować, że skwantyfikowana w powyższym twierdzeniu w Równ. (4.3.4) swoboda redefinicji odwzorowań przejścia  $\widehat{g}_{ij}^1$  w wiązce głównej  $P_{\widehat{G}}$  określającej prolongację wiązki wyjściowej  $P_G$  obejmuje wszelkie wybory dowolne, przed jakimi stawia nas procedura prolongacji. Istotnie, uwzględnia ona możliwość przetransformowania wiązki  $P_{\widehat{G}}$  wzdłuż dowolnego morfizmu wiązek głównych o grupie strukturalnej  $\widehat{G}$ ,

$$\widehat{g}_{ij}^1 \mapsto \widehat{h}_i \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j, \quad \widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \widehat{G},$$

zmiany wyboru podniesienia odwzorowań przejścia na  $P_G$  zgodnej ze strukturą rozszerzenia centralnego,

$$\widehat{g}_{ij}^1 \mapsto \gamma_{ij} \cdot \widehat{g}_{ij}^1, \quad \gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{J}\Gamma(\Gamma),$$

a nawet – spójnie ze Stw. 204 – możliwość przekształcenia wzdłuż dowolnego morfizmu wyjściowej wiązki głównej  $P_G$ , co prowadzi do kombinacji powyższych transformacji (w których tym razem pojawiają się dowolne podniesienia danych lokalnych morfizmu do grupy nakrywającej).

Wreszcie też na zakończenie warto podsumować wyniki naszych dociekań w formie

WNIOSEK 2. *Ilościową miarą swobody nierównoważnych wyborów prolongacji wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}\Gamma, \varphi)$  jest określona nad dowolnie rozdrobnionym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O}$  klasa zdefiniowanych w Tw. 4.3.3 danych lokalnych  $\{ \gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{J}\Gamma(\Gamma) \}_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}}$ , spełniających warunek 1-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_{\mathcal{O}}} : \check{\delta} \gamma_{ijk} = e_{\widehat{G}},$$

względem relacji równoważności

$$\gamma_{\cdot\cdot}^2 \sim_{\check{\delta}} \gamma_{\cdot\cdot}^1 \iff \exists_{\{ \eta_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{J}\Gamma(\Gamma) \}_{i \in I}} \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}} : \gamma_{ij}^2 = \gamma_{ij}^1 \cdot \check{\delta} \eta_{ij}.$$

Klasę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia<sup>2</sup>) określamy mianem **klasy charakterystycznej prolongacji** wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}\Gamma, \varphi)$ .

$\oplus$

$\bar{\wedge}$

<sup>2</sup>O tym, że granica ta jest dobrze określona, przekonamy się w Części 7.

## Dodatkowa struktura na wiązce włóknistej

### 1. Struktura metryczna

#### 1.1. Metryka na wiązce wektorowej i rozmaitości.

DEFINICJA 169. Przyjmijmy zapis Def. 162 i 164. **Struktura metryczna (klasy  $C^l$ ) na wiązce wektorowej**  $(V, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_V)$  klasy  $C^k$ ,  $k \geq l$  (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) to gładkie (klasy  $C^l$ ) cięcie

$$g : B \longrightarrow V^* \otimes_{\mathbb{R}, B} V^*$$

kwadratu tensorowego wiązki dualnej  $V^*$ , którego ograniczenie do dowolnego włókna  $V_x \otimes_{\mathbb{K}} V_x$  wiązki  $V \otimes_{\mathbb{K}, B} V$  jest niezwyrodniałą symetryczną formą  $\mathbb{R}$ -liniową o stałej (nad bazą  $B$ ) sygnaturze, zadającą formę kwadratową

$$Q_{g(x)} : V_x \longrightarrow \mathbb{R} : v \longmapsto g(x)(v \otimes_{\mathbb{R}} v).$$

Sygnaturę tej ostatniej (w rozumieniu Def. 38) nazywamy **sygnaturą struktury metrycznej**. W przypadku sygnatury postaci  $(p, 0)$ ,  $p \in \mathbb{N}^{\times}$  mówimy o **riemanskiej strukturze metrycznej**.

▲

DEFINICJA 170. **Struktura metryczna (klasy  $C^l$ ) na rozmaitości różniczkowalnej** (klasy  $C^k$ ,  $k \geq l + 1$ ) to struktura metryczna (klasy  $C^l$ ) na wiązce stycznej nad tą rozmaitością. Parę  $(M, g)$  utworzoną przez rozmaitość różniczkowalną (klasy  $C^l$ )  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  oraz strukturę metryczną  $g$  na niej określamy mianem **rozmaitości metrycznej (klasy  $C^l$ )**.

▲

TWIERDZENIE 4.4.1. *Na każdej wiązce wektorowej istnieje struktura metryczna riemannowska. W szczególności więc struktura taka istnieje na każdej rozmaitości różniczkowalnej.*

■

*Dowód:* Niechaj  $(V, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_V)$  będzie wiązką wektorową i niech  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie jej pokryciem trywializującym. Trywializacje lokalne  $\tau_i : \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N}$  pozwalają zaindukować lokalne struktury metryczne riemannowskie na  $V$  postaci (patrz: Przykł. 14 (1))

$$g_i : \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_V^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathbb{R} : (v_1, v_2) \longmapsto \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(N)}}(\text{pr}_2 \circ \tau_i(v_1), \text{pr}_2 \circ \tau_i(v_2)),$$

tym samym promując odwzorowania  $\text{pr}_2 \circ \tau_i$  do rangi izometrii (lokalnych). Następnie wykorzystujemy rozkład jedności  $\{\rho_i\}_{i \in I}$  (klasy  $C^k$ ) podporządkowany  $\mathcal{O}$

do utworzenia ze struktur lokalnych struktury globalnej

$$g := \sum_{i \in I} \rho_i \circ \pi_{\mathbb{V} \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}}(\cdot) \triangleright \tilde{g}_i,$$

w której zapisie  $\tilde{g}_i$  są odwzorowaniami  $\mathbb{R}$ -liniowymi na włóknach  $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{K}, B} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$  określonymi (jednoznacznie) przez  $g_i$ .  $\square$

**STWIERDZENIE 251.** *Przyjmijmy zapis Def. 131, 167 i 169 oraz Przykł. 2 (3) i 28 (1). Niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{x^n}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem  $\overline{\mathbb{R}}$ ). Dowolna struktura metryczna  $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  o sygnaturze  $(p, n-p)$ ,  $p \in \overline{0, n}$  na  $\mathbb{V}$  określa redukcję wiązki reperów  $F_{\text{GL}}\mathbb{V}$  wzdłuż włożenia kanonicznego*

$$J_{\mathbb{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)} : \mathbb{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(n).$$

*Otrzymana tym sposobem wiązka główna zredukowana nosi miano **wiązki reperów ortonormalnych** (lub **wiązki baz ortonormalnych**) **wiązki wektorowej**  $\mathbb{V}$ .*  $\blacksquare$

*Dowód:* W świetle Tw. 4.3.1 wystarczy wskazać trywializacje lokalne wiązki głównej  $F_{\text{GL}}\mathbb{V}$  o odwzorowaniach przejścia przyjmujących wartości w podgrupie  $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset \text{GL}_{\mathbb{R}}(n)$ . Teza Stw. 203 czyni to zadanie równoważnym zadaniu znalezienia rodziny cięć lokalnych  $\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{\text{GL}}\mathbb{V}$  stowarzyszonych z pewnym pokryciem otwartym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$ , które w punktach  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  pozostają w relacji

$$(4.4.1) \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) \triangleleft g_{ij}(x) \equiv \sigma_i(x) \circ g_{ij}(x)$$

określanej przez odwzorowania przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ . Rozważmy zatem dowolne cięcia lokalne  $s_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{\text{GL}}\mathbb{V}$  stowarzyszone z pewnym pokryciem otwartym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ . Wykorzystując konstrukcję przedstawioną w treści Uwagi 48, każdej z par  $(s_i(x), e_a)$ ,  $a \in \overline{1, n}$  o drugim składnik będącym elementem bazy standardowej przestrzeni  $\mathbb{K}^{x^n}$  możemy przyporządkować element bazy włókna  $\mathbb{V}_x$  dany wzorem

$$[\tilde{e}\mathbb{V}]([(s_i(x), e_a)]) = s_i(x)(e_a) =: s_{i_a}(x).$$

Przywoławszy następnie Stw. 36 (w odniesieniu do form kwadratowych  $Q_{g(x)}$ ,  $x \in \mathcal{O}_i$ , względem których odnośne układy bazowe  $\{s_{i_a}(x)\}_{a \in \overline{1, n}}$  są w oczywisty sposób niezwyrodniałe), możemy następnie przeprowadzić ortogonalizację Grama–Schmidta, która dostarcza nam nowych układów bazowych  $\{\sigma_{i_a}(x)\}_{a \in \overline{1, n}}$  o gładkiej zależności od punktu w bazie  $x \in \mathcal{O}_i$ . Istotnie, przejście od bazy wyjściowej  $\{s_{i_a}(x)\}_{a \in \overline{1, n}}$  do bazy  $Q_{g(x)}$ -ortogonalnej  $\{\sigma_{i_a}(x)\}_{a \in \overline{1, n}}$  jest superpozycją operacji algebraicznych (więc gładkich) o argumentach zależących od  $x$  poprzez  $s_{i_a}$  oraz  $g$ , co na mocy poczynionych założeń gwarantuje rzeczoną gładkość  $\sigma_{i_a}$ . Nowy układ bazowy spełnia – wprost z konstrukcji, a dla dowolnych  $a, b \in \overline{1, n}$  oraz  $x \in \mathcal{O}_i$ ,  $i \in I$  – tożsamości

$$g(x)(\sigma_{i_a}(x), \sigma_{i_b}(x)) \equiv \Phi_{Q_{g(x)}}(\sigma_{i_a}(x), \sigma_{i_b}(x)) = \varepsilon_a \delta_{ab}$$

wyrażone przez układ skalarów  $\varepsilon_a \in \{-1, 1\}$  zdeteminowany przez sygnaturę struktury metrycznej. Bez straty ogólności rozważań (po dokonaniu stosownej permutacji indeksów bazy) możemy przy tym założyć, że

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_p = 1 = -\varepsilon_{p+1} = -\varepsilon_{p+2} = \dots = -\varepsilon_n.$$

Układu tego możemy użyć do określenia izomorfizmów

$$\sigma_i(x) : \mathbb{K}^{x^n} \rightarrow \mathbb{V}_x$$



będących jedynymi  $\mathbb{R}$ -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\sigma_i(x)(e_a) := \sigma_{ia}(x), \quad a \in \overline{1, n},$$

patrz: Stw. 14, a zatem – w szczególności – zależącymi gładko od punktu w bazie. Tym samym uzyskujemy nowe cięcia lokalne

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbf{F}_{\text{GL}}\mathbf{V} : x \longmapsto \sigma_i(x),$$

które na mocy Stw. 203 wyznaczają trywializacje lokalne

$$\tau_{\sigma_i} : \sqcup_{x \in \mathcal{O}_i} \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbf{V}_x) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \text{GL}_{\mathbb{R}}(n),$$

a nadto określają bazy we włóknach  $\mathbf{V}$  postaci

$$[\widehat{\text{ev}}](\left[ (\sigma_i(x), e_a) \right]) = \sigma_i(x)(e_a) \equiv \sigma_{ia}(x), \quad a \in \overline{1, n}, \quad x \in \mathcal{O}_i, \quad i \in I.$$

Wyznaczywszy odnośne odwzorowania przejścia,

$$\tau_{\sigma_i} \circ \tau_{\sigma_j}^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times \text{GL}_{\mathbb{R}}(n) \curvearrowright : (x, A) \longmapsto (x, g_{ij}(x) \square A),$$

o reprezentacji macierzowej

$$g_{ij}(x) = g_{ijab}(x) \triangleright e_a^* \otimes_{\mathbb{R}} e_b$$

(w której zapisie wykorzystaliśmy Tw. 1.2.11), otrzymujemy relacje (4.4.1), których obrazem względem izomorfizmu  $[\widehat{\text{ev}}]$  są relacje

$$\begin{aligned} \sigma_{ja}(x) &\equiv [\widehat{\text{ev}}](\left[ (\sigma_j(x), e_a) \right]) = [\widehat{\text{ev}}](\left[ (\sigma_i(x) \circ g_{ij}(x), e_a) \right]) \\ &\equiv [\widehat{\text{ev}}](\left[ (\sigma_i(x), g_{ij}(x)(e_a)) \right]) = [\widehat{\text{ev}}](g_{ijab}(x) \triangleright \left[ (\sigma_i(x), e_b) \right]) \\ &= g_{ijab}(x) \triangleright [\widehat{\text{ev}}](\left[ (\sigma_i(x), e_b) \right]) \equiv g_{ijab}(x) \triangleright \sigma_{ib}(x). \end{aligned}$$

Te pozwalają nam ustalić, na podstawie wcześniejszych rezultatów, tożsamości

$$\begin{aligned} g(x)(\sigma_{ia}(x), \sigma_{ib}(x)) &= \varepsilon_a \delta_{ab} \equiv g(x)(\sigma_{ja}(x), \sigma_{jb}(x)) \\ &= g_{ijac}(x) \cdot g_{ijbd}(x) \cdot g(x)(\sigma_{ic}(x), \sigma_{id}(x)), \end{aligned}$$

które wyrażają pożądaną własność skonstruowanych przez nas odwzorowań przejścia względem metryki  $g$ .  $\square$

**UWAGA 73.** Wiązka reperów ortonormalnych wiązki wektorowej  $(\mathbf{V}, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{\mathbf{V}})$  wyposażonej w strukturę metryczną  $g$  o sygnaturze  $(p, n-p)$  jest wiązką główną

$$(\mathbf{F}_O\mathbf{V}, B, \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p), \pi_{\mathbf{F}_{\text{GL}}\mathbf{V}} \upharpoonright_{\mathbf{F}_O\mathbf{V}})$$

o grupie strukturalnej  $\text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ . Naturalnym modelem dla  $\mathbf{F}_O\mathbf{V}$  jest przestrzeń

$$\mathbf{F}_O\mathbf{V} := \bigsqcup_{x \in B} \text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbf{V}_x)^{\mathfrak{g}},$$

w której zapisie włókno  $\text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbf{V}_x)^{\mathfrak{g}} \ni \beta_x$  jest zbiorem bijektywnych izometrii

$$\beta_x : \mathbb{R}^{p, n-p} \xrightarrow{\cong} (\mathbf{V}_x, Q_{g(x)}),$$

przy czym topologia i struktura różniczkowalna na tak określonej przestrzeni totalnej wiązki są określone analogicznie jak w przypadku wiązki reperów  $\mathbf{F}_{\text{GL}}\mathbf{V}$  z Def. 131.

STWIERDZENIE 252. *Przyjmijmy zapis Def. 131, 167 i 169 oraz Przykł. 2 (3) i 28 (1). Niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{x^n}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem  $\mathbb{R}$ ). Dowolna redukcja wiązki reperów  $F_{GL}\mathbb{V}$  wzdłuż włożenia kanonicznego*

$$J_{O_{\mathbb{R}}(n)} : O_{\mathbb{R}}(n) \rightarrow GL_{\mathbb{R}}(n).$$

wyznacza na  $\mathbb{V}$  strukturę metryczną  $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  o sygnaturze  $(n, 0)$ . ■

Dowód: Metrykę na włóknach wiązki  $\mathbb{V}$  definiujemy punkt po punkcie nad jej bazą, używając w tym celu cięć (lokalnych) wiązki reperów ortonormalnych  $F_{O}\mathbb{V}$  zrekonstruowanej z odwzorowań przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow O_{\mathbb{R}}(n)$  wiązki  $F_{GL}\mathbb{V}$  zredukowanych do  $O_{\mathbb{R}}(n) \subset GL_{\mathbb{R}}(n)$ . Niechaj zatem  $\beta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{O}\mathbb{V}$  będzie dowolnym takim cięciem nad zbiorem  $\mathcal{O}_i \ni x$  należącym do pokrycia trywializującego  $\mathbb{V}$  (nad którym rekonstruujemy  $F_{O}\mathbb{V}$ ), określającym trywializację lokalną wiązki  $F_{O}\mathbb{V}$ . Iloczyn skalarny na  $\mathbb{V}_x$  ustanawiamy formułą

$$g_i : \mathbb{V}_x \times \mathbb{V}_x \rightarrow \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)),$$

której struktura przesądza o gładkiej zależności odwzorowań  $g_i$  od punktu w  $\mathcal{O}_i$ , jak również o ich dodatniej określoności i symetrii względem transpozycji argumentów wektorowych. Przy tym dowolne dwa cięcia lokalne  $\beta_i, \tilde{\beta}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{O}\mathbb{V}$  są powiązane przez pewne odwzorowanie (gładkie)  $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow O_{\mathbb{R}}(n)$  zgodnie z formułą

$$\tilde{\beta}_i(x) = \beta_i(x) \circ h_i(x), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

co zapewnia niezależność definicji  $g_i$  od wyboru cięcia lokalnego,

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(\tilde{\beta}_i(x)^{-1}(v), \tilde{\beta}_i(x)^{-1}(w)) &= \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(h_i(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(v), h_i(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(w)) \\ &= \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)). \end{aligned}$$

Pozostaje upewnić się, że tak zadane riemannowskie metryki lokalne wyznaczają metrykę globalną. W tym celu rozważmy punkt  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ , nad którym cięcia lokalne  $\beta_i$  i  $\beta_j$  pozostają w relacji

$$\beta_j(x) = \beta_i(x) \circ g_{ij}(x).$$

Ortogonalny charakter odwzorowań przejścia pozwala stwierdzić, że

$$\begin{aligned} g_j(v, w) &\equiv \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(\beta_j(x)^{-1}(v), \beta_j(x)^{-1}(w)) \\ &= \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(v), g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(w)) \\ &= \delta_{\mathbb{E}}^{(n)}(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)) \equiv g_i(v, w). \end{aligned}$$

i na tej podstawie wnioskować o istnieniu odwzorowania globalnie gładkiego

$$g : B \rightarrow \mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*, \quad g|_{\mathcal{O}_i} \equiv g_i$$

o pożądanym własnościach. □

## 1.2. Metryka Kobayashiego na wiązce głównej.

## 2. Orientacja na wiązce wektorowej

Dokonyamy obecnie geometryzacji algebraicznego pojęcia orientacji przestrzeni wektorowej (rzeczywistej), rozumianego jako wybór jednego z dwóch rozłącznych podzbiorów w zbiorze baz tejże przestrzeni utworzonego przez bazy powiązane (wzajemnie) odwracalnymi odwzorowaniami liniowymi o wyznaczniku dodatnim, przy czym w obecności formy kwadratowej, więc w ograniczeniu do automorfizmów ortogonalnych, ten ostatni staje się równy jedności. W tym celu rozważymy rodzinę cięć (lokalnych) wiązki reperów ortonormalnych  $F_O\mathbb{V}$  (rzeczywistej) wiązki wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  wyposażonej w strukturę metryczną o sygnaturze  $(p, n-p)$ ,  $p \in \overline{0, n}$ ,

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow F_O\mathbb{V}$$

stowarzyszonych z pewnym pokryciem otwartym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$ . Ciągłość cięć  $\sigma_i$  oznacza, że wszystkie bazy w  $\mathbb{R}^{\times n}$  otrzymane w obrazie trywializacji lokalnej  $\tau_i : \pi_{F_O\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$  z obrazu cięcia  $\sigma_i(\mathcal{O}_i)$  leżą w tej samej spójnej składowej grupy ortogonalnej  $O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ , każde zatem dwa punkty obrazu łączy odwzorowanie ze składowej spójnej jedności tejże grupy, czyli z grupy specjalnej ortogonalnej  $SO_{\mathbb{R}}(p, n-p)$  przy  $p(n-p) = 0$ , wzgl. z grupy specjalnej ortogonalnej ortochronicznej  $SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p)$  przy  $p(n-p) \neq 0$ , por.: Przykł. 28 (1). W punktach  $x \in \mathcal{O}_{i_j}$  cięcia lokalne pozostają w relacji (patrz: Def. 133)

$$\sigma_j(x) = \sigma_i(x) \triangleleft \phi_{F_O\mathbb{V}}(\sigma_i(x), \sigma_j(x)),$$

przy czym

$$\phi_{F_O\mathbb{V}}(\sigma_i(x), \sigma_j(x)) \equiv g_{ij}(x) \in O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$$

są tożsame z odwzorowaniami przejścia stowarzyszonymi z trywializacjami lokalnymi wyznaczanymi przez cięcia lokalne  $\sigma_i$  w duchu Stw. 203. W świetle powyższych uwag naturalną adaptacją pojęcia orientacji staje się

DEFINICJA 171. Przyjmijmy zapis Stw. 251. Wiązkę wektorową  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) wyposażoną w strukturę metryczną o sygnaturze  $(p, n-p)$ ,  $p \in \overline{0, n}$  określamy mianem **orientowalnej**, ilekroć istnieje taki wybór pokrycia trywializującego dla wiązki reperów ortonormalnych  $F_O\mathbb{V}$ , przy którym odwzorowania przejścia  $F_O\mathbb{V}$  przyjmują wartości w podgrupie specjalnej ortogonalnej  $SO_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ . W takim przypadku wiązkę zredukowaną (wzdłuż iniekcji kanonicznej) nazywamy **wiązką reperów ortonormalnych z orientacją** (albo też **wiązką baz ortonormalnych z orientacją**) **wiązki wektorowej**  $\mathbb{V}$  i zapisujemy jako

$$(F_{SO}\mathbb{V}, B, SO_{\mathbb{R}}(p, n-p), \pi_{F_{SO}\mathbb{V}})$$

W przypadku  $p(n-p) \neq 0$  mówimy o wiązce **orientowalnej przestrzennie** (wzgl. **czasowo**), jeśli możliwa jest jej redukcja wzdłuż iniekcji kanonicznej  $SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \sqcup P_{e_{p+1}} \cdot SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \subset O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$  (wzgl.  $SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \sqcup P_{e_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \subset O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ ), wprowadzając zarazem pochodne pojęcie **wiązki reperów ortonormalnych z orientacją przestrzenną** (wzgl. **czasową**) lub też **wiązki baz ortonormalnych z orientacją przestrzenną** (wzgl. **czasową**) **wiązki wektorowej**  $\mathbb{V}$ . Wreszcie też jeśli możliwa jest redukcja wiązki reperów wzdłuż iniekcji kanonicznej  $SO_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \subset O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ , mamy do czynienia z wiązką **orientowalną**

czasowo i przestrzenie, a odnośną wiązkę zredukowaną nazywamy **wiązką reperów ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną** (albo też **wiązką baz ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną**) **wiązki wektorowej**  $\mathbb{V}$  i oznaczamy symbolem

$$(\mathbb{F}_{\text{SO}^+ \mathbb{V}}, B, \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, n-p), \pi_{\mathbb{F}_{\text{SO}^+ \mathbb{V}}}).$$

Ilkroć wymienione powyżej własności strukturalne charakteryzują wiązkę wektorową styczną nad rozmaitością różniczkowalną, odnośne określenia stosują się do tejże rozmaitości. Mamy zatem **rozmaitość różniczkowalną orientowalną, rozmaitość różniczkowalną orientowalną czasowo** wzgl. **przestrzenie** oraz **rozmaitość różniczkowalną orientowalną czasowo i przestrzennie**. ▲

**TWIERDZENIE 4.4.2.** *Przyjmijmy zapis Def. 20 i 171. Wiązka wektorowa  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{x_n}, \pi_{\mathbb{V}})$  (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) wyposażona w strukturę metryczną o sygnaturze  $(p, n-p)$ ,  $p \in \bar{0}, n$  jest orientowalna (względem tejże struktury) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy wiązki reperów ortonormalnych  $\mathbb{F}_{\mathbb{O}\mathbb{V}}$  i odnośne trywializacje lokalne  $\tau_i : \pi_{\mathbb{F}_{\mathbb{O}\mathbb{V}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ ,  $i \in I$  o stowarzyszonych z nimi odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ ,  $(i, j) \in \langle I^{x_2} \rangle_{\mathcal{O}}$ , dla których odwzorowania (lokalnie) stałe*

$$\gamma_{ij} := \det_{(n)} \circ g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad (i, j) \in \langle I^{x_2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

przyjmują postać

$$(4.4.2) \quad \gamma_{ij} = (\eta_j \cdot \text{Inv} \circ \eta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}$$

dla pewnych odwzorowań (lokalnie) stałych

$$\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

■

Dowód: W świetle Def. 134 oraz Uwagi 48 orientowalność  $\mathbb{V}$  oznacza istnienie pokrycia trywializującego  $\mathcal{O}$  i odnośnych trywializacji  $\tau_i$ , dla których odwzorowania przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{SO}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$ , a wówczas  $\det_{(n)} g_{ij} = 1$  i możemy położyć  $\eta_i \equiv 1$ .

I odwrotnie, mając dane odwzorowania  $\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ,  $i \in I$ , wybierzmy dowolnie odwzorowania (klasy  $C^k$ )

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p), \quad i \in I$$

o własności

$$\det_{(n)} \circ h_i = \eta_i,$$

która pozwala stwierdzić, że odwzorowania

$$\tilde{g}_{ij} := h_i \cdot g_{ij} \cdot \text{Inv} \circ h_j : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p), \quad (i, j) \in \langle I^{x_2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

spełniają – w świetle Stw. 10 – warunek

$$\det_{(n)} \circ \tilde{g}_{ij} = \eta_i \cdot \gamma_{ij} \cdot \text{Inv} \circ \eta_j \equiv 1,$$

czyli w istocie

$$\tilde{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{SO}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p).$$

Na gruncie Tw. 4.1.3 konstatujemy, że wiązka główna zrekonstruowana – według schematu podanego w dowodzie Tw. 4.1.1 – z danych lokalnych  $\tilde{g}_{ij}$  jest izomorficzna z wiązką reperów  $x \in F_O \mathbb{V}$ . Równoważnie możemy powiedzieć, że stosowna redefinicja trywializacji lokalnych tej ostatniej pozwala dokonać redukcji grupy strukturalnej wzdłuż włożenia kanonicznego

$$J_{\text{SO}_R(p,n-p)} : \text{SO}_R(p, n-p) \rightarrow \text{O}_R(p, n-p),$$

w rozumieniu Tw. 4.3.1. Istotnie, jeśli wyjściowe trywializacje lokalne  $\tau_i$  o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}$  zastąpić odwzorowaniami

$$\tilde{\tau}_i : \pi_{F_O \mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \text{O}_R(p, n-p) : \tau_i^{-1}(x, g) \mapsto (x, h_i(x) \cdot g), \quad i \in I,$$

to w bezpośrednim rachunku – przeprowadzonym dla dowolnych  $(x, g) \in \mathcal{O}_i \times \text{O}_R(p, n-p)$  –

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(x, g) &\equiv \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(x, h_j(x) \cdot (h_j(x)^{-1} \cdot g)) = \tilde{\tau}_i \circ \tau_j^{-1}(x, h_j(x)^{-1} \cdot g) \\ &\equiv \tilde{\tau}_i \circ \tau_i^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, h_j(x)^{-1} \cdot g) = \tilde{\tau}_i \circ \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x) \cdot h_j(x)^{-1} \cdot g) \\ &= (x, h_i(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot h_j(x)^{-1} \cdot g) \end{aligned}$$

wyznamy nowe odwzorowania przejścia

$$h_i(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot h_j(x)^{-1} \equiv \tilde{g}_{ij}(x) \in \text{SO}_R(p, n-p).$$

□

UWAGA 74. Należy podkreślić, że rodzina odwzorowań lokalnie stałych  $\{\gamma_{ij} = \det_{(n)} \circ g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}}$  zdefiniowanych w treści Tw. 4.4.2 spełnia – dla dowolnych  $(i, j, k) \in (I \times 3)_\mathcal{O}$  – tożsamość

$$\check{\delta}\gamma_{ijk} := (\gamma_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \equiv \det_{(n)}(g_{jk} \cdot g_{ki} \cdot g_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = \det_{(n)} \mathbf{1}_n = 1,$$

nazywaną **warunkiem 1-kocyklu**. Jest przy tym zupełnie jasnym, że dla dowolnych odwzorowań lokalnie stałych

$$\psi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

tożsamość powyższa jest niezmiennicza ze względu na podstawienia

$$\gamma_{ij} \mapsto \gamma_{ij} \cdot (\psi_j \cdot \text{Inv} \circ \psi_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} =: \gamma_{ij} \cdot \check{\delta}\psi_{ij}.$$

Otrzymujemy zatem

WNIOSEK 3. *Ilościową miarą obstrukcji topologicznej dla orientowalności wiązki wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^n, \pi_{\mathbb{V}})$  wyposażonej w strukturę metryczną jest nieznikająca przy dowolnie rozdrobionym pokryciu trywializującym  $\mathcal{O}$  klasa zdefiniowanych powyżej danych lokalnych  $\{\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{Z}_2\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}}$ , spełniających warunek 1-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_\mathcal{O}} : \check{\delta}\gamma_{ijk} = 1,$$

względem relacji równoważności

$$\gamma_{\cdot}^2 \sim_{\check{\delta}} \gamma_{\cdot}^1 \iff \exists \{\psi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2\}_{i \in I} \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}} : \gamma_{ij}^2 = \gamma_{ij}^1 \cdot \check{\delta}\psi_{ij}.$$

Klasę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia<sup>1</sup>) oznaczamy symbolem

$$w_1(\mathbb{V})$$

<sup>1</sup>O tym, że granica ta jest dobrze określona, przekonamy się w Części 7.

i określamy mianem **pierwszej klasy Stiefela–Whitneya wiązki wektorowej**  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ .

W przypadku wiązki wektorowej stycznej nad rozmaitości różniczkowalną, mówimy o **pierwszej klasie Stiefela–Whitneya rozmaitości różniczkowalnej**.

⊗

¯

Pojawienie się wyznacznika odwzorowań przejścia w naszej dyskusji zagadnienia orientowalności wiązki wektorowej sugeruje – w kontekście rozważań z Rozdz. 1 – bezpośredni związek tego pojęcia z geometryzacją innego (równoważnego) algebraicznego modelu orientacji, jakiego dostarcza konstrukcja wyznacznika na przestrzeni wektorowej  $\mathbb{K}^{\times n}$ , modelującej włókno wiązki  $\mathbb{V}$ , czyli (dowolnego niezerowego) elementu  $\Delta \in \wedge^n (\mathbb{K}^{\times n})^*$ . Jeśli teraz przywołać procedurę – opisaną w Uwadze 48 – rekonstrukcji wiązki wektorowej jako wiązki stowarzyszonej z wiązką reperów, a procedura ta działa także w przypadku zredukowanej grupy strukturalnej (patrz: Tw. 4.3.1), to widzimy, że możliwość ograniczenia się do odwzorowań przejścia z  $\text{SO}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \subset \text{GL}_{\mathbb{R}}(n)$  dotyczy w jednakim stopniu wiązki wektorowej  $\mathbb{V}$  i jej wiązek reperów  $F_{\text{O}}\mathbb{V}$  oraz  $F_{\text{GL}}\mathbb{V}$ . Idąc dalej tym tropem, dochodzimy do

**STWIERDZENIE 253.** *Przyjmijmy zapis Def. 165 i 171. Wiązka wektorowa  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) wyposażona w strukturę metryczną  $g$  jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wiązka wyznacznikowa  $\det \mathbb{V}$  ma nigdzie nieznikające globalne cięcie.*

■

*Dowód:* Wynika wprost z konstrukcji wiązki wyznacznikowej przedstawionej w Rozdz. 1.4 i wcześniejszej dyskusji. □

**TWIERDZENIE 4.4.3.** *Przyjmijmy zapis Def. 161 oraz 169 i niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ). Struktura metryczna  $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  o sygnaturze  $(p, n-p)$ ,  $p \in \overline{1, n-1}$  istnieje na  $\mathbb{V}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbb{V}$  można przedstawić jako sumę Whitneya*

$$(4.4.3) \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}^+ \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}^-$$

podwiązek wektorowych:

$$(\mathbb{V}^+, B, \mathbb{R}^{\times p}, \pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{V}^+})$$

oraz

$$(\mathbb{V}^-, B, \mathbb{R}^{\times n-p}, \pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{V}^-}),$$

przy czym odnośne włókna zadają wówczas rozkład włókna wiązki  $\mathbb{V}$  na sumę ortogonalną

$$\forall_{x \in B} : \mathbb{V}_x = \mathbb{V}_x^+ \oplus_{Q_{g(x)}} \mathbb{V}_x^-$$

zgodny z tezą Tw. 1.2.3, tj. taki, przy którym

$$\pm Q_{g(x)} \upharpoonright_{\mathbb{V}_x^{\pm}} > 0,$$

i podwiązki  $\mathbb{V}^\pm$  są maksymalne w tym sensie, że nie istnieje podwiązka wektorowa  $\mathbb{W}^+ \subset \mathbb{V}$  o własnościach

$$\mathbb{W}^+ \not\supseteq \mathbb{V}^+ \quad \wedge \quad Q_g \upharpoonright_{\mathbb{W}^+} > 0 \quad \wedge \quad \mathbb{W}^+ \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}^- = \mathbb{V},$$

ani też podwiązka wektorowa  $\mathbb{W}^- \subset \mathbb{V}$  o własnościach

$$\mathbb{W}^- \not\supseteq \mathbb{V}^- \quad \wedge \quad Q_g \upharpoonright_{\mathbb{W}^-} < 0 \quad \wedge \quad \mathbb{V}^+ \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{W}^- = \mathbb{V}.$$

W takim przypadku podwiązkę  $\mathbb{V}^+$  nazywamy **maksymalną podwiązką przestrzenną wiązki**  $\mathbb{V}$ , podwiązkę  $\mathbb{V}^-$  zaś – **maksymalną podwiązką czasową wiązki**  $\mathbb{V}$ . ■

*Dowód:* Załóżmy najpierw, że dany jest rozkład (4.4.3) i niechaj  $g_{\mathbb{R}} \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  będzie riemannowską strukturą metryczną na  $\mathbb{V}$  skonstruowaną w dowodzie Tw. 4.4.1, orzekającego o jej istnieniu. Postulowaną strukturę metryczną  $g$  o nietrywialnej sygnaturze otrzymujemy, położywszy

$$g := g_{\mathbb{R}} \upharpoonright_{\mathbb{V}^+ \times_B \mathbb{V}^+} \oplus (-g_{\mathbb{R}} \upharpoonright_{\mathbb{V}^- \times_B \mathbb{V}^-}).$$

Dowód implikacji odwrotnej wymaga znajomości „efektu Higgsa” i dyskusji maksymalnych podgrup zwartych grupy Lorentza (alternatywne dowody, jak ten pochodzący od Gilkeya, mają poważne luki logiczne), więc pojawi się później. □

**TIWIERDZENIE 4.4.4.** *Przyjmijmy zapis Def. 171 oraz Tw. 4.4.3 i niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{x^n}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) wyposażoną w strukturę metryczną  $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  o sygnaturze  $(p, n-p)$ ,  $p \in \overline{1, n-1}$ . Wiązka  $\mathbb{V}$  jest orientowalna przestrzennie (wzgl. czasowo) wtedy i tylko wtedy, gdy jej maksymalna podwiązka przestrzenna  $\mathbb{V}^+$  (wzgl. czasowa  $\mathbb{V}^-$ ) jest orientowalna, w szczególności więc gdy  $\mathbb{V}^+$  (wzgl.  $\mathbb{V}^-$ ) spełnia warunki wymienione w tezie Tw. 4.4.2.* ■

*Dowód:* W świetle dowodu Tw. 4.4.3 istnienie struktury metrycznej  $g$  o sygnaturze  $(p, n-p)$  implikuje redukowalność wiązki reperów wzdłuż monomorfizmu

$$J_{\mathcal{O}_{\mathbb{R}(p)} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}(n-p)}} : \mathcal{O}_{\mathbb{R}(p)} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}(n-p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{R}(p, n-p)} : (A, B) \longmapsto A \oplus B,$$

w którego zapisie  $A \oplus B$  jest endomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}^{x^p} \oplus \mathbb{R}^{x^{n-p}} \cong \mathbb{R}^{x^n}$ . W świetle Stw. 214 przesądza to o istnieniu trywializacji lokalnych

$$\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{x^p} \oplus \mathbb{R}^{x^{n-p}}) \cong \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x^n}$$

wiązki  $\mathbb{V}$  o odwzorowaniach przejścia

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow J_{\mathcal{O}_{\mathbb{R}(p)} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}(n-p)}}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}(p)} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}(n-p)}).$$

Maksymalna podwiązka przestrzenna  $\mathbb{V}^+ \subset \mathbb{V}$  dziedziczy tym samym trywializację o odwzorowaniach przejścia

$$g_{ij}^+ : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow J_{\mathcal{O}_{\mathbb{R}(p)} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}(n-p)}}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}(p)} \times \{\mathbf{1}_{n-p}\}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{R}(p)}.$$

Orientowalność  $\mathbb{V}^+$  jest równoznaczna z dalszą redukcją jej grupy strukturalnej  $J_{\mathcal{O}_{\mathbb{R}(p)} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}(n-p)}}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}(p)} \times \{\mathbf{1}_{n-p}\})$  do podgrupy izomorficznej z  $SO_{\mathbb{R}(p)}$ , co ostatecznie pozwala ograniczyć grupę strukturalną sumy Whitneya  $\mathbb{V}^+ \oplus_{\mathbb{K}, B} \mathbb{V}^- \cong \mathbb{V}$  do postaci

$$J_{\mathcal{O}_{\mathbb{R}(p)} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}(n-p)}}(SO_{\mathbb{R}(p)} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}(n-p)})$$

$$\begin{aligned}
&\equiv J_{O_{\mathbb{R}}(p) \times O_{\mathbb{R}}(n-p)}(\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p) \times (\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(n-p) \sqcup P_{e_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(n-p))) \\
&= J_{O_{\mathbb{R}}(p) \times O_{\mathbb{R}}(n-p)}((\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p) \times \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(n-p)) \sqcup (\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p) \times P_{e_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(n-p))) \\
&\subset \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \sqcup P_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, n-p).
\end{aligned}$$

Powyższe rozumowanie bez trudu odwracamy na gruncie Tw. ?? (o redukcji grupy strukturalnej do maksymalnej podgrupy zwartej – pojawi się później), zauważając, że maksymalna podgrupa zwarta grupy  $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \sqcup P_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \subset O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$  to (obraz względem włożenia kanonicznego w grupę  $O_{\mathbb{R}}(p, n-p)$  jej podgrupy)  $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p) \times O_{\mathbb{R}}(n-p)$ .

Dowód w przypadku maksymalnej podwiązki czasowej przebiega w pełni analogicznie.  $\square$

**DEFINICJA 172.** Przyjmijmy zapis Def. 165 i 171. **Orientacja na wiązce wektorowej**  $(V, B, \mathbb{R}^{x_n}, \pi_V)$  (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) wyposażonej w strukturę metryczną o sygnaturze  $(p, q)$  i względem tej struktury orientowalnej to wybór podwiązki zredukowanej (w rozumieniu Def. 167)

$$F_{\mathrm{SO}} V \subset F_O V$$

wzdłuż włożenia kanonicznego

$$J_{\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(n)} : \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(n) \rightarrow O_{\mathbb{R}}(p, q)$$

lub – równoważnie – wybór nigdzie nie znikającego globalnego cięcia wiązki wyznacznikowej  $\det V$ .

W szczególności **orientacja na rozmaitości różniczkowalnej** orientowalnej to orientacja na jej wiązce stycznej.

Analogicznie określamy **orientację przestrzenną** oraz **orientację czasową** na wiązce wektorowej i na rozmaitości.  $\blacktriangle$

**UWAGA 75.** Wiązka wyznacznikowa  $\det V$  jest wiązką liniową, przeto warunek orientowalności wiązki wektorowej  $V$  wysłowiony w Stw. 253 jest w świetle Stw. 197 tożsamy z warunkiem globalnej trywialności  $\det V$ . Przy tym pojawiają się naturalnie dwie rozłączne klasy abstrakcji *nigdzie nieznikających* cięć  $\det V$  (tj. orientacji) względem relacji homotopijnej (wzgl. dyfeotopijnej) równoważności, którą definiujemy, jak następuje: nigdzie nieznikające cięcia  $\sigma_\alpha : B \rightarrow \det V \setminus \mathbf{0}_{\det V}(B) \subset \det V$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  są równoważne, jeśli istnieje ciągłe (wzgl. gładkie klasy  $C^k$ ) odwzorowanie

$$h : [0, 1] \times B \rightarrow \det V \setminus \mathbf{0}_{\det V}(B) : (t, x) \mapsto h_t(x)$$

o własnościach

$$h_0 = \sigma_1 \quad \wedge \quad h_1 = \sigma_2.$$

Należy podkreślić, że przeciwdziedzina  $h$  jest wiązką wyznacznikową z *wyjętym cięciem zerowym*, każde więc z odwzorowań  $h_t : B \rightarrow \det V \setminus \mathbf{0}_{\det V}(B)$ ,  $t \in [0, 1]$  jest nigdzie nieznikającym cięciem (globalnym)  $\det V$ . Obecność dwóch nierównoważnych klas orientacji na  $V$  objawia się także bezpośrednio w opisie lokalnym przedstawionym w tezie i dowodzie Tw. 4.4.2, o czym przekonamy się obecnie. Niechaj



$\tau_i : \pi_{\det \mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}$ ,  $i \in I$  będzie rodziną trywializacji lokalnych wiązki wyznacznikowej stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi wiązki reperów ortonormalnych o (zredukowanych) odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{O}_R(p, n-p)$ . Odwzorowania przejścia dla tej rodziny trywializacji przyjmują znajomą postać

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\circlearrowleft} (x, r) \mapsto (x, \gamma_{ij}(x) \cdot r),$$

przy czym – zgodnie z wprowadzoną wcześniej notacją –

$$\gamma_{ij} = \det_{(n)} \circ g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

W świetle Stw. 197 istnienie trywializacji  $\tau_i$  jest równoznaczne z istnieniem cięć lokalnych, które konstruujemy według przepisu podanego w dowodzie tegoż stwierdzenia,

$$\sigma_{\tau_i} : \mathcal{O}_i \rightarrow \det \mathbb{V} : x \mapsto \tau_i^{-1}(x, 1).$$

Założenie o orientowalności  $\mathbb{V}$  daje nam do ręki rodzinę odwzorowań lokalnie stałych  $\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ,  $i \in I$  o własności (4.4.2), których możemy użyć do zdefiniowania nowych cięć lokalnych

$$\tilde{\sigma}_{\tau_i} := \sigma_{\tau_i} \cdot \text{Inv} \circ \eta_i, \quad i \in I.$$

Bez trudu przekonujemy się, że te ostatnie są ograniczeniami cięcia globalnego, o którym jest mowa wyżej, oto bowiem w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\tau_j}(x) &= \eta_j(x)^{-1} \cdot \tau_j^{-1}(x, 1) = \eta_j(x)^{-1} \cdot \tau_i^{-1}(x, \gamma_{ij}(x)) = \eta_j(x)^{-1} \cdot \gamma_{ij}(x) \cdot \tau_i^{-1}(x, 1) \\ &= \eta_i(x)^{-1} \cdot \tau_i^{-1}(x, 1) \equiv \tilde{\sigma}_{\tau_i}(x). \end{aligned}$$

W wyborze danych trywializujących (globalnie)  $\{\eta_i\}_{i \in I}$  ogranicza nas jedynie warunek (4.4.2), przeto dowolne dwie rodziny takich danych:  $\{\eta_i^\alpha\}_{i \in I}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  spełniają warunki

$$(\eta_j^2 \cdot \text{Inv} \circ \eta_i^2) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = \gamma_{ij} = (\eta_j^1 \cdot \text{Inv} \circ \eta_i^1) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\emptyset},$$

z których dla odwzorowań

$$\Delta_i := \eta_i^2 \cdot \text{Inv} \circ \eta_i^1 : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

wyprowadzamy **warunek 0-kocyklu**

$$\forall_{(i,j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\emptyset}} : \delta \Delta_{ij} = (\Delta_j \cdot \text{Inv} \circ \Delta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = 1.$$

Odwzorowania te są zatem ograniczeniami odwzorowania gładkiego

$$\Delta : B \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad \Delta \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} \equiv \Delta_i,$$

czyli stałego na spójnych składowych bazy (tj. w istocie należącego do  $\mathbb{Z}_2^{|\pi_0(B)|}$ , gdzie  $|\pi_0(B)|$  jest liczbą spójnych składowych  $B$ ). Zauważmy, że przejściu

$$\eta_i \mapsto \Delta \cdot \eta_i^1, \quad i \in I$$

towarzyszy (globalna) transformacja znaku skonstruowanego powyżej cięcia globalnego,

$$\tilde{\sigma}_{\tau_i} \mapsto \Delta^{-1} \cdot \tilde{\sigma}_{\tau_i} \equiv \Delta \cdot \tilde{\sigma}_{\tau_i},$$

przy czym ilekroć  $\Delta = -1$  otrzymujemy tym sposobem cięcie homotopijnie nierównoważne (w sensie sprecyzowanym wcześniej) z wyjściowym, reprezentujące nierównoważną wyjściowej orientację na  $\mathbb{V}$ .

