II seria zadań z Geometrii różniczkowej I

26. grudnia 2014 r.

(wraz z komentarzem z 5. stycznia 2015 r.)

Uwaga: W niniejszym tekście stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina!

Komentarz: Poznaliśmy kilka sposobów[1] wyznaczania formy pierwotnej dla danej formy zamkniętej $\underset{(p)}{\omega}$, $p \in \mathbb{N}$ (pamiętajmy: zamkniętość jest warunkiem koniecznym, a w przypadku p-formy na rozmaitości M ściągalnej do punktu – także warunkiem wystarczającym istnienia formy pierwotnej), a mianowicie:

(1.i) $p = 1$: rozwiązujemy układ równań różniczkowych cząstkowych otrzymanych poprzez przyrównanie funkcjonalnych współczynników rozkładu 1-formy danej $\underset{(1)}{\omega}$ w bazie współrzędniowej przestrzeni kostycznej do pochodnych cząstkowych funkcji pierwotnej w odpowiednich kierunkach współrzędniowych,

$$\left.\begin{array}{r}\underset{(1)}{\omega}(x^1,x^2,\ldots,x^n) = \omega_i(x^1,x^2,\ldots,x^n)\,\mathsf{d}x^i \\ \underset{(1)}{\omega} = \mathsf{d}f\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1,x^2,\ldots,x^n) = \omega_1(x^1,x^2,\ldots,x^n) \\ \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1,x^2,\ldots,x^n) = \omega_2(x^1,x^2,\ldots,x^n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1,x^2,\ldots,x^n) = \omega_n(x^1,x^2,\ldots,x^n)\end{array}\right. .$$

Przykład: Znajdziemy, o ile istnieje, funkcję pierwotną 1-formy na $\mathbb{R}^3$ danej wzorem

$$\underset{(1)}{\omega}(x,y,z) = (x^2-2yz)\,\mathsf{d}x + (y^2-2xz)\,\mathsf{d}y + (z^2-2xy)\,\mathsf{d}z\,.$$

Łatwo sprawdzamy, że jest ona zamknięta, więc też – wobec ściągalności $\mathbb{R}^3$ – także dokładna. Niechaj f będzie funkcją pierwotną $\underset{(1)}{\omega}$, a wtedy

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = x^2-2yz \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = y^2-2xz \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = z^2-2xy\,.\end{array}\right. .$$

Rozpoczynając rozwiązywanie powyższego układu od pierwszego równania, znajdujemy

$$f(x,y,z) = \tfrac{x^3}{3} - 2xyz + g(y,z)\,,$$

co po podstawieniu do drugiego równania daje

$$\tfrac{\partial g}{\partial y}(y,z) = y^2\,,$$

[1] Nie istnieje kanoniczny algorytm odcałkowywania formy dokładnej, wprawdzie bowiem formuła na homotopiędaje nam konkretne wyrażenie na formę pierwotną, jednakowoż współczynniki rozkładu tejże w bazie współrzędniowej przestrzeni kostycznej są dane jako całki, które należy obliczyć, aby uznać zagadnienie za rozwiązane, a to bywa trudne lub wręcz niewykonalne w sposób analityczny.

skąd

$$g(y,z) = \tfrac{y^3}{3} + h(z)\,.$$

Na podstawie równania ostatniego otrzymujemy więc

$$g'(z) = z^2\,,$$

czyli

$$g(z) = \tfrac{z^3}{3} + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

i ostatecznie

$$f(x,y,z) = \tfrac{x^3+y^3+z^3}{3} - 2xyz + C\,.$$

(1.ii) $p \in \mathbb{N}$: możemy wykorzystać prostą (choć raczej nieco *ad hoc*) konstrukcję formalną: W rozmaitości M wyróżniamy punkt P (dowolny) i na jego otoczeniu $\mathcal{O}_P$ wprowadzamy (lokalny) układ współrzędnych

$$\kappa \equiv (y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}, t) \ :\ \mathcal{O}_P \xrightarrow{\cong} \mathscr{P} \subset \mathbb{R}^n$$

