I seria zadań z Geometrii różniczkowej I

17. listopada 2014 r.

Zadanie 1. Niechaj $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ będzie funkcją spełniającą równanie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f(x,y,z) = 0\,.$$

Jakie równanie spełnia wówczas funkcja $\widetilde{f} \in C^2(\Xi)$ na $\Xi =]-\pi,\pi] \times [0,\infty[\times [0,2\pi[\ni (u,v,\varphi)$ związana z f poprzez transformację współrzędniową

$$x = \frac{\sinh v \cos\varphi}{\cosh v - \cos u}\,, \qquad y = \frac{\sinh v \sin\varphi}{\cosh v - \cos u}\,, \qquad z = \frac{\sin u}{\cosh v - \cos u}$$

wedle formuły

$$f(x,y,z) = \widetilde{f}\big(u(x,y,z), v(x,y,z), \varphi(x,y,z)\big)\,.$$

(Powyższe współrzędne noszą miano *toroidalnych*.)

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $\mathscr{R}(x,y;z) = 0$, w którym z jest szukaną funkcją x, y, w obszarze Ω wprowadzając w Ω nowe współrzędne u, v i w, z których ostatnia jest traktowana jako poszukiwana funkcja u, v.

(i) $\mathscr{R}(x,y,;z) = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - xz^2\,;\quad \Omega = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x,y > 0\ \}\,;$
$(u,v,w) = (x, \frac{y}{x}, \frac{z}{1+xz})$;

(ii) $\mathscr{R}(x,y,;z) = y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} - (y-x)z\,;\quad \Omega = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x,y,z > 0\ \}\,;$
$(u,v,w) = (x^2+y^2, \log\frac{y}{x}, x+y-\log z)$.

Zadanie 3. Udowodnij, że zbiór par $\mathscr{A} := \{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2),(U_3,\varphi_3),(U_4,\varphi_4)\}$ określonych formułami:

$$U_1 = \{\ (x,y) \in \mathbb{S}^1 \quad | \quad x > 0\ \}\,, \qquad \varphi_1 \ :\ U_1 \to \mathbb{R}\ :\ (x,y) \mapsto y\,,$$

$$U_1 = \{\ (x,y) \in \mathbb{S}^1 \quad | \quad y > 0\ \}\,, \qquad \varphi_1 \ :\ U_1 \to \mathbb{R}\ :\ (x,y) \mapsto x\,,$$

$$U_1 = \{\ (x,y) \in \mathbb{S}^1 \quad | \quad x < 0\ \}\,, \qquad \varphi_1 \ :\ U_1 \to \mathbb{R}\ :\ (x,y) \mapsto y\,,$$

$$U_1 = \{\ (x,y) \in \mathbb{S}^1 \quad | \quad y < 0\ \}\,, \qquad \varphi_1 \ :\ U_1 \to \mathbb{R}\ :\ (x,y) \mapsto x$$

jest atlasem na okręgu jednostkowym $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. Sprawdź, czy jest on równoważny z atlasem $\mathscr{A}' = \{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ danym przez

$$U = \{\ (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad | \quad \alpha \in]0,2\pi[\ \}\,, \qquad \varphi\ :\ U \to \mathbb{R}\ :\ (\cos\alpha,\sin\alpha) \mapsto \alpha \in]0,2\pi[\,,$$

$$U = \{\ (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad | \quad \alpha \in]-\pi,\pi[\ \}\,, \qquad \varphi\ :\ U \to \mathbb{R}\ :\ (\cos\alpha,\sin\alpha) \mapsto \alpha \in]-\pi,\pi[\,.$$

Zadanie 4. Zdefiniujmy

$$U_N = \{\ (x,y) \in \mathbb{S}^1 \quad | \quad y \neq 1\ \}\,, \qquad\qquad U_S = \{\ (x,y) \in \mathbb{S}^1 \quad | \quad y \neq -1\ \}$$

i niech φ_N i φ_S będą rzutami stereograficznymi z punktów – odpowiednio – $N = (0,1)$ i $S = (0,-1)$ na prostą opisaną równaniem $y = 0$. Udowodnij, że $\mathscr{A} = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ jest atlasem na $\mathbb{S}^1$. Porównaj zadawaną przezeń strukturę różniczkową z tą z zadania poprzedniego.