Nasze rozumowanie podsumowujemy w poniższym

**WNIOSEK 4.** *Ilościową miarą swobody nierównoważnych wyborów orientacji na (orientowalnej) wiązce wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$  wyposażonej w strukturę metryczną  $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  o sygnaturze  $(p, n-p)$ ,  $p \in \overline{0, n}$  jest określona nad dowolnie rozdrobnionym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O}$  rodzina danych lokalnych  $\{ \Delta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}_2 \}_{i \in I}$  spełniających warunek 0-kocyklu*

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}} : \check{\delta} \Delta_{ij} = 1.$$

*Relacja między dowolnymi dwiema orientacjami na  $\mathbb{V}$ , rozumianymi jako redukcje wiązki reperów ortogonalnych  $F_{\mathcal{O}} \mathbb{V}$  wzdłuż włożenia kanonicznego  $J_{\text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, n-p)} : \text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, n-p) \rightarrow \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p)$  o zdefiniowanych w dowodzie Tw. 4.4.2 danych lokalnych  $\{ h_i^{\alpha} : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{O}_{\mathbb{R}}(p, n-p) \}_{i \in I}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , jest ustalana przez (stosowne) dane lokalne  $\Delta_i$  według schematu*

$$\det_{(n)} \circ h^2 = \Delta \cdot \det_{(n)} \circ h^1,$$

*przy czym **klasy orientacji** wiązki  $\mathbb{V}$  są określone jako klasy abstrakcji relacji równoważności*

$$h^2 \sim_{\check{\delta}} h^1 \iff \Delta := \det_{(n)} \circ h^2 \cdot \text{Inv} \circ \det_{(n)} \circ h^1 \equiv 1.$$

⊗

∧

## Wiązka zewnętrzna rozmaitości w obecności metryki i orientacji

### 1. Gęstości

DEFINICJA 173. Przyjmijmy zapis Def. 129 i 134 oraz Przykł. 38 (2) i niechaj  $(V, B, \mathbb{R}^{\times n}, \pi_E)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ). Ustalmy (dowolnie)  $s \in \mathbb{N}$  i określmy działanie grupy  $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n)$  na rozmaitości  $\mathbb{R}$  wzorem

$$D_s : \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(n) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (A, r) \longmapsto |\det_{(n)} A|^{-s} \cdot r.$$

**Wiązka gęstości stopnia  $s$  na wiązce wektorowej** to wiązka liniowa nad  $\mathbb{R}$  postaci

$$(|\wedge|^s(V) \equiv \mathrm{F}_{\mathrm{GL}} V \times_{D_s} \mathbb{R}, B, \mathbb{R}),$$

czyli wiązka stowarzyszona z wiązką reperów  $V$  poprzez działanie  $D_s$ . Cięcia (globalne) wiązki liniowej noszą miano **gęstości stopnia  $s$  na wiązce  $V$** .

Wiązkę gęstości stopnia  $s$  na wiązce stycznej  $TM$  rozmaitości różniczkowalnej  $M$  nazywamy **wiązką gęstości stopnia  $s$  na rozmaitości  $M$** , jej cięcia zaś – **gęstości stopnia  $s$  na rozmaitości  $M$** . ▲

### 2. Izomorfizmy muzyczne

#### 3. Operator Hodge’a

DEFINICJA 174. Przyjmijmy zapis Def. 78 ... i niechaj  $((M, \mathcal{F}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$  będzie rozmaitością różniczkowalną (klasy  $C^k$ ). **Operator Hodge’a** na  $\Omega^*(M)$  to... ▲

#### 4. Całkowanie na rozmaitości i twierdzenie Stokes’a

DEFINICJA 175. Przyjmijmy zapis Def. 173 ... i niechaj  $((M, \mathcal{F}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$  będzie rozmaitością różniczkowalną (klasy  $C^k$ ). **Całka z gęstości stopnia 1**  $\omega \in \Gamma(|\wedge|^1(V))$  to... (wersja minimalistyczna!!!) ▲

TWIERDZENIE 4.5.1 (Stokes’a). *Przyjmijmy zapis...* ■

### 5. Uogólniony lemat Poincaré'go

TWIERDZENIE 4.5.2 (Uogólniony lemat Poincaré'go). *Przyjmijmy zapis...*

■

Dowód:

□

## Geometryczne różniczkowanie pól tensorowych

DEFINICJA 176. Przyjmijmy zapis Def. **Pochodna Liego** to jedyne odwzorowanie... ‘

▲

STWIERDZENIE 254. Przyjmijmy zapis Def. 162, (dowodu) Tw. 1.4.20 oraz Przykł. 44 i niechaj  $\mathcal{T}$  będzie polem tensorów typu  $(k, l)$  na rozmaitości różniczkowalnej (klasy  $C^{k+1}$ )  $(M, \mathcal{A})$ , a  $\mathcal{V}$  – polem wektorowym na tejże rozmaitości. Pochodna Liego pola  $\mathcal{T}$  wzdłuż pola wektorowego  $\mathcal{V}$  wyraża się wzorem

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\mathcal{T} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(g_t^{\mathcal{V}})^* \mathcal{T} - \mathcal{T}}{t}.$$

■

Dowód:

□

STWIERDZENIE 255 (Magiczna formuła Cartana). Przyjmijmy zapis...

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\omega = \mathcal{V} \lrcorner d\omega + d(\mathcal{V} \lrcorner \omega)$$

■

Dowód:

□

STWIERDZENIE 256. Podstawowe własności pochodnej Liego pól wektorowych i form różniczkowych

- (i)  $[\mathcal{L}_{\mathcal{V}}, d] = 0$
- (ii)  $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(\mathcal{W} \lrcorner \omega) = [\mathcal{V}, \mathcal{W}] \lrcorner \omega + \mathcal{W} \lrcorner \mathcal{L}_{\mathcal{V}}\omega$

■

Dowód:

□

DEFINICJA 177. Przyjmijmy zapis Def. 170 oraz 176 i niechaj  $(M, g)$  będzie rozmaitością metryczną (klasy  $C^k$ ). **Pole Killinga metryki**  $g$  na  $M$  to dowolne pole wektorowe  $\mathcal{K} \in \Gamma(TM)$  spełniające warunek

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}}g = 0.$$

▲

UWAGA 76. Wyprowadzenie równań Killinga...

▯

STWIERDZENIE 257. *Komutator pary pól Killinga dowolnej metryki jest także polem Killinga tej metryki. Pola Killinga rozpinają zatem podalgebrę w algebrze Liego pól wektorowych na danej rozmaitości (z komutatorem jako nawiasem Liego).*

■

Dowód:

□

Część 5

Wiązki Clifforda i spinorowe

Qui bono?



Rozdział 5.1

## Struktura Spin na wiązce wektorowej

Rozdział 5.2

## Geometryzacja algebr i modułów Clifforda

Rozdział 5.3

## Powiązanie spinowe i operator Diraca

## Część 6

# Wiązki włókniste w teorii pola

DEFINICJA 178. Przyjmijmy zapis Def. 128 i 175, Cor. 9, Przykł. 36 (5) oraz Uwagi 43. Niechaj  $\Sigma$  będzie rozmaitością różniczkowalną klasy  $C^2$  wyposażoną w strukturę metryczną  $g \in \Gamma(T^*\Sigma \otimes_{\mathbb{R},\Sigma} T^*\Sigma)$  (klasy  $C^2$ ) o sygnaturze  $(d, 1)$ ,  $d \in \mathbb{N}$  i niech  $F$  będzie rozmaitością klasy  $C^k$  o grupie automorfizmów (dyfeomorfizmów zachowujących ewentualną dodatkową strukturę, np. liniową lub torsora grupy)  $\text{Aut}(F)$ . **Lagranżowska teoria pola typu  $F$  nad  $(\Sigma, g)$**  to para  $\mathcal{F} := ((\mathcal{F}, \Sigma, F, \pi_{\mathcal{F}}), \mathcal{A}_{\text{DF}})$  złożona z wiązki włóknistej (klasy  $C^2$ )  $(\mathcal{F}, \Sigma, F, \pi_{\mathcal{F}})$ , noszącej miano **kowariantnej wiązki konfiguracyjnej typu  $F$**  (albo po prostu **wiązki pól typu  $F$** ), o włóknie typowym  $F$  i trywializacjach lokalnych

$$\tau_i : \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times F, \quad i \in I$$

stowarzyszonych z pokryciem otwartym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $\Sigma$ , zwanej **czasoprzecznieniem**, oraz funkcjonału klasy  $C^2$

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}^{\mathcal{F}} : \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \text{U}(1),$$

zwanego **amplitudą Diraca–Feynmana**, którego punkty krytyczne są określane jako **klasyczne konfiguracje pola typu  $F$** . Przy tym zakładamy istnienie funkcjonału<sup>1</sup>

$$S_{\mathcal{F}} : \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

wyznaczającego amplitudę Diraca–Feynmana wedle wzoru

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}^{\mathcal{F}} = \exp \circ S_{\mathcal{F}},$$

który nazywamy **funkcjonałem działania teorii pola  $\mathcal{F}$** , a który jest zadany w postaci klasy *modulo*  $2\pi$  całek po  $\Sigma$  z odwzorowania

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} : J^1\mathcal{F} \longrightarrow |\wedge|^1(T\Sigma)$$

zwanego **gęstością lagranżjanu teorii pola  $\mathcal{F}$** , tj. dla dowolnego cięcia  $\phi \in \Gamma(\mathcal{F})$  zachodzi

$$S_{\mathcal{F}}[\phi] = \int_{\Sigma} \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(j^1\phi) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Cięcia globalne wiązki  $\mathcal{F}$  noszą w tym kontekście przydomek **pól typu  $F$** .

**Symetrią globalną** teorii pola  $\mathcal{F}$  nazywamy dowolny automorfizm  $(\Phi, \text{id}_{\Sigma}) \in \text{Aut}_{\text{Bun}(\Sigma)}(\mathcal{F}|\Sigma)$  wiązki pól tejsze teorii modelowany (lokalnie) na automorfizmie włókna typowego  $\varphi \in \text{Aut}_{\text{Man}^{(2)}}(F)$  w sensie wyrażanym przez rodzinę diagramów przemiennej indeksowaną przez  $I \ni i$

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times F & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{O}_i} \times \varphi} & \mathcal{O}_i \times F \end{array},$$

o własności

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}^{\mathcal{F}} \circ \Phi = \mathcal{A}_{\text{DF}}^{\mathcal{F}}.$$

<sup>1</sup>Wybór przeciwdziedziny funkcjonału działania zostanie wyjaśniony – *a posteriori* – na etapie późniejszym, kiedy przedyskutujemy kwantowomechaniczną interpretację amplitud Diraca–Feynmana.

Grupie złożonej ze wszystkich automorfizmów wiązki pól opisanej wyżej postaci nadajemy miano **grupy symetrii globalnych teorii pola**  $\mathcal{F}$ . Będziemy ją oznaczać symbolem

$$\text{Symm}(\mathcal{F} \curvearrowright F).$$

▲

W dalszej części wykładu przeprowadzimy szczegółowe studium przypadku teorii pola z ładunkiem topologicznym, które objawi naturalność struktury wiązki włóknistej w opisie elementarnych zjawisk fizycznych i zarazem pozwoli nam uzyskać wgląd w metody rekonstrukcji – zgodnie z postulatem określoności amplitud Diraca–Feynmana – działania klasycznego na podstawie znajomości równań ruchu, tudzież – w uniwersalny schemat identyfikacji i ulokowania symetrii globalnych modelowanych przez nas zjawisk.

### 1. Teoria pola z ładunkiem topologicznym – studium przypadku

Przedmiotem naszej analizy będzie mechanika punktu materialnego obdarzonego masą spoczynkową  $m \in \mathbb{R}_{>0}$  oraz ładunkiem elektrycznym  $q \in \mathbb{R}$  w rozmaitości różniczkowalnej  $(M, \mathcal{A})$  będącej nośnikiem pola grawitacyjnego reprezentowanego przez metrykę  $g \in \Gamma(\Gamma^*M \otimes \Gamma^*M)$  o sygnaturze  $(D, 1)$  oraz pola elektromagnetycznego reprezentowanego przez tensor Maxwella<sup>2</sup>  $F \in \Omega^2(M)$ . Mamy tu zatem do czynienia z teorią pola nad jednowymiarową czasoprzestrzenią  $\Lambda = ]t_0, t_1[ \subset \mathbb{R}$  (tzw. linią świata) z metryką o sygnaturze  $(0, 1)$ .

Celem naszym będzie zrozumienie struktury różniczkowo-geometrycznej koniecznej do zdefiniowania funkcjonału działania

$$S : \Gamma(\Lambda \times M) \equiv C^\infty(]t_0, t_k[, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : x \longmapsto S[x]$$

określonego na przestrzeni gładkich ścieżek w rozmaitości (pseudo)riemannowskiej  $(M, g)$ , dla którego zasada najmniejszego działania przy warunku brzegowym Dirichleta<sup>3</sup> odtwarza (relatywistyczną) formułę Lorentza ( $\tau \in ]t_0, t_k[$ )

$$m g_{\lambda\mu}(x(\tau)) \left( \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}(\tau) + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}(x(\tau)) \frac{dx^\nu}{d\tau}(\tau) \frac{dx^\rho}{d\tau}(\tau) \right) = q F_{\lambda\mu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) \quad (6.0.1)$$

na 4-siłę działającą na punkt materialny o masie  $m$  i ładunku  $q$ , z przyczynkiem od pola grawitacyjnego o lokalnej reprezentacji współrzędniowej  $g(x) = g_{\mu\nu}(x) \triangleright dx^\mu \otimes dx^\nu$  determinowanym przez symbole Christoffela powiązania metrycznego na wiązce stycznnej

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} (g^{-1})^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}).$$

<sup>2</sup>Związek tensora Maxwella z obiektami modelującymi pola: elektryczne i magnetyczne w czasoprzestrzeni Minkowskiego  $\mathbb{R}^{1,3} \ni (x^\mu) \equiv (t, x, y, z)$  (z wyróżnioną współrzędną czasową  $t$ ) w XIX-wiecznym ich opisie fenomenologicznym (w próżni, przy wszystkich stałych materialnych i prędkości światła przezornie włączonych w definicję samych pól), stanowiącym podstawę unifikacji teoretycznej zaproponowanej przez Faradaya i Maxwella, określa formuła

$$F(t, x^l) \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(t, x^i) dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv -E_i(t, x^l) dt \wedge dx^i + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B^i(t, x^l) dx^j \wedge dx^k,$$

w której składowe  $F_{i0} = E_i$  oraz  $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k$  identyfikujemy – odpowiednio – ze składowymi 1-formy natężenia pola elektrycznego  $E(t, x^l) = E_i(t, x^l) dx^i$  oraz składowymi pola indukcji magnetycznej  $B(t, x^l) = B^i(t, x^l) \partial_i$ .

<sup>3</sup>Można narzucić na odwzorowania także inne warunki brzegowe, które zapewnią stacjonarność funkcjonału działania przy spełnionych równaniach Eulera–Lagrange’a wzdłuż ścieżki.

Uwzględnisz geometrię pola elektromagnetycznego opisaną równaniem

$$dF = 0,$$

stwierdzamy – na gruncie Tw. 4.5.2 – istnienie lokalnego potencjału  $A \in \Omega^1(\mathcal{O})$  tensora Maxwella  $F$  na dowolnym ściągającym obszarze  $\mathcal{O} \subset M$ . Rzecz jasna, każdą trajektorię (otwartą) punktu materialnego możemy zanurzyć w pewnym jej ściągającym otoczeniu tubularnym w  $M$  będącym nośnikiem potencjału  $A$ , a wtedy łatwo przekonujemy się, że stosowny funkcjonal działania można wybrać w postaci

$$(6.0.2) \quad S[x] = \frac{m}{2} \int_{\Lambda} \text{Vol}(\Lambda) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \int_{\Lambda} x^* A + 2\pi Z,$$

w której zapisie  $\widehat{t} = \partial_{\tau}$  to wektor styczny do linii świata  $\Lambda$ , a  $\text{Vol}(\Lambda) \equiv \text{Vol}(\Lambda; -1)$  to forma objętości<sup>4</sup> na  $\Lambda$ . Powyższa formuła stanowi elementarny punkt wyjścia do naszych dalszych rozważań.

Łatwo wyobrazić sobie okoliczności, w których skonstruowany tu opis lagranżowski mechaniki punktu materialnego przy użyciu *globalnego* (wzdłuż trajektorii) potencjału tensora Maxwella staje się niewystarczający. Ich zaistnienie wymaga obecności w przestrzeni  $M$  „defektów topologicznych”, które czynią ją niejedno-spójną, tj. prowadzą do pojawienia się w niej nieściągających krzywych zamkniętych – o tym, że rozważania takie nie są bynajmniej pozbawione sensu empirycznego, przekonuje lektura klasycznej pracy [AB59] Aharonova i Bohma. W takim przypadku wcześniejszy argument dotyczący *pojedynczej* trajektorii<sup>5</sup> otwartej pozostaje w mocy (z przyczyn fundamentalnych nie rozpatrujemy czasoprzestrzeni dopuszczających zamknięte krzywe czasowe), wpływ nietrywialnej topologii czasoprzestrzeni ujawnia się natomiast, ilekroć porównujemy wkłady do działania pochodzące od *różnych trajektorii o wspólnym początku i końcu*. Jak zobaczymy już wkrótce, porównanie takie nabiera sensu ilościowego w rozważaniach kwantowomechanicznych dotyczących prawdopodobieństwa wyboru trajektorii przez punkt materialny o dynamice (klasycznej) opisaną przez funkcjonal działania  $S$ . Zważywszy addytywność względem dziedziny całkowania całki Riemanna, której używamy w definicji funkcjonału działania, możemy czysto formalnie reprezentować różnicę dowolnej pary trajektorii fizykalnych (w grupoidzie ścieżek w  $M$ ) jako pętlę w  $M$ , dlatego też w dalszych naszych rozważaniach w pierwszej kolejności zajmiemy się ustaleniem struktury niezbędnej do nadania sensu funkcjonałowi działania na przestrzeni „trajektorii” spełniających warunek brzegowy postaci

$$x(t_0) = x(t_k),$$

czyli na przestrzeni pętli,

$$x \in C^{\infty}(\mathbb{S}^1; M) \equiv LM.$$

<sup>4</sup>Wypisana tu postać formy objętości zawiera metrykę na linii świata jedynie *implicit*, w postaci globalnie trywialnej. Istnieje ogólniejsze sformułowanie rozważanej teorii, zadawane przez tzw. funkcjonal (typu) Poljakowa, który pozwala uwzględnić nietrywialną metrykę na linii świata i tym samym przejść do opisu niezmienniczego względem dowolnych reparametryzacji linii świata zachowujących jej orientację, patrz: [Pol98].

<sup>5</sup>Podkreślmy: w definicję trajektorii klasycznej jest wpisany czasowy charakter jej wektora stycznego.

Dopiero po zbadaniu tej klasy zanurzeń linii świata w czasoprzestrzeni  $M$  powrócimy do konstrukcji spójnego opisu trajektorii otwartych, którego postać zapostulowana uprzednio będzie wymagała – jak pokaże dowodnie nasza analiza – pewnych poprawek natury strukturalnej.

Spróbujmy zatem skonstruować funkcjonal działania na przestrzeni pętli  $LM$  o tej własności (jedynej istotnej), że zasada najmniejszego działania zastosowana do niego daje równania (6.0.1) jako równania Eulera–Lagrange’a. Przy tym na gruncie naszej dotychczasowej dyskusji nie możemy zakładać, że pętle leżą w obszarze istnienia gładkiego potencjału pola elektromagnetycznego. W świetle Tw. 1.4.17 możemy natomiast zawsze wybrać *dobrze* pokrycie otwarte  $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  rozmaitości  $M$  (w rozumieniu Def. 66), które daje nam do ręki rodzinę lokalnych potencjałów (w ogólności żaden z nich nie przedłuża się do gładkiej 1-formy na rozmaitości  $M$ )

$$F \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} =: dA_i, \quad A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i), \quad i \in I.$$

Uczyniwszy to, dokonajmy następnie **tesselizacji** linii świata, czyli jej podziału na odcinki  $e \subset \mathbb{S}^1$  (tworzące zbiór **krawędzi tesselizacji**  $E$ ) spełniające układ warunków

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{e \in E} e = \mathbb{S}^1 \\ \forall_{e_1, e_2 \in E} : (e_1 = e_2 \vee e_1 \cap e_2 = \emptyset \vee \exists!_{v \in \mathbb{S}^1} : e_1 \cap e_2 = \{v\}) \end{array} \right\},$$

zakładając przy tym, że zbiór krawędzi tesselizacji i ich jednopunktowych przecięć (zwanym **wierzchołkami tesselizacji** i tworzącym zbiór wierzchołków  $V$ ), który będziemy oznaczać symbolem

$$\Delta_{\mathbb{S}^1} = E \cup V,$$

spełnia warunek

$$\forall_{e \in E} \exists_{i_e \in I} : x(e) \subset \mathcal{O}_{i_e}$$

dla ustalonej pętli  $x \in LM$ . Wówczas spełniony jest też oczywiście warunek

$$\forall_{v \in V} \exists_{i_v \in I} : x(v) \in \mathcal{O}_{i_v},$$

otrzymujemy zatem odwzorowanie

$$i. : \Delta_{\mathbb{S}^1} \longrightarrow I.$$

Tesselizację o podanej cesze określimy mianem **podporządkowanej pokryciu**  $\mathcal{O}$ . Tak przygotowani możemy już wypisać pierwszą propozycję funkcjonału działania:

$$S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] := \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e}.$$

Kłopot z powyższą definicją polega na jej zależności od dokonanych przez nas *całkowicie arbitralnych* wyborów: otwartego pokrycia (możemy je np. poddawać dalszemu rozdrabnianiu bez utraty jego dobroci), lokalnego potencjału  $A_{i_e}$ , (jest on określony jedynie z dokładnością do lokalnie gładkiej 1-fomy dokładnej) oraz tesselizacji podporządkowanej danemu pokryciu dobremu (wszak możemy przesuwając wierzchołki tesselizacji tak, by ich obrazy pozostawały w wyjściowych przecięciach elementów pokrycia). Okazuje się, że zależności od wszystkich tych wyborów są ze sobą powiązane (ćwiczenie!), skupimy się zatem na tym ostatnim. Rozważmy wierzchołek  $v_{12}$ , w którym spotykają się krawędzie  $e_1$  (wchodzący w sensie orientacji indukowanej z  $\mathbb{S}^1$ ) i  $e_2$  (wychodzący). Wybierzmy punkt  $v'_{12} \in e_2 \setminus \{v_{12}\}$  tak, by było  $x(v'_{12}) \in \mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}$  ( $\exists x(v_{12})$ ) i utwórzmy nową tesselizację  $\Delta'_{\mathbb{S}^1}$  zamieniając



w  $\Delta_{S^1}$  trójkę  $(e_1, e_2, v_{12})$  na trójkę  $(e'_1 = e_1 \cup \delta, e'_2 = e_2 \setminus \delta \cup \{v'_{12}\}, v'_{12})$ , gdzie  $\delta$  jest odcinkiem łączącym  $v_{12}$  z  $v'_{12}$ . Porównując wartości funkcjonału działania otrzymane dla każdej z dwu tesselizacji, otrzymujemy

$$S_{\Delta'_{S^1}}^{(0)}[x] - S_{\Delta_{S^1}}^{(0)}[x] = q \int_{\delta} (x \upharpoonright_{\delta})^* (A_{i_{e_1}} - A_{i_{e_2}}).$$

Zważywszy, że  $x(\delta) \subset \mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}$ , mamy w istocie do czynienia z 1-formą  $(A_{i_{e_1}} - A_{i_{e_2}}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}}$ . Jednakowoż wobec ściągłości każdego (niepustego) przecięcia  $\mathcal{O}_{ij}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\emptyset}$  znajdujemy na nim lokalnie gładką funkcję  $f_{ij}$  spełniającą równość

$$(6.0.3) \quad (A_j - A_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} =: df_{ij}, \quad f_{ij} \in C^{\infty}(\mathcal{O}_{ij}, \mathbb{R}),$$

przy czym możemy zawsze tak wybrać te funkcje, aby spełniony był dodatkowy warunek  $f_{ji} = -f_{ij}$ . (Zauważmy, w nawiązaniu do poprzedniej uwagi o zależności naszej definicji funkcjonału działania od dokonanych wyborów, że powyższa dyskusja dostarcza zarazem *pełnej* kwantyfikacji dowolności wyboru potencjału lokalnego  $A_i$  na ustalonym zbiorze  $\mathcal{O}_i$ .) Wykorzystując poczynioną obserwację w połączeniu z Tw. ??, możemy zatem zapisać

$$\begin{aligned} S_{\Delta'_{S^1}}^{(0)}[x] - S_{\Delta_{S^1}}^{(0)}[x] &= q \int_{\delta} (x \upharpoonright_{\delta})^* df_{i_{e_2} i_{e_1}} = q \int_{\partial \delta} (x \upharpoonright_{\delta})^* f_{i_{e_2} i_{e_1}} \\ &\equiv q (f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v_{12})). \end{aligned}$$

Wnioskujemy, że różnica porównywanych funkcjonałów zależy w sposób *funkcyjno-nalny* (a przy tym zasadniczo dowolny) od arbitralnego wyboru położenia wierzchołków tesselizacji, co jest sytuacją niedopuszczalną (taka zależność miałyby wpływ na dynamikę). Zanim ją naprawimy, kierując się wprost wnioskami z przeprowadzonego powyżej rachunku, przyjrzyjmy się bliżej funkcjom  $f_{ij}$ . Oto dla każdego (niepustego) przecięcia  $\mathcal{O}_{ijk}$ ,  $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\emptyset}$  otrzymujemy tożsamość

$$d(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = (A_k - A_j - A_k + A_i + A_j - A_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = 0,$$

która wobec ściągłości przecięcia oznacza istnienie lokalnych stałych  $N_{ijk}$  spełniających równość

$$(6.0.4) \quad (f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = N_{ijk}, \quad N_{ijk} \in \mathbb{R},$$

przy czym stałe te możemy zawsze wybrać tak, aby był spełniony warunek skośnej symetrii  $N_{ijk} = N_{[ijk]}$ . Wykorzystując ostatnią równość, która implikuje – między innymi –

$$f_{i_{e_2} i_{e_1}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}} = (f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}} + N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}},$$

możemy wypisać poprawioną wersję funkcjonału działania:

$$S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] := \frac{m}{2} \int_{S^1} \text{Vol}(S^1) x^* g(\hat{t}, \hat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right)$$

w następującej konwencji:  $\varepsilon_{ev} = 1$ , gdy  $v$  jest na końcu  $e$  (w sensie indukowanej orientacji  $e$ ) i  $\varepsilon_{ev} = -1$ , gdy  $v$  jest na początku  $e$ . Zmiana położenia wierzchołka tesselizacji zmienia wartość poprawionego działania o stałą

$$\begin{aligned} S_{\Delta'_{S^1}}^{(1)}[x] - S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] &= q (f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v_{12})) \\ &+ q (f_{i_{e_1} i_{v'_{12}}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{v'_{12}}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12})) \end{aligned}$$

$$= q(N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v'_{12}}} - N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}) \in \mathbb{R},$$

co w standardowym podejściu do lagranżowskiego opisu mechaniki klasycznej jest całkowicie do przyjęcia. Zauważmy, że obecna definicja jest też niezmiennicza (w sensie szerszym, sprecyzowanym wyżej) względem dopuszczalnych redefinicji potencjałów lokalnych,  $A_i \mapsto A'_i$ , które wobec ściągłości  $\mathcal{O}_i$  wymagają istnienia lokalnie gładkich funkcji  $g_i$  spełniających równości

$$(6.0.5) \quad A'_i - A_i =: db_i, \quad b_i \in C^\infty(\mathcal{O}_i, \mathbb{R}).$$

Istotnie, takiej redefinicji musi towarzyszyć redefinicja funkcji  $f_{ij}$ ,

$$(6.0.6) \quad f'_{ij} = f_{ij} + (b_j - b_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} + d_{ij}, \quad d_{ij} \in \mathbb{R},$$

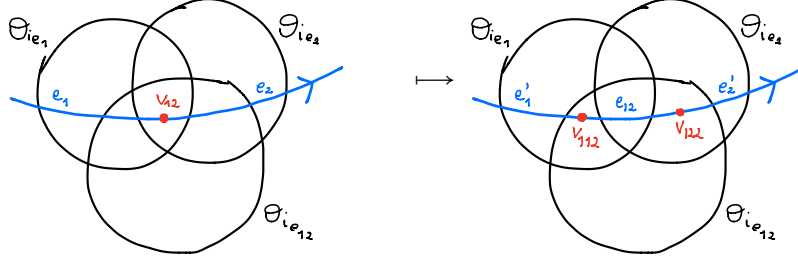
która pozwala uzgodnić formuły (6.0.3) z ich odpowiednikami dla obiektów primowanych, a zatem zastąpienie obiektów nieprimowanych primowanymi w zapisie  $S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}$  jest źródłem poprawki

$$\begin{aligned} S_{\Delta_{S^1}}^{(1)'}[x] &\equiv \frac{m}{2} \int_{S^1} \text{Vol}(S^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A'_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f'_{i_e i_v} \circ x(v) \right) \\ &= S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \left[ \int_{\partial e} b_{i_e} \circ x + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} ((b_{i_v} - b_{i_e}) \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \right] \\ &\equiv S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} (b_{i_e} \circ x(v) + (b_{i_v} - b_{i_e}) \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \\ &\equiv S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} (b_{i_v} \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \\ &= S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} d_{i_e i_v}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika stąd, że każdy wierzchołek jest zarazem końcem jednej z krawędzi tesselizacji ( $\varepsilon_{ev} = 1$ ), jak i początkiem jej następnika ( $\varepsilon_{ev} = -1$ ). Naturalnie, także dopuszczalne redefinicje funkcji  $f_{ij}$  cofniętych do wierzchołków tesselizacji niezwiązane z redefinicjami potencjałów, czyli przesunięcia o stałe (lokalne), nie mają fizycznie obserwowalnych konsekwencji (klasycznie), pozostaje zatem upewnić się, że nasza nowa definicja funkcjonału działania jest niezmiennicza ze względu na rozdrabnianie użytego w niej pokrycia  $\mathcal{O}$  i skorelowane z nim rozdrobnienie tesselizacji linii świata, wzgl. na rozdrabnianie samej tylko tesselizacji na odcinku, którego obraz względem zanurzenia  $x$  leży w przecięciu więcej niż dwóch elementów wyjściowego pokrycia. Rzecz jasna, wystarczy w tym celu sprawdzić zmianą wartości funkcjonału  $S^{(1)}$  przy elementarnym przejściu zilustrowanym na Rys. 1.

Oznaczywszy tesselizację uzyskaną w wyniku zobrazowanego rozdrobnienia (z prawej strony) symbolem  $\Delta_{S^1}^{\text{ref}}$ , wyznaczamy

$$\begin{aligned} &S_{\Delta_{S^1}^{\text{ref}}}^{(1)}[x] - S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] \\ &= q \left( \int_{e_{12} \setminus e_2} (x \upharpoonright_{e_{12} \setminus e_2})^* (A_{i_{e_{12}}} - A_{i_{e_1}}) + \int_{e_{12} \setminus e_1} (x \upharpoonright_{e_{12} \setminus e_1})^* (A_{i_{e_{12}}} - A_{i_{e_2}}) \right. \\ &\quad + f_{i_{e_1} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) - f_{i_{e_{12}} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_{12}} i_{v_{122}}} \circ x(v_{122}) \\ &\quad \left. - f_{i_{e_2} i_{v_{112}}} \circ x(v_{122}) - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) \right) \end{aligned}$$



RYSUNEK 1. Rozdrobnienie tesselizacji fragmentu (zorientowanej) linii świata w obszarze czasoprzestrzeni pokrytym przez trzy zbiory otwarte:  $\mathcal{O}_{i_{e_1}}$ ,  $\mathcal{O}_{i_{e_2}}$  i  $\mathcal{O}_{i_{e_{12}}}$ .

$$\begin{aligned}
 &= q \left( f_{i_{e_1} i_{e_{12}}} \circ x(v_{12}) - f_{i_{e_1} i_{e_{12}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_2} i_{e_{12}}} \circ x(v_{122}) \right. \\
 &\quad - f_{i_{e_2} i_{e_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_1} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) - f_{i_{e_{12}} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_{12}} i_{v_{122}}} \circ x(v_{122}) \\
 &\quad - f_{i_{e_2} i_{v_{112}}} \circ x(v_{122}) - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_{12}} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) \\
 &\quad \left. - f_{i_{e_{12}} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) \right) \\
 &= q \left( N_{i_{e_1} i_{e_{12}} i_{v_{12}}} - N_{i_{e_2} i_{e_{12}} i_{v_{12}}} - N_{i_{e_1} i_{e_{12}} i_{v_{112}}} + N_{i_{e_1} i_{e_{12}} i_{v_{122}}} \right) \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

W standardowym podejściu do lagranżowskiego opisu mechaniki klasycznej możemy zatem uznać otrzymany tu wynik poprawiania wyjściowej definicji funkcjonału działania za satysfakcjonujący i przyjąć jako rygorystyczną definicję tegoż funkcjonału dla zamkniętej linii świata (o wskazanym wcześniej statusie teoretycznym) w ogólnej sytuacji topologicznej formułę

$$(6.0.7) \quad S[x] = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\hat{t}, \hat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right).$$

Z punktu widzenia mechaniki klasycznej problem, przed jakim stanęliśmy na początku niniejszego rozdziału, można uznać za (konstruktywnie) rozwiązany, a używany opis zjawiska propagacji naładowanego elektrycznie punktu materialnego w topologicznie nietrywialnym polu elektromagnetycznym – za rygorystyczny i kompletny. Ażeby postąpić dalej w rozpoczętej tu rekonstrukcji struktury różniczkowo-geometrycznej stowarzyszonej z polem elektromagnetycznym, musimy wyjść poza ramy formalne teorii klasycznej i ustalić bezpośredni związek klasycznego funkcjonału działania z teorią kwantową. Związek taki wyprowadził Dirac w pracy [Dir33] z 1933 r. (jego zapowiedź można też dostrzec we wcześniejszych pracach Brillouina, Eckarta, Kramersa, Wentzela i przede wszystkim Van Vlecka), po czym jego idea została podchwycona i rozwinięta przez Feynmana w jego pracy doktorskiej z 1942 r. pt. “The Principle of Least Action in Quantum Mechanics”, patrz: [Bro05], stając się podstawą konstrukcji Feynmana „sumy po historiach”, sformułowanej w wersji zasadniczo (konceptualnie) kompletnej w pracy [Fey48] z roku 1948. Prześledzimy obecnie pokrótce heurzę Diraca, co pozwoli nam zrozumieć kontekst, w

jakim funkcyjonał działania pojawia się w opisie kwantowomechanicznym opisywanej przezeń dynamiki klasycznej.

Rozważmy układ fizyczny o klasycznych zmiennych kanonicznie sprzężonych  $(q^i, p_i)$ ,  $i \in \overline{1, N}$  ( $N \in \mathbb{N}$  określa tutaj liczbę niezależnych stopni swobody w układzie, których zakresu – odpowiednio  $Q \subset \mathbb{R}^{\times N}$  i  $P \subset \mathbb{R}^{\times N}$  – nie precyzujemy na przyjętym tu poziomie ogólnikowości argumentu) oraz o przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , w której wyróżniamy dwie bazy (zapisane w notacji bra-ket Diraca): bazę stanów własnych  $|\vec{q}\rangle \equiv |q^1, q^2, \dots, q^N\rangle$  operatorów położenia  $\widehat{q}^i$ ,

$$\widehat{q}^i |\vec{q}\rangle = q^i \triangleright |\vec{q}\rangle,$$

oraz bazę stanów własnych  $|\vec{p}\rangle \equiv |p_1, p_2, \dots, p_N\rangle$  operatorów pędu  $\widehat{p}_i$ ,

$$\widehat{p}_i |\vec{p}\rangle = p_i \triangleright |\vec{p}\rangle.$$

Pośród endomorfizmów  $\mathcal{H}$  wyróżnione miejsce zajmuje hamiltonian  $\widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})$  układu kwantowomechanicznego, określający unitarną ewolucję w czasie stanów w obrazie Schrödingera według formuły

$$|X(t_2)\rangle = e^{-\frac{i(t_2-t_1)\triangleright\widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})}{\hbar}} |X(t_1)\rangle, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad X \in \{\vec{q}, \vec{p}\}.$$

Mamy też na  $\mathcal{H}$  formy liniowe  $\langle \vec{q} |$  i  $\langle \vec{p} |$  dualne do  $|\vec{q}\rangle$  i  $|\vec{p}\rangle$  (w sensie ścisłym określanym przez strukturę modelu fizycznego, w szczególności zaś – przez postać jego przestrzeni konfiguracyjnej). Zapiszmy dalej – za Dirackiem – propagator pomiędzy stanem referencyjnym  $|\vec{q}_0\rangle$  a stanem  $|\vec{q}\rangle$  w czasie  $t$  jako

$$(6.0.8) \quad e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\hbar}} := \langle \vec{q} | e^{-\frac{it}{\hbar}\triangleright\widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_0 \rangle \equiv \langle \vec{q} | \vec{q}_0(t) \rangle$$

przy użyciu pewnej funkcji  $\widetilde{S}_{\vec{q}_0}$  o wartościach zespolonych, zawierającej w swej części urojonej proporcjonalnej do stałej Plancka  $\hbar$  informację o amplitudzie prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy rzeczonymi stanami, a w części rzeczywistej – informację o fazie propagatora. Propagator (albo inaczej funkcja falowa) spełnia równanie Schrödingera,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{q} | \vec{q}_0(t) \rangle &= \langle \vec{q} | \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p}) \circ e^{-\frac{it}{\hbar}\triangleright\widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_0 \rangle \\ &= \int_Q d\vec{q}_p \langle \vec{q} | \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p}) | \vec{q}_p \rangle \langle \vec{q}_p | e^{-\frac{it}{\hbar}\triangleright\widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_0 \rangle \\ &= \int_Q d\vec{q}_p \langle \vec{q} | \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p}) | \vec{q}_p \rangle \langle \vec{q}_p | \vec{q}_0(t) \rangle \equiv \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p}) (\langle \vec{q} | \vec{q}_0(t) \rangle), \end{aligned}$$

to zaś tłumaczy się na równanie Hamiltona–Jacobiego dla  $\widetilde{S}$ , oto bowiem np. w reprezentacji (albo ściślej polaryzacji) położeniowej jest

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, \cdot)}{\partial t}(t) \cdot e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\hbar}} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, \cdot)}{\hbar}}(t) = \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p}) \left( e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\cdot, t)}{\hbar}} \right) (\vec{q}) \\ &= H_{\hbar}(\vec{q}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{q}}) \left( e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\cdot, t)}{\hbar}} \right) (\vec{q}), \end{aligned}$$

gdzie  $H_{\hbar}$  to pewna gładka funkcja parametru deformacji  $\hbar$  (której nietrywialność może się brać np. z wyboru uporządkowania operatorów nieprzemiennych) o granicy klasycznej  $H_0$  tożsamej z hamiltonianem klasycznym, a  $\frac{\partial}{\partial \vec{q}} \equiv (\frac{\partial}{\partial q^1}, \frac{\partial}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^N})$ , ponieważ zaś dla dowolnej funkcji różniczkowalnej zmiennych  $\vec{q}$  zachodzi tożsamość

$$e^{-\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\hbar}} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \right) \left( e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\cdot, t)}{\hbar}} \cdot f(\cdot) \right) (\vec{q}) = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial \vec{q}}(\vec{q}) + \frac{\partial \widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\cdot, t)}{\partial \vec{q}}(\vec{q}) f(\vec{q}),$$

przeto ostatecznie otrzymujemy – przy założeniu analitycznej zależności hamiltonianu od pędów uogólnionych – równość

$$-\frac{\partial \tilde{S}_{\tilde{q}_0}(\tilde{q}, \cdot)}{\partial t}(t) = H_{\hbar}(q, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} + \frac{\partial \tilde{S}_{\tilde{q}_0}(\cdot, t)}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q})),$$

która w granicy  $\hbar \rightarrow 0$  przechodzi w klasyczne równanie Hamiltona–Jacobię dla  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \tilde{S}_{\tilde{q}_0} = S_{\tilde{q}_0}$ ,

$$\begin{cases} -\frac{\partial S_{\tilde{q}_0}(\tilde{q}, \cdot)}{\partial t}(t) = H_0(\tilde{q}, \vec{p}) \\ \vec{p} \equiv \frac{\partial S_{\tilde{q}_0}(\cdot, t)}{\partial \tilde{q}}(\tilde{q}) \end{cases}.$$

Jeśli teraz uwzględnic powyższe w (oczywistym) zapisie różniczki zupełnej odwzorowania  $S_{\tilde{q}_0}$ ,

$$dS_{\tilde{q}_0} = \frac{\partial S_{\tilde{q}_0}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial S_{\tilde{q}_0}}{\partial t} dt = p_i dq^i - H_0 dt,$$

to dostajemy równanie różniczkowe

$$\frac{dS_{\tilde{q}_0}}{dt} = p_i \frac{dq^i}{dt} - H_0 \equiv L,$$

przy czym wyrażenie po prawej stronie znaku równości identyfikujemy jako klasyczny lagranżjan teorii,

$$S_{\tilde{q}_0}(\tilde{q}, t) = \int_0^t d\tau L(\tau, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \equiv S_{\tilde{q}_0}[\tilde{q}].$$

Koniec końców otrzymujemy zatem wyrażenie

$$\langle \tilde{q} | e^{-\frac{it}{\hbar} \hat{H}} | \tilde{q}_0 \rangle = e^{\frac{iS_{\tilde{q}_0}[\tilde{q}]}{\hbar}} \cdot e^{\Delta_{\hbar}(\tilde{q}, t; \tilde{q}_0)},$$

w którym podwiódąca poprawka  $\Delta_{\hbar}(\tilde{q}, t; \tilde{q}_0) \in \mathbb{C}$  jest rzędu  $\hbar^0$ .