($\mathscr{P}$ jest n-wymiarowym płatem parametryzującym $\mathcal{O}_P$) tak dobrany (co zawsze można osiągnąć), iżby było

$$(y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}, t)(P) = (0, 0, \ldots, 0, 1)\,,$$

a nadto iżby obraz obszaru $\mathbb{R}^{n-1} \times]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset \mathbb{R}^n$, określonego dla pewnego (dowolnie małego) $\varepsilon > 0$, względem odwzorowania

$$\tau \ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ :\ (y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}, t) \mapsto (ty^1, ty^2, \ldots, ty^{n-1}, t)$$

był zawarty w $\mathscr{P}$ (rzecz jasna, hiperpłaszczyzna o równaniu $t = 1$ jest przez τ odwzorowywana w hiperpłaszczyznę zawierającą obraz P względem wybranej wcześniej parametryzacji). Cofnąwszy $\underset{(p)}{\omega}$ wzdłuż κ^{-1}, dostajemy oczywisty rozkład

$$\kappa^{-1*}\underset{(p)}{\omega}(y^j, t) \quad = \quad \omega^1_{j_1 j_2 \ldots j_p}(y^j, t)\,\mathsf{d}y^{j_1} \wedge \mathsf{d}y^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}y^{j_p} + \omega^2_{n\,j_1 j_2 \ldots j_{p-1}}(y^j, t)\,\mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}y^{j_1} \wedge \mathsf{d}y^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}y^{j_p}\,.$$

Następnie cofamy tak otrzymaną p-formę z $\mathcal{O}_P$ na (przeciwobraz tegoż obszaru w) $\mathbb{R}^n$ wzdłuż gładkiego odwzorowania τ,

$$\begin{aligned}
\tau^*\kappa^{-1*}\underset{(p)}{\omega}(y^j, t) \quad &= \quad \omega^1_{j_1 j_2 \ldots j_p}(ty^j, t)\,\mathsf{d}(ty^{j_1}) \wedge \mathsf{d}(ty^{j_2}) \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}(ty^{j_p}) \\
&\quad\ + t^{p-1}\,\omega^2_{n\,j_1 j_2 \ldots j_{p-1}}(y^j, t)\,\mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}y^{j_1} \wedge \mathsf{d}y^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}y^{j_{p-1}} \\
&= \quad t^p\,\omega^1_{j_1 j_2 \ldots j_p}(ty^j, t)\,\mathsf{d}y^{j_1} \wedge \mathsf{d}y^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}y^{j_p}
\end{aligned}$$

$$+\mathrm{d}t\wedge t^{p-1}\big[\sum_{k=1}^{p}\omega^1_{j_1 j_2\ldots j_p}(ty^j,t)\,y^{j_k}\,\partial_{j_k}\lrcorner\,(\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\mathrm{d}y^{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_p})$$

$$+\omega^2_{n\,j_1 j_2\ldots j_{p-1}}(ty^j,t)\,\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\mathrm{d}y^{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_{p-1}}\big]$$

$$=:\quad \alpha(y^j,t)+\mathrm{d}t\wedge\beta(y^j,t)\,,$$

przy czym

$$\partial_t\lrcorner\,\alpha(y^j,t)=0\qquad\wedge\qquad\partial_t\lrcorner\,\beta(y^j,t)=0\,,$$

a ponadto, jak łatwo widać,

$$\alpha(y^j,0)=0\,. \tag{1}$$

Zauważamy, że warunek zamkniętości $\underset{(p)}{\omega}$ tłumaczy się na układ warunków

$$0=\mathrm{d}\underset{(p)}{\omega}\qquad\Rightarrow\qquad 0=\mathrm{d}\big(\tau^*\kappa^{-1*}\underset{(p)}{\omega}\big)(y^j,t)=\mathrm{d}t\wedge(\partial_t\alpha-\mathrm{d}y^k\wedge\partial_k\beta)(y^j,t)+\mathrm{d}y^k\wedge\partial_k\alpha(y^j,t)$$

$$\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}(\partial_t\alpha-\mathrm{d}y^k\wedge\partial_k\beta)(y^j,t)=0\\ \mathrm{d}y^k\wedge\partial_k\alpha(y^j,t)=0\end{cases}\,, \tag{2}$$

a to z racji liniowej niezależności $(p+1)$-form

$$\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\mathrm{d}y^{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_p}\qquad\text{i}\qquad\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\mathrm{d}y^{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{j_{p+1}}$$

na $\mathbb{R}^n$. Na koniec definiujemy $\eta\in\Omega^{p-1}\big(\tau^{-1}(\mathcal{O}_P)\big)$ wzorem

$$\eta(y^j,t):=\int_0^t\mathrm{d}s\,\beta(y^j,s)$$

i liczymy, korzystając po drodze z Podstawowego Twierdzenia Rachunku Różniczkowego i Całkowego oraz z układu (2), jak również z własności (1),