Przywoławszy analogiczną konstrukcję dla $\mathbb{S}^2$ przedstawioną na ćwiczeniach, uogólnij ten schemat opisu na sferę jednostkową $\mathbb{S}^n$ dowolnego wymiaru $n > 0$.

Zadanie 5. Rozważ podzbiór

$$N = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 - 1 = 0\ \} \cup \{\ (0,y) \quad | \quad y \in]1,2[\ \}\,.$$

Udowodnij, że odwzorowania

$$\varphi \quad : \quad N \to \mathbb{R} \ : \ \begin{array}{l} (\sin(2\pi s), \cos(2\pi s)) \mapsto s \in [0,1[\\ (0,s) \mapsto 1 - s \in]-1,0[\end{array} \ ;$$

$$\psi \quad : \quad N \to \mathbb{R} \ : \ \begin{array}{l} (\sin(2\pi s), \cos(2\pi s)) \mapsto 1 - s \in [0,1[\\ (0,s) \mapsto 1 - s \in]-1,0[\end{array}$$

zadają dwie *nierównoważne* struktury różniczkowe klasy C^∞ na N.

Zadanie 6. Rozważ podzbiory

$$U = \{\ (s,0) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad s \in \mathbb{R}\ \}\,, \qquad V = \{\ (s,0) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad s < 0\ \} \cup \{\ (s,1) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad s > 0\ \}$$

wraz z odwzorowaniami

$$\varphi \ : \ U \to \mathbb{R} \ : \ (s,0) \mapsto s\,, \qquad \psi \ : \ V \to \mathbb{R} \ : \ (s,n) \mapsto s\,,\ n \in \{0,1\}$$

oraz

$$\chi \ : \ V \to \mathbb{R} \ : \ (s,n) \mapsto s^3\,,\ n \in \{0,1\}\,.$$

Wykaż, że $\mathscr{A} = \{(U,\varphi), (V,\psi)\}$ zadaje na $M = U \cup V$ strukturę rozmaitości różniczkowej klasy C^∞. Czy para (V,χ) określa mapę zgodną z tą strukturą?

Zadanie 7. Wyznacz odwzorowanie styczne $f_* \ : \ \mathsf{T}_p\mathbb{R}^2 \to \mathsf{T}_{f(p)}\mathbb{R}$ (pchnięcie, tj. „pushforward") do odwzorowania

$$f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ : \ (x,y) \mapsto x^3 + xy + y^3 + 1$$

w dowolnym punkcie $p \in \mathbb{R}^2$ (wypisz jego macierz względem kartezjańskiej bazy współrzędniowej w dziedzinie i przeciwdziedzinie). W których z punktów: $(0,0), (\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3})$ jest ono injektywne wzgl. surjektywne?

Zadanie 8. Zdefiniujmy odwzorowania

$$f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ : \ (x,y) \mapsto (x^2 - 2y, 4x^3y^2)\,,$$

$$g \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \mapsto (x^2y + y^2, x - 2y^3, y\mathrm{e}^x)\,.$$

Wyznacz

(i) $f_*(1,2)$ oraz $g_*(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$;

(ii) $g_*(4\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})(0,1)$.

Dla jakich wartości parametrów $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ wektor $(\lambda\frac{\partial}{\partial x}+\mu\frac{\partial}{\partial y}+\nu\frac{\partial}{\partial z})(g(0,0))$ należy do $\operatorname{im} g_*$?

Zadanie 9. Zapiszmy element $P=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ w postaci macierzy $A(P)=\begin{pmatrix} x & z \\ y & t\end{pmatrix}$ i zdefiniujmy (dla dowolnego $\theta\in[0,2\pi[$) $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Wyznacz odwzorowanie styczne $T_{\theta *}$ do

$$T_\theta\ :\ \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4\ :\ P\mapsto A^{-1}\left(R_\theta\cdot A(P)\right).$$

W szczególności oblicz $T_{\theta *}(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}-\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}+\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial z}-\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial t})$.