Na obecnym etapie możemy już doprecyzować wcześniejszą uwagę dotyczącą obserwowalnych konsekwencji wiodącego (w reżymie  $\hbar \approx 0$ ) wkładu do wyrażenia na kwantowomechaniczny propagator klasycznego pochodzącego od klasycznego funkcjonału działania obliczonego na trajektorii układu fizykalnego. Na gruncie interpretacji Borna tegoż propagatora stwierdzamy więc, że wkład taki jest obserwowalny dopiero w sytuacji, w której istnieje kilka trajektorii klasycznych odpowiadających *różnym* wartościom funkcjonału działania. W takiej sytuacji dla każdej pary trajektorii:  $\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t)$ ,  $t \in [0, T]$  możemy oczekiwać interferencji propagatorów (funkcji falowych) o amplitudzie (gęstości prawdopodobieństwa)

$$\begin{aligned} A &= \left| 1 + e^{\frac{i(S_{\tilde{q}_0}[\tilde{q}_2] - S_{\tilde{q}_0}[\tilde{q}_1])}{\hbar}} \right|^2 \cdot (1 + \mathcal{O}(\hbar)) = \left( 1 + \cos \frac{S_{\tilde{q}_0}[\tilde{q}_2] - S_{\tilde{q}_0}[\tilde{q}_1]}{\hbar} \right) \cdot (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \\ &= 4 \cos^2 \frac{S_{\tilde{q}_0}[\tilde{q}_2] - S_{\tilde{q}_0}[\tilde{q}_1]}{2\hbar} \cdot (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \end{aligned}$$

Wynik ten, znajdujący potwierdzenie jakościowe w doświadczeniu z podwójną szczeliną, wskazuje na fizykalne znaczenie wprowadzonych wcześniej amplitud Diraca–Feynmana (zapisanych w naturalnej normalizacji, w której jednostką działania klasycznego jest  $\hbar$ ). Dodatkowych argumentów za nieodzownością sumowania wkładów od różnych trajektorii łączących konfiguracje: początkową i końcową, użytego tu na prawach oczywistości, dostarcza heurystyczne rozumowanie Feynmana, które rekapitulujemy poniżej.

Załóżmy otóż, że hamiltonian klasyczny rozpatrywanego wcześniej układu przyjmuje prostą postać

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\delta^{ij} p_i p_j}{2m} + V(q^i),$$

przy czym pierwszy składnik jest standardowym członem kinetycznym, drugi zaś – zależnym od położenia uogólnionych (wyłącznie) członem potencjalnym. Hamiltonian kwantowomechaniczny jest wówczas dany wzorem

$$\widehat{H}(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m} + V(\vec{q}^i)$$

i możemy – podzieliwszy przedział czasowy  $[0, t]$  na  $n$  równych odcinków, o długości  $\Delta t = \frac{t}{n}$  każdy – przepisać propagator (6.0.8) w postaci

$$\begin{aligned} \langle \vec{q} | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_0 \rangle &= \left( \prod_{k=1}^{n-1} \int_Q d\vec{q}_k \right) \langle \vec{q} | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_{n-1} \rangle \langle \vec{q}_{n-1} | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_{n-2} \rangle \\ &\quad \langle \vec{q}_{n-2} | \dots | \vec{q}_1 \rangle \langle \vec{q}_1 | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Związki komutacyjne dla zmiennych kanonicznie sprzężonych

$$[\widehat{q}^i, \widehat{p}_j] = i\hbar \delta^i_j, \quad i, j \in \overline{1, N}$$

pozwalają nam przepisać każdy z cząstkowych propagatorów w postaci

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_{k-1} \rangle &\equiv \langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \left( \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m} + V(\vec{q}^i) \right)} | \vec{q}_{k-1} \rangle \\ &= \langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m}} \circ e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} V(\vec{q}^i)} | \vec{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &= e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot V(q_{k-1}^i)} \cdot \langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m}} | \vec{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &= \int_{\mathcal{P}} d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot V(q_{k-1}^i)} \cdot \langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m}} | \vec{p}_{k-1} \rangle \langle \vec{p}_{k-1} | \vec{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &= \int_{\mathcal{P}} d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left( \frac{\delta^{ij} p_{k-1}^i p_{k-1}^j}{2m} + V(q_{k-1}^i) \right)} \cdot \langle \vec{q}_k | \vec{p}_{k-1} \rangle \langle \vec{p}_{k-1} | \vec{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &= \int_{\mathcal{P}} d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left( \frac{\delta^{ij} p_{k-1}^i p_{k-1}^j}{2m} + V(q_{k-1}^i) \right)} \cdot \langle \vec{q}_k | \vec{p}_{k-1} \rangle \overline{\langle \vec{q}_{k-1} | \vec{p}_{k-1} \rangle} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)). \end{aligned}$$

Na obecnym etapie możemy wykorzystać postać funkcjonalną propagatora pomiędzy stanami własnymi pary operatorów kanonicznie sprzężonych,

$$\langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} q^i p_i},$$

aby przepisać otrzymaną wcześniej formułę w postaci

$$\begin{aligned} &\langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_{k-1} \rangle \\ &= \mathcal{N} \int_{\mathcal{P}} d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left( \frac{\delta^{ij} p_{k-1}^i p_{k-1}^j}{2m} + V(q_{k-1}^i) - \frac{p_{k-1}^i (q_k^i - q_{k-1}^i)}{\Delta t} \right)} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &= \mathcal{N} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left( V(q_{k-1}^i) - \frac{m(q_k^i - q_{k-1}^i)(q_k^j - q_{k-1}^j) \delta_{ij}}{2\Delta t^2} \right)} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &\quad \cdot \int_{\mathcal{P}} d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{2m\hbar} \cdot \left( p_{k-1}^i - \frac{m(q_k^i - q_{k-1}^i) \delta_{ri}}{\Delta t} \right) \left( p_{k-1}^j - \frac{m(q_k^j - q_{k-1}^j) \delta_{sj}}{\Delta t} \right) \delta^{ij}}. \end{aligned}$$

Przyjawszy założenie o stosownej translacyjnej niezmienniczości dziedziny  $P$  i oznaczwszy całkę gaussowską

$$\mathcal{I}_P := \int_{\mathcal{P}} d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{2m\hbar} \cdot (p_{k-1 i} - \frac{m(q_k^r - q_{k-1}^r) \delta_{ri}}{\Delta t}) (p_{k-1 j} - \frac{m(q_k^s - q_{k-1}^s) \delta_{sj}}{\Delta t}) \delta^{ij}},$$

wyprowadzamy stąd zwarty wzór na propagator cząstkowy

$$\langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_{k-1} \rangle = \mathcal{N} \mathcal{I}_P e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot (V(q_{k-1}^i) - \frac{m(q_k^i - q_{k-1}^i)(q_k^j - q_{k-1}^j) \delta_{ij}}{2\Delta t^2})} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)),$$

który możemy następnie podstawić do wyjściowego wyrażenia, uzyskując tym sposobem formułę

$$\begin{aligned} & \langle \vec{q} | e^{-\frac{it}{\hbar} \triangleright \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_0 \rangle \\ &= (\mathcal{N} \mathcal{I}_P)^n (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2))^n \left( \prod_{k=1}^{n-1} \int_{\mathcal{Q}} d\vec{q}_k \right) \prod_{l=1}^n e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot (V(q_{l-1}^i) - \frac{m(q_l^i - q_{l-1}^i)(q_l^j - q_{l-1}^j) \delta_{ij}}{2\Delta t^2})} \\ &= (\mathcal{N} \mathcal{I}_P)^n (1 + n \mathcal{O}(\Delta t^2)) \left( \prod_{k=1}^{n-1} \int_{\mathcal{Q}} d\vec{q}_k \right) e^{\frac{i}{\hbar} \cdot \sum_{l=1}^n \Delta t \left( \frac{m(q_l^i - q_{l-1}^i)(q_l^j - q_{l-1}^j) \delta_{ij}}{2\Delta t^2} - V(q_{l-1}^i) \right)} \\ &= (\mathcal{N} \mathcal{I}_P)^n (1 + \mathcal{O}(\Delta t)) \left( \prod_{k=1}^{n-1} \int_{\mathcal{Q}} d\vec{q}_k \right) e^{\frac{i}{\hbar} \cdot \sum_{l=1}^n \Delta t \left( \frac{m(q_l^i - q_{l-1}^i)(q_l^j - q_{l-1}^j) \delta_{ij}}{2\Delta t^2} - V(q_{l-1}^i) \right)} \end{aligned}$$

Istnieje klasa potencjałów klasycznych, dla których możliwe jest przejście do granicy  $n \rightarrow \infty$  w powyższym wyrażeniu przy zachowaniu długości przedziału czasowego  $t$  (czyli też  $\Delta t \rightarrow 0$ ). Potencjały takie zostały omówione, m.in., w pracy Feynmana i Hibbsa [FH65] z 1965 r. W rzeczonyj granicy w wykładniku funkcji exp rozpoznajemy granicę sumy riemannowskiej lagranżjanu klasycznego postaci

$$L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{m\dot{q}^i \dot{q}^j \delta_{ij}}{2} - V(q^i)$$

na odcinku czasowym  $[0, t]$ , a sam propagator zyskuje interpretację sumocalki po wkładach od *wszystkich* trajektorii prowadzących od konfiguracji  $\vec{q}_0$  do konfiguracji  $\vec{q} \equiv \vec{q}_k$  w czasie  $t$ . Granicę produktu sumocalek po położeniach (uogólnionych) w pośrednich chwilach czasu, ilekroć jest dobrze zdefiniowana, oznaczamy symbolem

$$\langle \vec{q}_k | e^{-\frac{it}{\hbar} \triangleright \widehat{H}(\vec{q}, \vec{p})} | \vec{q}_0 \rangle = \int_{\substack{\vec{q}(0)=\vec{q}_0 \\ \vec{q}(t)=\vec{q}_k}} \mathcal{D}\vec{q} e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{q}]}$$

i określamy mianem **Feynmana (sumo)-całki po trajektoriach**. Obecność w jej zapisie amplitudy Diraca–Feynmana w roli wagi statystycznej określającej wkład do propagatora trajektorii<sup>6</sup>  $\vec{q}$  o zadanych warunkach brzegowych  $(\vec{q}(0), \vec{q}(t)) = (\vec{q}_0, \vec{q}_k)$  uzasadnia – *a posteriori* – wcześniejsze nasze rozważania o obserwowalnych konsekwencjach istnienia niehomotopijnych trajektorii w czasoprzestrzeni propagacji cząstki oraz naszą wyjściową definicję lagranżowskiej teorii pola, czyli Def. 178 (jeśli tylko włączyć stałą  $\hbar$  w definicję działania klasycznego, wzgl. położyć  $\hbar = 1$ , co też będziemy czynić w dalszej części wykładu). Postulat jednoznacznej określoności amplitudy Diraca–Feynmana przerzuca pomost formalny pomiędzy teorią klasyczną, modelowaną od początku do końca przy użyciu narzędzi z kategorii geometrycznej (takich jak „rozmaitość”, „metryka”, „pole wektorowe” *etc.*), a

<sup>6</sup>Należy dobitnie podkreślić, że propagator kwantowomechaniczny jest określany przez *wszystkie* konfiguracjach interpolujących między oboma stanami, w tym także po konfiguracjach nieklasycznych (tj. takich, które nie minimalizują funkcjonału działania)

teorią kwantową, osadzoną w kategorii algebraicznej<sup>7</sup>. Bogatsi o tę świadomość, prześledzimy obecnie dalsze konsekwencje strukturalne tegoż postulatu, czyli też równoważnego mu postulatu określoności działania klasycznego *modulo*  $2\pi(\hbar)$ , w rozważanym modelowym układzie fizycznym.

W kontekście wyjściowych naszych rozważań modelowych rzeczony postulat implikuje dodatkowe warunki

$$(6.0.9) \quad \forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_\emptyset} : qN_{ijk} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \wedge \quad \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset} : qd_{ij} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Zwykle wyraża się je przy użyciu lokalnie gładkich odwzorowań  $g_{ij}$  oraz  $h_i$  o wartościach w  $U(1)$  powiązanych z  $f_{ij}$  oraz  $b_i$  wzorami

$$g_{ij} := e^{-iqf_{ij}}, \quad h_i := e^{iqb_i}.$$

Tak określone odwzorowania spełniają znajomo wyglądające warunki

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset} \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g_{ji}(x) = g_{ij}(x)^{-1},$$

$$\forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_\emptyset} \forall_{y \in \mathcal{O}_{ijk}} : g_{ij}(x) \cdot g_{kj}(x)^{-1} \cdot g_{ki}(x) = 1$$

oraz

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\emptyset} \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g'_{ij}(x) \equiv e^{-iqf'_{ij}(x)} = h_i(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot h_j(x)^{-1}.$$

Podkreślmy: wypisane warunki wiążą ze sobą ładunek elektryczny  $q$  punktu materialnego z elementem  $N_{ijk}$  opisu zewnętrznego pola elektromagnetycznego. Ten pierwszy jest w Przyrodzie pewną całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego  $e$  elektronu, źródłem tego drugiego też są zwykle czasoprzestrzenne rozkłady ładunków. I to właśnie tym drugim zajmujemy się poniżej.

Intuicje wyrobione w trakcie dotychczasowych naszych dociekań pozwalają wyprowadzić nader prostą interpretację geometryczną pierwszego z powyższych warunków, znaną w literaturze pod nazwą **warunku Diraca skwantowania ładunku**. Otóż wybierzmy dowolną dwuwymiarową powierzchnię zamkniętą  $\Sigma \subset M$ ,  $\partial\Sigma = \emptyset$  i obliczmy strumień pola elektromagnetycznego przez tę powierzchnię,

$$\Phi((E, B); \Sigma) := \int_{\Sigma} F,$$

dokonawszy uprzednio jej stosownej tesselizacji, tj. podzieliwszy ją na wielokąty  $p$  (tworzące zbiór **plakietek tesselizacji**) stykające się wzdłuż krawędzi  $e$  (tworzących zbiór krawędzi tesselizacji  $E$ ), które z kolei łączą się w wierzchołkach  $v$  (tworzących zbiór wierzchołków tesselizacji  $V$ ), przy czym możemy założyć, że w każdym wierzchołku zbiegają się trzy krawędzie<sup>8</sup>, czyli mamy do czynienia z tesselizacją o strukturze plastra miodu. Tesselizację, którą będziemy oznaczać symbolem

$$\Delta_{\Sigma} = P \cup E \cup V,$$

wyberamy na tyle drobną, aby spełniała ona warunek podporządkowania wybranemu (dowolnie) dobremu pokryciu  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  rozmaitości  $M$ :

$$\forall_{p \in P} \exists_{i_p \in I} : p \subset \mathcal{O}_{i_p},$$

<sup>7</sup>Często dopuszczającej naturalne nieprzemienne geometryzacje, fundamentalnie odległe od algebraicznej geometrii klasycznej w terminach funkcji (gładkich) na tejsze.

<sup>8</sup>Tesselizację tego typu otrzymujemy ze zwykłej triangulacji powierzchni poprzez utworzenie jej tzw. **grafu dualnego** o ternarnych wierzchołkach w geometrycznych środkach trójkątów i połączonych krawędziami, z których każda przecina transversalnie dokładnie jeden z boków trójkąta, będący krawędzią triangulacji.



a zatem także

$$\forall_{e \in E} \exists_{i_e \in I} : e \subset \mathcal{O}_{i_e}.$$

Zachodzi także

$$\forall_{v \in V} \exists_{i_v \in I} : v \in \mathcal{O}_{i_v}.$$

Tak przygotowani obliczamy, w odwołaniu do Tw. 4.5.1,

$$\Phi((E, B); \Sigma) = \sum_{p \in \Delta_\Sigma} \int_p F = \sum_{p \in P \subset \Delta_\Sigma} \int_p dA_{i_p} = \sum_{p \in P \subset \Delta_\Sigma} \sum_{e \subset \partial p} \int_e A_{i_p}.$$

Ostatnią sumę możemy zamienić na sumę po wszystkich krawędziach tesselizacji – wzdłuż każdej z nich (na której dowolnie ustalamy orientację) całkujemy różnicę potencjałów pochodzących z obu rozdzielanych przez nią plakietek (względny znak „-” dla tych dwóch wkładów wynika stąd, że ustalona orientacja krawędzi z konieczności jest zgodna z jej orientacją indukowaną z wyjściowej orientacji jednej z plakietek, powiedzmy  $p_+(e)$ , a zarazem przeciwna do jej orientacji indukowanej z orientacji drugiej z plakietek, powiedzmy  $p_-(e)$ , co w świetle zastosowanego powyżej twierdzenia Stokes’a prowadzi do rzeczzonej różnicy znaków obu wkładów),

$$\begin{aligned} \Phi((E, B); \Sigma) &= \sum_{e \in E \subset \Delta_\Sigma} \int_e (A_{i_{p_+(e)}} - A_{i_{p_-(e)}}) = \sum_{e \in E \subset \Delta_\Sigma} \int_e df_{i_{p_-(e)} i_{p_+(e)}} \\ &= \sum_{e \in E \subset \Delta_\Sigma} \sum_{v \in \partial e} \int_v f_{i_{p_-(e)} i_{p_+(e)}}. \end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio sumę po końcach wszystkich krawędzi tesselizacji możemy zamienić na pojedynczą sumę po wszystkich wierzchołkach, przy czym chwila zastanowienia nad znakami wkładów do wyrazu owej sumy przyporządkowanego ustalonemu wierzchołkowi pochodzących od poszczególnych (zorientowanych dowolnie) zbiegających się w nim krawędzi, w połączeniu z narzuconymi własnościami skośnej symetrii funkcji  $f_{ij}$  względem permutacji indeksów pokrycia prowadzi do wzoru

$$\Phi((E, B); \Sigma) = - \sum_{v \in \Delta_\Sigma} N_{p_1(v)p_2(v)p_3(v)}(v),$$

w którym  $(p_1(v), p_2(v), p_3(v))$  jest trójką plakietek tesselizacji zbiegających się w  $v$  uporządkowaną wedle kolejności ich przemierzania przy obiegu wierzchołka w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (przy czym wybór plakietki początkowej jest nieistotny z racji cyklicznej symetrii stałych  $N_{ijk}$  względem permutacji indeksów pokrycia). Ostatecznie więc wnioskujemy, że dla *dowolnej* liczby całkowitej  $N$  (określającej wartość ładunku elektrycznego  $q = Ne$  cząstki próbnej poruszającej się w tle  $F$ ) spełniona jest relacja

$$Ne \Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z},$$

czyli

$$(6.0.10) \quad e \Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Odnosząc powyższy wynik do pola (hipotetycznego) punktowego ładunku magnetycznego  $\mu$  i topologicznie najprostszej (nietrywialnego) powierzchni zamkniętej, czyli 2-sfery, okalającej punkt położenia monopola, odtwarzamy klasyczny wynik Diraca

$$e\mu \in 2\pi\mathbb{Z},$$

który jest właśnie zapowiedzianym wcześniej warunkiem Diraca skwantowania ładunku.

W podsumowaniu dotychczasowych naszych rozważań możemy stwierdzić, że spójny opis propagacji naładowanego elektrycznie punktu materialnego w zewnętrznych polach: grawitacyjnym  $g$  i elektromagnetycznym  $F$  jest możliwy, o ile tensor Maxwella tego pola oraz ładunek niesiony przez punkt materialny (zamiast  $e$  mamy tu w ogólności  $q$ ) spełniają warunek Diraca (6.0.10). Funkcjonał działania porównujący propagację punktu po dwóch różnych ścieżkach łączących parę punktów w czasoprzestrzeni  $(M, g)$  jest przy tym dany wzorem (6.0.7), który prowadzi do wyrażenia na amplitudę Diraca–Feynmana

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}[x] = e^{\frac{im}{2} \int_{S^1} \text{Vol}(S^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t})} \prod_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} e^{q \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e}} \prod_{v \in \partial e} (g_{i_e i_v} \circ x)(v)^{\varepsilon_{ev}}, \quad x \in LM.$$

Dotychczasowa dyskusja uzasadnia przy tym zabieg czysto formalny podyktowany wolą odciążenia stosowanego zapisu, a polegający na włączeniu ładunku  $q$  do definicji zewnętrznego pola elektromagnetycznego (i jego lokalnych trywializacji). Odtąd będziemy zatem konsekwentnie pisać

$$S[x] = \frac{m}{2} \int_{S^1} \text{Vol}(S^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right) \quad (6.0.11)$$

oraz

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}[x] = e^{\frac{im}{2} \int_{S^1} \text{Vol}(S^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t})} \prod_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} e^{\int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e}} \prod_{v \in \partial e} (g_{i_e i_v} \circ x)(v)^{\varepsilon_{ev}}, \quad x \in LM,$$

gdzie kładziemy

$$g_{ij} := e^{-i f_{ij}}, \quad h_i := e^{i b_i}$$

przy warunku

$$\Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (6.0.12)$$

Następnym naturalnym krokiem w naszych rozważaniach jest powrót do definicji funkcjonału działania dla trajektorii otwartej  $x(\Lambda)$ ,  $\partial(x\Lambda) = x(\partial\Lambda) = \{x(t_0), x(t_1)\}$ , która – jeśli przyjąć za punkt wyjścia wynik (6.0.11) dotychczasowego naszego rozumowania – w swojej dotychczasowej wersji (w oczywistym zapisie, w którym krańce przedziału  $\Lambda \equiv [t_0, t_1]$  należą do zbioru  $V \subset \Delta_\Lambda$  wierzchołków tesselizacji  $\Delta_\Lambda$  linii świata podporządkowanej pokryciu  $\mathcal{O}$  rozmaitości zanurzenia  $M$ )

$$S[x] = \frac{m}{2} \int_\Lambda \text{Vol}(\Lambda) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + \sum_{e \in E \subset \Delta_\Lambda} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right) + 2\pi\mathbb{Z}$$

nie jest dobrze określona, oto bowiem zmiana danych lokalnych według formuł (6.0.5) i (6.0.6) prowadzi – nawet po uwzględnieniu więzów (6.0.9) – do funkcjonalnej zmiany (przy orientacji linii świata  $\Lambda$  od  $t_0$  do  $t_k$ )

$$\begin{aligned} S'[x] - S[x] &= \sum_{e \in \Delta_\Lambda} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} d_{i_e i_v} + b_{i_{t_k}} \circ x(t_k) - b_{i_{t_0}} \circ x(t_0) + 2\pi\mathbb{Z} \\ &= b_{i_{t_k}} \circ x(t_k) - b_{i_{t_0}} \circ x(t_0) + 2\pi\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

mającej bezpośredni wpływ na dynamikę punktu materialnego (a ściślej – na współokreślające ją warunki brzegowe). Zanim poddamy ją stosownej korekcie strukturalnej, przenieśmy nasze rozważania na wyższy poziom ogólności, na którym obie

rozpatrywane przez nas sytuacje: ścieżki zamkniętej (pętli) oraz ścieżki otwartej pojawiają się jako szczególne przypadki. Oto więc dopuścimy takie zanurzenia pętli  $\Lambda \equiv \mathbb{S}^1$  parametryzującej trajektorię punktu materialnego w  $M$  (ze stosowną interpretacją pojęcia „trajektoria” w przypadku  $x(0) = \lim_{t \nearrow 2\pi} x(t)$ ), które są odcinkami gładkie i mają nieciągłości w skończonej liczbie izolowanych punktów  $t_l \in \mathbb{S}^1$ ,  $l \in \overline{1, n}$  lub – ilekroć  $n = 0$  – nie mają ich wcale. Założymy dalej, że  $M$  jest sumą rozłączną skończonej liczby rozmaitości metrycznych  $(M_\alpha, g_\alpha)$ ,  $\alpha \in \overline{1, N}$ ,

$$M = M_1 \sqcup M_2 \sqcup \cdots \sqcup M_N,$$

z których każda jest spójna (przypadek rozmaitości metrycznej o wielu składowych spójnych jest naturalnie objęty taką definicją), a odwzorowanie  $x$  może przedziałami (w  $\Lambda$ ) przyjmować wartości w *różnych* składowych powyższego rozkładu. Każda składowa spójna jest przy tym nośnikiem pola elektromagnetycznego  $F_\alpha$ ,  $\alpha \in \overline{1, N}$  i jego lokalnych danych trywializacyjnych  $(A_{i(\alpha)}^\alpha, g_{j(\alpha)k(\alpha)}^\alpha, N_{r(\alpha)s(\alpha)t(\alpha)}^\alpha | i(\alpha) \in I_\alpha, (j(\alpha), k(\alpha)) \in \langle I_\alpha^{x2} \rangle_{\mathcal{O}^{M_\alpha}}, (r(\alpha), s(\alpha), t(\alpha)) \in \langle I_\alpha^{x3} \rangle_{\mathcal{O}^{M_\alpha}})$  stowarzyszonych z odnośnym pokryciem dobrym  $\mathcal{O}^{M_\alpha} = \{\mathcal{O}_{i(\alpha)}^{M_\alpha}\}_{i(\alpha) \in I_\alpha}$ . Sumę  $M$  wraz z opisaną właśnie strukturą będziemy w obecnym kontekście określać mianem **przestrzeni zanurzenia**, a uogólnione odwzorowanie przedziałami ciągle oznaczmy symbolem

$$\tilde{x} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M.$$

Wyprowadzony uprzednio model dla pętli gładkich otrzymujemy zanurzając  $\Lambda$  w jednej ze składowych spójnych  $M$  (powiedzmy o indeksie 1) z  $n = 0$  (czyli w szczególności przy warunku  $x(0) = \lim_{t \nearrow 2\pi} x(t)$ ). Z kolei model dla gładkiej ścieżki otwartej odpowiadać będzie wyborowi  $M_1 \neq M_N = \emptyset$  z dwoma ( $n = 2$ ) punktami nieciągłości:  $t_1 < t_2$ , które rozgraniczają „fazę” nietrywialną modelu nad  $[t_1, t_2] \subset \mathbb{S}^1$  zanurzoną w składowej spójnej  $M_1$  od jego „fazy” trywialnej nad  $\mathbb{S}^1 \setminus [t_1, t_2]$  zanurzonej w rozmaitości pustej  $\emptyset$ . Łamiąc (tj. wyprzedzając) nieco porządek logiczny kursu, stwierdzamy, że konfiguracja ogólna nie jest bynajmniej zupełnie egzotyczna, oto bowiem jest ona realizowana w modelu z wycechowaną podgrupą grupy izometrii rozmaitości  $(M_1, g_1)$  zanurzenia pojedynczej „fazy” modelu dla pętli (jak wyżej) zachowujących – w sensie, który sprecyzujemy w dalszej części wykładu – pole elektromagnetyczne  $F_1$ .

Powodowani nieodmiennie wołą odciążenia zapisu formalnego naszych rozważań możemy następnie dokonać kolejnego uproszczenia oznaczeń i zdjąć ze wszystkich obiektów używanych w konstrukcji funkcjonału działania dla pętli odcinkami gładkiej indeks składowej spójnej przestrzeni zanurzenia. W szczególności zamiast rodziny tensorów metrycznych  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \overline{1, N}}$  (wzgl. tensorów Maxwella  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \overline{1, N}}$ ) rozpatrujemy pojedynczy tensor  $g$  (wzgl.  $F$ ), którego nośnikiem jest suma rozłączna  $M$ , zamiast rodziny pokryć otwartych  $\{\mathcal{O}^{M_\alpha}\}_{\alpha \in \overline{1, N}}$  – jedno pokrycie  $\mathcal{O}^M$  o wielu rozłącznych składowych indeksowane przez zbiór  $I = \bigcup_{\alpha=1}^N I_\alpha$ , wreszcie też zamiast rodziny danych lokalnych  $(A_{i(\alpha)}^\alpha, g_{j(\alpha)k(\alpha)}^\alpha, N_{r(\alpha)s(\alpha)t(\alpha)}^\alpha | i(\alpha) \in I_\alpha, (j(\alpha), k(\alpha)) \in \langle I_\alpha^{x2} \rangle_{\mathcal{O}^{M_\alpha}}, (r(\alpha), s(\alpha), t(\alpha)) \in \langle I_\alpha^{x3} \rangle_{\mathcal{O}^{M_\alpha}})$  – dane lokalne  $(A_i, g_{jk}, N_{rst} | i \in I, (j, k) \in \langle I^{x2} \rangle_{\mathcal{O}^M}, (r, s, t) \in \langle I^{x3} \rangle_{\mathcal{O}^M})$ . Takie uproszczenie zapisu nie prowadzi do nieporozumień, oto bowiem pełna informacja o tym, z której podstruktury mają pochodzić dane do konstrukcji wybranego członu funkcjonału działania, są zawarte w odwzorowaniu  $\tilde{x}$ . Jedynym mankamentem zapisu uproszczonego jest nadużycie standardowego zapisu (lokalnie gładkiego) tensora na rozmaitości oraz jej pokrycia,

analogiczne do nadużycia pojęcia rozmaitości w odniesieniu do przestrzeni zanurzenia  $M$ . Taka czysto leksykalna niedoskonałość wydaje się być rozsądną ceną za uzyskaną dzięki niej przejrzystość zapisu.

Na gruncie przedstawionej powyżej motywacji i w przyjętym zapisie uproszczonym rozważmy – podobnie jak w poprzednio zastosowanej procedurze kolejnych przybliżeń – pierwszą propozycję funkcjonału działania dla przedziałami ciągłego odwzorowania linii świata  $\mathbb{S}^1$  w przestrzeń zanurzenia  $M$  (w konwencji  $t_{n+1} \equiv t_1$ ):

$$S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[\tilde{x}] := \sum_{l=1}^n \left[ \frac{m_l}{2} \int_{[t_l, t_{l+1}]} \text{Vol}(\Lambda) (\tilde{x}|_{[t_l, t_{l+1}]})^* g(\tilde{t}, \tilde{t}) + \sum_{e_l \in E \cap [t_l, t_{l+1}] \subset \Delta_\Lambda} \left( \int_{e_l} (\tilde{x}|_{e_l})^* A_{i_{e_l}} + \sum_{v_l \in \partial e_l} \varepsilon_{e_l v_l} f_{i_{e_l} i_{v_l}} \circ \tilde{x}(v_l) \right) \right] + 2\pi\mathbb{Z},$$

w którego zapisie tesselizacja  $\Delta_{\mathbb{S}^1}$  jest uzgodniona z rozkładem punktów nieciągłości w  $\mathbb{S}^1$  tak, że wszystkie te punkty należą do zbioru jej wierzchołków, przy czym wierzchołkowi  $t_{l+1}$ ,  $l \in \overline{1, n}$  (w konwencji jak wyżej, czyli dla  $l$  modulo  $n$ ) przyporządkowujemy parę indeksów ze zbioru  $I$ :  $i_{t_{l+1}}^1$  jako indeks „skrajny” po stronie  $t \leq t_{l+1}$  (tj. dla  $t_{l+1} \in [t_l, t_{l+1}]$ ) oraz  $i_{t_{l+1}}^2$  jako indeks „skrajny” po stronie  $t \geq t_{l+1}$  (tj. dla  $t_{l+1} \in [t_{l+1}, t_{l+2}]$ ). Jeśli teraz w powyższym wyrażeniu dokonamy zmiany danych lokalnej trywializacji według wcześniej wyprowadzonych formuł (6.0.5) i (6.0.6), to wartość funkcjonału działania ulegnie zmianie o

$$\begin{aligned} S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[\tilde{x}] - S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[\tilde{x}] &= \sum_{l=1}^n (b_{i_{t_{l+1}}} \circ \tilde{x}_+(t_{l+1}) - b_{i_{t_l}} \circ \tilde{x}_-(t_l)) + 2\pi\mathbb{Z} \\ &= \sum_{l=1}^n (b_{i_{t_{l+1}}} \circ \tilde{x}_+ - b_{i_{t_{l+1}}} \circ \tilde{x}_-)(t_{l+1}) + 2\pi\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(6.0.13) \quad \tilde{x}_+(t_l) := \lim_{t \nearrow t_l} \tilde{x}(t), \quad \tilde{x}_-(t_l) := \lim_{t \searrow t_l} \tilde{x}(t).$$

Wobec wyczerpania się mechanizmów naprawczych, jakich dostarcza nam elementarny rachunek różniczkowy na topologicznie trywialnych zbiorach  $\mathcal{O}_i^M$  (czyli w istocie na zbiorach  $\mathcal{O}_{i(\alpha_l)}^{M_{\alpha_l}}$ ), naturalnym wydaje się usunięcie powyższej niejednoznaczności w definicji funkcjonału działania poprzez cofnięcie do punktów nieciągłości  $t_l$  danych lokalnych nowych obiektów geometrycznych, które pod wpływem zmiany reprezentantów danych lokalnych  $F$  (czyli  $F_\alpha$ ) podlegają transformacji kompensującej. W tym celu rozważmy dodatkową przestrzeń zanurzenia  $Q$  (o strukturze topologicznej i różniczkowej – *a priori* – analogicznej do struktury  $M$ ) wyposażoną w parę odwzorowań gładkich (tj. o gładkich ograniczeniach do każdej składowej spójnej dziedziny)

$$p_A : Q \longrightarrow M, \quad A \in \{1, 2\},$$

które pozwalają zapisać warunki „uogólnionej ciągłości” trajektorii punktu materialnego

$$\tilde{x} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M \sqcup Q,$$

$$\tilde{x}(\mathbb{S}^1 \setminus \{t_l\}_{l \in \overline{1, n}}) \subset M, \quad \tilde{x}(\{t_l\}_{l \in \overline{1, n}}) \subset Q$$

w postaci

$$(6.0.14) \quad p_1 \circ \tilde{x}(t_l) = \tilde{x}_+(t_l), \quad p_2 \circ \tilde{x}(t_l) = \tilde{x}_-(t_l).$$

Rozważmy następnie pokrycie otwarte  $\mathcal{O}^Q = \{\mathcal{O}_\lambda^Q\}_{\lambda \in L}$  przestrzeni  $Q$ , przy czym założymy<sup>9</sup> dodatkowo, że jest określona para odwzorowań

$$\pi_A : L \longrightarrow I : \lambda \longmapsto i_\lambda^A, \quad A \in \{1, 2\}$$

o własności

$$(6.0.15) \quad \forall \lambda \in L : p_A(\mathcal{O}_\lambda^Q) \subset \mathcal{O}_{i_\lambda^A}^M.$$

Zdefiniujemy naturalne przyporządkowanie

$$\lambda. : \{t_l\}_{l \in \overline{1, n}} \longrightarrow L$$

o własności

$$\forall_{l \in \overline{1, n}} : \tilde{x}(t_l) \in \mathcal{O}_{\lambda_{t_l}}^Q,$$

a wówczas odwzorowania  $\pi_A$ ,  $A \in \{1, 2\}$  pozwolą nam zapisać warunek będący transkrypcją narzuconego wcześniej warunku zszycia dla zanurzeń (6.0.14) w terminach zbiorów indeksów, a mianowicie:

$$\pi_1(\lambda_{t_{l+1}}) = i_{t_{l+1}}^1, \quad \pi_2(\lambda_{t_{l+1}}) = i_{t_{l+1}}^2.$$

Żądamy istnienia na  $Q$  rodziny odwzorowań (lokalnie) gładkich

$$\phi_\lambda : \mathcal{O}_\lambda^Q \longrightarrow \mathbb{R},$$

które przy redefinicji (6.0.5) i (6.0.6) podlegają transformacji

$$(6.0.16) \quad \phi_\lambda \longmapsto \phi_\lambda + p_2^* b_{i_\lambda^2} - p_1^* b_{i_\lambda^1} + \xi_\lambda, \quad \xi_\lambda \in \mathbb{R},$$

przy czym (lokalne) stałe  $\xi_\lambda$ ,  $\lambda \in L$  kwantyfikują swobodę redefinicji  $\phi_\lambda$  (czyli wyboru reprezentanta określonej przezzeń klasy równoważności danych lokalnych) niezależną od struktur nad  $M$  i ich redefinicji. Taka postać prawa transformacyjnego dla  $\phi_\lambda$  realizuje dokładnie wyznaczony cel, jakim jest kompensacja poprawek do zapostulowanego pierwotnie funkcjonału działania w obecności nieciągłości, jeśli tylko zastąpić rzeczony funkcjonał poprawionym wyrażeniem:

$$\begin{aligned} S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[\tilde{x}] &:= \sum_{l=1}^n \left[ \frac{m_l}{2} \int_{[t_l, t_{l+1}]} \text{Vol}(\Lambda) (\tilde{x}|_{[t_l, t_{l+1}]})^* g(\hat{t}, \hat{t}) \right. \\ &+ \sum_{e_l \in E \cap [t_l, t_{l+1}] \subset \Delta_\Lambda} \left( \int_{e_l} (\tilde{x}|_{e_l})^* A_{i_{e_l}} + \sum_{v_l \in \partial e_l} \varepsilon_{e_l v_l} f_{i_{e_l} i_{v_l}} \circ \tilde{x}(v_l) \right) \\ &\left. + \phi_{\lambda_{t_l}} \circ \tilde{x}(t_l) \right] + 2\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Istotnie, po dokonaniu podstawień (6.0.5), (6.0.6) i (6.0.16) otrzymujemy teraz

$$\begin{aligned} S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[\tilde{x}] - S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[\tilde{x}] &= \sum_{l=1}^n (b_{i_{t_{l+1}}^1} \circ \tilde{x}_+ - b_{i_{t_{l+1}}^2} \circ \tilde{x}_-)(t_{l+1}) \\ &+ \sum_{l=1}^n (p_2^* b_{\pi_2(\lambda_{t_l})} - p_1^* b_{\pi_1(\lambda_{t_l})} + \xi_{\lambda_{t_l}}) \circ \tilde{x}(t_l) + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\equiv \sum_{l=1}^n \xi_{\lambda_{t_l}} + 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Założenie to nie stanowi ograniczenia ogólności naszych rozważań, oto bowiem mając dowolne pokrycia otwarte  $M$  i  $Q$ , możemy dokonać rozdrobnienia tego ostatniego względem przeciobrazów tego pierwszego wzdłuż każdego z odwzorowań (ciągłych)  $p_A$ ,  $A \in \{1, 2\}$ , otrzymując w ten sposób pokrycie o pożądanym własnościach.

Pozostaje zatem nałożyć warunek kwantowomechaniczny

$$\forall \lambda \in L : \xi_\lambda \in 2\pi\mathbb{Z},$$

aby uzyskać pożądaną rezultat, czyli niezależność amplitudy Diraca–Feynmana od wyboru reprezentantów klas równoważności danych lokalnych. Na obecnym etapie pozostaje już tylko upewnić się, że amplituda ta w obecnej postaci nie zależy od arbitralnego wyboru indeksów pokrycia  $\mathcal{O}^Q$  przypisanych tym wierzchołkom tesselizacji linii świata, które pokrywają się z punktami nieciągłości odwzorowań zanurzenia  $\tilde{x}$ . Dokonawszy podstawienia  $\lambda_{t_l} \mapsto \mu_{t_l}$ ,  $l \in \overline{1, N}$  i skorelowanego z nim podstawienia  $i_{t_{l+1}}^A \mapsto j_{t_{l+1}}^A$ ,  $A \in \{1, 2\}$  o własności

$$\pi_1(\mu_{t_{l+1}}) = j_{t_{l+1}}^1, \quad \pi_2(\mu_{t_{l+1}}) = j_{t_{l+1}}^2,$$

obliczamy wynikającą zeń zmianę wartości funkcjonału działania:

$$\begin{aligned} S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] - S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] &= \sum_{l=1}^n [(f_{i_{e_l} j_{t_{l+1}}} - f_{i_{e_l} i_{t_{l+1}}}) \circ \tilde{x}_+ - (f_{i_{e_{l+1}} j_{t_{l+1}}} - f_{i_{e_{l+1}} i_{t_{l+1}}}) \circ \tilde{x}_- \\ &\quad + (\phi_{\mu_{t_{l+1}}} - \phi_{\lambda_{t_{l+1}}}) \circ \tilde{x}](t_{l+1}) + 2\pi\mathbb{Z} \\ &= \sum_{l=1}^n [p_1^*(f_{i_{e_l} j_{t_{l+1}}} - f_{i_{e_l} i_{t_{l+1}}}) - p_2^*(f_{i_{e_{l+1}} j_{t_{l+1}}} - f_{i_{e_{l+1}} i_{t_{l+1}}}) \\ &\quad + \phi_{\mu_{t_{l+1}}} - \phi_{\lambda_{t_{l+1}}}] \circ \tilde{x}(t_{l+1}) + 2\pi\mathbb{Z} \\ &= \sum_{l=1}^n (p_1^* f_{i_{t_{l+1}} j_{t_{l+1}}} - p_2^* f_{i_{t_{l+1}} j_{t_{l+1}}} + \phi_{\mu_{t_{l+1}}} - \phi_{\lambda_{t_{l+1}}}) \circ \tilde{x}(t_{l+1}) \\ &\quad + 2\pi\mathbb{Z} \\ &= \sum_{l=1}^n (p_1^* f_{\pi_1(\lambda_{t_{l+1}})\pi_1(\mu_{t_{l+1}})} - p_2^* f_{\pi_2(\lambda_{t_{l+1}})\pi_2(\mu_{t_{l+1}})} \\ &\quad + \phi_{\mu_{t_{l+1}}} - \phi_{\lambda_{t_{l+1}}}) \circ \tilde{x}(t_{l+1}) + 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

W świetle powyższego rachunku stwierdzamy konieczność narzucenia dodatkowych więzów:

$$\nu_{\lambda\mu} := (\phi_\mu - \phi_\lambda) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{\lambda\mu}^Q} + p_1^* f_{\pi_1(\lambda)\pi_1(\mu)} - p_2^* f_{\pi_2(\lambda)\pi_2(\mu)} \stackrel{!}{\in} 2\pi\mathbb{Z},$$

których prostą konsekwencją jest tożsamość

$$\begin{aligned} &(p_1^* A_{\pi_1(\mu)} - p_2^* A_{\pi_2(\mu)} + d\phi_\mu) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{\lambda\mu}^Q} \\ &= (p_1^* A_{\pi_1(\lambda)} - p_2^* A_{\pi_2(\lambda)} + d(p_1^* f_{\pi_1(\lambda)\pi_1(\mu)})) - d(p_2^* f_{\pi_2(\lambda)\pi_2(\mu)}) + d\phi_\mu \upharpoonright_{\mathcal{O}_{\lambda\mu}^Q} \\ &= (p_1^* A_{\pi_1(\lambda)} - p_2^* A_{\pi_2(\lambda)} + d\phi_\lambda + d\nu_{\lambda\mu}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{\lambda\mu}^Q} \equiv (p_1^* A_{\pi_1(\lambda)} - p_2^* A_{\pi_2(\lambda)} + d\phi_\lambda) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{\lambda\mu}^Q}. \end{aligned}$$

Definiujemy także odwzorowania lokalnie gładkie

$$\chi_\lambda := e^{i\phi_\lambda} : \mathcal{O}_\lambda^Q \longrightarrow \mathrm{U}(1), \quad \lambda \in L.$$

Na podstawie tej ostatniej wnioskujemy o istnieniu globalnie gładkiej (w ograniczeniu do każdej składowej spójnej  $Q$ ) 1-formy  $\theta \in \Omega^1(Q)$  o ograniczeniach

$$\theta \upharpoonright_{\mathcal{O}_\lambda^Q} := p_1^* A_{\pi_1(\lambda)} - p_2^* A_{\pi_2(\lambda)} + d\phi_\lambda, \quad \lambda \in L.$$

Wprost na mocy swej definicji 1-forma ta spełnia równanie

$$(6.0.17) \quad d\theta = p_1^*F - p_2^*F.$$

Przestrzeń  $Q$  z opisaną wyżej strukturą różniczkową określamy mianem **przestrzeni korespondencji**.