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\eta(y^j,t)&=\mathrm{d}t\wedge\partial_t\left(\int_0^t\mathrm{d}s\,\beta(y^j,s)\right)+\mathrm{d}y^k\wedge\int_0^t\mathrm{d}s\,\partial_k\beta(y^j,s)=\mathrm{d}t\wedge\beta(y^j,t)+\int_0^t\mathrm{d}s\,\partial_s\alpha(y^j,s)\\&=\mathrm{d}t\wedge\beta(y^j,t)+\alpha(y^j,t)-\alpha(y^j,0)=\mathrm{d}t\wedge\beta(y^j,t)+\alpha(y^j,t)\equiv\tau^*\kappa^{-1*}\underset{(p)}{\omega}(y^j,t)\,.\end{aligned}$$

Na podstawie analizy odwzorowania stycznościowego do τ,

$$0\neq\det\tau_*(y^j,t)=\det\begin{pmatrix}t&0&0&\cdots&\cdots&0\\0&t&0&0&\cdots&0\\0&0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&t&0\\y^1&y^2&\cdots&\cdots&y^{n-1}&1\end{pmatrix}=t^{n-1}\qquad\Leftrightarrow\qquad t\neq0\,,$$

wnioskujemy, że w na otoczeniu $\mathcal{U}\supset\tau(]\varepsilon,1+\varepsilon[\times\mathbb{R}^{n-1})$ punktu $\kappa(P)$ odwzorowanie τ zadaje (odwracalną) transformację współrzędniową, a zatem możemy zapisać jawny wzór

$$\underset{(p)}{\omega}\restriction_{\kappa^{-1}(\mathcal{U})}=\mathrm{d}\left(\left(\tau^{-1}\circ\kappa\right)^*\eta\right)$$

na szukaną $(p-1)$-formę pierwotną $\underset{(p)}{\omega}$.

Przykład: 2-forma na $\mathbb{R}^3$ dana wzorem

$$\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = (x+y)\,\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + (x+z)\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + (y-z)\,\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

jest zamknięta, a zatem także dokładna. Wybrawszy $P = (0,0,1)$ jako punkt odniesienia, wyznaczamy

$$\begin{aligned} \underset{(2)}{\omega}(tx,ty,t) &= t(x+y)\,(y\,\mathsf{d}t + t\,\mathsf{d}y) \wedge \mathsf{d}z + t(x+1)\,\mathsf{d}t \wedge (x\,\mathsf{d}t + t\,\mathsf{d}x) + t(y-1)\,(x\,\mathsf{d}t + t\,\mathsf{d}x) \wedge (y\,\mathsf{d}t + t\,\mathsf{d}y) \\ &= t^3(y-1)\,\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y + \mathsf{d}t \wedge t^2\left[(x+y-y^2+1)\,\mathsf{d}x + (xy-2x-y)\,\mathsf{d}y\right], \end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned} \eta(x,y,t) &= \int_0^t \mathsf{d}s\, s^2\left[(x+y-y^2+1)\,\mathsf{d}x + (xy-2x-y)\,\mathsf{d}y\right] \\ &= \tfrac{t^3}{3}\left[(x+y-y^2+1)\,\mathsf{d}x + (xy-2x-y)\,\mathsf{d}y\right] \\ &\equiv \tfrac{t^2}{3}\left[(x+y-y^2+1)\big(\mathsf{d}(tx) - x\,\mathsf{d}t\big) + (xy-2x-y)\big(\mathsf{d}(ty) - y\,\mathsf{d}t\big)\right] \\ &= \tfrac{t^2}{3}\left[(x+y-y^2+1)\,\mathsf{d}(tx) + (xy-2x-y)\,\mathsf{d}(ty) + (y^2+xy-x^2-x)\,\mathsf{d}t\right] \\ &= \tfrac{1}{3}\Big[\big(t(tx+ty) - (ty)^2 + t^2\big)\,\mathsf{d}(tx) + \big((tx)(ty) - t(2tx+ty)\big)\,\mathsf{d}(ty) \\ &\quad + \big((ty)^2 + (tx)(ty) - (tx)^2 - t\cdot tx\big)\,\mathsf{d}t\Big]. \end{aligned}$$