Zadanie 10. Rozpatrzmy odwzorowanie $f:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ indukowane przez automorfizm $\mathbb{R}^3$ zadawany przez macierz

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

Wyznacz pchnięcia $f_*(\frac{\partial}{\partial\theta})(p)$ i $f_*(\frac{\partial}{\partial\varphi})(p)$ wektorów stycznych do sfery $\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}$ (stycznych do linii współrzędnych kulistych (θ,φ)) w dowolnym punkcie $p\in\mathbb{S}^2$ leżącym w zbiorze

$$U=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{S}^2\quad|\quad x+z\neq 0\ \}$$

i o tej własności, że także $f(p)\in U$.

Zadanie 11. Sparametryzuj krzywą powstałą w wyniku przecięcia stożka

$$S=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\quad|\quad z^2=x^2+y^2\ \}$$

płaszczyzną

$$P=\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\quad|\quad z=1\ \}$$

i znajdź jej wektory normalne.

Zadanie 12. Zbadaj, czy odwzorowanie

$$B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2:t\mapsto\left(\tfrac{t(1+t^2)}{1+t^4},\tfrac{t(1-t^2)}{1+t^4}\right)$$

zadaje opis parametryczny krzywej zanurzonej.

Zadanie 13. Określmy odwzorowania

$$F_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2-1\quad\text{i}\quad F_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:(x,y,z)\mapsto\frac{(x-x_0)^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2-1\,.$$

Sprawdź, dla jakich wartości parametru $x_0 \in \mathbb{R}$ zbiór $F_1^{-1}(\{0\}) \cap F_2^{-1}(\{0\})$ jest krzywą regularną.

Zadanie 14. Ustal, czy poziomica punktu 0 odwzorowania

$$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto 8(x^2+y^2+z^2) - 24xy + 1$$

jest powierzchnią regularną, a następnie czy poziomica punktu $(0,0)$ odwzorowania

$$K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto \big(8(x^2+y^2+z^2) - 24xy + 1, 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 1\big)$$

jest krzywą regularną. Wyznacz wektory styczne do $P^{-1}(\{0\})$ oraz $K^{-1}(\{(0,0)\})$ w punkcie $\frac{1}{4}(\sqrt{6}, \sqrt{6}, 2)$.

Zadanie 15. Wskaż punkty w $\mathbb{R}^3$, w których powierzchnia P_i, $i \in \{1,2\}$ jest zwyrodniała (tj. nie spełnia warunku regularności):

(i) $P_1 = F_1(\mathbb{R}^2)$, przy czym $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (s,t) \mapsto (t\cos s, t\sin s, 2\sin s)$ (przykład *konoidy*)

(ii) $P_2 = F_2^{-1}(\{0\})$, przy czym $F_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 - y^2 z$ (*parasol Whitney'a*).

Wyznacz przestrzeń styczną oraz płaszczyznę styczną do P_1 w punkcie $F_1(1,\pi)$ i do P_2 w punkcie $(1,1,1)$.

Zadanie 16. Znajdź punkty $p \in \mathbb{R}^3$, w których pole wektorowe wyznaczone przez operator różniczkowy

$$\mathcal{V}(x,y,z) = -2\tfrac{\partial}{\partial x} + 5\tfrac{\partial}{\partial y} - \tfrac{\partial}{\partial z}$$

spełnia warunek $\mathcal{V}\restriction_p \in \mathsf{T}_p F^{-1}(\{(0,0)\})$ zapisany dla odwzorowania

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (z^2 - x^2 - y^2 - 7, 2x + y + z).$$

Zadanie 17. Jaką powierzchnię w $\mathbb{R}^3$ opisuje parametryzacja

$$x = \tfrac{u^2-v^2}{1+u^2+v^2}, \qquad y = \tfrac{2uv}{1+u^2+v^2}, \qquad z = \tfrac{1}{1+u^2+v^2}\ ?$$

Sprawdź jej regularność.