W podsumowaniu naszych dotychczasowych rozważań stwierdzamy, że do rygorystycznego zdefiniowania modelu dynamiki naładowanego elektromagnetycznie punktu materialnego stanowiącej  $n$ -fazowe uogólnienie standardowej dynamiki lorentzowskiej (6.0.2) (o **fazach**  $\tilde{x} \upharpoonright_{[t_i, t_{i+1}]}$ ,  $l \in \overline{1, n}$  rozdzielonych przez **defekty punktowe**  $t_l$ ) potrzebujemy pary (sum rozłącznych) rozmaitości: przestrzeni zamknięcia

$$(M, g, F)$$

oraz przestrzeni korespondencji

$$(Q, p_1, p_2, \theta)$$

o odnośnych formach różniczkowych (z których pierwsza podlega więzom Diraca (6.0.12)) powiązanych relacją (6.0.17). W wyniku lokalnej trywializacji 2-formy zamkniętej nad pokryciem dobrym  $\mathcal{O}^M = \{\mathcal{O}_i^M\}_{i \in I}$  otrzymujemy dane lokalne

$$(A_i, g_{jk} \mid i \in I, (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}^M}),$$

spełniające warunki (i więzy) definiujące

$$F \upharpoonright_{\mathcal{O}_i^M} = dA_i,$$

$$(A_j - A_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}^M} = i g_{ji} dg_{ij},$$

$$(g_{jk} \cdot g_{ki} \cdot g_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}^M} = 1,$$

$$g_{ji} = \text{Inv} \circ g_{ij}.$$

Wybór pokrycia dobrego  $\mathcal{O}^Q = \{\mathcal{O}_\lambda^Q\}_{\lambda \in L}$  uzgodnionego z  $\mathcal{O}^M$  poprzez warunki (6.0.15) pozwala wyznaczyć dane lokalnej trywializacji relacji (6.0.17)

$$(\chi_\lambda \mid \lambda \in L)$$

spełniające warunki (i więzy) definiujące

$$p_1^*A_{\pi_1(\lambda)} - i(\text{Inv} \circ \chi_\lambda) d\chi_\lambda = p_2^*A_{\pi_2(\lambda)} + \theta \upharpoonright_{\mathcal{O}_\lambda^Q},$$

$$\chi_\lambda \cdot p_1^*g_{\pi_1(\lambda)\pi_1(\mu)} \cdot \text{Inv} \circ \chi_\mu = p_2^*g_{\pi_2(\lambda)\pi_2(\mu)}.$$

Z formuł tych odczytujemy – na gruncie Tw. 4.2.10 – definicję wiązki  $\mathbb{C}$ -liniowej (o zredukowanej do  $U(1)$  grupie strukturalnej  $\mathbb{C}^\times$ )

$$\mathbb{L} := \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i^M \times \mathbb{C}) / \sim_{g..}$$

nad czasoprzestrzenią propagacji  $(M, g)$  wyposażonej w powiązanie liniowe zadawane przez pochodną Koszula

$$\nabla^K \upharpoonright_{\mathcal{O}_i^M} \equiv (d + A_i) \circ \text{pr}_2,$$

o krzywiznie

$$\text{curv}(\nabla^K) \upharpoonright_{\mathcal{O}_i^M} \equiv F_i = F \upharpoonright_{\mathcal{O}_i^M},$$

por. Def. 152, czyli

$$\text{curv}(\nabla^K) = F,$$

jak również – na gruncie Tw. 4.2.11 – definicję morfizmu wiązek wektorowych z powiązaniem

$$\Phi : p_1^* \mathbb{L} \xrightarrow{\cong} p_2^* \mathbb{L} \otimes_{Q, \mathbb{C}} I_\theta$$

o danych lokalnych  $(\chi_\lambda | \lambda \in L)$ , w którego zapisie

$$I_\theta \equiv (Q \times \mathbb{C}, Q, \mathbb{C}, \text{pr}_1)$$

jest wiązką trywialną z powiązaniem o globalnie zadanej formie powiązania

$$\theta \circ \text{pr}_1 : TQ \times \mathbb{C} \equiv T(Q \times \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

por. Stw. 248 oraz 250. Podsumowanie nasze sformułujemy w postaci

DEFINICJA 179. Przyjmijmy zapis Def. 150, 169 i 178. **Wielofazowy jednowymiarowy model  $\sigma$  nad linią świata  $\Lambda \equiv \mathbb{S}^1$  z wpisanym w nią grafem defektu**

$$\mathcal{D} \equiv \{t_l\}_{l \in \overline{1, n}} \subset \Lambda$$

(utworzonym przez punkty parami różne) w **tłe geometrycznym**

$$\mathfrak{T} \equiv (\mathcal{M}, \mathcal{B})$$

złożonym z

- **przestrzeni zanurzenia**  $\mathcal{M} = (M, g, \mathbb{L})$  utworzonej przez rozmaitość (pseudo)riemannowską  $(M, g)$  (klasy  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , w rozumieniu Def. 170) stanowiącą bazę wiązki liniowej

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{L} \\ & & \downarrow \pi_{\mathbb{L}} \\ & & M \end{array}$$

o pochodnej Koszula

$$\nabla^{\mathbb{L}} \equiv \nabla^K;$$

- **L-bi-brany**  $\mathcal{B} = (Q, p_1, p_2, \theta, \Phi)$  utworzonej przez rozmaitość różniczkowalną  $Q$  (klasy  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ), zwaną **przestrzenią odpowiedności** (lub **przestrzenią korespondencji**), wyposażoną w parę odwzorowań gładkich  $p_A : Q \longrightarrow M$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i 1-formę  $\theta$ , zwaną **krzywizną L-bi-brany**, oraz izomorfizm wiązek  $\mathbb{C}$ -liniowych

$$\Phi : p_1^* \mathbb{L} \xrightarrow{\cong} p_2^* \mathbb{L} \otimes_{Q, \mathbb{C}} I_\theta$$

to lagranżowska teoria pola typu  $M \sqcup Q$  nad  $\Lambda$  (z trywialną strukturą metryczną) określona przez funkcjonal działania dla odwzorowań (odcinkami) gładkich

$$\tilde{x} : \Lambda \longrightarrow M \sqcup Q$$

o własnościach

$$\tilde{x}|_{\Lambda \setminus \mathcal{D}} : \Lambda \setminus \mathcal{D} \longrightarrow M, \quad \tilde{x}|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \longrightarrow Q$$



uzupełnianych przez warunki (6.0.14), który po dokonaniu wyboru tesselizacji  $\Delta_\Lambda$  linii świata podporządkowanej pokryciom: przestrzeni zanurzenia  $\{\mathcal{O}_i^M\}_{i \in I}$  i przestrzeni odpowiedniości  $\{\mathcal{O}_\lambda^Q\}_{\lambda \in L}$  (w rozumieniu dyskusji poprzedzającej niniejszą definicję) trywializującym – odpowiednio – wiązkę  $\mathbb{L}$  i wiązki cofnięte  $p_A^* \mathbb{L}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , a wyposażonym w odwzorowania  $\pi_A : L \rightarrow I$  spełniające warunki (6.0.15), i po ustaleniu odnośnych danych lokalnych: wiązki  $\mathbb{L}$

$$(A_i, g_{jk} \mid i \in I, (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}^M}),$$

oraz izomorfizmu  $\Phi$

$$(\chi_\lambda \mid \lambda \in L)$$

wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S[(\tilde{x} \mid \mathcal{D})] &:= \sum_{l=1}^n \left[ \frac{m_l}{2} \int_{[t_l, t_{l+1}]} \text{Vol}(\Lambda) (\tilde{x} \upharpoonright_{[t_l, t_{l+1}]})^* g(\tilde{t}, \hat{t}) \right. \\ &\quad + \sum_{e_l \in E \cap [t_l, t_{l+1}] \subset \Delta_\Lambda} \left( \int_{e_l} (\tilde{x} \upharpoonright_{e_l})^* A_{i_{e_l}} + i \sum_{v_l \in \partial e_l} \varepsilon_{e_l v_l} \log g_{i_{e_l} i_{v_l}} \circ \tilde{x}(v_l) \right) \\ (6.0.18) \quad &\quad \left. - i \log \chi_{\lambda_{t_l}} \circ \tilde{x}(t_l) \right] + 2\pi \mathbb{Z} \end{aligned}$$

W sytuacji, w której  $\mathbb{L}$ -bi-brana przybiera szczególną formę

$$\mathcal{B}_0 \equiv (M, \text{id}_M, \text{id}_M, 0, \text{id}_\mathbb{L}),$$

a funkcjonal działani redukuje się do postaci

$$S[x] = \frac{m}{2} \int_\Lambda \text{Vol}(\Lambda) x^* g(\tilde{t}, \hat{t}) + \sum_{e \in E \subset \Delta_\Lambda} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right) + 2\pi \mathbb{Z},$$

mówimy o **(jednofazowym) jednowymiarowym modelu**  $\sigma$  (nad  $\Lambda$  w tle geometrycznym  $\mathcal{M}$ ).

▲

UWAGA 77. Przedstawiona to konstrukcja funkcjonału działania jednowymiarowego modelu  $\sigma$  oddaliła nas na pierwszy rzut oka dość znacznie od wyjściowej dynamiki (6.0.1). Warto upewnić się w bezpośrednim rachunku, że zanurzenia krytyczne  $\tilde{x}$  funkcjonału działania (6.0.18) spełniają poza grafem defektu  $\mathcal{D}$  równania (6.0.1) i wyprowadzić warunki „brzegowe” spełniane przez  $\tilde{x}$  w punktach  $t_l \in \mathcal{D}$ ,  $l \in \overline{1, n}$ . W tym celu rozważmy dowolną parę pól wektorowych  $(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \in \Gamma(\text{TM}) \times \Gamma(\text{TQ})$  o własnościach, zapisanych dla dowolnego punktu  $q \in Q$  i stanowiących naturalną styczościową wersję warunków (6.0.14),

$$\text{T}_q p_A(\mathcal{W}(q)) = \mathcal{V}(p_A(q)).$$

Parę  $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  możemy traktować jako pole wektorowe na  $M \sqcup Q$  i w takim ujęciu rozważamy warunek stacjonarności funkcjonału działania wielofazowego modelu  $\sigma$ :

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} S[(\Phi_{(\mathcal{V}, \mathcal{W})}(t, \tilde{x}(\cdot)) \mid \mathcal{D})] = 0,$$

w którego zapisie  $\Phi_{(\mathcal{V}, \mathcal{W})}$  jest potokiem pola  $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  na  $M \sqcup Q$ , czyli parą (uzgodnionych) potoków  $(\Phi_{\mathcal{V}}, \Phi_{\mathcal{W}})$  na obu rozmaitościach,

$$p_A \circ \Phi_{\mathcal{W}}(t, q) = \Phi_{\mathcal{V}}(t, p_A(q)), \quad A \in \{1, 2\}.$$

Wykorzystując wielokrotnie Tw. 4.5.1 oraz relacje pomiędzy rozmaitymi elementami opisu lokalnego wiązki  $\mathbb{L}$  i ziomorfizmu  $\Phi$ , otrzymujemy wynik

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{m_l}{2} \int_{[t_l, t_{l+1}]} \text{Vol}(\Lambda) \left[ \mathcal{V}^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau}(\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2g_{\rho\mu}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\mathcal{V}^\rho \circ \tilde{x}}{d\tau}(\tau) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \right] \right. \\
&\quad + \sum_{e_l \in E \cap [t_l, t_{l+1}] \subset \Delta_\Lambda} \left( \int_{e_l} d\tau \left[ \mathcal{V}^\rho \partial_\rho A_{i_{e_l} \mu}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) + A_{i_{e_l} \rho}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\mathcal{V}^\rho \circ \tilde{x}}{d\tau}(\tau) \right] \right. \\
&\quad \left. + i \sum_{v_l \in \partial e_l} \varepsilon_{i_{v_l} v_l} \mathcal{V} \lrcorner g_{i_{v_l} i_{e_l}} dg_{i_{e_l} i_{v_l}}(\tilde{x}(v_l)) \right) - i \mathcal{W} \lrcorner (\text{Inv} \circ \chi_{\lambda_{t_l}}) d\chi_{\lambda_{t_l}}(\tilde{x}(t_l)) \left. \right\} \\
&= \sum_{l=1}^n \left\{ \int_{[t_l, t_{l+1}]} \text{Vol}(\Lambda) \mathcal{V}^\rho(\tilde{x}(\tau)) \left[ F_{\rho\mu}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m_l g_{\rho\lambda}(\tilde{x}(\tau)) \left( \frac{d^2 \tilde{x}^\lambda}{d\tau^2}(\tau) + \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau}(\tau) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2\mathcal{V}^\rho(\tilde{x}_+(t_l)) \lim_{\tau \nearrow t_l} g_{\rho\mu}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) - 2\mathcal{V}^\rho(\tilde{x}_-(t_l)) \lim_{\tau \searrow t_l} g_{\rho\mu}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{V} \lrcorner (A_{i_{e_l^+}} + g_{i_{t_{l+1}}^+ i_{e_l^+}} dg_{i_{e_l^+} i_{t_{l+1}}^+})(\tilde{x}_+(t_{l+1})) - \mathcal{V} \lrcorner (A_{i_{e_l^-}} + g_{i_{t_l}^- i_{e_l^-}} dg_{i_{e_l^-} i_{t_l}^-})(\tilde{x}_-(t_l)) \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{W} \lrcorner (\text{Inv} \circ \chi_{\lambda_{t_l}}) d\chi_{\lambda_{t_l}}(\tilde{x}(t_l)) \right\},
\end{aligned}$$

przy czym w przedostatniej linijce  $i_{e_l^+} \in I$  jest indeksem pokrycia  $\mathcal{O}^M$  przypisanym krawędzi  $e_l^+ \in \Delta_\Lambda$  wchodzącej do  $t_{l+1}$  (od strony  $[t_l, t_{l+1}]$ ),  $i_{e_l^-} \in I$  jest indeksem tegoż pokrycia przypisanym krawędzi  $e_l^- \in \Delta_\Lambda$  wychodzącej z  $t_l$  (od strony  $[t_l, t_{l+1}]$ ), a  $i_{t_l}^+ \in I$  (wzgl.  $i_{t_l}^- \in I$ ) jest indeksem przypisanym wierzchołkowi  $t_l \in \Delta_\Lambda$  traktowanemu (w konwencji  $t_0 \equiv t_n$ ) jako element brzegu  $[t_{l-1}, t_l]$  (wzgl.  $[t_l, t_{l+1}]$ ), przy czym zachodzą równości

$$i_{t_l}^+ = \pi_1(\lambda_{t_l}), \quad i_{t_l}^- = \pi_2(\lambda_{t_l}).$$

Ostatecznie zatem wprowadziwszy oznaczenia

$$p_+(t_l) := \lim_{\tau \nearrow t_l} g(\tilde{x}(\tau))(\mathbb{T}_\tau \tilde{x}, \cdot), \quad p_-(t_l) := \lim_{\tau \searrow t_l} g(\tilde{x}(\tau))(\mathbb{T}_\tau \tilde{x}, \cdot),$$

otrzymujemy równość

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{l=1}^n \left\{ \int_{[t_l, t_{l+1}]} \text{Vol}(\Lambda) \mathcal{V}^\rho(\tilde{x}(\tau)) \left[ F_{\rho\mu}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m_l g_{\rho\lambda}(\tilde{x}(\tau)) \left( \frac{d^2 \tilde{x}^\lambda}{d\tau^2}(\tau) + \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau}(\tau) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2(\mathbb{T}p_1(\mathcal{V})) \lrcorner p_+(t_l) - 2(\mathbb{T}p_2(\mathcal{V})) \lrcorner p_-(t_l) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{V} \lrcorner A_{i_{t_l}^+}(\tilde{x}_+(t_l)) - \mathcal{V} \lrcorner A_{i_{t_l}^-}(\tilde{x}_-(t_l)) - \mathcal{W} \lrcorner (\text{Inv} \circ \chi_{\lambda_{t_l}}) d\chi_{\lambda_{t_l}}(\tilde{x}(t_l)) \right\} \\
&= \sum_{l=1}^n \left\{ \int_{[t_l, t_{l+1}]} \text{Vol}(\Lambda) \mathcal{V}^\rho(\tilde{x}(\tau)) \left[ F_{\rho\mu}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m_l g_{\rho\lambda}(\tilde{x}(\tau)) \left( \frac{d^2 \tilde{x}^\lambda}{d\tau^2}(\tau) + \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau}(\tau) \right) \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2(\mathbb{T}p_1(\mathcal{V})) \lrcorner p_+(t_l) - 2(\mathbb{T}p_2(\mathcal{V})) \lrcorner p_-(t_l) \\
& + \mathcal{W} \lrcorner [p_1^* A_{\pi_1(\lambda_{t_l})} - p_2^* A_{\pi_2(\lambda_{t_l})} - (\text{Inv} \circ \chi_{\lambda_{t_l}}) d\chi_{\lambda_{t_l}}](\tilde{x}(t_l)) \Big\} \\
= & \sum_{l=1}^n \left\{ \int_{[t_l, t_{l+1}]} \text{Vol}(\Lambda) \mathcal{V}^\rho(\tilde{x}(\tau)) [F_{\rho\mu}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \right. \\
& \left. - m_l g_{\rho\lambda}(\tilde{x}(\tau)) \left( \frac{d^2 \tilde{x}^\lambda}{d\tau^2}(\tau) + \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}(\tilde{x}(\tau)) \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}(\tau) \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau}(\tau) \right) \right. \\
& \left. + 2(\mathbb{T}p_1(\mathcal{V})) \lrcorner p_+(t_l) - 2(\mathbb{T}p_2(\mathcal{V})) \lrcorner p_-(t_l) + \mathcal{W} \lrcorner \theta(\tilde{x}(t_l)) \right\},
\end{aligned}$$

z której wynikają pierwotne równania ruchu w punktach linii świata poza grafem defektu  $\mathcal{D}$  oraz – wobec dowolności  $\mathcal{W}$  – **warunek sklejenia na defekcie**

$$2p_+(t_l) \circ \mathbb{T}_{\tilde{x}(t_l)} p_1 - 2p_-(t_l) \circ \mathbb{T}_{\tilde{x}(t_l)} p_2 + \theta(\tilde{x}(t_l)) = 0, \quad l \in \overline{1, n}.$$

Ten ostatni współdefiniuje klasyczne konfiguracje pola  $\tilde{x}$  w obecności defektu.

## Uniwersalna zasada cechowania symetrii globalnych

### 1. Algebra i geometria różniczkowa cechowania – struktury ogólne

**1.1. Aspekt konfiguracyjny.** Z punktu widzenia obserwatora w czasoprzestrzeni  $\Sigma$  będącej nośnikiem teorii pola  $\mathcal{F}$  opisanej w Def. 178 transformacje symetrii  $(\Phi, \text{id}_\Sigma)$  można interpretować jako zmiany wyboru układu odniesienia w przestrzeni „wewnętrznej”  $F$ . Zakładając istnienie struktury skończenie wymiarowej grupy Liego na grupie symetrii  $\text{Symm}(\mathcal{F})$  (lub pewnej jej podgrupie  $G \subseteq \text{Symm}(\mathcal{F})$ ) i rozumując dalej w duchu lokalnej (kausalnej) teorii pola, domagamy się wzajemnego uniezależnienia od siebie lokalnych obserwatorów w takich ich wyborach, co prowadzi nas do konstrukcji na gruncie wyjściowego modelu  $\mathcal{F}$  nowej teorii pola o tych samych „wewnętrznych stopniach swobody” nad każdym punktem czasoprzestrzeni  $\Sigma$ , których strukturalny opis ilościowy zadaje rozmaitość  $F$ , ale niezmienniczej względem działania grupy symetrii zależnego w sposób dowolny (gładki) od tegoż punktu, a modelowanego na wyjściowym działaniu  $\text{Symm}(\mathcal{F})$  na  $F$  – takie ułożenie (w sensie czasoprzestrzennym) działania grupy symetrii globalnych teorii pola określamy mianem **cechowania symetrii globalnej**. Mówiąc nieco precyzyjniej, postulujemy zastąpienie wyjściowej wiązki pól  $\mathcal{F}$  przez inną wiązkę (także nad  $\Sigma$ ) o tym samym włóknie typowym  $F$ , a wyposażoną w działanie wiązki grup (nad  $\Sigma$ ) o włóknie typowym  $G$ , modelowane – w obrazie trywializacji lokalnych – na wyjściowym działaniu  $G$  na  $F$ . Stojąc na gruncie wniosków z naszych dociekań z Rozdz. 4, bez trudu identyfikujemy naturalnych kandydatów do roli nowej wiązki pól i działającej na niej wiązki grup.

DEFINICJA 180. Przyjmijmy zapis Def. 178, Stw. 212 oraz 216 i jego dowodu. Niechaj  $G \subseteq \text{Symm}(\mathcal{F})$  będzie podgrupą grupy symetrii globalnych teorii pola  $\mathcal{F}$  o strukturze grupy topologicznej (wzgl. skończenie wymiarowej grupy Liego) i niech  $(P_G, \Sigma, G, \pi_{P_G})$  będzie dowolną wiązką główną o grupie strukturalnej  $G$  nad czasoprzestrzenią  $\Sigma$ . **Wiązka pól typu  $F$  z cechowaniem typu  $P_G$**  to wiązka

$$(P_G^{\text{ev}} \mathcal{F}, \Sigma, F, \pi_{P_G^{\text{ev}} \mathcal{F}})$$

stowarzyszona z  $P_G$  poprzez odwzorowanie ewaluacji

$$\text{ev.} : G \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} : (\alpha, \varphi) \longmapsto \alpha(\varphi) \equiv \text{ev}_\alpha(\varphi),$$

a jej cięcia globalne to **pola typu  $F$  z cechowaniem typu  $P_G$** . Grupę (Frécheta)  $\Gamma(\text{Ad } P_G) \cong \text{Aut}_{\text{GrpBun}_G(\Sigma)}(P_G | \Sigma)$  określamy w tym kontekście mianem **grupy cechowania typu  $P_G$** . Odwzorowania

$$\Gamma[\Gamma[\tilde{r}^\times]]_\chi^\Lambda : \Gamma(P_G^{\text{ev}} \mathcal{F}) \circlearrowleft, \quad \chi \in \Gamma(\text{Ad } P_G)$$

opisane w dowodzie Stw. 216 (patrz: Równ. (4.1.22)) są przy tym nazywane **transformacjami cechowania**, a sama wiązka  $P_G$  zyskuje przydomek **wiązki cechowania**.



Transkrypcja wyjściowej teorii pola, skonstruowanej z niezmienników działania grupy symetrii globalnej  $\text{Symm}(\mathcal{F})$ , w terminach cięć globalnych wiązek stowarzyszonych  $P_G^\Lambda \mathcal{F}$  z (dowolną) wiązką cechowania  $P_G$  podporządkowana postulatowi – w istocie swiej dość nieprecyzyjnemu, wręcz heurystycznemu – *minimalności* zmian struktury funkcjonału działania w procedurze uokalniania symetrii z grupy  $G \subset \text{Symm}(\mathcal{F})$ , wydaje się zadaniem wysoce nieoczywistym, a same cięcia – nader niewygodnymi obiektami ewentualnych manipulacji formalnych. W sukurs przychodzi nam tutaj odpowiedniość pomiędzy rzeczonymi cięciami a  $G$ -ekwiwariantnymi morfizmami odwzorowującymi wiązkę cechowania  $P_G$  w wyjściową wiązkę pól  $\mathcal{F}$ , opisana w Stw. 215, w połączeniu z elementarną własnością strukturalną wiązki cechowania, jaką jest jej trywialność lokalna, przy czym ta ostatnia jest – w świetle Stw. 203 – *równoważna* istnieniu cięć lokalnych. Te pozwalają na lokalną imitację struktury obecnej w wyjściowym modelu teoriopowym na gruncie

DEFINICJA 181. Przyjmijmy zapis dowodu Stw. 215 oraz Uwagi 43 i niechaj  $\sigma_* : \mathcal{O} \rightarrow P_G$  będzie dowolnym cięciem (lokalnym) wiązki głównej  $P_G$  nad zbiorem otwartym  $\mathcal{O} \subset B$ . **Prezentacja lokalna pola (typu  $F$  z cechowaniem typu  $P_G$ )**  $\phi \in \Gamma(P_G^\Lambda \mathcal{F})$  w **cechowaniu**  $\sigma_*$  to cięcie lokalne

$$\phi_{\sigma_*} := \Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ \sigma_* \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathcal{F}).$$

Podobnie **prezentacja lokalna transformacji cechowania**  $\gamma \in \Gamma(\text{Ad}P_G)$  w **cechowaniu**  $\sigma_*$  to odwzorowanie (lokalnie) gładkie

$$\gamma_{\sigma_*} := \Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_* : \mathcal{O} \rightarrow G.$$

Wybór cięcia  $\sigma_*$  zyskuje w tym kontekście miano (**wyboru**) **cechowania lokalnego**.



UWAGA 78. To, że odwzorowanie  $\phi_{\sigma_*} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$  jest w istocie cięciem lokalnym wiązki pól  $\mathcal{F}$  nad  $\mathcal{O}$ , wynika wprost z przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} P_G & \xrightarrow{\Phi_\Lambda^\times[\phi]} & \mathcal{F} \\ \pi_{P_G} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{F}} \\ \Sigma & \xrightarrow{\text{id}_\Sigma} & \Sigma \end{array},$$

ten bowiem pozwala zapisać

$$\pi_{\mathcal{F}} \circ \phi_{\sigma_*} \equiv (\pi_{\mathcal{F}} \circ \Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \sigma_* = \pi_{P_G} \circ \sigma_* = \text{id}_{\mathcal{O}}.$$



STWIERDZENIE 258. W zapisie Def. 181 oraz dowodu Stw. 216 i przy oznaczeniach

$$\gamma\phi := \Gamma[\Gamma[\tilde{r}^\times]]_\gamma^\Lambda(\phi), \quad \text{Inv} \circ \gamma\sigma_* := r_{\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_*}(\sigma_*(\cdot))$$

zachodzą tożsamości

$$(\gamma\phi)_{\sigma_*}(\cdot) = \Lambda_{\gamma\sigma_*(\cdot)}\phi_{\sigma_*}(\cdot) = \phi_{\text{Inv} \circ \gamma\sigma_*}(\cdot).$$

■

Dowód: W świetle Stw. 217 oraz G-ekwiwariantności  $\Phi_\Lambda^\times[\phi]$  otrzymujemy ciąg równości

$$\begin{aligned} (\gamma\phi)_{\sigma_*}(\cdot) &\equiv \Phi_\Lambda^\times[\gamma\phi] \circ \sigma_*(\cdot) = \Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \sigma_*(\cdot) \\ &\equiv \Lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_*(\cdot)}(\Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ \sigma_*(\cdot)) \equiv \Lambda_{\gamma_{\sigma_*}(\cdot)}\phi_{\sigma_*}(\cdot) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_*(\cdot)}(\Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ \sigma_*(\cdot)) &= \Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ (r_{\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_*(\cdot)}(\sigma_*(\cdot))) \\ &\equiv \Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ \text{Inv} \circ \gamma_{\sigma_*}(\cdot) \equiv \phi_{\text{Inv} \circ \gamma_{\sigma_*}(\cdot)}. \end{aligned}$$

□

UWAGA 79. Powyższe stwierdzenie dowodnie pokazuje sens nazwy nadanej wyborowi cięcia referencyjnego  $\sigma_*$  – oto zmiana tego wyboru,

$$\sigma_* \mapsto \text{Inv} \circ \gamma_{\sigma_*},$$

jest równoznaczna z dokonaniem transformacji cechowania pola fizycznego,

$$\phi \mapsto \gamma\phi.$$

 $\bar{\wedge}$ 

Przedstawione powyżej dane konfiguracyjne teorii pola z wycechowaną symetrią globalną  $G$ , na które składa się wybór wiązki cechowania  $P_G \rightarrow \Sigma$  nad czasoprzestrzenią  $\Sigma$  oraz (niepusta) przestrzeń cięć globalnych wiązki pól z cechowaniem  $P_G^\Lambda \mathcal{F} \rightarrow \Sigma$ , nie definiują na pierwszy rzut oka (obiektu) żadnej kategorii, która byłaby naturalnym nośnikiem pełnej informacji geometrycznej o cechowaniu symetrii globalnej w wyjściowej teorii pola. Ponadto na obecnym etapie dociekań wciąż brak jest interpretacji swobody wyboru (klasy izomorfizmu) konkretnej wiązki cechowania – interpretacja taka staje się nieodzowna w przypadku nietrywialnej topologicznie czasoprzestrzeni  $\Sigma$  teorii, nad którą mogą istnieć wzajem niezomorficzne wiązki cechowania. W dalszej części niniejszego rozdziału przedstawimy zadowalające rozwiązanie obu tych kwestii – jest nim nowy obiekt geometryczny unifikujący w swej definicji strukturę wiązki cechowania oraz przestrzeni z działaniem jej grupy strukturalnej poprzez zastąpienie tejże grupy w jej dotychczasowej roli strukturalnej pewną małą kategorią wyznaczoną przez działanie  $\Lambda$  na wyjściowej wiązce pól. Jego szczegółowa analiza w relacji do danych konfiguracyjnych teorii pola z cechowaniem pozwoli nam wyjaśnić w elementarny sposób konieczność uwzględnienia *wszystkich* (klas izomorfizmu) wiązek cechowania w procedurze cechowania, a nadto – jak pokaże dalsza dyskusja – rachunek stycznościowy (czyli geometria różniczkowa) na rzeczonym obiekcie dostarczy nam naturalnych narzędzi opisu obstrukcji topologicznej dla wycechowania symetrii  $G$  i da nam wzgląd w opis dynamiki teorii pola z cechowaniem wykraczający poza klasyczny schemat sprzężenia minimalnego. Punktem wyjścia do tak zorientowanej dyskusji jest prosty zabieg sformalizowania dotychczasowych ustaleń, którego wynik zawiera

DEFINICJA 182. Przyjmijmy zapis Def. 180 oraz Stw. 204 i 218. **Grupoid wiązek głównych cechujących działanie grupy  $G$  na wiązce pól  $\mathcal{F}$**  to

grupoid

$$\mathbf{GrpBun}_G^{(\infty)}(\Sigma)^{\circlearrowleft \mathcal{F}}$$

o klasie obiektów

$$\text{Obj } \mathbf{GrpBun}_G^{(\infty)}(\Sigma)^{\circlearrowleft \mathcal{F}} := \mathbf{GrpBun}_G^{(\infty)}(\Sigma | \text{id}_\Sigma) \times \Gamma(\mathbb{P}_G^\Lambda \mathcal{F}),$$

zwanych **wiązkami głównymi cechującymi działanie grupy  $G$  na wiązce pól  $\mathcal{F}$** , i o zbiorze morfizmów pomiędzy obiektami  $(\mathcal{P}_G^\alpha, \phi^\alpha) \in \text{Obj } \mathbf{GrpBun}_G^{(\infty)}(\Sigma)^{\circlearrowleft \mathcal{F}}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  w postaci

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathbf{GrpBun}_G^{(\infty)}(\Sigma)^{\circlearrowleft \mathcal{F}}}((\mathcal{P}_G^1, \phi^1), (\mathcal{P}_G^2, \phi^2)) \\ &= \{ (\Phi, \text{id}_\Sigma, \text{id}_G) \in \text{Hom}_{\mathbf{GrpBun}_G^{(\infty)}(\Sigma)}(\mathcal{P}_G^1, \mathcal{P}_G^2) \mid \phi^2 = \Gamma \tilde{\Phi}[\phi^1] \}. \end{aligned}$$

▲

Tak przygotowani możemy wysłowić wynik zasadniczy,

**TWIERDZENIE 6.1.1.** *Przyjmijmy zapis Def. 141i 182 oraz Przykłt. 43. Istnieje izomorfizm grupoidów*

$$\mathbf{GrpBun}_G^{(\infty)}(\Sigma)^{\circlearrowleft \mathcal{F}} \cong \mathbf{GrpdBun}_{G \times \mathcal{F}}(\Sigma | \text{id}_\Sigma).$$

■

*Dowód:* Stojąc na gruncie Stw. 26, skonstruujemy poniżej istotnie surjektywny i w pełni wierny funktor

$$(6.1.1) \quad \text{Grpd} : \mathbf{GrpBun}_G^{(\infty)}(\Sigma)^{\circlearrowleft \mathcal{F}} \longrightarrow \mathbf{GrpdBun}_{G \times \mathcal{F}}(\Sigma | \text{id}_\Sigma),$$

wykorzystując przy tym – w duchu Tw. 4.2.15, 4.1.3, 4.1.6 i 4.1.7 – opis lokalny obu (małych) kategorii, w szczególności zaś – pokrycie otwarte  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  czasoprzestrzeni  $\Sigma$  współtrywializujące wszystkie pojawiające się w naszych rozważaniach wiązki: wiązkę pól  $\mathcal{F}$ , wiązki główne z grupą strukturalną  $G$  lub ze strukturalną wiązką grupoidalną  $G \times \mathcal{F}$ , tudzież wiązkę stowarzyszoną  $\mathbb{P}_G^\Lambda \mathcal{F}$ .

Ustalmy na początku wiązkę główną  $\mathcal{P}_G = (\mathbb{P}_G, \Sigma, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  o trywializacjach lokalnych  $\tau_i : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times G$  i odnośnych odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$ . Zakładamy, że wiązka produktowa stowarzyszona  $\mathbb{P}_G^\Lambda \mathcal{F}$  ma cięcie globalne

$$\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{P}_G^\Lambda \mathcal{F}$$

o ograniczeniach

$$\phi|_{\mathcal{O}_i} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{P}_G^\Lambda \mathcal{F} : x \longmapsto [(\tau_i^{-1}(x, e), \varphi_i(x))],$$

zapisanych w terminach cięć lokalnych  $\varphi_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{F}$ , co każe nam nad  $\mathcal{O}_{ij} \ni y$ ,  $(i, j) \in \langle I^x \rangle_{\mathcal{O}}$  narzucić na te ostatnie warunki zszycia

$$(6.1.2) \quad \varphi_i(y) = \Lambda_{g_{ij}(y)}(\varphi_j(y)) \equiv g_{ij}(y) \triangleright \varphi_j(y),$$

wyprowadzone w treści Uwagi 52. Rozważmy strukturalną wiązkę grupoidalną

$$G \times \mathcal{F} = (\mathcal{F}, G \times \mathcal{F}, \Sigma, \mathcal{S}_{G \times \mathcal{F}} \equiv \text{pr}_2, \mathcal{T}_{G \times \mathcal{F}} \equiv \Lambda, G \times \mathcal{F}, \mathcal{A}_{G \times \mathcal{F}}, \text{Inv}_{G \times \mathcal{F}}, \diamond_{G \times \mathcal{F}})$$

o morfizmach strukturalnych

$$\mathcal{A}_{G \times \mathcal{F}} : \mathcal{F} \longrightarrow G \times \mathcal{F} : f \longmapsto (e, f),$$

$$\mathcal{N}v_{G\ltimes\mathcal{F}} : G \times \mathcal{F} \circlearrowleft : (g, f) \mapsto (g^{-1}, \Lambda_g(f)),$$

$$\diamond_{G\ltimes\mathcal{F}} : (G \times \mathcal{F})_{\text{pr}_2 \times \Lambda} (G \times \mathcal{F}) \longrightarrow G \times \mathcal{F} : ((h, \Lambda_g(f)), (g, f)) \mapsto (h \cdot g, f)$$

oraz trywializacjach lokalnych, na które składają się trywializacje lokalne wiązki obiektów (czyli w tym wypadku wiązki pól)

$$\tau_i^0 : \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times F$$

oraz indukowane przez nie trywializacje lokalne wiązki strzałek

$$\tau_i^1 : (\pi_{\mathcal{F}} \circ \text{pr}_2)^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_i \times (G \times F).$$

Parze  $(\mathcal{P}_G, \phi)$  przyporządkowujemy wiązkę główną ze strukturalną wiązką grupoidalną  $G\ltimes\mathcal{F}$  wedle następującego schematu: Zdefiniujemy cięcia lokalne

$$\mathcal{M}_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{F} : x \mapsto \varphi_i(x),$$

$$\mathcal{G}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G \times \mathcal{F} : y \mapsto (g_{ij}(y), \varphi_j(y)).$$

Te w świetle Tw. 4.2.15 oraz Równ. (6.1.2) spełniają w punktach  $(x, y, z) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_{ij} \times \mathcal{O}_{ijk}$ ,  $i \in I$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\emptyset}$ ,  $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\emptyset}$  układ tożsamości:

$$\mathcal{I}_{G\ltimes\mathcal{F}} \circ \mathcal{G}_{ij}(y) \equiv g_{ij}(y) \triangleright \varphi_j(y) = \varphi_i(y) \equiv \mathcal{M}_i(y),$$

$$\mathcal{S}_{G\ltimes\mathcal{F}} \circ \mathcal{G}_{ij}(y) \equiv \text{pr}_2 \circ \gamma_{ij}(y) = \varphi_j(y) \equiv \mathcal{M}_j(y),$$

$$\mathcal{G}_{ji}(y) \equiv (g_{ji}(y), \varphi_i(y)) = (g_{ij}(y)^{-1}, g_{ij}(y) \triangleright \varphi_j(y)) \equiv \mathcal{N}v(\gamma_{ij}(y)),$$

$$\mathcal{G}_{ii}(x) \equiv (g_{ii}(x), \varphi_i(x)) = (e, \varphi_i(x)) \equiv \mathcal{A}d \circ \varphi_i(x) \equiv \mathcal{A}d_{G\ltimes\mathcal{F}} \circ \mu_i(x),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ij}(z) \circ_{G\ltimes\mathcal{F}} \mathcal{G}_{jk}(z) &= (g_{ij}(z), g_{jk}(z) \triangleright \varphi_k(z)) \circ (g_{jk}(z), \varphi_k(z)) \\ &= (g_{ij}(z) \cdot g_{jk}(z), \varphi_k(z)) = (g_{ik}(z), \varphi_k(z)) \equiv \mathcal{G}_{ik}(z), \end{aligned}$$

skąd wniosek, że kolekcja

$$(\emptyset, \varphi_i, (g_{jk}, \varphi_k) \mid i \in I, (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\emptyset})$$

określa – w duchu Tw. 4.1.6 – wiązkę główną z grupoidem strukturalnym  $G\ltimes\mathcal{F}$  nad  $\Sigma$  o przestrzeni totalnej

$$\check{\mathcal{P}}_{\emptyset} := \left( \bigsqcup_{i \in I} \varphi_i^*(G \times \mathcal{F}) \right) / \sim_{(g_{12}, \varphi_2)},$$

w której zapisie rozmaitość  $G \times \mathcal{F}$  jest traktowana jako przestrzeń totalna surjekttywnej submersji  $\Lambda : G \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ . Powyższe rozumowanie pozwala nam zadać składową obiektową rekonstruowanego funktora w postaci

$$\text{Grpd}(\mathcal{P}_G, \phi) := (\check{\mathcal{P}}_{\emptyset}, \Sigma, \pi_{\check{\mathcal{P}}_{\emptyset}}, \mathcal{M}_{\check{\mathcal{P}}_{\emptyset}}, \mathcal{R}_{\check{\mathcal{P}}_{\emptyset}}).$$

W następnej kolejności potwierdzamy funktorialny charakter powyższego przyporządkowania stwarzając z morfizmami pomiędzy wiązkami (nad  $\Sigma$ ) cechującymi swą grupę strukturalną  $G$  morfizmy pomiędzy odnośnymi wiązkami głównymi (nad  $\Sigma$ ) ze strukturalną wiązką grupoidalną  $G\ltimes\mathcal{F}$ . W tym celu rozważmy parę



$\mathcal{P}_G^\alpha \in \text{Obj GrpBun}_G^{(\infty)}(\Sigma) \circledast \mathcal{F}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , dla której jest określony (izo)morfizm

$$(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G) : \mathcal{P}_G^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}_G^2$$

o danych lokalnych  $\{h_i\}_{i \in I}$ , określonych (nad pokryciem otwartym  $\mathcal{O}$ ) jak w dowodzie Tw. 4.1.3. Zgodnie z treścią Stw. 218 i wyjaśniającej Uwagi 52 dane te wyznaczają za pośrednictwem izomorfizmu indukowanego  $\Gamma\Phi$  odpowiedniość między cięciami globalnymi odnośnych produktowych wiązek stowarzyszonych – oto więc cięcie  $\phi \in \Gamma(\mathcal{P}_G^1 \wedge \mathcal{F})$  o ograniczeniach

$$\phi|_{\mathcal{O}_i} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_{\mathcal{P}_G^1 \wedge \mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto [(\tau_i^{1-1}(x, e), \varphi_i(x))]$$

jest odwzorowywane w cięcie  $\Gamma\tilde{\Phi}[\phi] \in \Gamma(\mathcal{P}_G^2 \wedge \mathcal{F})$  o ograniczeniach

$$\Gamma\tilde{\Phi}[\phi]|_{\mathcal{O}_i} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_{\mathcal{P}_G^2 \wedge \mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto [(\tau_i^{2-1}(x, e), h_i(x) \triangleright \varphi_i(x))].$$

Uwzględnivszy wynikającą stąd postać lokalnych cięć momentu wiązki głównej ze strukturalną wiązką grupoidalną przyporządkowanej parze  $(\mathcal{P}_G^2, \Gamma\tilde{\Phi}[\phi])$  według powyższych reguł,

$$\mathcal{M}_i^2(\cdot) \equiv h_i(\cdot) \triangleright \varphi_i(\cdot), \quad i \in I,$$

oraz relacje (4.1.15) pomiędzy odwzorowaniami przejścia wiązek  $\mathcal{P}_G^\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  współdefiniującymi dane lokalne tejsze wiązki, przepisujemy przestrzeń totalną wiązki  $\text{Grpd}(\mathcal{P}_G^2)$  w postaci

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}^2 &= \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{M}_i^{2*}(G \times \mathcal{F}) \right) / \sim_{(g_{1,2}^2, \mathcal{M}_2^2)} \\ &= \left( \bigsqcup_{i \in I} (h_i \triangleright \varphi_i)^*(G \times \mathcal{F}) \right) / \sim_{(h_{1,2} \cdot g_{1,2}^1 \cdot (\text{Inv} \circ h_{2,2}), h_{2,2} \triangleright \varphi_{2,2})}, \end{aligned}$$

uzupełniając tym samym znaną definicję przestrzeni totalnej wiązki  $\text{Grpd}(\mathcal{P}_G^1)$ ,

$$\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}^1 = \left( \bigsqcup_{i \in I} \varphi_i^*(G \times \mathcal{F}) \right) / \sim_{(g_{1,2}^1, \varphi_{2,2})}.$$

i na tej podstawie stwierdzamy istnienie izomorfizmu

$$\text{Grpd}(\Phi, \text{id}_\Sigma, \text{id}_G) : \text{Grpd}(\mathcal{P}_G^1, \phi) \xrightarrow{\cong} \text{Grpd}(\mathcal{P}_G^2, \Gamma\tilde{\Phi}[\phi])$$

reprezentowanego – w duchu Tw. 4.1.7 (względem rozważanych przez nas trywializacji lokalnych) – przez rodzinę cięć lokalnych

$$(6.1.3) \quad \vartheta_i := (h_i, \varphi_i) \equiv (h_i, \mathcal{M}_i^1) : \mathcal{O}_i \longrightarrow G \times \mathcal{F}.$$

Istotnie, w dowolnych punktach  $(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_{ij}$ ,  $i \in I$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  są spełnione tożsamości

$$\mathcal{S}_{G \times \mathcal{F}} \circ \vartheta_i(x) = \varphi_i(x) \equiv \mathcal{M}_i^1(x), \quad \mathcal{I}_{G \times \mathcal{F}} \circ \vartheta_i(x) = h_i(x) \triangleright \varphi_i(x) \equiv \mathcal{M}_i^2(x)$$

oraz

$$\begin{aligned} &\vartheta_i(y) \circ \mathcal{G}_{ij}^1(y) \circ \vartheta_j(y)^{-1} \\ &\equiv (h_i(y), \varphi_i(y)) \circ (g_{ij}^1(y), \mathcal{M}_j^1(y)) \circ (h_j(y)^{-1}, h_j(y) \triangleright \varphi_j(y)) \\ &= (h_i(y), g_{ij}^1(y) \triangleright \varphi_j(y)) \circ (g_{ij}^1(y), \varphi_j(y)) \circ (h_j(y)^{-1}, h_j(y) \triangleright \varphi_j(y)) \\ &= (h_i(y) \circ g_{ij}^1(y) \circ h_j(y)^{-1}, h_j(y) \triangleright \varphi_j(y)) \equiv (g_{ij}^2(y), \mathcal{M}_j^2(y)) = \mathcal{G}_{ij}^2(y), \end{aligned}$$

zgodnie z treścią Stw. 4.1.7. Wprost z samej definicji składowej morfizmowej przyporządkowania  $Grpd$ , określonej powyżej w terminach danych lokalnych morfizmu wiązek głównych o grupie strukturalnej  $G$ , wynika jasno, że przyporządkowanie to zachowuje superpozycję morfizmów, oto bowiem dla pary morfizmów

$$(\Phi_1, \text{id}_\Sigma, \text{id}_G) : \mathcal{P}_G^1 \longrightarrow \mathcal{P}_G^2, \quad (\Phi_2, \text{id}_\Sigma, \text{id}_G) : \mathcal{P}_G^2 \longrightarrow \mathcal{P}_G^3$$

o danych lokalnych  $\{h_i^1\}_{i \in I}$  oraz – odpowiednio –  $\{h_i^2\}_{i \in I}$ , stowarzyszonych z wprowadzonymi wcześniej (współ)trywializacjami lokalnymi, otrzymujemy – w obrazie tychże (współ)trywializacji lokalnych nad  $\mathcal{O}_i \ni x$  – tożsamości

$$\begin{aligned} (h_i^2(x) \cdot h_i^1(x), \mathcal{M}_i^1(x)) &= (h_i^2(x), h_i^1(x) \triangleright \mathcal{M}_i^1(x)) \circ (h_i^1(x), \mathcal{M}_i^1(x)) \\ &\equiv (h_i^2(x), \mathcal{M}_i^2(x)) \circ (h_i^1(x), \mathcal{M}_i^1(x)), \end{aligned}$$

stanowiące lokalną reprezentację tożsamości

$$Grpd((\Phi_2, \text{id}_\Sigma, \text{id}_G) \circ (\Phi_1, \text{id}_\Sigma, \text{id}_G)) = Grpd(\Phi_2, \text{id}_\Sigma, \text{id}_G) \circ Grpd(\Phi_1, \text{id}_\Sigma, \text{id}_G).$$

Ponadto automorfizmowi identycznościowemu  $(\text{id}_{\mathcal{P}_G}, \text{id}_\Sigma, \text{id}_G)$  (o danych lokalnych  $\{h_i \equiv e\}_{i \in I}$ ) wiązki głównej  $\mathcal{P}_G$  o grupie strukturalnej  $G$  jest w podanym tu schemacie przyporządkowywany – dla dowolnego cięcia  $\phi \in \Gamma(\mathcal{P}_G^\Lambda, \mathcal{F})$  – automorfizm identycznościowy odnośnej wiązki głównej  $Grpd(\mathcal{P}_G, \phi)$  o grupoidzie strukturalnym  $G \rtimes \mathcal{F}$ ,

$$(e, \mathcal{M}_i^1) \equiv \mathcal{A}d \circ \mathcal{M}_i^1,$$

mamy zatem w istocie do czynienia z funktorem (kowariantnym) (6.1.1). Pokażemy następnie, że funktor ten jest równoważnością kategorii.

Pokażemy najpierw, że  $Grpd$  jest istotnie surjektywny. Niechaj  $\mathcal{P}_{G \rtimes \mathcal{F}} = (\mathcal{P}_{G \rtimes \mathcal{F}}, \Sigma, \pi_{\mathcal{P}_{G \rtimes \mathcal{F}}}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{G \rtimes \mathcal{F}}}, \mathcal{R}_{\mathcal{P}_{G \rtimes \mathcal{F}}})$  będzie dowolną wiązką główną (o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $G \rtimes \mathcal{F}$ ) o danych trywializacji lokalnej  $(\mathcal{O}, \mathcal{M}_i, \mathcal{G}_{jk} \mid i \in I, (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}})$ , stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi  $\tau_i : \pi_{\mathcal{P}_{G \rtimes \mathcal{F}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{M}_i^*(G \times \mathcal{F})$ . Jej cięcia przejścia  $\mathcal{G}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G \times \mathcal{F}$  zapisują się w postaci

$$(6.1.4) \quad \mathcal{G}_{ij} = (\mathcal{G}_{ij}^G, \mathcal{G}_{ij}^{\mathcal{F}}) : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G \times \mathcal{F},$$

przy czym spełniane przez nie tożsamości z punktu (i) Stw. 230 implikują, dla dowolnych  $(x, y) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_{ij}$ , równości

$$\mathcal{G}_{ij}^{\mathcal{F}}(y) \equiv \mathcal{I}_{G \rtimes \mathcal{F}} \circ \mathcal{G}_{ij}(y) = \mathcal{M}_j(y),$$

$$\mathcal{G}_{ij}^G(y) \triangleright \mathcal{M}_j(y) = \mathcal{G}_{ij}^G(y) \triangleright \mathcal{G}_{ij}^{\mathcal{F}}(y) \equiv \mathcal{I}_{G \rtimes \mathcal{F}} \circ \mathcal{G}_{ij}(y) = \mathcal{M}_i(y),$$

$$(\mathcal{G}_{ii}^G(x), \mathcal{M}_i(x)) = (\mathcal{G}_{ii}^G(x), \mathcal{G}_{ii}^{\mathcal{F}}(x)) \equiv \mathcal{G}_{ii}(x) = \mathcal{A}d \circ \mathcal{M}_i(x) = (e, \mathcal{M}_i(x)).$$

Punkt (ii) tego samego stwierdzenia daje nam – w świetle powyższego – równości

$$(\mathcal{G}_{ji}^G(y), \mathcal{M}_i(y)) = (\mathcal{G}_{ji}^G(y), \mathcal{G}_{ji}^{\mathcal{F}}(y)) \equiv \mathcal{G}_{ji}(y) = \mathcal{I}nv_{G \rtimes \mathcal{F}}(\mathcal{G}_{ij}^G(y), \mathcal{G}_{ij}^{\mathcal{F}}(y))$$

$$= (\mathcal{G}_{ij}^G(y), \mathcal{M}_j(y))^{-1} = (\mathcal{G}_{ij}^G(y)^{-1}, \mathcal{G}_{ij}^G(y) \triangleright \mathcal{M}_j(y)) = (\mathcal{G}_{ij}^G(y)^{-1}, \mathcal{M}_i(y)),$$

a tożsamości z punktu (iii) przepisują się – dla dowolnego  $z \in \mathcal{O}_{ijk}$  – w postaci

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_{ik}^G(z), \mathcal{M}_k(z)) &= (\mathcal{G}_{ik}^G(z), \mathcal{G}_{ik}^{\mathcal{F}}(z)) \equiv \mathcal{G}_{ik}(z) = \mathcal{G}_{ij}(z) \diamond_{G \rtimes \mathcal{F}} \mathcal{G}_{jk}(z) \\ &\equiv (\mathcal{G}_{ij}^G(z), \mathcal{G}_{ij}^{\mathcal{F}}(z)) \diamond_{G \rtimes \mathcal{F}} (\mathcal{G}_{jk}^G(z), \mathcal{G}_{jk}^{\mathcal{F}}(z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mathcal{G}_{ij}^G(z), \mathcal{M}_j(z)) \diamond_{\mathbf{G} \times \mathcal{F}} (\mathcal{G}_{jk}^G(z), \mathcal{M}_k(z)) \\
 &= (\mathcal{G}_{ij}^G(z), \mathcal{G}_{jk}^G(z) \triangleright \mathcal{M}_k(z)) \diamond_{\mathbf{G} \times \mathcal{F}} (\mathcal{G}_{jk}^G(z), \mathcal{M}_k(z)) \\
 &= (\mathcal{G}_{ij}^G(z) \cdot \mathcal{G}_{jk}^G(z), \mathcal{M}_k(z))
 \end{aligned}$$

W sumie zatem dane trywializacji lokalnej określają dwie rodziny odwzorowań (lokalnie) gładkich: cięcia lokalne

$$\mathcal{M}_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{F}, \quad i \in I$$

oraz odwzorowania

$$g_{jk} := \mathcal{G}_{jk}^G : \mathcal{O}_{jk} \longrightarrow \mathbf{G}, \quad (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\emptyset}$$

o następujących własnościach (w oznaczeniach jak wyżej):

$$g_{ik}(z) = g_{ij}(z) \cdot g_{jk}(z), \quad g_{ji}(y) = g_{ij}(y)^{-1}, \quad g_{ii}(x) = e,$$

$$\mathcal{M}_i(y) = g_{ij}(y) \triangleright \mathcal{M}_j(y).$$

Na mocy Tw. 4.2.15 odwzorowania  $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\emptyset}}$  definiują wiązkę główną  $\mathcal{P}_{\mathbf{G}} = (\mathcal{P}_{\mathbf{G}}, \Sigma, \mathbf{G}, \pi_{\mathcal{P}_{\mathbf{G}}})$  o przestrzeni totalnej

$$\mathcal{P}_{\mathbf{G}} := \left( \bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{O}_i \times \mathbf{G} \right) / \sim_{g.},$$

i o  $\mathbf{G}$ -ekwiwariantnych trywializacjach lokalnych

$$[\tau_i] : \pi_{\mathcal{P}_{\mathbf{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathbf{G} : [(x, g, i)] \longmapsto (x, g),$$

pozostających w relacjach wzajemnych określanych przez odwzorowania przejścia  $g_{ij}$ . Trywializacje te, w połączeniu z odwzorowaniami  $\mathcal{M}_i$ ,  $i \in I$  indukują cięcia globalne wiązki produktowej stowarzyszonej  $\mathcal{P}_{\mathbf{G}}^{\Delta} \mathcal{F} \equiv (\mathcal{P}_{\mathbf{G}} \times_{\Sigma} \mathcal{F}) / \mathbf{G}$  nad  $\Sigma$ . W rzeczy samej, zapiszmy

$$\phi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow (\mathcal{P}_{\mathbf{G}} \times_{\Sigma} \mathcal{F}) / \mathbf{G} : x \longmapsto [([\tau_i]^{-1}(x, e), \mathcal{M}_i(x))].$$

Z łatwością przekonujemy się, że odwzorowania  $\phi_i$  są ograniczeniami

$$\phi_i \equiv \phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_i}$$

odwzorowania globalnie gładkiego

$$\phi : \Sigma \longrightarrow (\mathcal{P}_{\mathbf{G}} \times_{\Sigma} \mathcal{F}) / \mathbf{G},$$

oto bowiem w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  spełniony jest warunek

$$\begin{aligned}
 \phi_j(x) &= [([\tau_j]^{-1}(x, e), \mathcal{M}_j(x))] = [([\tau_i]^{-1}(x, e) \triangleleft g_{ij}(x), \mathcal{M}_j(x))] \\
 &= [([\tau_i]^{-1}(x, e), g_{ij}(x) \triangleright \mathcal{M}_j(x))] = [([\tau_i]^{-1}(x, e), \mathcal{M}_i(x))] = \phi_i(x).
 \end{aligned}$$

Opisana tu procedura definiuje przyporządkowanie

$$\mathfrak{I} : \mathbf{GrpdBun}_{\mathbf{G} \times \mathcal{F}}(\Sigma | \text{id}_{\Sigma}) \longrightarrow \mathbf{GrpBun}_{\mathbf{G}}^{(\infty)}(\Sigma) \circledast^{\mathcal{F}} : \mathcal{P}_{\mathbf{G} \times \mathcal{F}} \longmapsto (\mathcal{P}_{\mathcal{O}}, \phi),$$

przy czym wobec tożsamości

$$\begin{aligned}
 &\left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{M}_i^*(\mathbf{G} \times \mathcal{F}) \right) / \sim_{(\mathcal{G}_{1,2}^G, \mathcal{M}_2)} = \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{M}_i^*(\mathbf{G} \times \mathcal{F}) \right) / \sim_{(\mathcal{G}_{1,2}^G, \mathcal{M}_2)} \\
 &= \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{M}_i^*(\mathbf{G} \times \mathcal{F}) \right) / \sim_{(\mathcal{G}_{1,2}^G, \mathcal{G}_{1,2}^{\mathcal{F}})} = \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{M}_i^*(\mathbf{G} \times \mathcal{F}) \right) / \sim_{\mathcal{G}_{1,2}},
 \end{aligned}$$

identyfikującej przestrzeń totalną wiązki  $Grpd \circ \mathfrak{I}(\mathcal{P}_{G \times \mathcal{F}})$  konstatujemy istnienie izomorfizmu wiązek głównych ze strukturalną wiązką grupoidalną  $\mathcal{E}_G$

$$Grpd \circ \mathfrak{I}(\mathcal{P}_{G \times \mathcal{F}}) \cong \mathcal{P}_{G \times \mathcal{F}}$$

o lokalnych ograniczeniach

$$\check{\tau}_i^{-1} \circ \tau_i : \pi_{\mathcal{P}_{G \times \mathcal{F}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_i^*(G \times \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \pi_{(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{M}_i^*(G \times \mathcal{F})) / \sim_{(\mathcal{G}_{1,2}^G, \dots, \mathcal{M}_{1,2})}}^{-1},$$

zapisanych w terminach trywializacji lokalnych  $\check{\tau}_i$  wiązki zrekonstruowanej  $Grpd \circ \mathfrak{I}(\mathcal{P}_{G \times \mathcal{F}})$  wyprowadzonych w treści Uwagi 57 – por. końcowy fragment dowodu Tw. 4.1.1, w szczególności zaś – Równ. (4.1.4). To pokazuje dowodnie, że funktor  $Grpd$  jest istotnie surjektywny, zgodnie z tezą.

W następnym kroku pokażemy, że funktor  $Grpd$  jest pełny. W tym celu rozważmy dowolną parę  $(\mathcal{P}_G^\alpha, \phi^\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  wiązek głównych cechujących działanie grupy  $G$  na wiązce  $\mathcal{F}$ , reprezentowanych w obrazie odnośnych trywializacji lokalnych  $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathcal{P}_G^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$  (nad wspólnym pokryciem  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ ) przez stowarzyszone z tymi trywializacjami odwzorowania przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$  oraz cięcia lokalne  $\varphi_i^\alpha : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{F}$ . Na podstawie tych danych konstruujemy, zgodnie z wypracowanym wcześniej schematem, odnośne wiązki główne (o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $G \times \mathcal{F}$ )  $Grpd(\mathcal{P}_G^\alpha, \phi^\alpha) = (\check{\mathcal{P}}_\mathcal{O}^\alpha, \Sigma, \pi_{\check{\mathcal{P}}_\mathcal{O}^\alpha}, \mathcal{M}_{\check{\mathcal{P}}_\mathcal{O}^\alpha}, \mathcal{R}_{\check{\mathcal{P}}_\mathcal{O}^\alpha})$ , przy czym

$$\check{\mathcal{P}}_\mathcal{O}^\alpha = \left( \bigsqcup_{i \in I} \varphi_i^{\alpha*}(G \times \mathcal{F}) \right) / \sim_{(g_{1,2}^\alpha, \varphi_2^\alpha)}.$$

Lokalne cięcia momentu oraz cięcia przejścia tak otrzymanych wiązek to (jak poucza Uwaga 57) – odpowiednio –

$$\mathcal{M}_i^\alpha = \varphi_i^\alpha, \quad i \in I \quad \mathcal{G}_{jk}^\alpha = (g_{jk}^\alpha, \varphi_k^\alpha), \quad (j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O}.$$

W świetle Tw. 4.1.7 dowolny morfizm pomiędzy tymi wiązkami jest lokalnie reprezentowany przez rodzinę odwzorowań (lokalnie) gładkich  $\vartheta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G \times \mathcal{F}$ ,  $i \in I$  spełniających warunki (i) i (ii) z tegoż twierdzenia. Dokonując rozkładu

$$(6.1.5) \quad \vartheta_i \equiv (\gamma_i, \psi_i) : \mathcal{O}_i \rightarrow G \times \mathcal{F},$$

wyznaczamy  $\psi_i \equiv \varphi_i^1$ ,  $i \in I$ , a na odwzorowania (lokalnie) gładkie  $\gamma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G$  nakładamy – w dowolnych punktach  $x \in \mathcal{O}_i$ ,  $i \in I$  oraz  $y \in \mathcal{O}_{jk}$ ,  $(j, k) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\mathcal{O}$  – więzy

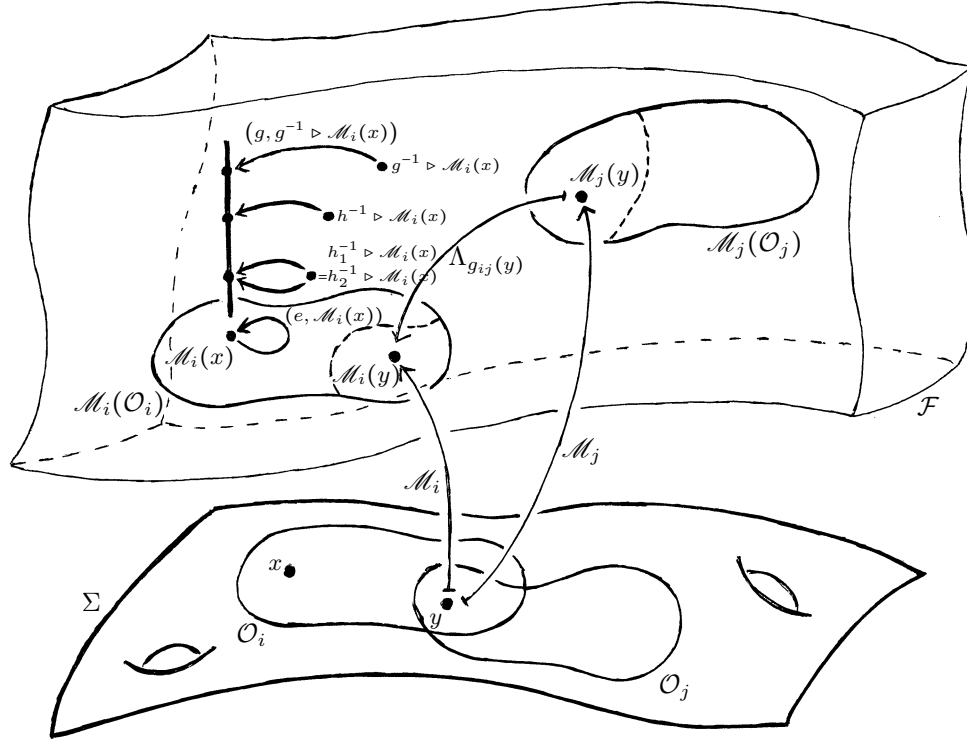
$$\gamma_i(x) \triangleright \varphi_i^1(x) = \varphi_i^2(x), \quad \gamma_j(y) \cdot g_{jk}^1(y) = g_{jk}^2(y) \cdot \gamma_k(y).$$

Przywoławszy tezę Tw. 4.1.3 (oraz dowód Stw. 218), konstatujemy na ich podstawie, że rodzina  $\{\gamma_i\}_{i \in I}$  określa (izo)morfizm  $(\Theta, \text{id}_\Sigma, \text{id}_G) : (\mathcal{P}_G^1, \phi^1) \rightarrow (\mathcal{P}_G^2, \phi^2)$ , który nad punktem  $x \in \mathcal{O}_i$  przyjmuje postać

$$\Theta \circ \tau_i^{1-1}(x, e) = \tau_i^{2-1}(x, \gamma_i(x)).$$

W obrazie funktora  $Grpd$  morfizm ten przechodzi na morfizm reprezentowany – w zgodzie z Równ. (6.1.3) – przez rodzinę cięć lokalnych  $\vartheta_i = (\gamma_i, \varphi_i^1)$ ,  $i \in I$ , czyli wyjściowy morfizm wiązek zrekonstruowanych (6.1.5).

Ostatnią własnością funktora  $Grpd$ , jaką należy zweryfikować, jest jego wierność. Ta wynika jednak wprost z jego konstrukcji. Istotnie, nietożsame izomorfizmy wiązek głównych cechujących działanie grupy  $G$  na wiązce  $\mathcal{F}$  różnią się od siebie w szczególności w obrazie trywializacji lokalnej nad wspólnym pokryciem trywializującym, co w konsekwencji Równ. (6.1.3) oznacza, że różne są także ich obrazy względem funktora  $Grpd$ . Ta prosta konstatacja kończy dowód.  $\square$



RYSUNEK 1. Wiązka główna  $Grpd(\mathcal{P}_G)$  o strukturalnej wiązce grupoidalnej  $G_\sigma \times \mathcal{F}$  nad czasoprzestrzenią  $\Sigma$  w (dualnym) opisie lokalnym teorii pola typu  $F$  nad  $\Sigma$  z wycechowaną symetrią globalną  $G$ . Zbiory otwarte  $\mathcal{O}_i \subset \Sigma$  są odwzorowywane w  $\mathcal{F}$  przez lokalne cięcia momentu  $\mathcal{M}_i$  wyznaczone przez cięcie globalne wiązki produktowej stowarzyszonej  $P_G^\Lambda \mathcal{F}$ . Punkty w obrazie przecięcia  $\mathcal{O}_{i,j}$  są w relacji określonej przez działanie odwzorowań przejścia  $g_{ij}$  wiązki głównej  $\mathcal{P}_G$ . Nad każdym punktem  $\mathcal{M}_i(x)$  znajdujemy włókno strzałek  $G \times \mathcal{F}_x$  o końcu w  $\mathcal{M}_i(x)$ . Oprócz pełnej informacji o orbitach  $G \triangleright \mathcal{M}_i(x)$  działania grupy  $G$ , włókno to niesie także informację o grupie izotropii  $G_{\mathcal{M}_i(x)}$  (patrz: para strzałek o wspólnym początku i końcu).

**1.2. Aspekt dynamiczny w schemacie minimalnym.** niezmienniki tensorowe,

$$\mathcal{T}_{(2)}(\mathbb{T}\phi, \mathbb{T}\phi, \dots, \mathbb{T}\phi),$$

zdefiniowane przy użyciu pól tensorowych typu  $(k, 0)$  na  $\mathcal{F}$  (wprowadzonych w ogólności w Def. 44), np.

- człon kinetyczny typu Kleina–Gordona dla pola  $\phi \in \Gamma(\mathcal{F})$ :

$$\mathcal{G}_{(2)}(\mathbb{T}\phi, (\star \otimes \text{id}_{\mathbb{T}\mathcal{F}})\mathbb{T}\phi)$$

w którego zapisie  $\mathcal{G}$  jest strukturą metryczną na  $\mathcal{F}$  w rozumieniu Def. 169, a  $\star$  jest operatorem Hodge'a na  $\Omega^\bullet(\Sigma)$ , określonym w Def. 174,

- człon prądowy

$$\mathcal{A}_{(2)}(\mathbb{T}\phi, \mathbb{T}\phi, \dots, \mathbb{T}\phi),$$

w którego zapisie  $\mathcal{A} \in \Omega^d(\mathcal{F})$ ,  $d = \dim \Sigma$

przy czym we wszystkich przypadkach indeks (2) informuje o tym, że odnośne pole tensorowe na  $\mathcal{F}$  jest obliczane na drugim czynniku tensorowym swych argumentów (najprostsze) warunki symetrii globalnej:

$$\Lambda_g^* \mathcal{F} = \mathcal{F}$$

Odwróćmy obecnie rozumowanie przedstawione w dowodzie Stw. 245, które przeprowadziło nas od pochodnej  $\Gamma(\text{AdP}_G)$ -kowariantnej cięcia wiązki stowarzyszonej wzdłuż (podniesienia poziomego) pola wektorowego w bazie tejże wiązki do cięcia tego pochodnej Crittendena, aby wyprowadzić szczególnie wygodną prezentację lokalną pochodnej Crittendena cięcia wiązki produktowej stowarzyszonej<sup>1</sup>, wprowadzonej w Def. 160. Rozważmy zatem pole wektorowe  $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathbb{T}B)$  i dowolne gładkie dopełnienie  $\mathcal{V} \in \Gamma(\text{VP}_G)$  jego podniesienia poziomego  $\text{Hor}(\mathcal{X}) \in \Gamma(\text{HP}_G)$  do pola gładkiego

$$\widetilde{\mathcal{X}} := \text{Hor}(\mathcal{X}) + \mathcal{V} \in \Gamma(\text{HP}_G \oplus_{\text{P}_G, \mathbb{R}} \text{VP}_G) \cong \Gamma(\text{TP}_G).$$

Przy tym w świetle Stw. 238 mamy rozkład

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^A \triangleright \mathcal{K}_{t_A},$$

obliczamy zatem – w odwołaniu do Def. 159, Def. 94 i Uwagi 30 oraz własności definiujących odwzorowania  $\Phi_\lambda[\phi]$  –

$$\begin{aligned} \Phi_{T_2\Lambda}^x[\nabla_{\mathcal{X}}^x \phi] &\equiv (\widetilde{\mathcal{X}} - \mathcal{V}) \lrcorner d\Phi_\Lambda^x[\phi] = \widetilde{\mathcal{X}} \lrcorner d\Phi_\Lambda^x[\phi] - \mathcal{V}^A \triangleright \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (\Phi_\Lambda^x[\phi] \circ r_{\exp(t\triangleright t_A)}) \\ &= \widetilde{\mathcal{X}} \lrcorner d\Phi_\Lambda^x[\phi] - \mathcal{V}^A \triangleright \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (\Lambda_{\exp(-t\triangleright t_A)} \circ \Phi_\Lambda^x[\phi]) \\ &= \widetilde{\mathcal{X}} \lrcorner d\Phi_\Lambda^x[\phi] + \mathcal{V}^A \triangleright \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\Lambda^x[\phi]) \\ &= \widetilde{\mathcal{X}} \lrcorner d\Phi_\Lambda^x[\phi] + \mathbb{T}_{(e, \Phi_\Lambda^x[\phi](\cdot))} \Lambda(\mathcal{V} \lrcorner \underline{\mathcal{A}}, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_{\Phi_\Lambda^x[\phi](\cdot)} M}) \\ &\equiv \widetilde{\mathcal{X}} \lrcorner d\Phi_\Lambda^x[\phi] + \mathbb{T}_{(e, \Phi_\Lambda^x[\phi](\cdot))} \Lambda(\widetilde{\mathcal{X}} \lrcorner \underline{\mathcal{A}}, \mathbf{0}_{\mathbb{T}_{\Phi_\Lambda^x[\phi](\cdot)} M}) \\ &= \widetilde{\mathcal{X}} \lrcorner (d\Phi_\Lambda^x[\phi] + (\text{id}_{\mathbb{T}^*\text{P}_G} \otimes \mathbb{T}_{(e, \Phi_\Lambda^x[\phi](\cdot))} \Lambda) \circ \underline{\mathcal{A}}). \end{aligned}$$

Ograniczając dyskusję do pewnego podzbioru otwartego  $\mathcal{O} \subset B$ , jeśli trzeba, możemy wybrać  $\widetilde{\mathcal{X}}$  na przykład w postaci pchnięcia stycznego pola  $\mathcal{X}$  wzdłuż dowolnego cięcia (lokalnego)  $\sigma_* \in \Gamma_{(\text{loc})}(\text{P}_G)$  (nad  $\mathcal{O}$ ) – w rzeczy samej, składowa pozioma pola

$$\widetilde{\mathcal{X}} \equiv \mathbb{T}\sigma_*(\mathcal{X} \lrcorner \mathcal{O})$$

to  $\text{Hor}(\mathcal{X} \lrcorner \mathcal{O})$ , co wynika z jednoznaczności rozkładu pól wektorowych na  $\text{P}_G$  na składowe: poziomą i pionową oraz tożsamości

$$\mathbb{T}\pi_{\text{P}_G}(\widetilde{\mathcal{X}}) = \mathbb{T}(\pi_{\text{P}_G} \circ \sigma_*)(\mathcal{X} \lrcorner \mathcal{O}) = \text{Tid}_{\mathcal{O}}(\mathcal{X} \lrcorner \mathcal{O}) \equiv \mathcal{X} \lrcorner \mathcal{O}.$$

<sup>1</sup>Należy podkreślić, że prezentacja lokalna pochodnej Crittendena cięcia standardowej wiązki stowarzyszonej jest tutaj zawarta jako przypadek szczególny.

W tym szczególnym i szczególnie istotnym (bo naturalnym) przypadku wprowadzamy – w ślad za literaturą fizyczną –

DEFINICJA 183. ▲

## 2. Cechowanie poza schematem minimalnym – studium przypadku cd.

Ustaliwszy ogólne zasady rządzące procedurą cechowania symetrii globalnej w teorii pola i zidentyfikowawszy struktury algebraiczne i geometryczne, których użycia wymaga owa procedura, możemy obecnie powrócić do dyskusji szczególnego typu teorii pola wprowadzonego w Rozdz. 1. Takie zawężenie kadru rozważań da nam możliwość szczegółowego zbadania okoliczności, w których poznane wcześniej struktury i metody okazały się niewystarczające, i tym samym pozwoli nam zrozumieć głębszy sens algebraiczny i geometryczny uniwersalnej zasady cechowania.

Rozważmy zatem – dla uproszczenia – najprostszy model propagacji masywnego punkowego ładunku elektrycznego, czyli jednofazowy jednowymiarowy model  $\sigma$  określony w Def. 179. Poszukamy takich jego globalnych symetrii, które są indukowane przez dyfeomorfizmy przestrzeni zanurzenia  $M$ . Ażeby uzyskać elementarne zrozumienie dodatkowych warunków, jakie muszą spełniać wyróżnione elementy  $f \in \text{Diff}^k(M)$  indukujące symetrie modelu  $\sigma$ , zbadamy rzeczony symetrie w obrazie infinytezymalnym, tj. zadamy sobie pytanie, jakie pola wektorowe na przestrzeni zanurzenia zachowują funkcjonal działający (6.0.11), przy czym przestrzeń  $\Gamma(TM)$  pól wektorowych na  $M$  objawia się nam tutaj w roli nieskończonej wymiarowej algebry Liego grupy  $\text{Diff}^k(M)$ . Innymi słowy, pytamy o to, dla jakich pól wektorowych  $\mathcal{V} \in \Gamma(TM)$  odnośne potoki  $\Phi_{\mathcal{V}}$  (określone w dowolnym punkcie  $x \in M$  na dostatecznie małym przedziale parametrycznym  $]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[ \ni t, \varepsilon_x > 0$ ) spełniają – dla dowolnej<sup>2</sup> pętli  $x \in LM$  – warunek

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} S[\Phi_{\mathcal{V}}(t, x(\cdot))] = 0.$$

Odpowiedzi dostarcza

STWIERDZENIE 259. *Przyjmijmy zapis Def. 76, 80, 175 i 179 oraz Tw. 1.4.20. Niechaj  $M$  będzie rozmaitością różniczkowalną klasy  $C^k$ ,  $k \geq 2$ . Pole wektorowe  $\mathcal{K} \in \Gamma(TM)$  generuje lokalną jednoparametrową grupę lokalnych symetrii jednofazowego jednowymiarowego modelu  $\sigma$  w tle  $(M, g, \mathbb{L})$  określonego w Def. 179, jeśli są spełnione warunki:*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}}g = 0,$$

tj.  $\mathcal{K}$  jest polem Killinga metryki  $g$  w rozumieniu Def. 177, oraz

$$\exists \kappa \in C^k(M, \mathbb{R}) : \mathcal{K} \lrcorner \text{curv}(\nabla^{\mathbb{L}}) = -d\kappa,$$

więc też

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \text{curv}(\nabla^{\mathbb{L}}) = 0.$$

■

<sup>2</sup>Należy podkreślić, że narzucony tu warunek nie dotyczy pętli będących rozwiązaniami równań Eulera–Lagrange’a dla rozpatrywanego tu modelu  $\sigma$ .

*Dowód:* W rachunku bezpośrednim analogicznym do tego przeprowadzonego w Uwadze 77, a w odwołaniu do Uwagi 76, otrzymujemy wynik:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} S[\Phi_{\mathcal{K}}(t, x(\cdot))] = \frac{m}{2} \int_{\Lambda} \text{Vol}(\Lambda) [\mathcal{K}^{\rho} \partial_{\rho} g_{\mu\nu}(x(\tau)) \frac{dx^{\mu}}{d\tau}(\tau) \frac{dx^{\nu}}{d\tau}(\tau) \\
&\quad + 2g_{\rho\mu}(x(\tau)) \frac{d\mathcal{K}^{\rho} \circ x}{d\tau}(\tau) \frac{dx^{\mu}}{d\tau}(\tau)] + \sum_{e \in E \subset \Delta_{\Lambda}} \left( \int_e d\tau [\mathcal{K}^{\rho} \partial_{\rho} A_{i_e \mu}(x(\tau)) \frac{dx^{\mu}}{d\tau}(\tau) \right. \\
&\quad \left. + A_{i_e \rho}(x(\tau)) \frac{d\mathcal{K}^{\rho} \circ x}{d\tau}(\tau)] + i \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} \mathcal{V} \lrcorner g_{i_v i_e} dg_{i_e i_v}(x(v)) \right) \\
&= \frac{m}{2} \int_{\Lambda} \text{Vol}(\Lambda) (\mathcal{K}^{\rho} \partial_{\rho} g_{\mu\nu} + 2g_{\rho\mu} \partial_{\nu} \mathcal{K}^{\rho})(x(\tau)) \frac{dx^{\mu}}{d\tau}(\tau) \frac{dx^{\nu}}{d\tau}(\tau) \\
&\quad + \sum_{e \in E \subset \Delta_{\Lambda}} \int_e d\tau \mathcal{K}^{\rho}(x(\tau)) [\partial_{\rho} A_{i_e \mu}(x(\tau)) \frac{dx^{\mu}}{d\tau}(\tau) - \frac{dA_{i_e \rho} \circ x}{d\tau}(\tau)] \\
&\equiv \frac{m}{2} \int_{\Lambda} \text{Vol}(\Lambda) (\mathcal{L}_{\mathcal{K}} g)_{\mu\nu}(x(\tau)) \frac{dx^{\mu}}{d\tau}(\tau) \frac{dx^{\nu}}{d\tau}(\tau) + \int_{\Lambda} x^*(\mathcal{K} \lrcorner F),
\end{aligned}$$

z którego wobec zamkniętości  $\Lambda$  wynika pierwsza część tezy dowodzonego stwierdzenia. Ostatnia tożsamość jest teraz konsekwencją Stw. 255 oraz (ko)zamkniętości  $F$ ,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} F = \mathcal{K} \lrcorner dF + d(\mathcal{K} \lrcorner F) = -d^2 \kappa = 0.$$

□

UWAGA 80. Należy zwrócić uwagę, że w modelu  $\sigma$  z niedynamiczną zależnością od metryki na linii świata (tzw. Einbeinu), więc w szczególności niezmienniczego względem reparametryzacji tejże linii świata, w którym miara  $\text{Vol}(\Lambda)$  w członie metrycznym

$$\frac{m}{2} \int_{\Lambda} \text{Vol}(\Lambda) x^* g(\hat{t}, \hat{t})$$

zawiera dowolną gęstość skalarną na  $\Lambda$ , wskazane powyżej warunki charakteryzujące  $\mathcal{K}$  są nie tylko wystarczające, ale też konieczne, aby potok tego pola generował symetrię modelu. Wniosek taki w odniesieniu do pierwszego z tych warunków jest natychmiastową konsekwencją obecności rzeczonyj (*dowolnej*) gęstości skalarniej w członie metrycznym funkcjonału działania. Kiedy zaś on zostanie spełniony zostajemy z warunkiem

$$\int_{x(\Lambda)} \mathcal{K} \lrcorner F \equiv \int_{\Lambda} x^*(\mathcal{K} \lrcorner F) \stackrel{!}{=} 0,$$

który oznacza, że 1-forma  $\mathcal{K} \lrcorner F$  oblicza się trywialnie na *dowolnej* pętli w  $M$ , czyli – używając języka (ko)homologicznego, z którym zapoznamy się nieco później – klasa kohomologii de Rhama  $[\mathcal{K} \lrcorner F]_{dR}$  (wybierając dowolną pętlę ściągającą, stwierdzamy, że  $\mathcal{K} \lrcorner F$  jest 1-formą zamkniętą) anihiluje całą pierwszą grupę homologii  $H^1(M, \mathbb{R})$ , jest zatem trywialna w świetle Twierdzenia de Rhama.

□

Kierując się ogólnymi zasadami wytyczonymi we wstępie do Rozdz. 1, zbadamy obecnie warunki, jakie muszą być spełnione, aby możliwym było wycechowanie zidentyfikowanych powyżej symetrii jednowymiarowego modelu  $\sigma$  przy różnego rodzaju założeniach upraszczających, które umożliwią wyrobienie sobie rozmaitych intuicji pośrednich, a na koniec wyprowadzimy takie minimalne modelu tego rozszerzenie, w którym w ścisły i konkretny sposób zostanie zrealizowany postulat



ulokowania symetrii globalnych w zupełnie dowolnym tle propagacji  $M$ . Przy tym obecność nad włóknem typowym  $M$  wiązki pól nietensorowej struktury  $\mathbb{L}$  współdefiniującej dynamikę obiektu elementarnego teorii pola, jakim jest naładowany punkt materialny, doprowadzi nas do daleko idącego uogólnienia odkrytej w Rozdz. 1 zasady sprzężenia minimalnego. Naszą analizę rozpoczniemy od sytuacji skrajnie uproszczonej: oto niechaj wiązka elektromagnetyczna będzie wiązką trywialną

$$\mathbb{L} = I_A \equiv M \times \mathbb{C}$$

o globalnie gładkiej formie powiązania  $A \in \Omega^1(M)$ , przy czym założymy dodatkowo, że ta ostatnia jest stała wzdłuż dowolnego z pól wektorowych  $\{\mathcal{K}_A\}_{A \in \overline{1, N}} \subset \Gamma(TM)$ ,  $N \in \mathbb{N}$  (więc też wzdłuż dowolnej ich  $\mathbb{R}$ -liniowej kombinacji) z podzbioru bazy podalgebry Liego pól Killinga na  $M$  (patrz: Stw. 257) wyznaczonego przez warunki

$$(6.1.6) \quad \mathcal{L}_{\mathcal{K}_A} A = 0, \quad A \in \overline{1, N}.$$

Z tych ostatnich wyprowadzamy równość (jedną z możliwych)

$$\kappa_A = \mathcal{K}_A \lrcorner A,$$

po czym konstatujemy, że odnośne pola Killinga także rozpinają podalgebrę Liego  $\mathfrak{g} \subset \Gamma(TM)$ , a to w bezpośredniej konsekwencji Stw. 256,

$$\mathcal{L}_{[\mathcal{K}_A, \mathcal{K}_B]} A = \mathcal{L}_{\mathcal{K}_A} (\mathcal{L}_{\mathcal{K}_B} A) - \mathcal{L}_{\mathcal{K}_B} (\mathcal{L}_{\mathcal{K}_A} A) = 0.$$

W dalszej części naszej dyskusji generatory (abstrakcyjnej) algebry Liego  $\mathfrak{g}$  odpowiadające polom fundamentalnym  $\mathcal{K}_A$  będziemy oznaczać symbolami  $t_A$ ,  $A \in \overline{1, N}$ . Celem naszym będzie wypracowanie schematu ulokowania symetrii globalnych modelu o tak zidentyfikowanej strukturze infinitezymalnej (czyli stycznościowej), zajmniemy się zatem grupą Liego  $G \subset \text{Isom}(M, \mathfrak{g})$  o algebrze Liego  $\mathfrak{g}$ . Jako punkt wyjścia przyjmujemy warunek

$$\forall_{g \in G} : \lambda_g^* A = A,$$

całkujący warunki infinitezymalne (6.1.6). Zbadamy zmianę wartości funkcjonału działania (6.0.2) w tle  $(M, \mathfrak{g}, I_A)$  (oraz dla  $q \equiv 1$ ), czyli

$$(6.1.7) \quad S[x] = \frac{m}{2} \int_{\Lambda} d\tau g_{\mu\nu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) \frac{dx^\nu}{d\tau}(\tau) + \int_{\Lambda} d\tau A_\mu(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) + 2\pi\mathbb{Z},$$

pod wpływem zastąpienia

$$(6.1.8) \quad LM \ni x(\cdot) \mapsto \gamma(\cdot) \triangleright x(\cdot) \in LM,$$

w którego zapisie

$$\gamma(\cdot) \in LG$$

reprezentuje zależną dowolnie (gładko) od punktu na linii świata transformację symetrii. W rachunku w pełni analogicznym do tego przeprowadzonego w treści Uwagi 59 obliczamy

$$\begin{aligned} S[\gamma \triangleright x] &= \frac{m}{2} \int_{\Lambda} d\tau (\lambda_{\gamma(\cdot)}^* g(x(\cdot)))_{\mu\nu}(\tau) \left[ \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) + \widehat{t} \lrcorner \gamma^* \theta_L^A(\tau) \mathcal{K}_A^\mu(x(\tau)) \right] \\ &\quad \cdot \left[ \frac{dx^\nu}{d\tau}(\tau) + \widehat{t} \lrcorner \gamma^* \theta_L^B(\tau) \mathcal{K}_B^\nu(x(\tau)) \right] \\ &\quad + \int_{\Lambda} (\lambda_{\gamma(\cdot)}^* A(x(\cdot)))_\mu(\tau) \left[ \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) + \widehat{t} \lrcorner \gamma^* \theta_L^A(\tau) \mathcal{K}_A^\mu(x(\tau)) \right] + 2\pi\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

czyli też – na mocy poczynionych założeń –

$$\begin{aligned}
S[\gamma \triangleright x] &= \frac{m}{2} \int_{\Lambda} \text{Vol}(\Lambda) g_{\mu\nu}(x(\tau)) \left[ \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) + \widehat{t} \lrcorner \gamma^* \theta_L^A(\tau) \mathcal{K}_A^\mu(x(\tau)) \right] \\
&\quad \cdot \left[ \frac{dx^\nu}{d\tau}(\tau) + \widehat{t} \lrcorner \gamma^* \theta_L^B(\tau) \mathcal{K}_B^\nu(x(\tau)) \right] \\
&\quad + \int_{\Lambda} A_\mu(x(\tau)) \left[ \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) + \widehat{t} \lrcorner \gamma^* \theta_L^A(\tau) \mathcal{K}_A^\mu(x(\tau)) \right] + 2\pi\mathbb{Z} \\
&\equiv S[x] + \int_{\Lambda} d\tau \left[ (\widehat{t} \lrcorner x^* \mathcal{K}_A^b + x^* \kappa_A) \widehat{t} \lrcorner \gamma^* \theta_L^A(\tau) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} x^* (\mathcal{K}_A \lrcorner \mathcal{K}_B^b) (\widehat{t} \lrcorner \gamma^* \theta_L^A) (\widehat{t} \lrcorner \gamma^* \theta_L^B)(\tau) \right].
\end{aligned}$$

Wynik ten jasno pokazuje, że dokonując w funkcjonałe (6.1.7) podstawienia

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) \mapsto \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) + \mathcal{K}_A^\mu(x(\tau)) \widehat{t} \lrcorner a^A(\tau),$$

w którym  $a \equiv a^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A \in \Omega^1(\Lambda) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  jest 1-formą gładką na linii świata o własnościach transformacyjnych (kompensujących wzgl. (6.1.8)) opisywanych znajomym wzorem

$$a \mapsto (\text{id}_{T^*\Lambda} \otimes T_e \text{Ad}_{\gamma(\cdot)})(a - \gamma^* \theta_L),$$

por. Równ. (4.2.41), uzyskujemy wyrażenie jawnie niezmiennicze względem lokalnych transformacji symetrii (6.1.8).