Zadanie 18. Zdefiniujmy zbiór

$$H := \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x \sin z - y \cos z = 0\ \}$$

(jest to tzw. *helikoida*). Udowodnij, że H jest regularną powierzchnią w $\mathbb{R}^3$ homeomorficzną z $\mathbb{R}^2$. Wyznacz przecięcie H z płaszczyzną $\Sigma(p_0)$ styczną do H w punkcie $p_0 \in H$. Dowiedź, że $H \cap \Sigma(p_0)$ zawiera dwie krzywe przecinające się prostopadle w p_0.

Zadanie 19. Sprawdź, czy odwzorowanie gładkie

$$\Psi\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\ :\ t \mapsto (t^2, t^3)$$

jest **immersją** (gładkim odwzorowaniem o injektywnym odwzorowaniu stycznym)?

Zadanie 20. Zdefiniujmy zbiór

$$M = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 < 1\ \}$$

oraz odwzorowanie gładkie

$$f\ :\ M \to \mathbb{R}^2\ :\ (x,y) \mapsto \left(\tfrac{y}{1-x^2-y^2}, \mathrm{e}^{x^2}\right).$$

Wskaż zbiór S tych punktów $p \in M$, w których f_* jest injekcją. Udowodnij, że $f(S)$ jest podzbiorem otwartym w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 21. Rozważmy odwzorowanie

$$f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\ :\ (x,y) \mapsto (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)\,.$$

Ustal, czy odwzorowanie to zadaje układ współrzędnych w otoczeniu dowolnego punktu $\mathbb{R}^2$. Czy odwzorowanie f jest dyfeomorfizmem? Dla dowolnego punktu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ dziedziny f wskaż maksymalne jego otoczenie, na którym f określa lokalny układ współ-rzędnych.

Zadanie 22. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ :\ (x,y,z) \mapsto (\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{2z}, \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2z}, x - y)\,.$$

Wyznacz obraz $f(\mathbb{R}^3)$ tego odwzorowania i udowodnij, że f jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^3$ na tenże obraz.

Zadanie 23. Rozważmy krzywe sparametryzowane:

(i) $\gamma_1\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\ :\ t \mapsto (t, |t|)$;

(ii) $\gamma_2\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\ :\ t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$;

(iii) $\gamma_3\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\ :\ t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$;

(iv) $\gamma_4\ :\ ]1,\infty[\to \mathbb{R}^2\ :\ t \mapsto (\frac{1}{t}\cos(2\pi t), \frac{1}{t}\sin(2\pi t))$;

(v) $\gamma_5\ :\ ]1,\infty[\to \mathbb{R}^2\ :\ t \mapsto (\frac{1+t}{2t}\cos(2\pi t), \frac{1+t}{2t}\sin(2\pi t))$;

(vi) $\gamma_6\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\ :\ t \mapsto (2\cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin 2(t - \frac{\pi}{2}))$;

(vii) $\gamma_7\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\ :\ t \mapsto (2\cos(f(t) - \frac{\pi}{2}), \sin 2(f(t) - \frac{\pi}{2}))$, gdzie f jest monotonicznie rosnącą funkcją gładką o własnościach $f(0) = \pi$, $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} f(t) = 2\pi$ (np. $f(t) = \pi + 2\arctan t$);

(viii) $\gamma_8\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\ :\ t \mapsto \begin{cases} (\frac{1}{t}, \sin(\pi t)) & \text{dla } t \geq 1 \\ (0, t+2) & \text{dla } t \leq -1 \\ d(t) & \text{dla } t \in [-1,1] \end{cases}$, gdzie d jest dowolną krzywą gładką zamykającą $\gamma_8(]-\infty,-1] \cup [1,\infty[)$ „od góry”.

Czy $\gamma_i,\ i \in \{1, 2, 6\}$ jest immersją? Czy $\gamma_i,\ i \in \{2, 6, 7, 8\}$ jest injektywną immersją? Czy $\gamma_i,\ i \in \{3, 4, 5, 7, 8\}$ jest **zanurzeniem** (wzgl. (**gładkim zanurzeniem**)) (homeomorfizmem (wzgl. dyfeomorfizmem) na obraz)?