Rozdział 6.2

## **Efekt ABEHGHK[...] albo redukcja grupy cechowania**

... czyli efekt Andersona–Brouta–Englerta–Higgsa–Guralnika–Hagena–Kibble’a

Część 7

Zastosowania algebry homologicznej

Rozdział 7.1

## Kohomologia snopowa i kohomologia de Rhama

Rozdział 7.2

## Homologia singularna

Rozdział 7.3

## Kohomologie Čecha i Beilinsona–Deligne’a

Rozdział 7.4

## **Kohomologia grupowa**



Rozdział 7.5

## Kohomologia (super)algebr Liego

Rozdział 7.6

## Homologia Morse'a

## Część 8

# Teoria kategorii – więcej niż semiotyka

Rozdział 8.1

## Język teorii kategorii – rekapitulacja

Rozdział 8.2

## Kategorie z dodatkową strukturą

Rozdział 8.3

## Topologiczna kwantowa teoria pola

Rozdział 8.4

## Wyższe kategorie

Rozdział 8.5

## Kategoryfikacja



Część 9

Epilegomena

## Co by tu jeszcze...

- algebry operatorów wierzchołkowych?
- (super)algebry Kaca–Moody’ego?
- grupy kwantowe (w rozumieniu Drinfelda–Jimbo)?
- NCG (à la Connes)?
- kwantowanie deformacyjne?
- systemy całkowalne i algebraiczny Ansatz Bethego?
- niezmienniki węzłów a trójwymiarowe rozmaitości zwarte?
- ciągi spektralne, orientifoldy itp.?

## W 8 stron od teorii grup do teorii kategorii

Zacniemy od przeformułowania opisu pojęcia grupy. Oto w sposób nieco sztuczny przedstawimy grupę  $G$  jako zbiór bijekcji singletonu (zbioru jednoelementowego)  $\{\bullet\}$  „udekorowanych” elementami grupy  $g \in G$ . Taką oczywistą nadmiarowością w zbiorze odwzorowań singletonu w siebie możemy traktować jako sposób na zapisanie informacji o ukrytej wewnętrznej strukturze obiektu  $\bullet$ , której nie określamy w żaden inny (bezpośredni) sposób. W tym obrazku  $G$  stanowi (albo indeksuje) kompletny zbiór odwzorowań uzgodnionych z ukrytą strukturą obiektu  $\bullet$ , tj. strukturę tę respektujących (i w tym sensie „zachowujących” obiekt  $\bullet$ ), więc *dozwolonych* z punktu widzenia naszych rozważań. Istnienie operacji binarnej na  $G$  możemy zrozumieć jako prawo orzekające, że superpozycja odwzorowań dozwolonych jest także odwzorowaniem dozwolonym, a łączność operacji binarnej tłumaczy się na łączność tejże dobrze określonej superpozycji. Pośród odwzorowań dozwolonych istnieje jedno odwzorowanie wyróżnione, które odpowiada trywialnej bijekcji obiektu  $\bullet$  i z tej przyczyny stanowiące nie zmieniające żadnego innego odwzorowania dozwolonego po przyłożeniu go przed tym odwzorowaniem lub po nim – tym odwzorowaniem jest bijekcja indeksowana elementem neutralnym  $e \in G$ . Wreszcie też każdemu odwzorowaniu odpowiada odwzorowanie *odwrotne*, tj. takie, którego superpozycja z wyjściowym daje poprzednio omówione odwzorowanie trywialne. Jego istnienie zapewnia operacja unarna  $\text{Inv} : G \rightarrow G$ .

Z naszej dotychczasowej dyskusji wyłania się już pewna (z konieczności dość banalna w swej zawartości) struktura, dostarczająca równoważnego przeformułowania opisu grupy, które poddaje się dalekosięzalnemu uogólnieniu. Mamy więc do czynienia z dwoma zbiorami: **zbiorem obiektów**  $\text{Obj } G \equiv \{\bullet\}$  i **zbiorem dozwolonych odwzorowań** między nimi, który będziemy określać mianem **zbioru morfizmów**  $\text{Mor } G \cong G$  i przedstawiać jako zbiór strzałek „udekorowanych” elementami grupy,



Każde z odwzorowań ma swoją dziedzinę, z której wychodzi stowarzyszona z nim strzałka i którą w dalszej części wywodu będziemy nazywać **początkiem morfizmu**,

$$s : \text{Mor } G \rightarrow \text{Obj } G : \leftarrow^g \text{---} \mapsto \bullet,$$

oraz przeciwdziedzinę, do której strzałka sięga i którą będziemy nazywać **końcem morfizmu**,

$$t : \text{Mor } G \rightarrow \text{Obj } G : \leftarrow^g \text{---} \mapsto \bullet.$$

Na zbiorze  $\text{Mor } G_s \times_t \text{Mor } G$  par strzałek składalnych, tj. takich, u których koniec poprzednika pokrywa się z początkiem następnika (w naszym przypadku są to

wszystkie strzałki), określona jest łączna operacja **złożenia (superpozycji)**

$$\circ : \text{Mor } G_s \times_t \text{Mor } G \longrightarrow \text{Mor } G : (\leftarrow h \text{---} , \leftarrow g \text{---} ) \longmapsto \leftarrow h \cdot g \text{---}$$

o oczywistych (u nas wręcz trywialnych) własnościach

$$s(\leftarrow h \text{---} \circ \leftarrow g \text{---} ) = s(\leftarrow g \text{---} ) , \quad t(\leftarrow h \text{---} \circ \leftarrow g \text{---} ) = t(\leftarrow h \text{---} ) .$$

Na zbiorze obiektów określamy odwzorowanie

$$\text{Id} : \text{Obj } G \longrightarrow \text{Mor } G : \bullet \longmapsto \leftarrow e \text{---} ,$$

które przypisuje obiektowi **morfizm identycznościowy** o własnościach

$$s \circ \text{Id} = \text{id}_{\text{Obj } G} = t \circ \text{Id} ,$$

$$\leftarrow g \text{---} \circ \text{Id}_s(\leftarrow g \text{---} ) = \leftarrow g \text{---} = \text{Id}_t(\leftarrow g \text{---} ) \circ \leftarrow g \text{---} .$$

Odwracalność wszystkich morfizmów (strzałek) jest równoznaczna z istnieniem odwzorowania

$$\text{Inv} : \text{Mor } G \longrightarrow \text{Mor } G : \leftarrow g \text{---} \longmapsto \text{---} g \text{---} \equiv \leftarrow g^{-1} \text{---}$$

o własnościach

$$s \circ \text{Inv} = t , \quad t \circ \text{Inv} = s ,$$

$$\leftarrow g \text{---} \circ \text{Inv}(\leftarrow g \text{---} ) = \text{Id}_t(\leftarrow g \text{---} ) ,$$

$$\text{Inv}(\leftarrow g \text{---} ) \circ \leftarrow g \text{---} = \text{Id}_s(\leftarrow g \text{---} ) .$$

Zanim przejdziemy do dyskusji realizacji grupy, zaadaptujemy nowy formalizm do opisu struktury nieco mniej sztywnej niż rozpatrywana dotąd struktura grupy, a mianowicie: monoidu  $\mathbf{Map}(X, X)$  odwzorowań (ustalonego) zbioru  $X$  w siebie. Struktura ta doskonale, a przy tym całkowicie naturalnie ilustruje ideę modelowania wewnętrznej struktury obiektu (jakim w tym przypadku jest sam zbiór  $X$ ) w mnogości dozwolonych morfizmów. Mamy tu zatem do czynienia z jednoelementowym zbiorem obiektów

$$\text{Obj } \mathbf{Map}(X, X) = \{X\} ,$$

zbiorem morfizmów zaś – w pełnej analogii do sytuacji wcześniejszej – jest zbiór strzałek udekorowanych odwzorowaniami  $f \in \mathbf{Map}(X, X)$ . Reszta dyskusji przebiega analogicznie jak w przypadku grupy  $G$ , z tą wszelako istotną różnicą, że tym razem opuszczamy wymóg odwracalności morfizmów.

Dokonawszy powyższej – może nieco dziwacznej na pierwszy rzut oka, ale też – jak się okaże – nader pożytecznej – formalizacji struktury grupy i wyróżnionego monoidu  $\mathbf{Map}(X, X)$ , możemy poddać analogicznemu zabiegowi strukturę realizacji  $R$  (tj. działania) grupy  $G$  na zbiorze  $X$ . Realizacja taka jest homomorfizmem monoidu definiowanego przez  $G$  (poprzez „zapomnienie” o odwracalności wszystkich elementów<sup>1</sup>  $\mathbf{Map}(X, X)$ ).

W wypracowanym wcześniej języku, stwierdzamy więc istnienie odwzorowania o **składowych: obiektowej**

$$R : \text{Obj } G \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Map}(X, X) : \bullet \longmapsto X$$

<sup>1</sup>Obraz  $G$  leży w grupie symetrycznej  $\mathfrak{S}_X$ , jednak to uściślenie pozbawiłoby nasze rozumowanie nieodzownej ogólności.

i **morfizmowej** (zwyczajowo oznaczanej tym samym symbolem)

$$R : \text{Mor } G \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Map}(X, X) : \leftarrow g \longrightarrow \longmapsto \leftarrow R(g) \longrightarrow$$

o własnościach (zapisanych w konwencji zgodnej z tym zwyczajem)

$${}_s \mathbf{Map}(X, X) \circ R = R \circ {}_s G, \quad {}_t \mathbf{Map}(X, X) \circ R = R \circ {}_t G$$

oraz

$$R(\leftarrow h \longrightarrow \circ_G \leftarrow g \longrightarrow) = R(\leftarrow h \longrightarrow) \circ_{\mathbf{Map}(X, X)} R(\leftarrow g \longrightarrow),$$

$$R \circ \text{Id}^G = \text{Id}^{\mathbf{Map}(X, X)} \circ R.$$

Na najniższym szczeblu hierarchii struktur algebraicznych stowarzyszonych z pojęciem grupy i jej działania na wybranym zbiorze znajdujemy odwzorowania G-ekwiwariantne splatające realizacje  $R_1$  i  $R_2$ , które w rozbudowanym tu formalizmie możemy (znów w sposób nieco nadmiarowy) przedstawić jako indeksowane przez zbiór  $\text{Obj } G$  rodziny morfizmów

$$\eta : \text{Obj } G \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Map}(X, X) : \bullet \longmapsto \eta_\bullet$$

o **składowych** (tutaj w liczbie 1)

$$\eta_\bullet : R_1(\bullet) \rightarrow R_2(\bullet),$$

na które został nałożony definiujący warunek G-ekwiwariantności

$$\forall \leftarrow g \longrightarrow \in \text{Mor } G : \eta_t(\leftarrow g \longrightarrow) \circ R_1(\leftarrow g \longrightarrow) = R_2(\leftarrow g \longrightarrow) \circ \eta_s(\leftarrow g \longrightarrow).$$

Sformułowany przez nas schemat opisu struktur grupy i zbioru z jej działaniem poddaje się następującym istotnym i przez to interesującym ogólnieniom:

- Dopuszczenie dowolnej liczby obiektów we wcześniejszym opisie grupy (co prowadzi do wyodrębnienia podzbioru właściwego par morfizmów składowych w kwadracie kartezjańskim zbioru morfizmów) przy zachowaniu odwracalności wszystkich morfizmów daje **grupoid**.
- Rezygnacja z odwracalności morfizmów (czyli cofnięcie się do poziomu monoidu) prowadzi do ogólnej **małej kategorii**.
- Jeśli dodatkowo dopuścić tę ewentualność, że obiekty lub morfizmy nie tworzą zbioru, lecz klasę właściwą (tj. mnogość nie będącą zbiorem a określaną przez wspólną cechę elementów, jak np. klasa wszystkich zbiorów określaną przez cechę „bycie zbiorem”), to mamy do czynienia także z **dużymi kategoriami**, przy czym wyróżniamy takie, u których klasy morfizmów są zbiorami, nazywając je **lokalnie małymi**.
- Odwzorowanie między kategoriami spełniające warunki wypisane dla realizacji grupy to **funktor kowariantny**  $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ . Jeśli warunki te zastąpimy układem

$$s^2 \circ F = F \circ t^1, \quad t^2 \circ F = F \circ s^1,$$

$$F(\chi_2 \circ_1 \chi_1) = F(\chi_1) \circ_2 F(\chi_2),$$

$$F \circ \text{Id}^1 = \text{Id}^2 \circ F,$$

to otrzymamy definicję **funktora kontrawariantnego**. Ilekroć składowa morfizmowa funktora jest injekcją w ograniczeniu do każdej klasy  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y)$ , mówimy o **funktorze wiernym**, kiedy natomiast jej ograniczenia są surjekcjami, funktor nazywamy **pełnym**. Przy spełnieniu obu warunków funktor określamy mianem **w pełni wiernego**. Szczególnymi i szczególnie ważnymi przykładami funktorów są **funktory**  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$  dla ustalonej lokalnie małej kategorii  $\mathcal{C}$ : **kowariantny**

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

określony dla dowolnego  $X \in \text{Obj } \mathcal{C}$ , o składowej obiektowej

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) : \text{Obj } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Set} : Y \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

i morfizmowej

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Set}$$

$$: (Y \xrightarrow{X} Z) \longmapsto (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{X^{\circ}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z))$$

oraz **kontrawariantny**

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

określony analogicznie jak wyżej, o składowej obiektowej

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) : \text{Obj } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Set} : Y \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

i morfizmowej

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Set}$$

$$: (Y \xrightarrow{X} Z) \longmapsto (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \xrightarrow{X^{\circ}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)).$$

- Wreszcie też rodzinę odwzorowań w rodzaju tych przypisanych splataczowi realizacji  $R_1$  i  $R_2$  nazywamy **transformacją naturalną**, a kiedy każdy z morfizmów składowych jest odwracalny, mówimy o **izomorfizmie naturalnym (funktorów)**, bądź **równoważności naturalnej**. Warunek naturalności dla funktorów kowariantnych jest więc postaci

$$(A.1) \quad \forall_{\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y)} : \eta_Y \circ_2 F(\chi) = G(\chi) \circ_2 \eta_X.$$

W przypadku funktorów kontrawariantnych należy dokonać stosownej korekty relacji definicji transformacji naturalnej, kładąc

$$\forall_{\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X, Y)} : \eta_X \circ_2 F(\chi) = G(\chi) \circ_2 \eta_Y.$$

Elementarnym, lecz istotnym wynikiem strukturalnym teorii grup, eksponującym pierwszorzędne znaczenie grup symetrycznych w tej teorii, jest Twierdzenie Cayleya, które orzeka, że każda grupa jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy symetrycznej  $\mathfrak{S}_X$  pewnego zbioru  $X$ , czyli może być zrealizowana jako podzbiór zbioru bijekcji  $X$  w siebie, z ograniczonym doń składaniem odwzorowań w roli operacji binarnej (tj. działania grupowego). Dokonamy teraz transkrypcji klasycznego konstruktywnego dowodu tego twierdzenia w rozwijanym przez nas konsekwentnie formalizmie kategoriowym, co pozwoli wysłowić twierdzenie w sposób poddający się naturalnemu uogólnieniu. Takie uogólnienie będzie następnie przedmiotem naszych dalszych dociekań.

Przypomnijmy: we wspomnianym wyżej dowodzie jako zbiór  $X$  wybieramy samą grupę  $G$  (innymi słowy, aplikujemy do niej **funktor zapominania**  $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  z kategorii grup w kategorię zbiorów), wyróżniając zarazem te spośród jej bijekcji w siebie, które pochodzą od lewego regularnego działania grupy na sobie,

$$\ell : G \times X \rightarrow X : (g, h) \mapsto g \cdot h,$$

czyli rozważamy podzbiór

$$\Lambda_G := \{ \ell_g \mid g \in G \} \subset \mathfrak{S}_X,$$

jawnie izomorficzny (czyli będący w bijekcji) ze zbiorem  $G$  i zamknięty ze względu na składanie odwzorowań,

$$\Lambda_G \times \Lambda_G \ni (\ell_{g_2}, \ell_{g_1}) \mapsto \ell_{g_2} \circ \ell_{g_1} \equiv \ell_{g_2 \cdot g_1} \in \Lambda_G,$$

które realizują wiernie strukturę grupy, przez co należy rozumieć, że odwzorowanie

$$\tilde{\ell} : G \rightarrow \mathfrak{S}_X : g \mapsto \ell_g,$$

indukowane przez  $\ell$ , jest monomorfizmem grup, więc też

$$(G, \cdot, \text{Inv}, \bullet \mapsto e) \cong (\Lambda_G, \circ \upharpoonright_{\Lambda_G^2}, \text{Inv}^*, \bullet \mapsto \ell_e) \subset (\mathfrak{S}_X, \circ, (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto \text{id}_X),$$

przy czym wskazany tu obraz odwzorowania  $\tilde{\ell}$  jest podgrupą  $\mathfrak{S}_X$ , o której mowa w tezie twierdzenia. Należy przy tym zauważyć, że wykorzystane tutaj działanie lewe regularne  $G$  na sobie jest przemiennie z prawymi translacjami na  $G$  o dowolny element grupy, czyli z działaniem prawym regularnym

$$\wp : X \times G \rightarrow X : (h, g) \mapsto h \cdot g,$$

czyli słuszne jest stwierdzenie

$$(A.2) \quad \forall_{g, h \in G} : \ell_g \circ \wp_h = \wp_h \circ \ell_g,$$

będące konsekwencją łączności działania grupowego. Warto podkreślić, że powyższa własność odwzorowań  $\wp_h \in \mathbf{Map}(X, X)$  jest dla nich definiująca, tzn. każde odwzorowanie  $\gamma \in \mathbf{Map}(X, X)$  przemiennie z działaniem lewym regularnym jest prawą translacją o pewien element grupy. W rzeczy samej, warunek

$$\forall_{g \in G} : \ell_g \circ \gamma = \gamma \circ \ell_g$$

implikuje równość

$$\forall_{g \in G} : g \cdot \gamma(e) = \gamma(g \cdot e) \equiv \gamma(g),$$

która prowadzi do identyfikacji

$$(A.3) \quad \gamma = \wp_{\gamma(e)}.$$

Okazuje się, że całą opisaną tu strukturę można zwięźle wysłowić, jak następuje: Morfizm  $\tilde{\ell}$  określa kontrawariantne funktorialne zanurzenie (czyli funktor w pełni wierny z) kategorii  $G$ , wprowadzonej wcześniej, w kategorię  $\mathbf{Set}^G$  (kowariantnych) funktorów<sup>2</sup> z kategorii  $G$  w kategorię  $\mathbf{Set}$  zbiorów. W szczególności funktorialny obraz kategorii  $G$  w  $\mathbf{Set}^G$ , jakim jest pełna podkategoria  $\Lambda_G$ , jest kanonicznie izomorficzny z wyjściową kategorią  $G$ . Istotnie, odwzorowanie  $\tilde{\ell}$  stowarzysza z jedynym obiektem  $\bullet$  kategorii  $G$  kowariantny funktor

$$\text{Hom}_G(\bullet, \cdot) \equiv \ell : G \rightarrow \mathbf{Set}$$

<sup>2</sup>Morfizmami w kategorii, której obiektami są funktory pomiędzy dwiema ustalonymi kategoriami, są transformacje naturalne pomiędzy owymi funktorami.

o składowej obiektowej

$$\ell. : \text{Obj } G \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Set} : \bullet \longmapsto X(\equiv G) = \text{Hom}_G(\bullet, \bullet)$$

i składowej morfizmowej

$$\ell. : \text{Mor } G \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Set} : \longleftarrow g \longleftarrow \longmapsto \ell_g = \text{Hom}_G(\bullet, \longleftarrow g \longleftarrow),$$

przy czym ostatnie przyporządkowanie ma sens, gdyż  $\ell_g \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\ell.(\bullet), \ell.(\bullet)) \equiv \mathbf{Map}(X, X)$ . Funktorialność  $\ell.$  sprowadza się do stwierdzonych wcześniej strukturalnych własności odwzorowania  $\ell.$ , tj.

$$\ell.(\text{Id}_\bullet^G) = \text{Id}_{\ell.(\bullet)}^{\mathbf{Set}} \iff \ell_e = \text{id}_X,$$

$$\ell.(\longleftarrow g_2 \longleftarrow \circ_G \longleftarrow g_1 \longleftarrow) = \ell.(\longleftarrow g_2 \longleftarrow) \circ_{\mathbf{Set}} \ell.(\longleftarrow g_1 \longleftarrow) \iff \ell_{g_2 \cdot g_1} = \ell_{g_2} \circ \ell_{g_1}.$$

Wreszcie też  $\tilde{\ell}.$  pozwala przyporządkować dowolnemu morfizmowi  $\longleftarrow g \longleftarrow \in \text{Hom}_G(\bullet, \bullet) (\equiv \text{Mor } G)$  transformację naturalną

$$\text{Hom}_G(\longleftarrow g \longleftarrow, \cdot) : \text{Hom}_G(t(\longleftarrow g \longleftarrow), \cdot) \implies \text{Hom}_G(s(\longleftarrow g \longleftarrow), \cdot),$$

czyli indeksowaną przez  $\text{Obj } G = \{\bullet\}$  rodzinę morfizmów o jedynym elemencie

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(\longleftarrow g \longleftarrow, \bullet) &\equiv \wp_g \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_G(t(\longleftarrow g \longleftarrow), \bullet), \text{Hom}_G(s(\longleftarrow g \longleftarrow), \bullet)) \\ &\equiv \mathbf{Map}(X, X) \end{aligned}$$

o własności

$$\begin{aligned} &\text{Hom}_G(\longleftarrow g \longleftarrow, t(\longleftarrow h \longleftarrow)) \circ_{\mathbf{Set}} \text{Hom}_G(t(\longleftarrow g \longleftarrow), \longleftarrow h \longleftarrow) \\ &= \text{Hom}_G(s(\longleftarrow g \longleftarrow), \longleftarrow h \longleftarrow) \circ_{\mathbf{Set}} \text{Hom}_G(\longleftarrow g \longleftarrow, s(\longleftarrow h \longleftarrow)), \end{aligned}$$

zapisanej dla dowolnego  $\longleftarrow h \longleftarrow \in \text{Mor } G$ , a wyrażającej stwierdzoną uprzednio własność (A.2). Podkreślmy, że kontrawariantny charakter opisanego tu funktora  $G \longrightarrow \mathbf{Set}^G$  niesie informację o prawym charakterze działania prawego regularnego grupy  $G$  na sobie, oto bowiem zapis

$$\text{Hom}_G(\longleftarrow g_2 \longleftarrow \circ_G \longleftarrow g_1 \longleftarrow, \cdot) = \text{Hom}_G(\longleftarrow g_1 \longleftarrow, \cdot) \circ_{\mathbf{Set}^G} \text{Hom}_G(\longleftarrow g_2 \longleftarrow, \cdot)$$

oznacza w istocie tożsamość

$$\wp_{g_2 \cdot g_1} = \wp_{g_1} \circ \wp_{g_2}.$$

Na koniec zauważmy, że jest to, zgodnie z wypowiedzianą wcześniej tezą, funktor w pełni wierny, albowiem dla jedynej pary obiektów jego dziedziny,  $(\bullet, \bullet)$ , zadawane przezeń przyporządkowanie (podkreślenie pierwszego „wolnego” miejsca oznacza, że to właśnie miejsce przyjmuje argument z dziedziny)

$$\text{Hom}_G(\cdot, \cdot) : \text{Hom}_G(\bullet, \bullet) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}^G}(\text{Hom}_G(\bullet, \cdot), \text{Hom}_G(\bullet, \cdot))$$

jest omówioną wcześniej bijekcją  $\wp. : G \xrightarrow{\cong} \mathbf{Map}(X, X) : g \longmapsto \wp_g$ , patrz: (A.3).

Dokonane tutaj abstrakcyjne przeformułowanie Twierdzenia Cayleya w języku teorii kategorii stawia nas przed oczywistym pytaniem: Czy twierdzenie to jest przejawem szczególnego statusu  $G$  pośród kategorii, czy też raczej jest ono emanacją ogólniejszego prawa, któremu podlegają wszystkie kategorie lokalnie małe? (Wymóg lokalnej małości staje się koniecznością, kiedy staramy się odwzorować



klasy morfizmów pomiędzy dowolnymi parami obiektów wyjściowej kategorii *bijektywnie* w klasy transformacji naturalnych między funktorialnymi obrazami tychże obiektów.) Bardzo ogólnej odpowiedzi na tak postawione pytanie dostarcza

**TWIERDZENIE A.1 (Lemat Yonedy).** *Niechaj  $\mathcal{C}$  będzie dowolną kategorią lokalnie małą, a  $X$  – dowolnym jej obiektem i niech  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  będzie dowolnym funktorem kowariantnym<sup>3</sup>. Wówczas istnieje kanoniczny izomorfizm (bijekcja) pomiędzy zbiorem  $\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F)$  transformacji naturalnych między funktorami  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$  i  $F$  a elementami zbioru  $F(X)$ ,*

$$\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F) \cong F(X).$$

■

*Dowód:* Punktem wyjścia do konstruktywnego dowodu istnienia bijekcji, o której mowa w treści twierdzenia, jest następująca obserwacja: Oto dowolna transformacja naturalna  $\eta \in \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F)$  jest w pełni określona przez element

$$\xi_X^\eta := \eta_X(\text{Id}_X^{\mathcal{C}}) \in F(X)$$

zbioru będącego funktorialnym obrazem wyróżnionego obiektu  $X \in \text{Obj } \mathcal{C}$ . W rzeczy samej, warunek (A.1) naturalności  $\eta$  implikuje tożsamość

$$\eta_Y(\chi) \equiv \eta_Y(\chi \circ \text{Id}_X^{\mathcal{C}}) = (\eta_Y \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \chi))(\text{Id}_X^{\mathcal{C}}) = (F(\chi) \circ \eta_X)(\text{Id}_X^{\mathcal{C}}) = F(\chi)(\xi_X^\eta),$$

słuszną dla dowolnego morfizmu  $\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  o początku w dowolnym obiekcie  $Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$ , a pokazującą dowodnie, że znajomość  $\xi_X^\eta$  pozwala wyznaczyć wszystkie elementy rodziny  $\{\eta_Y\}_{Y \in \text{Obj } \mathcal{C}}$ . Odwzorowanie

$$\xi_X : \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F) \rightarrow F(X) : \eta \mapsto \xi_X^\eta$$

to właśnie szukana bijekcja. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy wskazać odwzorowanie odwrotne. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\eta : F(X) \rightarrow \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), F) : \xi \mapsto \eta^\xi$$

wzorem

$$\eta_Y^\xi(\chi) := F(\chi)(\xi).$$

Podana definicja ma sens, gdyż dla dowolnego morfizmu  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  zachodzi

$$\begin{aligned} (\eta_Z^\xi \circ_{\mathbf{Set}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \psi))(\chi) &= \eta_Z^\xi(\psi \circ \chi) = F(\psi \circ \chi)(\xi) = (F(\psi) \circ_{\mathbf{Set}} F(\chi))(\xi) \\ &= F(\psi)(F(\chi)(\xi)) = (F(\psi) \circ_{\mathbf{Set}} \eta_Y^\xi)(\chi), \end{aligned}$$

czyli – w istocie –  $\eta^\xi$  jest transformacją naturalną między  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$  a  $F$ . Pokażemy, że  $\eta^\cdot$  jest poszukiwaną odwrotnością odwzorowania  $\xi_X$ . W tym celu wyznaczamy transformację naturalną przyporządkowaną przez  $\eta^\cdot$  elementowi  $\xi_X^\eta$ ,

$$\eta_Y^{\xi_X^\eta}(\chi) = F(\chi)(\xi_X^\eta) = \eta_Y(\chi),$$

uzyskując pożądaną wynik

$$\eta_Y^{\xi_X^\eta} = \eta_Y,$$

<sup>3</sup>Istnieje także wersja kontrawariantna Lematu Yonedy, którą Czytelnik bez trudu wymyśli sam.

a następnie wskazujemy element zbioru  $F(X)$  będący obrazem transformacji naturalnej  $\eta_X^\xi$  względem odwzorowania  $\xi_X$ ,

$$\xi_X^{\eta_X^\xi} = \eta_X^\xi(\text{Id}_X^{\mathcal{C}}) = F(\text{Id}_X^{\mathcal{C}})(\xi) = \text{Id}_{F(X)}^{\mathbf{Set}}(\xi) \equiv \text{id}_{F(X)}(\xi) = \xi,$$

co kończy dowód postulowanej relacji między  $\eta$  i  $\xi_X$ , a tym samym także dowód twierdzenia.  $\square$

Bezpośredniego uogólnienia teoriogrupowego Twierdzenia Cayleya dostarcza poniższe elementarne corollarium Lematu Yonedy.

**STWIERDZENIE 260 (Zanurzenie Yonedy).** *W oznaczeniach Twierdzenia A.1 kontrawariantny funktor*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$$

jest w pełni wierny, przeto określa zanurzenie kategorii  $\mathcal{C}$  w kategorii  $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ , którego obrazem jest pełna podkategoria tej ostatniej o zbiorze obiektów  $\{ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) \mid X \in \text{Obj } \mathcal{C} \}$ , izomorficzna z kategorią  $\mathcal{C}$ .  $\blacksquare$

Dowód: Odnosząc tezę Lematu Yonedy do funktora  $F := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \cdot)$ , stwierdzamy istnienie bijekcji

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \xrightarrow{\cong} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \cdot)) : \chi \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\chi, \cdot),$$

co oznacza właśnie, że funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$  jest w pełni wierny. Tym samym kontrawariantny funktor

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}},$$

o składowej obiektowej

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) : \text{Obj } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Obj } \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} : X \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$$

i morfizmowej

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) & : \text{Mor } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} \\ & : ( X \xrightarrow{\chi} Y ) \longmapsto ( \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \cdot) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\chi, \cdot)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) ) \end{aligned}$$

zadaje zanurzenie kategorii  $\mathcal{C}$  w kategorii funktorów  $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ , zwane **zanurzeniem Yonedy**.  $\square$

Lematu Yonedy i wynikającego zeń stwierdzenie o zanurzeniu stanowią doskonałą ilustrację najgłębszej idei, jaka tkwi u podstaw teorii kategorii, sformułowanej – nie bez kozery – w pierwszej połowie XX w., tj. w czasach fenomenalnej eksplozji myślenia abstrakcyjnego w naukach przyrodniczych na wszystkich skalach dostępnym poznaniu – od skali atomowej po skalę kosmiczną. Ich zawartość „filozoficzna” powinna być bliska sercu i umysłowi każdego fizyka, oto bowiem jedynym dostępnym nam sposobem empirycznego poznania elementarnych składników materii są obserwacje ich oddziaływań z innymi składnikami materii. Najbardziej bodaj wiążącej i obrazowej wulgaryzacji socjologicznej tych twierdzeń dostarcza stare rosyjskie (?) powiedzenie

*Powiedz mi, kto jest twoim przyjacielem, a powiem ci, kim jesteś.*

## Konwencje

KONWENCJA 1 (Iloczyn kartezjański zbiorów). Mnożenie kartezjańskie zbiorów nie jest operacją łączną. W celu uniknięcia przeładowania zapisu formalnego niniejszego skryptu wskutek każdorazowego wypisywania w jawnej postaci naturalnych bijekcji pomiędzy wielokrotnymi iloczynami kartezjańskimi zbiorów różnie pogrupowanych (występującymi chociażby w diagramatycznym zapisie aksjomatyki struktur algebraicznych), np.  $(X_1 \times X_2) \times X_3$  i  $X_1 \times (X_2 \times X_3)$  dla trójki zbiorów  $X_1, X_2$  i  $X_3$ , będziemy opuszczać nawiasy określające schemat pogrupowania czynników, pisząc np.  $X_1 \times X_2 \times X_3$ . Pełna informacja o domyślnym schemacie pogrupowania (i ukrytej obecności stosownych bijekcji) będzie zawarta w strukturze odwzorowań o tak (niejednoznacznie) zadanej dziedzinie. I tak, np., dla odwzorowań  $f_1 : X_1 \rightarrow X_4$  i  $f_3 : X_3 \rightarrow X_5$  oraz  $f_{i,i+1} : X_i \times X_{i+1} \rightarrow X_{i+5}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  skrócony zapis

$$X_4 \times X_7 \xleftarrow{f_1 \times f_{2,3}} X_1 \times X_2 \times X_3 \xrightarrow{f_{1,2} \times f_3} X_6 \times X_5$$

należy odczytać jako

$$X_4 \times X_7 \xleftarrow{f_1 \times f_{2,3}} X_1 \times (X_2 \times X_3) \xrightarrow{\alpha_{1,2,3}} (X_1 \times X_2) \times X_3 \xrightarrow{f_{1,2} \times f_3} X_6 \times X_5,$$

przy czym utożsamienie  $\alpha_{1,2,3}$  przyjmuje tu postać

$$\alpha_{1,2,3} : X_1 \times (X_2 \times X_3) \rightarrow (X_1 \times X_2) \times X_3 : (x_1, (x_2, x_3)) \mapsto ((x_1, x_2), x_3).$$

\*                    \*                    \*

KONWENCJA 2 (Zapis odwzorowań).

- Odwzorowanie identycznościowe zbioru  $X$  w siebie zapiszemy jako

$$\text{id}_X : X \rightarrow X : x \mapsto x.$$

- Odwzorowanie zbioru  $X$  w siebie zapiszemy jako  $f : X \circlearrowleft$ .
- Niechaj będą dane zbiory  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  oraz odwzorowania  $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ ,  $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ . Zapiszemy

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

- Niechaj będą dane zbiory  $X, Y_1, Y_2$  oraz odwzorowania  $f_1 : X \rightarrow Y_1$ ,  $f_2 : X \rightarrow Y_2$ . Zapiszemy

$$(f_1, f_2) : X \rightarrow Y_1 \times Y_2 : x \mapsto (f_1(x), f_2(x)).$$

- W przypadku odwzorowania stałego  $f : X \rightarrow Y : x \mapsto y_0$  zapiszemy  $f \equiv y_0$ .
- Transpozycję elementów zbioru  $X$  zapiszemy jako

$$\tau_X : X \times X \rightarrow X \times X : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1).$$

- Niechaj  $S_1, S_2, \dots, S_N$  będą zbiorami. Kanoniczne odwzorowania rzutowe (zwane też rzutami kanonicznymi), określone na iloczynie kartezjańskim tych zbiorów i dla dowolnych indeksów  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N$ ,  $n \in \overline{1, N}$ , zapiszemy następująco

$$\text{pr}_{i_1, i_2, \dots, i_n} : \prod_{i=1}^N S_i \longrightarrow S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_n} : (x_1, x_2, \dots, x_N) \longmapsto (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}).$$

\*                    \*                    \*

KONWENCJA 3 (Diagramy przemienne). Niechaj  $A, B, C$  oraz  $D$  będą obiektami pewnej kategorii  $\mathcal{C}$  i niech  $\alpha : A \longrightarrow B$ ,  $\beta : B \longrightarrow D$ ,  $\gamma : A \longrightarrow C$  oraz  $\delta : C \longrightarrow D$  będą morfizmami pomiędzy tymi obiektami. Diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\delta} & D \end{array}$$

nazywamy **przemienym**, gdy w kategorii  $\mathcal{C}$  zachodzi relacja

$$\beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma.$$

W przypadku bardziej złożonym mówimy o diagramie przemienym, ilekroć każdy z zamkniętych konturów wewnątrz diagramu jest diagramem przemienym w powyższym sensie.

\*                    \*                    \*

KONWENCJA 4 (Operacje wieloargumentowe na podzbiorach nośnika struktury algebraicznej). Niechaj  $S$  będzie zbiorem wyposażonym w operację  $n$ -argumentową  $\phi_n : S^{\times n} \longrightarrow S$  i niech  $S_i \subset S$ ,  $i \in \overline{1, n}$  będą podzbiorami  $S$ . Wówczas definiujemy zbiór

$$\phi_n(S_1, S_2, \dots, S_n) := \{ \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall_{i \in \overline{1, n}} : x_i \in S_i \},$$

który będziemy nazywać **obrazem algebraicznym zbiorów**  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  **względem operacji**  $\phi_n$ . W szczególności możemy mówić o sumie algebraicznej podzbiorów zbioru z dodawaniem i iloczynie algebraicznym podzbiorów zbioru z mnożeniem.

\*                    \*                    \*

PRZYKŁAD(Y) 45.

- (1) Niech  $S$  będzie zbiorem, na którym jest zadana operacja 2-argumentowa  $\phi_2 := \cdot$  zwana mnożeniem. Wówczas możemy określić **iloczyn algebraiczny** dowolnych dwóch podzbiorów  $S_1, S_2 \subset S$  w postaci

$$S_1 \cdot S_2 := \{ x \cdot y \mid (x, y) \in S_1 \times S_2 \}.$$

- (2) Analogicznie definiujemy **sumę algebraiczną** podzbiorów  $S$ , ilekroć na zbiorze tym jest zadana operacja 2-argumentowa  $\phi_2 := +$  zwana dodawaniem,

$$S_1 + S_2 := \{ x + y \mid (x, y) \in S_1 \times S_2 \}.$$

- (3) Jeśli na  $S$  określona jest relacja 1-argumentowa  $\phi_1 := -(\cdot)$  zwana braniem przeciwności, to możemy zdefiniować **przeciwność algebraiczną** dowolnego podzbioru  $S_1 \subset S$  jako zbiór

$$-S_1 := \{ -s \mid s \in S_1 \}.$$

- (4) Analogicznie definiujemy **odwrotność algebraiczną** podzbioru  $S$ , zawsze gdy na zbiorze tym jest zadana operacja 1-argumentowa  $\phi_1 := (\cdot)^{-1}$  zwana braniem odwrotności,

$$S_1^{-1} := \{ s^{-1} \mid s \in S_1 \}.$$

✓

Dodatek C

## **Tablice**



TABLICA 2. Niskowymiarowe zespolone algebry Clifforda.

$\xrightarrow{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$C_n^{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$



## Bibliografia

- [AB59] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory”, *Phys. Rev.* **115** (1959), 485–491.
- [Art61] E. Artin, Geometric algebra, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 3, Interscience Publishers, 1961.
- [Bor99a] F. Borceux, Handbook of Categorical Algebra. I. Basic Category Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, 1999.
- [Bor99b] ———, Handbook of Categorical Algebra. II. Categories and Structures, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 51, Cambridge University Press, 1999.
- [Bor99c] ———, Handbook of Categorical Algebra. III. Categories of Sheaves, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 52, Cambridge University Press, 1999.
- [Bou07a] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Algèbre, chapitres 1 à 3, Springer, 2007.
- [Bou07b] ———, Éléments de mathématique, Algèbre, chapitre 9, Springer, 2007.
- [Bro05] L.M. Brown, Feynman’s Thesis – A New Approach to Quantum Theory, World Scientific, 2005.
- [Car38a] É.J. Cartan, Leçons sur la théorie des spineurs. I : les spineurs de l’espace à trois dimensions, Actualités scientifiques et industrielles: Exposés de géométrie, vol. 9, Hermann & cie., 1938.
- [Car38b] ———, Leçons sur la théorie des spineurs. II : les spineurs de l’espace à  $n > 3$  dimensions, les spineurs en géométrie riemannienne, Actualités scientifiques et industrielles: Exposés de géométrie, vol. 11, Hermann & cie., 1938.
- [Coh82] P.M. Cohn, Algebra, vol. 1, John Wiley & Sons, 1982.
- [Coh89] ———, Algebra, vol. 2, John Wiley & Sons, 1989.
- [Coh91] ———, Algebra, vol. 3, John Wiley & Sons, 1991.
- [Die55] J.A. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 5, Springer, 1955.
- [Die65] J. Dieudonné, Éléments d’analyse, vol. 1, Gauthier–Villars, 1965.
- [Dir33] P.A.M. Dirac, “The Lagrangian in quantum mechanics”, *Phys. Z. Sowjet.* **3** (1933), 64–72.
- [Fey48] R.P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics”, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948), 367–387.
- [FH65] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, 1965.
- [GMS97] G. Giachetta, L. Mangiarotti, and G. Sardanashvily, New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory, World Scientific, 1997.
- [GP74] V. Guillemin and A. Pollack, Differential Topology, American Mathematical Society, 1974.
- [Gre78] W.H. Greub, Multilinear Algebra, Universitext, Springer, 1978.
- [Gre81] ———, Linear Algebra, Graduate Texts in Mathematics, vol. 23, Springer, 1981.
- [Hel01] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Graduate studies in mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, 2001.
- [HN12] J. Hilgert and K.-H. Neeb, Structure and Geometry of Lie Groups, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2012.
- [KM76] K. Kuratowski and A. Mostowski, Teoria mnogości, Monografie Matematyczne, vol. XXVII, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976.
- [Koc03] J. Kock, “Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories”, London Mathematical Society Student Texts, vol. 59, Cambridge University Press, 2003.

- [Lan93] S. Lang, Real and Functional Analysis, Graduate Texts in Mathematics, vol. 142, Springer, 1993.
- [Lan99] ———, Fundamentals of Differential Geometry, Graduate Texts in Mathematics, vol. 191, Springer, 1999.
- [Lan02] ———, Algebra, Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer, 2002.
- [Lea56] W.G. Leavitt, “Modules over rings of words”, Proc. AMS **7** (1956), 188–193.
- [Lea57] ———, “Modules without invariant basis number”, Proc. AMS **8** (1957), 322–328.
- [Lee02] J.M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, 2002.
- [Lee09] ———, Manifolds and Differential Geometry, Graduate Studies in Mathematics, vol. 107, American Mathematical Society, 2009.
- [Mic08] P.W. Michor, Topics in Differential Geometry, Graduate Studies in Mathematics, vol. 93, American Mathematical Society, 2008.
- [ML98] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer, 1998.
- [MM03] I. Moerdijk and J. Mrčun, Introduction to Foliations and Lie Groupoids, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 91, Cambridge University Press, 2003.
- [Pen68] R. Penrose, “Structure of Space-Time”, pp. 121–235, W.A. Benjamin, 1968.
- [Pol98] J. Polchinski, String Theory, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, vol. 1, Cambridge University Press, 1998.
- [Sus13] R.R. Suszek, “Algebra. Podstawy”, notatki wykładowe, 2013.
- [Sus15] ———, “Algebra grupowa, kategoriycznie”, notatki wykładowe, 2015.
- [Wei52] A. Weil, “Sur les théorèmes de de Rham”, Comment. Math. Helv. **26** (1952), 119–145.

## Indeks

- $C^k$ -dyfeomorfizm, 229
- $C^k$ -rozmaitość, 227
- $C^k$ -dyfeomorfizm, 229
- $C^p$ -odwzorowanie, 229
- $p$ -forma różniczkowa, 241
- ścieżka
  - krzywa całkowa, 254
  - różniczkowalna, 234
  - trajektoria, 254
  - zwarta (klasy  $C^l$ ), 254
- atlas, 228
  - maksymalny, 228
- cofnięcie pola form wzdłuż odwzorowania, 264
- cofnięcie pola tensorów typu  $(k, l)$  wzdłuż odwzorowania, 591
- dyfeomorfizm (klasy  $C^k$ ), 229
- ewaluacja pola  $p$ -form na polach wektorowych, 259
- grupa Liego, 278
- grupoid Liego, 316
- immersja, 265
- klasa Stiefela–Whitneya (pierwsza), 613
- kowektor, 240
- mapa, 228
- moduł form różniczkowych, 260
- odwzorowanie immersywne w punkcie, 265
- odwzorowanie różniczkowalne (klasy  $C^p$ ), 229
- odwzorowanie submersywne w punkcie, 265
  - cięcie lokalne, 271
  - poziomica regularna, 268
  - punkt krytyczny, 268
  - punkt regularny, 268
  - wartość krytyczna, 268
  - wartość regularna, 268
- orientacja, 615
  - czasowa, 615
  - przestrzenna, 615
- orientowalna, 611
- orientowalna czasowo, 611
- orientowalna czasowo i przestrzennie, 611
- orientowalna przestrzennie, 611
- parametryzacja (lokalna), 228
- pchnięcie pola wektorowego wzdłuż dyfeomorfizmu, 251
- pokrycie dobre, 230
- pole
  - $p$ -form, 259
  - tensorów typu  $(k, l)$ , 591
  - wektorowe, 250
- produkt włóknisty, 277
- przestrzeń
  - różniczkowań (w punkcie), 242
- przestrzeń styczna (w punkcie), 234
- różniczkowanie
  - w punkcie, 242
  - wzdłuż pola wektorowego, 250
- rozkład jedności (klasy  $C^k$ ), 242
- struktura, 228
- struktura metryczna, 606
- submersja, 265
  - morfizm, 268
  - przestrzeń totalna, 268
  - włókno, 268
- topologiczna ( $k = 0$ ), 228
- transformacja współrzędniowa (lokalna), 228
- układ współrzędnych (lokalny), 228
- włożenie, 265
- wektor styczny
  - do ścieżki różniczkowalnej, 254
  - do rozmaitości, 232
- wiązka  $p$ -form różniczkowych (jako rozmaitość), 240
- wiązka baz, 472
- wiązka kostyczna (jako rozmaitość), 239
- wiązka styczna (jako rozmaitość), 231
- wiązka styczna (jako wiązka włóknista), 460
  - mapa naturalna, 461
  - wiązka baz, 472
- wiązka tensorów, 591
- wymiar, 227
- zanurzenie, 265
- $C^p$ -odwzorowanie, 229

- odwzorowanie styczne, 237
- prezentacja lokalna, 229
- $G$ -torsor, 37
- $G$ -zbiór
  - lewostronny, 33
  - prawostronny, 34
- $N$ -kostka, 177
- $R$ -moduł
  - lewostronny, 38
  - podmoduł, 40
  - prawostronny, 39
- $\mathcal{G}$ -przestrzeń
  - lewostronna, 319
  - prawostronna, 319
- $\mathcal{G}$ -rozmaitość gładka
  - lewostronna, 319
  - prawostronna, 319
- $\mathcal{G}$ -zbiór
  - lewostronny, 317
  - moment, 317
  - prawostronny, 318
  - moment, 318
- $G$ -przestrzeń topologiczna
  - lewostronna, 301
  - prawostronna, 301
  - rozmaitość ilorazowa, 307
- $G$ -rozmaitość gładka
  - lewostronna, 302
  - prawostronna, 302
- $\bar{G}$ -struktura na wiązce głównej, 598
  - równoważność, 598
- $p$ -forma różniczkowa, 241
- ( $Q$ -)ortogonalność
  - przestrzeni, 57
  - wektorów, 57
- ( $Q$ -)prostopadłość
  - przestrzeni, 57
  - wektorów, 57
- ścieżka
  - ciągła, 171
  - pętla, 171
- ścieżka (ciągła)
  - ścieżki drogowo homotopijne, 172
- ścieżka różniczkowalna w rozmaitości, 234
  - krzywa całkowa, 254
  - przeniesienie równoległe, 536
    - podniesienie poziome (horyzontalne)
      - ścieżki, 539
    - podniesienie poziome (horyzontalne)
      - wektorów, 537
  - trajektoria, 254
  - zwarta (klasy  $C^l$ ), 254
  - wektor styczny, 254
- 0-spójność, 172
- algebra, 323
  - łączna, 324
  - idempotent, 331
  - kategoria, 324
- centrum, 327
- Clifforda, 362
  - antycentrum, 393
  - antynwolucja główna, 383
  - antynwolucja kanoniczna, 383
  - centrum, 393
  - element kanoniczny, 390
  - element objętości (rzeczywisty), 410
  - element objętości (zespolony), 418
  - grupa Pin, 434
  - grupa Spin, 434
  - grupa Clifforda, 430
  - inwolucja główna, 383
  - inwolucja kanoniczna, 383
  - moduł  $\varepsilon$ -ortogonalny, 420
  - moduł Clifforda, 419
  - multiplikatywna grupa jedności, 428
  - reprezentacja, 419
  - reprezentacja  $\varepsilon$ -ortogonalna, 420
- endomorfizmów, 325
- grupowa, 327
  - splot funkcji, 327
- homomorfizm, 324
  - unitalny, 324
- idempotent
  - centralny, 331
  - minimalny, 331
- iloczyn tensorowy
  - standardowy, 332
- ilorazowa, 330
- jedność, 324
- jedynka, 324
- kategoria, 324
- kwaternionów, 325
- Liego, 282
  - grupy Liego, 283
  - homomorfizm, 282
  - kategoria, 282
  - nawias Liego, 282
  - podalgebra, 282
  - równania struktury, 284
  - stałe struktury, 284
  - tożsamość Jacobiego, 282
- macierzowa, 325
  - reprezentacja definiująca, 354
- mnożenie
  - antykomutator, 327
  - komutator, 327
- półprosta, 353
- pól
  - lewniezmiennicznych (na grupie Liego), 282
  - prawoniezmiennicznych (na grupie Liego), 282
  - pól wektorowych (na rozmaitości), 252
- podalgebra, 324
  - centralizator podzbioru, 327

- centrum, 327
- ideał generowany przez podzbiór, 329
- ideał lewostronny, 328
- ideał lewostronny minimalny, 328
- ideał obustronny, 328
- ideał obustronny minimalny, 328
- ideał prawostronny, 328
- ideał prawostronny minimalny, 328
- podalgebra generowana przez podzbiór, 327
  - zbiór generujący, 327
- prosta, 328
- przeciwna, 324
- przemiana, 324
- reprezentacja, 347
  - dwoista (dualna), 349
  - homomorfizm, 348
  - iloczyn tensorowy, 349
  - lewa regularna, 349
  - maksymalna podalgebra komutująca, 348
  - nieprzywiedlna, 348
  - nierozkładalna, 348
  - nośnik, 347
  - półprosta, 348
  - podmoduł niezmienniczy, 348
  - podprzestrzeń niezmiennicza, 348
  - podreprezentacja, 348
  - prawa regularna, 349
  - przywiedlna, 348
  - równoważność, 348
  - splatacz, 348
  - suma prosta, 349
  - trywialna, 349
  - typu  $\mathbb{C}$ , 349
  - typu  $\mathbb{H}$ , 349
  - typu  $\mathbb{R}$ , 349
  - typu kwaternionowego, 349
  - typu rzeczywistego, 349
  - typu zespolonego, 349
  - wierna, 348
  - wymiar, 347
  - zredukowana względem ideału, 349
- tensorowa modułu, 339
  - tensor stopnia  $n$ , 343
- unitalna, 324
  - kategoria, 324
  - unipotent, 331
  - unipotent centralny, 331
- unitalna łączna
  - kategoria, 324
- wolna, 327
- z gradacją, 342
  - element jednorodny, 342
  - homomorfizm, 342
  - homomorfizm stopnia  $D$ , 342
  - ideał gradowany, 342
  - podalgebra gradowana, 342
  - podmoduł z gradacją, 342
  - skośny iloczyn tensorowy, 346
  - stopień, 342
  - unitalna, 344
- z jednością, 324
  - unipotent, 331
  - unipotent centralny, 331
- zewnętrzna przestrzeni wektorowej, 377
  - iloczyn zewnętrzny, 377
  - zredukowana, 331
- amplituda Feynmana–Diraca, 628
- antycentrum algebry Clifforda, 393
- antyinwolucja
  - główna (algebry Clifforda), 383
  - kanoniczna (algebry Clifforda), 383
- antykmutator
  - w algebrze, 327
- atlas, 228
  - maksymalny, 228
- automorfizm
  - ortogonalny, 56
  - odbicie elementarne, 58
  - transformacja Householdera, 58
- baza
  - diagonalizująca
    - formy kwadratowej, 59
  - modułu nad pierścieniem, 47
    - dualna, 48
    - standardowa, 48
  - nakrycia, 172
  - otoczeń punktu, 165
  - przestrzeni kwadratowej
    - ortogonalna, 58
    - ortonormalna, 58
  - przestrzeni wektorowej
    - algebraiczna, 50
    - Hamela, 50
  - topologii, 163
  - wiązki głównej (z grupoidem strukturalnym), 509
  - wiązki głównej (ze strukturalną wiązką grupoidalną), 529
  - wiązki grupoidalnej, 521
  - wiązki włóknistej, 449
- bimoduł nad pierścieniami, 40
  - homomorfizm, 40
- całka
  - Cauchy’ego–Bochnera (regulowana), 195
  - Feynmana po trajektoriach, 638
- cecha IBN, 52
- cechowanie
  - lokalne (wybór), 652
  - symetrii globalnej, 651
  - pole, 651
  - wiązka cechowania, 651
  - wybór, 652
- centralizator

- podzbioru, 327
  - centrum, 327
- centrum
  - algebry, 327
    - Clifforda, 393
  - grupy, 19
  - pierścienia, 25
- charakterystyka ciała, 31
- ciąg
  - Cauchy'ego, 174
  - punkt skupienia, 166
  - zbieżny punktów przestrzeni
    - topologicznej
    - granica, 166
  - zbieżny punktów przestrzeni
    - topologicznej, 166
- ciąg dokładny
  - grup, 156
    - krótki, 156
    - normalny, 157
    - rozszerzenie, 156
    - rozszerzenie centralne, 156
- cięcia
  - homomorfizmu grup, 160
  - lokalne
    - momentu (wiązki głównej ze strukturalną wiązką grupoidalną), 532
  - lokalne (submersji), 271
  - przejścia (wiązki głównej ze strukturalną wiązką grupoidalną), 532
  - wiązki
    - globalne, 453
    - lokalne, 453
    - pierwszy miot różniczkowy, 458
    - pochodna kowariantna, 537
    - zerowe, 232, 463
- ciało, 28
  - charakterystyka, 31
  - homomorfizm, 30
    - a monomorfizmy, 30
    - jądro, 30
    - obraz, 30
  - jedynka, 28
  - liczb zespolonych, 31
  - nietrywialność, 30
  - operacje, 28
  - reszt *modulo*, 31
  - spinowe, 435
  - topologiczne, 164
  - unormowane, 174
  - z normą, 174
  - zero, 28
- cofnięcie
  - funkcji wzdłuż odwzorowania, 248
  - pola  $p$ -form wzdłuż odwzorowania, 264
  - pola tensorów typu  $(k, l)$  wzdłuż dyfeomorfizmu, 591
  - czasoprzestrzeń, 628
- dane
  - trywializacji lokalnej (wiązki głównej o z grupoidem strukturalnym), 515
  - trywializacji lokalnej (wiązki głównej ze strukturalną wiązką grupoidalną), 532
- defekt
  - punktowy, 646
- delta Kroneckera, 48
- diagram
  - przemienny, 690
  - w i modelowany na kategorii, 62
    - kategoria, 64
    - kopowłoka, 126
    - powłoka, 126
- domknięcie
  - równoważnościowe relacji, 132
- domknięcie zbioru, 163
- dopełnienie proste podmodułu, 85
- dualność modułów nad pierścieniem, 45
  - para dualna, 45
- dwoistość modułów nad pierścieniem, 45
  - para dwoista, 45
- dyfeomorfizm (klasy  $C^k$ ), 229
- działanie
  - grupoidu, 317
    - $\mathcal{G}$ -przestrzeń, 319
    - $\mathcal{G}$ -rozmaitość gładka, 319
    - $\mathcal{G}$ -zbiór, 317
    - moment, 317
    - morfizm rozmaitości z działaniem
      - gładkim, 319
    - przechodnie, 320
    - przestrzeń z działaniem
      - topologicznym, 319
    - regularne lewostronne, 320
    - regularne prawostronne, 320
    - rozmaitość z działaniem gładkim, 319
    - swobodne, 320
    - tranzytywne, 320
    - wolne, 320
    - zbiór z działaniem, 317
  - grupy
    - $G$ -torsor, 37
    - $G$ -zbiór, 33
    - $G$ -przestrzeń topologiczna, 301
    - $G$ -rozmaitość gładka, 302
    - dołączone, 35
    - dołączone (klasa sprzężoności), 36
    - efektywne, 37
    - grupa izotropii, 36
    - homomorfizm przestrzeni z działaniem
      - gładkim, 302
    - homomorfizm przestrzeni z działaniem
      - topologicznym, 302
    - homomorfizm zbiorów z działaniem, 34
    - izomorfizm ekwiwariantny, 34

- izomorfizm zbiorów z działaniem, 34
- lewostronne, 33
- odwzorowanie ekwiwariantne, 34
- odwzorowanie gładkie ekwiwariantne, 302
- odwzorowanie topologiczne
  - ekwiwariantne, 302
- orbita, 36
- pole wektorowe fundamentalne, 302
- prawostronne, 33
- przechodnie, 37
- przestrzeń jednorodna, 37
- przestrzeń jednorodna główna, 37
- przestrzeń z działaniem
  - topologicznym, 301
- regularne, 37
- regularne lewostronne, 35
- regularne prawostronne, 35
- rozmaitość z działaniem gładkim, 302
- stabilizator, 36
- swobodne, 37
- symetrycznej naturalne, 35
- symetrycznej przez cofnięcie, 35
- tranzytywne, 37
- trywialne, 34, 37
- właściwe (topologiczne), 305
- wierne, 37
- wolne, 37
- zbiór z działaniem, 33
- na wiązce głównej z grupoidem strukturalnym, 509
- pierścienia
  - lewostronne, 38
  - prawostronne, 39
- wiązki grupoidalnej
  - regularne lewostronne, 529
  - regularne prawostronne, 529
- zbioru, 32
  - dziedzina operatorów, 32
  - nośnik, 32
- dziedzina
  - całkowalności
    - pola wektorowego, 255
    - zagadnienia początkowego, 217
  - całkowitości, 24
  - operatorów, 32
- dzielnik
  - normalny, 17
- element
  - jednorodny, 342
  - kanoniczny algebry Clifforda, 390
  - neutralny
    - grupa, 16
    - monoid, 15
  - objętości rzeczywistej algebry Clifforda, 410
  - objętości zespolonej algebry Clifforda, 418
- elementy sprzężone grupy, 35
- endomorfizm
  - algebra, 325
  - grupy
    - przemiennej, 25
  - idempotentny, 84
  - modułu nad pierścieniem, 41
    - cofnięcie wyznacznika, 50
    - wyznacznik, 49
- ewaluacja
  - pola  $p$ -form na polach wektorowych, 259
- forma
  - $N$ -liniowa na module nad pierścieniem, 44
  - 2-liniowa na module nad pierścieniem
    - dualność, 45
    - dwoistość, 45
    - stowarzyszona z formą kwadratową, 55
  - kwadratowa, 55
    - baza diagonalizująca, 59
    - euklidesowa, 56
    - forma 2-liniowa stowarzyszona, 55
    - jądro, 55
    - macierz względem bazy, 55
    - niezwyrodniała, 55
    - suma prosta, 86
    - sygnatura, 87
    - zwyrodniała, 55
  - liniowa na module nad pierścieniem, 44
    - współrzędniowa, 48
  - Maurera–Cartana na grupie Liego
    - lewoniezmiennicza, 293
    - prawoniezmiennicza, 293
  - powiązania na wiązce włóknistej, 540
    - $K$ -liniowego, 549
    - głównego, 569
- funkcja
  - cofnięcie wzdłuż odwzorowania, 248
  - klas grupy, 36
  - typu Uluru, 244
- funkcjonał
  - działania teorii pola, 628
  - Picarda, 213
- funktory
  - gęsty, 63
  - identycznościowy, 66
  - istotnie surjektywny, 63
  - kontrawariantny, 62
  - kowariantny, 62
    - diagram, 62
      - kategoria diagramów w  $\mathcal{I}$  modelowanych na kategorii, 64
      - kategoria funktorów, 64
  - pełny, 63
  - równoważność kategorii, 64

- styczny, 237
- superpozycja, 63
- transformacja naturalna, 63
  - izomorfizm naturalny, 64
- w pełni wierny, 63
- wewnętrzny, 144
- wierny, 63
  
- gęstość lagranżjanu teorii pola, 628
- gałąź nakrycia, 172
- generator, 19
- gradacja, 342
  - element jednorodny, 342
  - homomorfizm, 342
  - homomorfizm stopnia  $D$ , 342
  - stopień, 342
  - totalna, 345
- graf dualny triangulacji, 639
- granica
  - ciągu, 166
- grupa, 16
  - Pin, 434
  - Spin, 434
- abelowa, 17
- algebra grupowa, 327
  - splot funkcji, 327
- automorfizmów, 20
  - wewnętrznych, 20
  - zewnętrznych, 20
- cechowania typu  $P_G$ , 651
- centrum, 19
- ciąg dokładny, 156
  - krótki, 156
  - normalny, 157
  - rozszerzenie, 156
  - rozszerzenie centralne, 156
- Clifforda, 430
- częściowa, 256
- działanie
  - lewostronne, 33
  - prawostronne, 33
- dzielnik normalny, 17
- element neutralny, 16
- elementy sprzężone, 35
- funkcja klas, 36
- generatory, 19
- homomorfizm, 17
  - izomorfizm kanoniczny, 21
  - monomorfizm indukowany, 22
- iloczyn półprosty
  - lewo-stowarzyszony, 158
  - pravo-stowarzyszony, 158
- ilorazowa, 20
- izotropii, 36
- jedności moltiplicatywna, 428
  - reprezentacja  $J_V$ -wektorowa, 430
  - reprezentacja dołączona, 428
  - reprezentacja dołączona zwichrowana, 430
  - reprezentacja wektorowa, 428
- jednoparametrowa dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy  $C^l$ ), 256
- jednoparametrowa lokalnych dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy  $C^l$ ), 256
- klas automorfizmów, 20
- Liego, 278
  - G-rozmaitość, 302
  - algebra Liego, 283
  - działanie lewostronne, 302
  - działanie prawostronne, 302
  - forma Maurera–Cartana lewoniemiennicza, 293
  - forma Maurera–Cartana prawoniemiennicza, 293
  - homomorfizm, 278
  - pochodna logarytmiczna lewostronna, 294
  - pochodna logarytmiczna prawostronna, 294
  - podgrupa Liego, 278
  - pole 1-form lewoniemiennicznych (kanoniczne), 293
  - pole 1-form prawoniemiennicznych (kanoniczne), 293
  - pole wektorowe fundamentalne, 302
  - pole wektorowe lewoniemienniczne, 281
  - pole wektorowe prawoniemienniczne, 281
  - przestrzeń jednorodna gładka, 315
  - rozmaitość z działaniem, 302
  - styczna, 279
- liniowa
  - główna o współczynnikach z ciała, 44
  - główna przestrzeni wektorowej, 44
- lokalna jednoparametrowa lokalnych dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy  $C^l$ ), 256
  - pole wektorowe lokalnie niemiennicze, 257
- norma, 174
- operacje, 16
- ortogonalna
  - o współczynnikach z ciała, 56
  - stowarzyszona z formą kwadratową, 56
- podgrupa, 17
  - normalna, 17
  - sprzężona, 35
- przeciwna, 17
- przemiana, 17
- realizacja
  - lewostronna, 34
  - prawostronna, 34
- specjalna ortogonalna
  - o współczynnikach z ciała, 57



- ortochroniczna, 301
- stowarzyszona z formą kwadratową, 57
- strukturalna (wiązki głównej), 471
  - redukcja, 595
  - redukowalna, 595
- strukturalna wiązki włóknistej, 449
- symetrii globalnych teorii pola, 629
- symetryczna, 19
  - permutacja, 19
  - transpozycja, 19
- topologiczna, 164, 278
  - G-przestrzeń topologiczna, 301
  - działanie lewostronne, 301
  - działanie prawostronne, 301
  - homomorfizm topologiczny, 278
  - podgrupa topologiczna, 278
  - przestrzeń topologiczna z działaniem, 301
- trywialna, 19
- unormowana, 174
- warstwa, 18
- wewnętrzna (w kategorii), 147
  - morfizm jedności, 147
  - morfizm mnożenia, 147
  - morfizm odwrotności, 147
- z normą, 174
- zapis addytywny, 18
  - krotność, 18
- zapis moltiplikatywny, 18
  - jedynka, 18
  - potęga, 18
- grupoid, 62
  - $\mathcal{G}$ -przestrzeń
    - lewostronna, 319
    - prawostronna, 319
  - $\mathcal{G}$ -zbiór
    - lewostronny, 317
    - morfizm (lewostronny), 318
    - morfizm (prawostronny), 318
    - prawostronny, 318
  - działanie
    - lewostronne, 317
    - prawostronne, 318
  - działanie topologiczne
    - lewostronne, 319
    - prawostronne, 319
- Liego, 316
  - $\mathcal{G}$ -rozmaitość, 319
  - działanie lewostronne, 319
  - działanie prawostronne, 319
  - morfizm, 316
  - podgrupoid, 316
  - rozmaitość z działaniem, 319
- morfizm, 62
- par, 317
- podgrupoid, 62
- przestrzeń z działaniem
  - lewostronna, 319
  - prawostronna, 319
- topologiczny, 316
  - morfizm, 316
  - odwzorowanie jedności, 316
  - odwzorowanie końca, 316
  - odwzorowanie mnożenia, 316
  - odwzorowanie odwrotności, 316
  - odwzorowanie początku, 316
  - podgrupoid, 316
  - przestrzeni morfizmów, 316
  - przestrzeni obiektów, 316
  - przestrzeni strzałek, 316
- wewnętrzny (w kategorii), 151
  - morfizm jedności, 152
  - morfizm końca, 152
  - morfizm odwrotności, 152
  - morfizm początku, 152
  - morfizm złożenia, 152
- wiązek głównych cechujących działanie grupy symetrii na wiązce pól, 653
- zbiór z działaniem
  - lewostronny, 317
  - morfizm (lewostronny), 318
  - morfizm (prawostronny), 318
  - prawostronny, 318
- homeomorfizm, 164
- homomorfizm, 14, 32
  - algebr, 324
    - Liego, 282
    - unitalny, 324
    - z gradacją, 342
    - z gradacją, stopnia  $D$ , 342
- automorfizm, 14
- bimodułów nad pierścieniami, 40
- ciał, 30
  - a monomorfizm, 30
  - jądro, 30
  - obraz, 30
- endomorfizm, 14
- epimorfizm, 14
- gradowany, 342
- grup, 17
  - automorfizm wewnętrzny, 20
  - automorfizm zewnętrzny, 20
  - cięcie, 160
  - grupa automorfizmów, 20
  - grupa automorfizmów wewnętrznych, 20
  - grupa automorfizmów zewnętrznych, 20
  - grupa klas automorfizmów, 20
  - izomorfizm kanoniczny, 21
  - jądro, 20
  - Liego, 278
  - monomorfizm indukowany, 22
  - obraz, 20
  - retrakcja, 160

- topologiczny, 278
- włożenie kanoniczne (standardowe), 21
- izomorfizm, 14
- kanoniczny
  - grupy w grupę ilorazową, 21
- modułów
  - endomorfizm idempotentny, 84
- modułów nad pierścieniem, 40
  - automorfizm, 41
  - endomorfizm, 41
  - endomorfizm (wyznacznik), 49
  - jądro, 43, 54
  - kojądro, 54
  - koobraz, 54
  - obraz, 43, 54
  - zerowy, 43
- monoidów, 15
- monomorfizm, 14
- pierścieni, 24
- przestrzeni kwadratowych, 55
- reprezentacji algebry, 348
- homotopia, 172
  - drogowa, 172
  - klasa homotopii, 172
    - względem podzbioru, 172
  - odwzorowania homotopijne, 172
    - względem podzbioru, 172
- ideał
  - główny, 24
  - generowany przez podzbiór, 329
  - gradowany, 342
  - lewostronny, 24, 328
    - minimalny, 328
  - obustronny, 24, 328
    - minimalny, 328
  - prawostronny, 24, 328
    - minimalny, 328
- idempotent
  - algebry
    - centralny, 331
    - minimalny, 331
  - algebry łącznej, 331
- identyczność, 61
- iloczyn
  - algebraiczny podzbiorów, 690
  - Hamiltona, 325
  - kartezjański, 689
    - przestrzeni metrycznych (typu  $p$ ), 174
  - rodziny zbiorów, 73
- półprosty grup
  - lewo-stowarzyszony, 158
  - pravo-stowarzyszony, 158
- tensorowy
  - algebr standardowy, 332
  - algebr z gradacją skośny, 346
  - modułów, 95
  - reprezentacji algebry, 349
  - wiązek wektorowych, 591
  - wielokrotny, 104
- zewnątrzny, 377
  - form liniowych, 45
  - form różniczkowych, 260
- immersja, 265
  - kanoniczna, 265
- inwolucja
  - główna (algebry Clifforda), 383
  - kanoniczna (algebry Clifforda), 383
- izometria, 55
  - przestrzeni metrycznych, 173
- izomorfizm
  - kanoniczny
    - sumy prostej modułów, 82
  - modelujący włókno, 483
  - naturalny, 64
  - transportu włókna, 483
- jądro
  - formy
    - kwadratowej, 55
  - homomorfizmu, 20, 30
- jakobiator
  - na algebrze Liego, 282
  - pól wektorowych, 252
- jedność algebry, 324
- jednorodność
  - odwzorowania, 55
- jedynka algebry, 324
- kategoria, 61
  - $\mathcal{G}$ -przestrzeni
    - lewostronnych, 319
    - prawostronnych, 319
  - $\mathcal{G}$ -rozmaitości
    - lewostronnych, 319
    - prawostronnych, 319
  - $\mathcal{G}$ -zbiorów
    - lewostronnych, 318
    - prawostronnych, 319
  - $G$ -przestrzeni
    - lewostronnych topologicznych, 302
  - $G$ -rozmaitości
    - lewostronnych gładkich, 302
- algebr
  - Liego (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ), 282
- algebr (nad pierścieniem  $R$ ), 324
  - łącznych, 324
  - unitalnych, 324
  - unitalnych łącznych, 324
- ciągów (uogólnionych) w kategorii
  - modelowanych na zbiorze, 65
- diagramów w i modelowanych na
  - kategorii, 64
- funktor
  - gęsty, 63
  - istotnie surjektywny, 63
  - kontrawariantny, 62

- kowariantny, 62
- pełny, 63
- superpozycja, 63
- w pełni wierny, 63
- wierny, 63
- funktorów, 64
- grup
  - Liego, 278
  - topologicznych, 278
- grupoidów
  - Liego, 316
  - topologicznych, 316
- identyczność, 61
- kategoria zbioru, 65
- kategorie (wzajem) równoważne, 64
- klasa
  - morfizmów, 61
  - obiektów, 61
- kopowłoka w kategorii, 126
- korozpięcie zbioru, 65
- lokalnie mała, 62
- mała, 62
  - grupoid, 62
- modułów wiązki grupoidalnej
  - lewostronnych, 527
  - prawostronnych, 528
- morfizm, 61
  - koniec, 61
  - początek, 61
  - złożenie, 61
- obiekt
  - inicjalny, 67
  - końcowy, 67
  - początkowy, 67
  - terminalny, 67
  - zerowy, 67
- podkategoria, 62
  - pełna, 62
- powłoka w kategorii, 126
- produktowa, 64
- przestrzeni
  - Banacha, 175
  - metrycznych, 173
  - z lewostronnym działaniem topologicznym grupy  $G$ , 302
- przestrzeni topologicznych, 164
- przestrzeni topologicznych lokalnie modelowanych, 7
- przestrzeni z działaniem topologicznym grupoidu  $\mathcal{G}$ 
  - lewostronnym, 319
  - prawostronnym, 319
- równoważność, 64
- rozmaitości
  - różniczkowalnych (klasy  $C^k$ ), 229
  - topologicznych, 229
  - z lewostronnym działaniem gładkim  $G$ , 302
  - z lewostronnym działaniem gładkim grupoidu  $\mathcal{G}$ , 319
  - z prawostronnym działaniem gładkim grupoidu  $\mathcal{G}$ , 319
- rozpięcie zbioru, 65
- struktura
  - inicjalna, 69
  - końcowa, 68
  - początkowa, 69
  - terminalna, 68
  - uniwersalna, 69
- transformacja naturalna, 63
- izomorfizm naturalny, 64
- własność
  - inicjalna, 69
  - końcowa, 68
  - początkowa, 69
  - terminalna, 68
- wewnętrzna, 142
  - funktor wewnętrzny, 144
  - morfizm identyczności, 143
  - morfizm końca, 142
  - morfizm początku, 142
  - morfizm złożenia, 143
  - obiekt morfizmów, 142
  - obiekt obiektów, 142
  - transformacja naturalna wewnętrzna, 145
- wiązek
  - głównych (o ustalonych: grupie strukturalnej i bazie), 472
  - stowarzyszonych z daną wiązką główną, 485
  - głównych (o ustalonych: grupoidzie strukturalnym i bazie), 511
  - głównych (o ustalonych: wiązce grupoidalnej i bazie), 530
  - grupoidalnych (o ustalonych: grupoidzie modelowym i bazie), 523
  - włóknistych (nad ustaloną bazą), 450
  - wektorowych skończonego wymiaru (nad ustalonym ciałem i bazą), 463
- wielka, 62
- z koproduktami, 70
  - kwłóknistymi, 129
- z produktami, 70
  - włóknistymi, 128
- zbiorów z działaniem grupoidu  $\mathcal{G}$ 
  - lewostronnym, 318
  - prawostronnym, 319
- zbioru, 65
- klasa, 61
  - charakterystyczna prolongacji, 605
  - gładkości odwzorowania, 192
  - homotopii, 172
  - względem podzbioru, 172

- morfizmów, 61
  - obiektów, 61
  - obstrukcji dla istnienia prolongacji, 601
  - orientacji wiązki wektorowej, 617
  - Stiefela–Whitneya
    - pierwsza (rozmaitości różniczkowalnej), 613
    - pierwsza (wiązki wektorowej), 613
- klasa sprzężoności, 36
- klasyczne konfiguracje pola typu  $F$ , 628
- kombinacja liniowa, 46
  - współczynniki, 46
- kompleksyfikacja
  - algebry (rzeczywistej), 333
  - przestrzeni
    - kwadratowej (rzeczywistej), 122
    - wektorowej (rzeczywistej), 121
- komutator
  - pól wektorowych, 252
    - jakobiator, 252
  - w algebrze, 327
- kontrakcja, 189
- kopowłoka
  - w kategorii, 126
- koprodukt
  - kowłóknisty
    - morfizmów kategorii, 136
    - zbiorów, 132
  - kowłóknisty obiektów kategorii, 128
  - kowłóknisty obiektów kategorii wielokrotny, 130
- rodziny, 70
  - suma prosta, 70
  - suma prosta algebr, 330
  - suma prosta modułów, 77
  - suma prosta modułów (wewnętrzna), 83
  - suma rozłączna (zbiory), 73
  - włożenie kanoniczne składowej, 70
- korozpięcie zbioru (kategoria), 65
- kowektor, 240
- kowymiar (podrozmaitości), 228
- krotność
  - elementu grupy, 18
- krotność nakrycia, 172
- krzywizna lokalna
  - powiązania na wiązce głównej, 583
  - wektorowej, 566
- kula otwarta, 173
- kwaternionifikacja
  - przestrzeni wektorowej (rzeczywistej), 122
- kwaterniony, 325
  - iloczyn Hamiltona, 325
  - kwaternionowa przestrzeń wektorowa, 122
- norma, 326
- sprzężenie, 326
- lemat
  - linelöfa, 188
  - o zwartym pokryciu, 188
- liczby
  - hölderowsko sprzężone, 176
  - zespolone, 31
- liniowa niezależność, 47
- macierz, 26
  - branie przeciwności, 27
  - dodawanie, 27
  - formy kwadratowej względem bazy, 55
  - kolumna, 26
  - kwadratowa, 27
    - przekątna, 27
    - stopnia  $N$ , 27
    - wyznacznik, 49
  - mnożenie, 27
  - odwzorowania  $R$ -liniowego względem baz, 49
  - ortogonalna, 56
  - Pauliego, 358
  - struktura pierścienia, 28
  - wiersz, 26
  - zerowa, 27
- mapa, 228
  - dostosowana (wiązka włóknista), 458
  - naturalna
    - na wiązce  $p$ -form różniczkowych, 241
    - na wiązce kostycznej, 240
    - na wiązce stycznej, 232
- metryka, 173
  - produktowa typu  $p$ , 174
  - równoważność, 173
- miot różniczkowy pierwszy (cięcia wiązki), 458
- model
  - sigma
    - defekt, 646
    - przestrzeń korespondencji, 642, 646
- moduł
  - wiązki grupoidalnej
    - jednostkowy, 530
    - lewostronny, 525
    - morfizm (lewostronny), 527
    - morfizm (prawostronny), 528
    - morfizm działania (lewostronnego), 525
    - morfizm działania (prawostronnego), 526
    - morfizm momentu (lewostronnego), 525
    - morfizm momentu (prawostronnego), 526
    - prawostronny, 526
  - moduł Clifforda, 419
  - $\varepsilon$ -ortogonalny, 420
  - moduł form różniczkowych, 260

- moduł nad pierścieniem
  - algebra tensorowa, 339
  - baza, 47
  - cykliczny, 47
  - dualność, 45
  - dwoistość, 45
  - forma
    - liniowa, 44
  - funkcjonał liniowy, 44
    - współrzędniowy, 48
  - generowany przez zbiór, 47
  - grupa przemienna jako  $\mathbb{Z}$ -moduł, 42
  - homomorfizm, 40
    - automorfizm, 41
    - endomorfizm, 41
    - zerowy, 43
  - iloczyn tensorowy, 95
    - wielokrotny, 104
  - ilorazowy, 43
  - kombinacja liniowa, 46
  - lewostronny, 38
  - odwzorowanie
    - 2-liniowe nieosobliwe, 45
    - 2-liniowe niezwyrodniałe, 45
    - 2-liniowe zwyrodniałe, 45
    - $N$ -liniowe, 44
    - $R$ -liniowe, 40
    - śród- $R$ -jednorodne, 94
    - śród- $R$ -liniowe, 94
    - śród- $R$ -liniowe kanoniczne, 95
  - para dualna, 45
  - para dwoista, 45
  - pierścień jako (bi)moduł standardowy, 41
    - baza standardowa, 48
  - podmoduł, 40
    - dopełnienie proste, 85
  - podzbiór
    - liniowo niezależny, 47
    - liniowo zależny, 47
  - potęga tensorowa, 339
  - prawostronny, 39
  - przestrzeń wektorowa, 41
    - baza algebraiczna, 50
    - baza Hamela, 50
    - ilorazowa, 43
    - podprzestrzeń wektorowa, 41
    - trywialna, 42
    - wektor, 41
    - zerowa, 42
  - rodzina liniowo niezależna, 47
  - rząd, 52
  - skalar, 38
  - skończenie generowany, 47
  - sprzężony, 44
    - baza dualna, 48
    - reprezentacja dwoista (dualna)
      - algebry, 349
  - topologiczny, 164
  - trywialny, 41
  - wolny, 42, 47
  - współrzędne, 48
  - wyznacznik, 49
    - cofnięcie wzdłuż endomorfizmu, 50
  - zbiór generujący, 47
- moment
  - działania
    - grupoidu, 317
    - na wiązce głównej z grupoidem strukturalnym, 509
  - (wiązki głównej z grupoidem strukturalnym)
    - lokalny, 515
- monoid, 14
  - element neutralny, 15
  - element regularny, 16
    - prawostronnie, 16
  - element upraszczalny, 16
    - lewostronnie, 16
    - prawostronnie, 16
  - homomorfizm, 15
  - podmonoid, 15
  - przeciwna, 15
  - przemienny, 15
- morfizm, 61
  - działania
    - na wiązce głównej ze strukturalną wiązką grupoidalną, 529
  - działania (lewostronnego), 525
  - działania (prawostronnego), 526
    - przechodni włókno po włóknie, 528
    - swobodny włókno po włóknie, 528
    - tranzytywny włókno po włóknie, 528
    - wolny włókno po włóknie, 528
  - grupoidów, 62
    - Liego, 316
    - topologicznych, 316
  - identyczności, 143
  - identyczności (wiązki grupoidalnej), 521
  - ilorazowy
    - wiązki głównej (ze strukturalną wiązką grupoidalną), 529
  - inwersji (wiązki grupoidalnej), 521
  - jedności, 147
    - grupoidu (wewnętrznego), 152
  - końca, 142
    - grupoidu (wewnętrznego), 152
  - końca (wiązki grupoidalnej), 521
  - koniec, 61
  - mnożenia
    - grupy (wewnętrznej), 147
  - modułów wiązek grupoidalnych
    - lewostronnych, 527
    - prawostronnych, 528
  - momentu
    - na wiązce głównej ze strukturalną wiązką grupoidalną, 529

- momentu (lewostronnego), 525
- momentu (prawostronnego), 526
- odwrotności
  - grupoidu (wewnętrznego), 152
  - grupy (wewnętrznej), 147
- początek, 61
- początku, 142
  - grupoidu (wewnętrznego), 152
- początku (wiązki grupoidalnej), 521
- przestrzeni z działaniem topologicznym
  - grupoidu
    - lewostronnym, 319
    - prawostronnym, 319
  - submersji, 268
  - wiązek włóknistych, 450
    - głównych, 471
    - równoważność, 450
    - wektorowych, 463
  - z powiązaniem (nad dyfeomorfizmem baz), 544
- złożenia, 143
  - grupoidu (wewnętrznego), 152
- złożenia (wiązki grupoidalnej), 521
- złożenie, 61
- zbiorów z działaniem grupoidu
  - lewostronnym, 318
  - prawostronnym, 318
- nakrycie (topologiczne), 172
  - baza, 172
  - gałąź, 172
  - krotność, 172
  - przestrzeń nakrywająca, 172
  - przestrzeń totalna, 172
  - rzut, 172
  - uniwersalne, 172
  - włókno, 172
- nawias
  - Liego, 282
- nierówność
  - Grönwalla–Bellmana, 202
  - Höldera, 176
  - Minkowskiego, 177
  - Schwarza, 176
  - Younga, 176
- niezmiennik
  - wiązek stowarzyszonych, 483
- nośnik, 13
  - działania, 32
  - funkcji, 242
  - reprezentacji (algebry), 347
- norma
  - euklidesowa, 177
  - kwaternionowa, 326
  - na grupie, 174
  - operatorowa, 182
  - supremum, 181
- obiekt
  - grupoidowy (w kategorii), 151
    - morfizm jedności, 152
    - morfizm końca, 152
    - morfizm odwrotności, 152
    - morfizm początku, 152
    - morfizm złożenia, 152
  - grupowy (w kategorii), 147
    - morfizm jedności, 147
    - morfizm mnożenia, 147
    - morfizm odwrotności, 147
  - inicjalny, 67
  - kategorialny (w kategorii), 142
    - morfizm identyczności, 143
    - morfizm końca, 142
    - morfizm początku, 142
    - morfizm złożenia, 143
  - obiekt morfizmów, 142
  - obiekt obiektów, 142
  - końcowy, 67
  - morfizmów, 142
    - grupoidu (wewnętrznego), 152
  - obiektów, 142
    - grupoidu (wewnętrznego), 152
    - grupy (wewnętrznej), 147
  - początkowy, 67
  - terminalny, 67
  - zerowy, 67
- obrót (uogólniony), 57
- obraz
  - homomorfizmu, 20, 30
- obraz algebraiczny zbiorów względem operacji, 690
- odbicie elementarne, 58
- odwrotność algebraiczna podzbioru, 691
- odwzorowania
  - homotopijne, 172
    - względem podzbioru, 172
  - przejścia (wiązki włóknistej), 449
- odwzorowanie
  - 2-liniowe nad pierścieniem nieosobliwe, 45
    - niezwyrodniałe, 45
    - zwyrodniałe, 45
  - $G$ -ekwiwariantne
    - lewostronnie, 34
    - prawostronnie, 34
  - $N$ -liniowe
    - na module nad pierścieniem, 44
    - nad pierścieniem, 44
  - $N$ -liniowe alternujące
    - na module nad pierścieniem, 45
  - $N$ -liniowe antysymetryczne
    - na module nad pierścieniem, 45
  - $N$ -liniowe skośnie symetryczne
    - na module nad pierścieniem, 45
  - $N$ -liniowe symetryczne
    - na module nad pierścieniem, 44
  - $R$ -liniowe, 40

- $\varepsilon$ -hermitowskie, 420
- śród- $R$ -jednorodne, 94
- śród- $R$ -liniowe, 94
  - kanoniczne, 95
- 2-liniowe nad pierścieniem
  - odwzorowanie lewostronnie stowarzyszone, 45
  - odwzorowanie prawostronnie stowarzyszone, 45
- między przestrzeniami topologicznymi
  - lokalna prezentacja, 8
- anty- $C$ -liniowe, 124
- ciągłe, 164
  - homeomorfizm, 164
  - w punkcie, 164
  - zanurzenie topologiczne, 164
- Clifforda, 362
  - kanoniczne, 362
- domknięte, 164
- dwu- $Z$ -liniowe, 94
- dwu-addytywne, 94
- eksponencjalne (na grupie Liego), 290
- ewaluacji, 182
- gładkie, 192
- identycznościowe, 689
- ilorazowe, 164
  - wiązki głównej (z grupoidem strukturalnym), 510
- ilorazowe (wiązki głównej), 472
- immersywne w punkcie, 265
- jedności grupoidu topologicznego, 316
- jednorodne stopnia 2, 55
- jednostajnie ciągłe, 180
- końca grupoidu topologicznego, 316
- mnożenia grupoidu topologicznego, 316
- odwrotności grupoidu topologicznego, 316
- ograniczone, 173, 194
- ortogonalne, 55
- otwarte, 164
- para transwersalna, 274
- początku grupoidu topologicznego, 316
- różniczkowalne
  - na zbiorze, 192
  - w punkcie, 192
- różniczkowalne (klasy  $C^p$ ), 229
  - odwzorowanie styczne, 237
  - prezentacja lokalna, 229
- regulowane, 194
- schodkowe, 194
- sprężone hermitowsko, 57
- stowarzyszone z 2-liniowym
  - lewostronnie, 45
  - prawostronnie, 45
- styczne, 237
  - immersja, 265
  - submersja, 265
  - włożenie, 265
  - zanurzenie, 265
- submersywne w punkcie, 265
  - cięcie lokalne, 271
  - poziomica regularna, 268
  - punkt krytyczny, 268
  - punkt regularny, 268
  - wartość krytyczna, 268
  - wartość regularna, 268
- transwersalne względem podrozmaitości, 273
  - w punkcie, 273
- właściwe, 167
- wykres, 270
- związujące, 189
- ograniczone rozszerzenie liniowe, 190
- operacja, 13
  - $n$ -argumentowa, 13
  - 0-argumentowa, 13
- operator
  - chiralności, 390
  - liniowy
    - ograniczony, 175
  - rzutu, 84
- orbita
  - działania grupy, 36
- orientacja
  - na rozmaitości różniczkowalnej, 615
    - czasowa, 615
    - przestrzenna, 615
  - na wiązce wektorowej, 615
    - czasowa, 615
    - przestrzenna, 615
  - rzeczywistej przestrzeni wektorowej, 49
- ortogonalizacja Grama–Schmidta, 88
- ortogonalność
  - przestrzeni
    - względem formy kwadratowej, 57
  - wektorów
    - względem formy kwadratowej, 57
- otoczenie
  - podzbioru, 165
  - punktu, 165
- otoczenie punktu
  - baza, 165
- pętla (zaczepiona w punkcie), 171
- płaszczyzna
  - hiperboliczna, 56
- para
  - dualna (modułów nad pierścieniem), 45
  - dwoista (modułów nad pierścieniem), 45
  - hiperboliczna, 56
- parametryzacja (lokalna), 228
- pchnięcie
  - pola wektorowego wzdłuż dyfeomorfizmu, 251
  - różniczkowania w punkcie wzdłuż odwzorowania, 248