Zadanie 24. Udowodnij, że każde z poniższych odwzorowań:

$$f_\pm \ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ :\ (x, y, z) \mapsto x^2 \pm y^2 - z^2 - 1$$

zadaje strukturę rozmaitości różniczkowej na swej poziomicy $f_\pm^{-1}(\{0\})$. W każdym z przypadków wskaż skończony atlas klasy C^∞. Udowodnij, że naturalna injekcja $\jmath : f_-^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{R}^3$ jest rzędu 2.

Zadanie 25. Wykaż, że podzbiór

$$H = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz = 1\ \}$$

jest nośnikiem naturalnej struktury dwuwymiarowej rozmaitości różniczkowej klasy C^∞.

Analogicznie pokaż, że podzbiór

$$M = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x^2 - y^2 + 2xz - 2yz = 1 \quad \wedge \quad 2x - y + z = 0\ \}$$

jest nośnikiem naturalnej struktury jednowymiarowej rozmaitości różniczkowej klasy C^∞.

Zadanie 26. Rozważmy odwzorowanie

$$f\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2\ :\ (x, y, z, t) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2y - 2z + 5)\,.$$

Wskaż punkty dziedziny, w których odwzorowanie to nie jest **submersją** (gładkim odwzorowaniem o surjektywnym odwzorowaniu stycznym), oraz jego obraz. Wyznacz bazę przestrzeni $\ker f_*(0, 1, 2, 0)$, a ponadto obraz wektora $(1, 0, 2, 1) \in \mathsf{T}_{(1,2,0,1)}\mathbb{R}^4$ względem f_* oraz kowektora $(\mathsf{d}x + 2\mathsf{d}y)(-1, 5) \in \mathsf{T}^*_{(-1,5)}\mathbb{R}^2$ względem f^*, wybrawszy punkt $(0, 0, 0, 0)$ w przeciwobrazie $(-1, 5)$.

Zadanie 27. Niechaj M i N będą gładkimi rozmaitościami różniczkowalnymi (skończonego wymiaru) i niech $(p, q) \in M \times N$. Udowodnij istnienie naturalnego izomorfizmu przestrzeni wektorowych

$$\mathsf{T}_{(p,q)}(M \times N) \cong \mathsf{T}_pM \oplus \mathsf{T}_qN\,.$$

Zadanie 28. Dla pól wektorowych $X, Y \in \Gamma(\mathsf{T}\mathbb{R}^3)$ o wartościach

$$X(x, y, z) = xy\,\frac{\partial}{\partial x} + x^2\,\frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad Y(x, y, z) = y\,\frac{\partial}{\partial y}$$

oraz funkcji $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2y$ oblicz

(i) $[X, Y](1, 1, 0)$; (ii) $(f \triangleright X)(1, 1, 0)$; (iii) $X(f)(1, 1, 0)$; (iv) $f_*X(1, 1, 0)$.

Zadanie 29. Niechaj M, N będą gładkimi rozmaitościami różniczkowalnymi, $f : M \to N$ zaś – dowolnym dyfeomorfizmem. Dla dowolnych pól wektorowych $X, Y \in \Gamma(M)$ udowodnij tożsamość

$$f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]\,.$$

Zadanie 30. Rozłóż pole wektorowe na $\mathbb{R}^3$ o wartościach

$$X(x,y,z) = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z}$$

w bazie współrzędniowej stowarzyszonej z walcowym układem współrzędnych.

Zadanie 31. Sprawdź, czy pole wektorowe na $\mathbb{R}^3$ o wartościach

$$X(x,y,z) = (x^2-1)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z}$$

jest styczne do poziomicy $W^{-1}(\{0\})$ odwzorowania

$$W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2-1\,.$$

Zadanie 32. Wyznacz płaszczyznę styczną do *hiperboloidy jednopowłokowej* zadanej jako poziomica $H^{-1}(\{0\})$ odwzorowania

$$H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2-z^2-1$$

w dowolnym jej punkcie.