- permutacja, 19
- pierścień, 22
  - centrum, 25
  - endomorfizmów grupy przemiennej, 25
  - homomorfizm, 24
  - jedynka, 22
  - macierzowy, 28
  - o cesze IBN, 52
  - operacje, 22
  - podpierścień, 24
    - ideał główny, 24
    - ideał lewostronny, 24
    - ideał obustronny, 24
    - ideał prawostronny, 24
  - przeciwny, 40
  - przemienny, 24
    - dziedzina całkowitości, 24
  - topologiczny, 164
  - trywialny, 25
  - unormowany, 174
  - wielomianów, 26
  - z dzieleniem, 24
  - z normą, 174
  - zero, 22
- pochodna
  - $\Gamma(\text{AdP}_G)$ -kowariantna
    - na wiązce produktowej stowarzyszonej, 587
    - na wiązce stowarzyszonej, 586
  - Crittendena
    - na wiązce produktowej stowarzyszonej, 587
    - na wiązce stowarzyszonej, 586
  - Frécheta, 192
  - Koszula, 552
  - kowariantna (cięcia wiązki włóknistej), 537
  - Liego, 620
  - logarytmiczna
    - lewostronna, 294
    - prawostronna, 294
  - zewnętrzna, 260
- podalgebra, 324
  - gradowana, 342
  - Liego, 282
  - maksymalna komutująca (reprezentacji algebry), 348
- podbaza
  - topologii, 163
- podgrupa, 17
  - Liego, 278
  - normalna, 17
  - topologiczna, 278
- podgrupoid, 62
  - Liego, 316
  - topologiczny, 316
- podkategoria, 62
  - pełna, 62
- podmoduł
  - modułu nad pierścieniem, 40
  - niezmienniczy reprezentacji (algebry), 348
  - z gradacją, 342
- podniesienie poziome (horyzontalne)
  - ścieżki, 539
  - wektorów, 537
- podpokrycie, 167
- podprzestrzeń
  - horyzontalna, 539
  - niezmiennicza reprezentacji (algebry), 348
  - pionowa, 469
  - pozioma, 539
  - przestrzeni wektorowej, 41
  - topologiczna, 163
  - wertykalna, 469
- podreprezentacja algebry, 348
- podrozmaitość, 228
  - kowymiar, 228
  - para transwersalna, 274
- podwiązka, 450
  - główna, 471
  - horyzontalna, 539
  - pionowa, 469
  - pozioma, 539
  - wektorowa, 463
    - czasowa, 614
    - przestrzenna, 614
  - wertykalna, 469
- podzbiór
  - liniowo niezależny, 47
  - liniowo zależny, 47
  - ograniczony, 173
- pokrycie
  - otwarte, 167
    - dobrze (rozmaitości różniczkowalnej), 230
    - lokalnie skończone, 167
    - podpokrycie, 167
    - rozdrobienie, 167
  - trywializujące, 7
  - trywializujące (wiązkę), 449
- pole
  - $p$ -form, 259
    - cofnięcie wzdłuż odwzorowania, 264
    - ewaluacja na polach wektorowych, 259
    - iloczyn zewnętrzny, 260
    - pochodna zewnętrzna, 260
    - różniczkowalne (klasy  $C^k$ ), 259
  - 1-form
    - lewoniezmienniczych (kanoniczne) na grupie Liego, 293
    - prawoniezmienniczych (kanoniczne) na grupie Liego, 293
  - fizyczne, 628
  - Killinga (metryki), 620



- tensorów typu  $(k, l)$ , 591
  - cofnięcie wzdłuż dyfeomorfizmu, 591
- wektorowe, 250
  - algebra, 252
  - dziedzina całkowalności, 255
  - fundamentalne, 302
  - jednoparametrowa grupa
    - dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy  $C^l$ ), 256
  - jednoparametrowa grupa lokalnych
    - dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy  $C^l$ ), 256
  - Killinga (metryki), 620
  - komutator, 252
  - krzywa całkowata, 254
  - lewoniezmiennicze (na grupie Liego), 281
  - lokalna jednoparametrowa grupa
    - lokalnych dyfeomorfizmów na zbiorze (klasy  $C^l$ ), 256
  - lokalnie niezmiennicze, 257
  - para w relacji określonej przez
    - odwzorowanie różniczkowalne, 253
  - pchnięcie wzdłuż dyfeomorfizmu, 251
  - potok, 255
  - prawoniezmiennicze (na grupie Liego), 281
  - różniczkowalne (klasy  $C^k$ ), 250
  - różniczkowanie, 250
  - trajektoria, 254
  - zupelne, 255
  - z cechowaniem, 651
- potęga
  - elementu grupy, 18
  - tensorowa modułu, 339
- potencjał
  - powiązania głównego, 569
  - lokalny, 576
- potok
  - odwzorowania definiującego zagadnienie początkowe, 217
  - poła wektorowego, 255
- powłoka
  - w kategorii, 126
- powłoka  $(R)$ -liniowa zbioru, 47
- powiązanie
  - Ehresmanna, 539
  - $K$ -liniowe, 548
  - główne, 567
  - zgodne z działaniem grupy
    - strukturalnej, 567
  - zgodne ze strukturą  $K$ -liniową, 548
- forma powiązania, 540
  - $K$ -liniowego, 549
  - głównego, 569
- Koszula, 552
  - symbole Christoffela, 559
- lokalna 2-forma krzywizny, 566, 583
- płaskie
  - główne, 583
  - liniowe, 566
- włókien w wiązce, 537
  - $K$ -liniowe, 547
  - główne, 567
  - zgodne z działaniem grupy
    - strukturalnej, 567
  - zgodne ze strukturą  $K$ -liniową, 547
- poziomica
  - regularna odwzorowania, 268
- produkt
  - algebr, 330
  - kartezjański
    - rodziny zbiorów, 72
  - rodziny, 70
    - modułów, 73
    - rzut kanoniczny na składową, 70
  - rodziny struktur
    - algebr, 330
  - rodziny zbiorów
    - kartezjański, 72
- włóknisty
  - morfizmów kategorii, 133
  - obiektów kategorii, 128
  - obiektów kategorii wielokrotny, 130
  - rozmaitości różniczkowalnych, 277
  - wiązek włóknistych, 452
  - wiązka produktowa stowarzyszona z
    - główną, 502
  - zbiorów, 131
- prolongacja wiązki głównej, 598
  - klasa charakterystyczna, 605
  - klasa obstrukcji, 601
  - równoważność, 598
- prostopadłość
  - przestrzeni
    - względem formy kwadratowej, 57
  - wektorów
    - względem formy kwadratowej, 57
- przeciwność algebraiczna podzbioru, 691
- przeniesienie równoległe, 536
  - podniesienie poziome (horyzontalne)
    - ścieżki, 539
  - wektorów, 537
- powiązanie włókien, 537
  - $K$ -liniowe, 547
  - główne, 567
  - zgodne z działaniem grupy
    - strukturalnej, 567
  - zgodne ze strukturą  $K$ -liniową, 547
- przestrzeń
  - $C$ -liniowa
    - struktura kwaternionowa, 124
    - struktura rzeczywista, 124
  - $K$ -liniowa, 41
  - $(Q)$ -ortogonalna, 57
  - $(Q)$ -prostopadła, 57

- 1-spójna, 172
- anizotropowa, 58
- Banacha, 175
- całka Cauchy'ego–Bochnera (regulowana), 195
- odwzorowanie różniczkowalne na zbiorze, 192
- odwzorowanie różniczkowalne w punkcie, 192
- ograniczone rozszerzenie liniowe, 190
- pochodna Fréchet'a odwzorowania, 192
- sumocalka odwzorowania schodkowego, 194
- ciągowo zwarta, 167
- dyskretna, 167
- Hausdorffa, 167
- hermitowska
  - odbicie elementarne, 58
  - transformacja Householdera, 58
  - transformacja ortogonalna, 56
- hiperboliczna, 89
- horyzontalna, 539
- ilorazowa, 168
- izotropowa, 58
  - całkowicie, 58
  - całkowicie maksymalna, 89
- jednorodna, 37
  - główna, 37
  - gładka, 315
- jednospójna, 172
- korespondencji (modelu sigma), 646
- kwadratowa, 55
  - (pod)przestrzeń całkowicie izotropowa, 58
  - (pod)przestrzeń całkowicie izotropowa maksymalna, 89
  - (pod)przestrzeń izotropowa, 58
  - (pod)przestrzeń zerowa, 58
  - (pod)przestrzeń zerowa maksymalna, 89
- algebra Clifforda, 362
- anizotropowa, 58
- automorfizm ortogonalny, 56
- baza ortogonalna, 58
- baza ortonormalna, 58
- grupa ortogonalna, 56
- grupa specjalna ortogonalna, 57
- hiperboliczna, 89
- homomorfizm, 55
- izometria, 55
- kompleksyfikacja, 122
- nieizotropowa, 58
- niezwyrodniała, 58
- odbicie elementarne, 58
- odwzorowanie ortogonalne, 55
- plaszczyna hiperboliczna, 56
- suma prosta, 86
- transformacja Householdera, 58
- wektor anizotropowy, 58
- wektor izotropowy, 58
- wektor nieizotropowy, 58
- wektor zerowy, 58
- wyznacznik unormowany, 88
- lokalnie przewartna, 167
- lokalnie zwarta, 167
- metryczna, 173
  - jednostajna ciągłość, 180
  - kula otwarta, 173
  - odwzorowanie ograniczone, 173
  - podzbiór ograniczony, 173
  - zupełna, 174
- morfizmów grupoidu topologicznego, 316
- nakrywająca, 172
- nieizotropowa, 58
- niezwyrodniała, 58
- obiektów grupoidu topologicznego, 316
- ortogonalna
  - względem formy kwadratowej, 57
- pętli (swobodnych), 171
- parazwarta, 167
- pionowa, 469
- pozioma, 539
- produktowa, 168
- prostopadła
  - względem formy kwadratowej, 57
- różniczkowań (w punkcie), 242
- strzałek grupoidu topologicznego, 316
- styczna (w punkcie), 234
  - podprzestrzeń horyzontalna, 539
  - podprzestrzeń pionowa, 469
  - podprzestrzeń pozioma, 539
  - podprzestrzeń wertykalna, 469
  - przestrzeń horyzontalna, 539
  - przestrzeń pionowa, 469
  - przestrzeń pozioma, 539
  - przestrzeń wertykalna, 469
- topologiczna, 163
  - ścieżka (ciągła), 171
- 0-spójna, 172
- ciąg zbieżny punktów, 166
- ciągowo zwarta, 167
- drogowo spójna, 172
- grupa topologiczna, 278
- homotopia, 172
- lokalnie drogowo spójna, 172
- lokalnie modelowana, 7
- lokalnie przewartna, 167
- lokalnie spójna, 171
- lokalnie zwarta, 167
- niespójna, 171
- pętla, 171
- parazwarta, 167
- składowa drogowo spójna, 171
- składowa drogowo spójna punktu, 172
- składowa spójna, 171
- składowa spójna punktu, 171

- spójna, 171
- spełniająca drugi aksjomat
  - przeliczalności, 165
- spełniająca pierwszy aksjomat
  - przeliczalności, 165
- z działaniem grupy, 301
- zbiór 1-spójny, 172
- zbiór jednospójny, 172
- zbiór spójny, 171
- zwarta, 167
- totalna
  - nakrycia, 172
  - submersji, 268
  - wiązki głównej (z grupoidem strukturalnym), 509
  - wiązki głównej (ze strukturalną wiązką grupoidalną), 529
  - wiązki włóknistej, 449
- wektorowa, 41
  - ciało jako przestrzeń wektorowa, 42
  - ciało jako przestrzeń wektorowa (baza standardowa), 48
  - ilorazowa, 43
  - kompleksyfikacja, 121
  - kwaternionifikacja, 122
  - kwaternionowa, 122
  - orientacja, 49
  - podprzestrzeń ortogonalna względem formy kwadratowej, 57
  - podprzestrzeń prostopadła względem formy kwadratowej, 57
  - podprzestrzeń wektorowa, 41
  - sprzężona, 44
  - topologiczna, 164
  - trywialna, 42
  - unormowana, 174
  - wektor, 41
  - wymiar (K-liniowy), 53
  - z normą, 174
  - zerowa, 42
- wertykalna, 469
- z działaniem topologicznym grupoidu
  - lewostronna, 319
  - prawostronna, 319
- zanurzenia (modelu sigma), 642
- zerowa, 58
  - maksymalna, 89
- zwarta, 167
- punkt
  - krytyczny odwzorowania, 268
  - regularny odwzorowania, 268
  - skupienia ciągu, 166
- różniczkowanie
  - w punkcie, 242
  - pchnięcie wzdłuż odwzorowania, 248
  - wzdłuż pola wektorowego, 250
- równania struktury (algebra Liego), 284
- równoważność
  - reprezentacji algebry, 348
  - wiązek włóknistych, 450
- realizacja
  - grupy
    - lewostronna, 34
    - prawostronna, 34
  - zbioru, 32
- reprezentacja
  - $J_V$ -wektorowa
    - multiplikatywnej grupy jedności, 430
- algebry, 347
  - Clifforda, 419
  - definiująca (algebry macierzowej), 354
  - homomorfizm, 348
  - lewa regularna, 349
  - maksymalna podalgebra komutująca, 348
  - nieprzywiedlna, 348
  - nierozkładalna, 348
  - nośnik, 347
  - półprosta, 348
  - podmoduł niezmienniczy, 348
  - podprzestrzeń niezmiennicza, 348
  - podreprezentacja, 348
  - prawa regularna, 349
  - przywiedlna, 348
  - równoważność, 348
  - splatacz, 348
  - trywialna, 349
  - typu  $\mathbb{C}$ , 349
  - typu  $\mathbb{H}$ , 349
  - typu  $\mathbb{R}$ , 349
  - typu kwaternionowego, 349
  - typu rzeczywistego, 349
  - typu zespolonego, 349
  - wierna, 348
  - wymiar, 347
  - zredukowana względem ideału, 349
- dołączona
  - multiplikatywnej grupy jedności, 428
- dołączona zwichrowana
  - multiplikatywnej grupy jedności, 430
- grupy Spin
  - spinorowa, 438
  - spinorowa rzeczywista, 438
  - spinorowa zespolona, 438
- wektorowa
  - multiplikatywnej grupy jedności, 428
- retrakcja
  - homomorfizmu grup, 160
  - różniczkowalna (klasy  $C^k$ ), 231
- rodzina
  - funkcji lokalnie skończona, 242
  - indeksowana, 46
    - nośnik, 46
    - o nośniku skończonym, 46
  - liniowo niezależna, 47

- rzutów dopełniających, 84
  - zupełna, 85
- rzutów komplementarnych, 84
  - zupełna, 85
- rozdrobienie pokrycia, 167
- rozkład jedności (klasy  $C^k$ ), 242
- rozmaitość
  - ilorazowa, 307
  - metryczna (klasy  $C^k$ ), 606
    - pole Killinga, 620
  - podrozmaitość, 228
    - kowymiar, 228
  - różniczkowalna (klasy  $C^k$ ), 227
    - $C^k$ -dyfeomorfizm, 229
    - $C^p$ -odwzorowanie, 229
    - $p$ -forma różniczkowa, 241
    - ścieżka różniczkowalna, 234
    - ścieżka zwarta (klasy  $C^l$ ), 254
  - atlas, 228
  - atlas maksymalny, 228
  - cofnięcie pola form wzdłuż
    - odwzorowania, 264
  - cofnięcie pola tensorów typu  $(k, l)$ 
    - wzdłuż dyfeomorfizmu, 591
  - dyfeomorfizm (klasy  $C^k$ ), 229
  - ewaluacja pola  $p$ -form na polach
    - wektorowych, 259
  - grupa Liego, 278
  - grupoid Liego, 316
  - immersja, 265
  - klasa Stiefela–Whitneya (pierwsza), 613
  - kowektor, 240
  - krzywa całkowa, 254
  - mapa, 228
  - moduł form różniczkowych, 260
  - morfizm submersji, 268
  - odwzorowanie immersywne w punkcie, 265
  - odwzorowanie różniczkowalne (klasy  $C^p$ ), 229
  - odwzorowanie submersywne w punkcie, 265
  - orientacja, 615
  - orientacja czasowa, 615
  - orientacja przestrzenna, 615
  - orientowalna, 611
  - orientowalna czasowo, 611
  - orientowalna czasowo i przestrzennie, 611
  - orientowalna przestrzennie, 611
  - parametryzacja (lokalna), 228
  - pcnięcie pola wektorowego wzdłuż
    - dyfeomorfizmu, 251
  - pokrycie dobre, 230
  - pole  $p$ -form, 259
  - pole tensorów typu  $(k, l)$ , 591
  - pole wektorowe, 250
    - pole wektorowe fundamentalne, 302
    - poziomica regularna odwzorowania, 268
    - produkt włóknisty, 277
    - przestrzeń różniczkowań (w punkcie), 242
    - przestrzeń styczna (w punkcie), 234
    - przestrzeń totalna submersji, 268
    - punkt krytyczny odwzorowania, 268
    - punkt regularny odwzorowania, 268
    - różniczkowanie w punkcie, 242
    - różniczkowanie wzdłuż pola
      - wektorowego, 250
    - rozkład jedności (klasy  $C^k$ ), 242
    - struktura, 228
    - struktura cofnięta, 230
    - struktura metryczna, 606
    - struktura produktowa, 229
    - submersja, 265
    - topologiczna ( $k = 0$ ), 228
    - trajektoria, 254
    - transformacja współrzędniowa
      - (lokalna), 228
    - układ współrzędnych (lokalny), 228
    - włókno submersji, 268
    - włożenie, 265
    - wartość krytyczna odwzorowania, 268
    - wartość regularna odwzorowania, 268
    - wektor styczny (do ścieżki
      - różniczkowalnej), 254
    - wektor styczny (do rozmaitości), 232
    - wiązka  $p$ -form różniczkowych (jako
      - rozmaitość), 240
    - wiązka baz, 472
    - wiązka kostyczna (jako rozmaitość), 239
    - wiązka styczna (jako rozmaitość), 231
    - wiązka styczna (jako wiązka
      - włóknista), 460
    - wiązka tensorów, 591
    - wymiar, 227
    - z działaniem grupoidu (gładkim), 319
    - z działaniem grupy (gładkim), 302
    - zanurzenie, 265
  - rozwłókniona złożona, 509
    - topologiczna, 228
  - rozpięcie zbioru (kategoria), 65
  - rozszerzenie
    - grupy, 156
      - centralne, 156
  - rozwłóknienie Hopfa, 472
  - rząd
    - modułu nad pierścieniem, 52
    - morfizmu wiązek wektorowych, 463
    - odwzorowania liniowego, 54
  - rzut, 84
    - kanoniczny, 690
    - modulo* podgrupa, 21

- na bazę wiązki, 232, 239, 240
- na składową produktu rodziny, 70
- na bazę
  - wiązki głównej (z grupoidem strukturalnym), 509
  - wiązki głównej (ze strukturalną wiązką grupoidalną), 529
  - wiązki włóknistej, 449
- nakrycia, 172
- rodzina rzutów dopełniających, 84
- zupełna, 85
- rodzina rzutów komplementarnych, 84
- zupełna, 85
- singleton, 13
- sinusoida
  - zagęszczona (warszawska), 172
- składowa
  - łukowo spójna punktu, 172
  - drogowo spójna, 171
  - spójna, 171
  - spójna punktu, 171
- sklejenie (przestrzeni topologicznych), 132
- spójność, 171
  - drogowa, 172
- spinor
  - czysty (Cartana), 441
  - Diraca, 439
  - Pauliego, 438
  - Weyla (chiralny), 439
- splatacz
  - reprezentacji algebry, 348
- splot funkcji na grupie, 327
- sprzężenie
  - hermitowskie, 57
  - kwaternionowe, 326
- stała, 13
- stałe struktury (algebra Liego), 284
- stabilizator, 36
- stopień
  - podmodułu, 342
- struktura
  - $C^k$ -rozmaitości, 228
  - inicjalna, 69
    - koprodukt kowłóknisty obiektów kategorii, 128
    - koprodukt kowłóknisty obiektów kategorii wielokrotny, 130
    - koprodukt rodziny, 70
  - końcowa, 68
    - produkt rodziny, 70
    - produkt włóknisty obiektów kategorii, 128
    - produkt włóknisty obiektów kategorii wielokrotny, 130
  - kwaternionowa (na rzeczywistej przestrzeni wektorowej), 123
  - kwaternionowa na przestrzeni  $C$ -liniowej, 124
  - metryczna
    - na rozmaitości różniczkowalnej, 606
    - na wiązce wektorowej, 606
  - metryczna riemannowska
    - na wiązce wektorowej, 606
  - początkowa, 69
    - koprodukt kowłóknisty obiektów kategorii, 128
    - koprodukt kowłóknisty obiektów kategorii wielokrotny, 130
    - koprodukt rodziny, 70
  - różniczkowa (klasy  $C^k$ ), 228
  - rozmaitości (różniczkowalnej klasy  $C^k$ ), 228
  - rzeczywista na przestrzeni  $C$ -liniowej, 124
  - terminalna, 68
    - produkt rodziny, 70
    - produkt włóknisty obiektów kategorii, 128
    - produkt włóknisty obiektów kategorii wielokrotny, 130
  - uniwersalna, 69
  - zespólna (na rzeczywistej przestrzeni wektorowej), 123
- struktura algebraiczna
  - prosta, 13
    - homomorfizm, 14
    - podstruktura, 14
    - topologiczna, 164
  - złożona, 32
    - homomorfizm, 32
    - topologiczna, 164
- strzałka przejścia (wiązki głównej z grupoidem strukturalnym), 515
- stwierdzenie
  - bilans wymiarów, 53
  - kwazi-uniwersalna własność submersji, 271
  - lemat Steinitza o wymianie, 51
  - Magiczna formuła Cartana, 620
  - o naturalności kompleksyfikacji (algebr Clifforda), 413
  - o naturalności odwzorowania eksponencjalnego, 290
  - o postaci kanonicznej (macierzy) odwzorowania  $K$ -liniowego, 53
  - o rozszerzaniu funkcji, 246
  - o rozszerzeniu hiperbolicznym przestrzeni izotropowej, 89
  - reguła łańcuchowa w przestrzeni Banacha, 193
  - Sylwestera–Jacobiego wyznacznikowy wzór na sygnaturę, 87
  - twierdzenie Lagrange’a o diagonalizacji formy kwadratowej, 59
  - twierdzenie o lokalnej immersji, 265

- twierdzenie o lokalnej submersji, 266
- wzór wyznacznikowy Cauchy'ego, 50
- submersja, 265
  - cięcie lokalne, 271
  - kanoniczna, 266
  - morfizm, 268
  - przestrzeń totalna, 268
  - włókno, 268
- suma
  - ( $\mathcal{Q}$ -)ortogonalna, 86
  - algebraiczna podzbiorów, 690
  - prosta, 70
    - algebr, 330
    - form kwadratowych, 86
    - modułów, 77
    - modułów (izomorfizmy kanoniczne), 82
    - modułów a rodzina rzutów
      - komplementarnych, 84
    - modułów wewnętrzna, 83
    - przestrzeni kwadratowych, 86
    - reprezentacji algebry, 349
  - rozłączna, 73
  - spójna, 132
  - Whitneya, 589
- sumocalka odwzorowania schodkowego, 194
- super-iloczyn tensorowy algebr z gradacją, 346
- sygnatura
  - formy kwadratowej, 87
  - struktury metrycznej (na wiązce wektorowej), 606
- symbol Kroneckera, 48
- symbol Levi-Civitty, 358
- symbole Christoffela
  - powiązania Koszula, 559
- symetria
  - teorii pola
    - cechowanie, 651
    - globalna, 628
- tensor
  - stopnia  $n$ , 343
- teoria kategorii, 61
- teoria pola
  - lagranżowska typu  $F$ , 628
  - cechowanie symetrii, 651
  - funkcjonał działania, 628
  - gęstość lagranżjanu, 628
  - grupa symetrii globalnych, 629
  - klasyczne konfiguracje pola, 628
  - pole, 628
  - symetria globalna, 628
- tesselizacja
  - krzywej, 631
    - krawędź, 631
    - podporządkowana pokryciu, 631
    - wierzchołek, 631
  - powierzchni, 639
    - krawędź, 639
    - plakietka, 639
    - podporządkowana pokryciu, 639
    - wierzchołek, 639
- tożsamość
  - Jacobiego, 282
    - dla stałych struktury, 284
  - Leibniza, 552
- topologia, 163
  - baza, 163
  - cofnięciowa, 168
  - dyskretna, 167
  - generowana (przez bazę), 163
  - Hausdorffa, 167
  - ilorazowa, 168
  - końcowa, 168
  - metryczna, 173
  - mocna, 168
  - odwzorowanie
    - ciągłe, 164
    - ciągłe w punkcie, 164
    - domknięte, 164
    - ilorazowe, 164
    - jednostajnie ciągłe, 180
    - otwarte, 164
    - właściwe, 167
  - otoczenie
    - podzbioru, 165
    - punktu, 165
  - otoczenie punktu
    - baza, 165
  - początkowa, 168
  - podbaza, 163
  - podprzestrzeni, 164
  - produktowa, 168
  - słaba, 168
  - słabsza, 163
  - silniejsza, 163
  - sumy rozłącznej, 168
  - trywialna, 167
  - względna, 164
  - zbiór
    - domknięty, 163
    - otwarty, 163
    - względnie domknięty, 164
    - względnie otwarty, 164
  - zwarto-otwarta, 168
- torsor grupy, 37
- transformacja
  - Householdera, 58
  - cechowania, 651
  - naturalna, 63
    - izomorfizm naturalny, 64
    - wewnętrzna, 145
  - ortogonalna, 56
    - Householdera, 58
    - odbicie elementarne, 58
  - współrzędniowa (lokalna), 228

- transpozycja, 19
- trywializacja
- lokalna
    - wiązki głównej z grupoidem strukturalnym, 515
    - wiązki głównej ze strukturalną wiązką grupoidalną, 532
    - wiązki włóknistej, 449
- twierdzenie
- „Szachownica Clifforda”, 408
  - Banacha o punkcie stałym, 189
  - Cartana o podgrupie domkniętej, 297
  - Cartana–Dieudonnégo, 91
  - de Rhama–Weila o istnieniu pokrycia dobrego, 231
  - Heinego–Borela, 186
  - klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych  $/\mathbb{C}$  (zespolone algebry Clifforda), 424
  - klasyfikacyjne dla reprezentacji nieprzywiedlnych  $/\mathbb{R}$  (rzeczywiste algebry Clifforda), 424
  - klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych  $/\mathbb{C}$  (grupa Spin), 440
  - klasyfikacyjne dla reprezentacji spinorowych  $/\mathbb{R}$  (grupa Spin), 438
  - klasyfikacyjne I  $\mathbb{C}$  (zespolone algebry Clifforda), 416
  - klasyfikacyjne I  $\mathbb{R}$  (rzeczywiste algebry Clifforda), 405
  - klasyfikacyjne II  $\mathbb{C}$  (zespolone algebry Clifforda), 416
  - klasyfikacyjne II  $\mathbb{R}$  (rzeczywiste algebry Clifforda), 406
  - klasyfikacyjne III  $\mathbb{C}$  (zespolone algebry Clifforda), 417
  - klasyfikacyjne III  $\mathbb{R}$  (rzeczywiste algebry Clifforda), 407
  - klasyfikacyjne IV  $\mathbb{R}$  (rzeczywiste algebry Clifforda), 407
  - klasyfikacyjne V  $\mathbb{R}$  (rzeczywiste algebry Clifforda), 408
  - Lagrange’a o diagonalizacji formy kwadratowej, 59
  - o łączności (ko)produktu (ko)włóknistego, 137
  - o łączności iloczynu tensorowego, 102
  - o ciągłej zależności rozwiązań zagadnienia Cauchy’ego od warunków początkowych, 217
  - o funktorialności Lie, 285
  - o istnieniu bazy przestrzeni wektorowej, 50
  - o istnieniu rozkładu jedności, 243
  - o izomorfizmie
    - pierwsze (dla algebr z gradacją), 345
    - pierwsze (dla grup), 21
    - pierwsze (dla modułów), 54
  - o jednoznaczności obiektów terminalnych i inicjalnych, 67
  - o jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy’ego w dziedzinie określoności, 214
  - o jednoznaczności struktur uniwersalnych, 69
  - o kanonicznym iloczynie tensorowym algebr Clifforda, 399
  - o lokalnej odwracalności odwzorowań, 204
  - o naturalności kompleksyfikacji algebr Clifforda, 413
  - o odwzorowaniu uwikłanym, 206
  - o ograniczonym rozszerzeniu liniowym, 190
  - o przedłużaniu rozwiązania zagadnienia Cauchy’ego, 215
  - o przemienności (ko)produktu (ko)włóknistego, 137
  - o przemienności iloczynu tensorowego, 100
  - o różniczkowalności rozwiązań zagadnienia Cauchy’ego, 222
  - o redukcji zagadnienia Cauchy’ego do postaci autonomicznej, 220
  - o rekonstrukcji
    - wiązki głównej z grupoidem strukturalnym, 516
    - wiązki głównej z powiązaniem, 578
    - wiązki głównej ze strukturalną wiązką grupoidalną, 533
    - wiązki włóknistej, 453
    - wiązki wektorowej z powiązaniem, 561
  - o różności ilorazowej, 307
  - o rzędzie odwzorowania, 208
  - ekwiwariantnego, 304
  - o uniwersalności rzutu kanonicznego (dla grup), 22
  - o wartości średniej, 203
  - o wartości regularnej, 268
  - o wymiarze przestrzeni wektorowej, 52
  - Picarda–Lindelöfa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy’ego, 212
  - podstawowe rachunku różniczkowego i całkowego, 201
  - rozwinięcie Taylora dla funkcji wielu zmiennych, 202
  - Stokes’a, 618
  - Sylwestera prawo bezwładności, 87
- układ współrzędnych (lokalny), 228
- unipotent
- algebry unitalnej, 331
  - centralny, 331
- włókno
- nad punktem bazy wiązki, 450

- submersji, 268
- typowe
  - wiązki włóknistej, 449
- włókno nakrycia, 172
- własność
  - inicjalna, 69
  - końcowa, 68
  - początkowa, 69
  - terminalna, 68
- włożenie, 265
  - kanoniczne
    - podgrupy, 21
    - składowej koproduktu rodziny, 70
  - standardowe
    - podgrupy, 21
- warstwa, 18
- wartość
  - krytyczna odwzorowania, 268
  - regularna odwzorowania, 268
- warunek
  - 0-kocyklu, 616
  - 1-kocyklu, 453, 515, 532, 612
  - 2-kocyklu, 601
  - Diraca kwantowania ładunku, 639
  - kowariancji (dla pochodnej kowariantnej), 544
  - Leibniza, 242
  - Lipschitza, 189
  - samodwoistości (samodualności), 410
  - sklejenia na defekcie, 650
  - skośnej samodwoistości (antysamodualności), 410
- warunek samodwoistości (samodualności), 418
- warunek skośnej samodwoistości (antysamodualności), 418
- wektor
  - ( $\mathbb{Q}$ -)ortogonalny, 57
  - ( $\mathbb{Q}$ -)prostopadły, 57
  - anizotropowy, 58
  - horyzontalny, 539
  - izotropowy, 58
  - nieizotropowy, 58
  - pionowy, 469
  - poziomy, 539
  - styczny
    - do ścieżki różniczkowalnej, 254
    - do rozmaitości, 232
    - horyzontalny, 539
    - pionowy, 469
    - poziomy, 539
    - wertykalny, 469
  - wertykalny, 469
  - zerowy, 58
- wiązka
  - Hom, 593
  - $p$ -form różniczkowych (jako rozmaitość), 240
  - $p$ -forma różniczkowa, 241
  - mapa naturalna, 241
  - rzut kanoniczny (na bazę wiązki), 240
  - włókno, 240
- baz nad rozmaitością, 472
- baz wiązki wektorowej, 469
  - ortonormalnych, 607
  - ortonormalnych z orientacją, 610
  - ortonormalnych z orientacją czasową, 610
  - ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną, 611
  - ortonormalnych z orientacją przestrzenną, 610
- cechowania, 651
- dołączona, 488
- dualna wiązki wektorowej, 593
- dwoista wiązki wektorowej, 593
- główna (z grupą strukturalną), 471
  - $\widehat{G}$ -struktura, 598
  - cechująca działanie grupy symetrii na wiązce pól, 654
  - forma powiązania głównego, 569
  - grupa strukturalna, 471
  - morfizm, 471
  - odwzorowanie ilorazowe, 472
  - podwiązka, 471
  - potencjał lokalny powiązania głównego, 576
  - potencjał powiązania głównego, 569
  - powiązanie Ehresmanna zgodne z działaniem grupy strukturalnej, 567
  - powiązanie główne, 567
  - powiązanie włókien zgodne z działaniem grupy strukturalnej, 567
  - prolongacja, 598
  - redukcja, 595
  - rozwłóknienie Hopfa, 472
  - wiązka dołączona, 488
  - zredukowana, 595
- główna (z grupoidem strukturalnym), 509
  - baza, 509
  - cofnięta, 511
  - dane trywializacji lokalnej, 515
  - działanie, 509
  - jednostkowa, 511
  - moment, 509
  - moment lokalny, 515
  - odwzorowanie ilorazowe, 510
  - przestrzeń totalna, 509
  - rzut na bazę, 509
  - strzałka przejścia, 515
  - trywializacja lokalna, 515
  - trywialna, 512
- główna (ze strukturalną wiązką grupoidalną), 529
  - baza, 529



- cięcie przejścia, 532
- cofnięta, 530
- dane trywializacji lokalnej, 532
- lokalne cięcie momentu, 532
- morfizm działania, 529
- morfizm ilorazowy, 529
- morfizm momentu, 529
- przestrzeń totalna, 529
- rzut na bazę, 529
- trywializacja lokalna, 532
- trywialna, 530
- główne
  - powiązanie Ehresmanna główne, 567
- grupoidalna, 521
  - baza, 521
  - moduł lewostronny, 525
  - moduł prawostronny, 526
  - morfizm identyczności, 521
  - morfizm inwersji, 521
  - morfizm końca, 521
  - morfizm początku, 521
  - morfizm złożenia, 521
  - wiązka obiektów, 521
  - wiązka strzałek, 521
- homomorfizmów wiązek wektorowych, 593
- horyzontalna, 539
- jednostkowa grupoidu, 511
- kostyczna (jako rozmaitość), 239
  - kowektor, 240
  - mapa naturalna, 240
  - rzut kanoniczny (na bazę wiązki), 239
  - włókno, 240
- kowariantna konfiguracyjna typu  $F$ , 628
- liniowa, 463
- obiektów
  - wiązki grupoidalnej, 521
- pól typu  $F$ , 628
  - z cechowaniem typu  $P_G$ , 651
- pierwszych miotów różniczkowych cięć
  - wiązki włóknistej, 458
  - mapa indukowana, 459
  - mapa naturalna, 459
- pionowa, 469
- pozioma, 539
- produktowa stowarzyszona z główną, 502
  - pochodna  $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -kowariantna, 587
  - pochodna Crittendena, 587
- reperów nad rozmaitością, 472
- reperów wiązki wektorowej, 469
  - ortonormalnych, 607
  - ortonormalnych z orientacją, 610
  - ortonormalnych z orientacją czasową, 610
  - ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną, 611
- stowarzyszona z główną, 482
  - dołączona, 488
  - izomorfizm modelujący włókno, 483
  - izomorfizm transportu włókna, 483
  - niezmiennik, 483
  - pochodna  $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -kowariantna, 586
  - pochodna Crittendena, 586
- strzałek
  - wiązki grupoidalnej, 521
- styczna (jako rozmaitość), 231
  - cięcie zerowe, 232
  - mapa naturalna, 232
  - rzut kanoniczny (na bazę wiązki), 232
  - włókno, 232
  - wektor styczny (do rozmaitości), 232
- styczna (jako wiązka włóknista), 460
  - mapa naturalna, 461
  - podwiązka horyzontalna, 539
  - podwiązka pionowa, 469
  - podwiązka pozioma, 539
  - podwiązka wertykalna, 469
  - wiązka baz nad rozmaitością, 472
  - wiązka horyzontalna, 539
  - wiązka pionowa, 469
  - wiązka pozioma, 539
  - wiązka reperów nad rozmaitością, 472
  - wiązka wertykalna, 469
- styczna grupy Liego (jako grupa Liego), 279
- tensorów, 591
- włóknista, 449
  - baz nad rozmaitością, 472
  - baz ortonormalnych wiązki wektorowej, 607
  - baz ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją, 610
  - baz ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją czasową, 610
  - baz ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją czasową i przestrzenną, 611
  - baz ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją przestrzenną, 610
  - baz wiązki wektorowej, 469
  - baza, 449
  - cięcie globalne, 453
  - cięcie lokalne, 453
  - cofnięta, 451
  - forma powiązania, 540
  - główna, 471
  - grupa strukturalna, 449
  - liniowa, 463
  - mapa dostosowana, 458
  - morfizm, 450
  - odwzorowania przejścia, 449
  - pierwszych miotów różniczkowych cięć
    - wiązki włóknistej, 458
  - podwiązka, 450

- podwiązka horyzontalna, 539
- podwiązka pionowa, 469
- podwiązka pozioma, 539
- podwiązka wertykalna, 469
- pokrycie trywializujące, 449
- powiązanie Ehresmanna, 539
- powiązanie włókien, 537
- produkt włóknisty, 452
- produktowa stowarzyszona z główną, 502
- przeniesienie równoległa, 536
- przestrzeń totalna, 449
- równoważność, 450
- reperów nad rozmainością, 472
- reperów ortonormalnych wiązki wektorowej, 607
- reperów ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją, 610
- reperów ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją czasową, 610
- reperów ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją czasową i przestrzenną, 611
- reperów ortonormalnych wiązki wektorowej z orientacją przestrzenną, 610
- reperów wiązki wektorowej, 469
- rzut na bazę, 449
- stowarzyszona z główną, 482
- styczna nad rozmainością, 460
- trywialna, 451
- włókno nad punktem, 450
- włókno typowe, 449
- wektorowa, 462
- wiązka horyzontalna, 539
- wiązka pionowa, 469
- wiązka pozioma, 539
- wiązka wertykalna, 469
- wektorowa, 462
  - cięcie zerowe, 463
  - forma powiązania  $K$ -liniowego, 549
  - iloczyn tensorowy, 591
  - klasa orientacji, 617
  - klasa Stiefela–Whitneya (pierwsza), 613
  - liniowa, 463
  - morfizm, 463
  - orientacja, 615
  - orientacja czasowa, 615
  - orientacja przestrzenna, 615
  - orientowalna, 610
  - orientowalna czasowo, 610
  - orientowalna czasowo i przestrzenie, 611
  - orientowalna przestrzennie, 610
  - pochodna Koszula, 552
  - podwiązka, 463
  - podwiązka czasowa, 614
  - podwiązka przestrzenna, 614
  - powiązanie Ehresmanna  $K$ -liniowe, 548
  - powiązanie Ehresmanna zgodne ze strukturą  $K$ -liniową, 548
  - powiązanie Koszula, 552
  - powiązanie włókien  $K$ -liniowe, 547
  - powiązanie włókien zgodne ze strukturą  $K$ -liniową, 547
  - rzeczywista, 463
  - struktura metryczna, 606
  - struktura metryczna riemannowska, 606
  - suma Whitneya, 589
  - symbole Christoffela powiązania Koszula, 559
  - tensorów, 591
  - wiązka Hom, 593
  - wiązka baz, 469
  - wiązka baz ortonormalnych, 607
  - wiązka baz ortonormalnych z orientacją, 610
  - wiązka baz ortonormalnych z orientacją czasową, 610
  - wiązka baz ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną, 611
  - wiązka baz ortonormalnych z orientacją przestrzenną, 610
  - wiązka dualna, 593
  - wiązka dwoista, 593
  - wiązka homomorfizmów, 593
  - wiązka reperów, 469
  - wiązka reperów ortonormalnych, 607
  - wiązka reperów ortonormalnych z orientacją, 610
  - wiązka reperów ortonormalnych z orientacją czasową, 610
  - wiązka reperów ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną, 611
  - wiązka reperów ortonormalnych z orientacją przestrzenną, 610
  - wiązka wyznacznikowa, 594
  - zespolona, 463
  - wertykalna, 469
- wielomian
  - pierścień wielomianów, 26
- współrzędne
  - na module nad pierścieniem, 48
- wstęga Möbiusa, 451
- wykres odwzorowania, 270
- wymiar
  - przestrzeni wektorowej ( $K$ -liniowy), 53
  - reprezentacji (algebry), 347
  - rozmainości różniczkowalnej (klasy  $C^k$ ), 227
- wyznacznik
  - endomorfizmu, 49

- macierzowy, 49
- na module nad pierścieniem, 49
  - cofnięcie wzdłuż endomorfizmu, 50
  - unormowany, 88
- wiązka wyznacnikowa wiązki wektorowej, 594
- wzór
  - Cauchy'ego, 50
- zagadnienie początkowe, 212
  - autonomiczne, 213, 220
  - dziedzina całkowalności, 217
  - funkcjonał Picarda, 213
  - nieautonomiczne, 220
  - parametryczne, 220
  - potok, 217
- zanurzenie, 265
  - topologiczne, 164
- zbiór
  - $C^k$ -ściągalny, 230
  - 1-spójny, 172
  - domknięcie, 163
  - domknięty, 163
  - generujący, 47
  - jednospójny, 172
  - otwarty, 163
  - prezwarty, 167
  - spójny, 171
  - względnie domknięty, 164
  - względnie otwarty, 164
  - z działaniem grupoidu
    - lewostronny, 317
    - moment, 317
    - prawostronny, 318
  - z działaniem grupy
    - lewostronnym, 33
    - prawostronnym, 34
  - zwarty, 167