Zadanie 33. Wyznacz przestrzeń styczną do poziomicy $f^{-1}(\{0\})$ odwzorowania odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^3-y^3+xyz-xy$$

w punkcie $(1,1,1)$.

Zadanie 34. Wskaż nigdzie nie znikające pole wektorowe na nieparzystowymiarowej sferze jednostkowej $\mathbb{S}^{2n+1}$. Czy można to powtórzyć w przypadku parzystowymiarowym?

Zadanie 35. Znajdź ogólne rozwiązanie $X \in \Gamma(\mathsf{T}\mathbb{R}^2)$ każdego z poniższych (układów) równań:

$$\text{(i)}\ \left[\tfrac{\partial}{\partial x}, X\right] = X = \left[\tfrac{\partial}{\partial y}, X\right]; \qquad \text{(ii)}\ \left[\tfrac{\partial}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial y}, X\right] = X\,.$$

Zadanie 36. Niechaj M będzie gładką rozmaitością różniczkowalną i niech $X, Y \in \Gamma(\mathsf{T}M)$. Ustal związek między $[f \triangleright X, g \triangleright Y]$ i $(f \cdot g) \triangleright [X,Y]$ dla dowolnych $f, g \in C^\infty(M)$.

Zadanie 37. Zbadaj zupełność każdego z poniższych pól wektorowych na (odnośnej) przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wyznaczywszy uprzednio krzywe całkowe.

(i) $X(x,y,z) = y\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y} + 2\,\frac{\partial}{\partial z}\,,\ n = 3;$

(ii) $X(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{e}^x\,\frac{\partial}{\partial z}\,,\ n = 3;$

(iii) $X(x,y,z) = \mathrm{e}^{-x}\,\frac{\partial}{\partial x}\,,\ n = 1;$

(iv) $X(x,y,z) = y\,\frac{\partial}{\partial x}\,,\ Y(x,y,z) = \frac{x^2}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}\,,\ Z = [X,Y]\,,\ n = 3.$

Zadanie 38. Wyznacz **potok** (jednoparametrową grupę lokalnych dyfeomorfizmów) pola wektorowego na $\mathbb{R}^2$ przyjmującego wartości

$$X(x,y,z) = y\,\tfrac{\partial}{\partial x} - y^2\,\tfrac{\partial}{\partial y}\,.$$

Zadanie 39. Niechaj M będzie gładką rozmaitością różniczkowalną. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\mathcal{G}.\ :\ \mathbb{R}\times \mathsf{T}M \to \mathsf{T}M\ :\ (t,X)\mapsto \mathrm{e}^t \triangleright X\,.$$

Wykaż, że $\mathcal{G}.$ określa jednoparametrową grupę przekształceń $\mathsf{T}M$. Wyznacz pole wektorowe na $\mathsf{T}M$ stowarzyszone z tą grupą. Udowodnij w bezpośrednim rachunku, że wyznaczone pole jest zachowywane przez tę grupę.

Zadanie 40. Określmy pola wektorowe na $\mathbb{R}^n$ następującymi wzorami (w których $i,j,k,l\in\overline{1,n}$)

$$\Omega_{ij}(x^l) = \delta_{ik}\,x^k\,\tfrac{\partial}{\partial x^j} - \delta_{jk}\,x^k\,\tfrac{\partial}{\partial x^i}\,,\qquad P_i(x^l) = \tfrac{\partial}{\partial x^i}\,,\qquad D(x^l) = x^i\,\tfrac{\partial}{\partial x^i}\,,$$

$$K_i(x^l) = 2\delta_{ij}\,x^j\,x^k\,\tfrac{\partial}{\partial x^k} - \delta_{jk}\,x^j\,x^k\,\tfrac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

Wyznacz pełną algebrę Liego tych pól (jest to tzw. algebra przekształceń konforemnych przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$) oraz stowarzyszone z nimi jednoparametrowe grupy przekształceń $\mathbb{R}^n$.

Powodzenia!