Wynik końcowy to zatem

$$\left(\tau^{-1}\circ\kappa\right)^*\eta(x,y,z) = \tfrac{1}{3}\Big[\big(z(x+y) - y^2 + z^2\big)\,\mathsf{d}x + \big(xy - z(2x+y)\big)\,\mathsf{d}y + \big(y^2 + xy - x^2 - zx\big)\,\mathsf{d}z\Big].$$

(1.iii) $p \in \mathbb{N}$: możemy także wykorzystać formułę na homotopię: Oznaczmy $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ i rozważmy odwzorowanie

$$\jmath_t \;:\; M \to I \times M =: \widetilde{M} \;:\; x \mapsto (t,x)\,.$$

Określmy wreszcie operator $\mathbb{R}$-liniowy

$$K_{(p)} \;:\; \Omega^{p+1}(\widetilde{M}) \to \Omega^p(M) \;:\; \underset{(p)}{\varpi} \mapsto \int_0^1 \mathsf{d}t\,\partial_t \lrcorner \underset{(p)}{\varpi}(t,\cdot)\,.$$

Zachodzi tożsamość

$$\forall_{p\in\mathbb{N}} \;:\; K_{(p+1)} \circ \mathsf{d}_{\widetilde{M}} + \mathsf{d}_M \circ K_{(p)} = \jmath_1^* - \jmath_0^*\,, \tag{3}$$

w której

$$\mathsf{d}_{\widetilde{M}} = \mathsf{d}t \wedge \partial_t + \mathsf{d}x^i \wedge \partial_i\,, \qquad \mathsf{d}_M = \mathsf{d}x^i \wedge \partial_i$$

są operatorami pochodnej zewnętrznej na $\widetilde{M}$ i M, odpowiednio. Istotnie, dokonawszy znajomego rozkładu p-formy $\underset{(p)}{\varpi}$:

$$\underset{(p)}{\varpi}(t,x^i) = \alpha(t,x^i) + \mathsf{d}t \wedge \beta(t,x^i)\,, \qquad \partial_t \lrcorner\, \alpha(t,x^i) = 0 = \partial_t \lrcorner\, \beta(t,x^i)\,,$$

obliczamy po kolei:

$$K_{(p)}\underset{(p)}{\varpi} = \int_0^1 \mathsf{d}t\,\beta(t,\cdot) \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{d}_M K_{(p)}\underset{(p)}{\varpi}(x^i) = \mathsf{d}x^k \wedge \int_0^1 \mathsf{d}t\,\partial_k\beta(t,x^i)\,,$$

oraz

$$\mathsf{d}_{\widetilde{M}}\underset{(p)}{\varpi}(t,x^i) = \mathsf{d}x^k \wedge \alpha(t,x^i) + \mathsf{d}t \wedge \big(\partial_t\alpha - \mathsf{d}x^k \wedge \partial_k\beta\big)(t,x^i)$$

$$\Rightarrow \qquad K_{(p+1)} \circ \mathsf{d}_{\widetilde{M}}\underset{(p)}{\varpi}(t,x^i) = \int_0^1 \mathsf{d}t\,\big(\partial_t\alpha - \mathsf{d}x^k \wedge \partial_k\beta\big)(t,x^i) = \alpha(1,x^i) - \alpha(0,x^i) - \mathsf{d}_M K_{(p)}\underset{(p)}{\varpi}(x^i)\,,$$

a stąd

$$\big(K_{(p+1)} \circ \mathsf{d}_{\widetilde{M}} + \mathsf{d}_M \circ K_{(p)}\big)\underset{(p)}{\varpi}(t,x^i) = \alpha(1,x^i) - \alpha(0,x^i) \equiv \big(\jmath_1^* - \jmath_0^*\big)\underset{(p)}{\varpi}\,.$$

Zakładając teraz, że M jest ściągalna do punktu x_0, tj. że istnieje odwzorowanie gładkie (homotopia)

$$h\ :\ \widetilde{M} \to M$$

o własności

$$\forall_{x\in M}\ :\ \big(\ h(0,x) = x_0 \quad \wedge \quad h(1,x) = x\ \big)\,,$$

zwane ściągnięciem (lub retrakcją) M do x_0, zauważmy, że

$$h \circ \jmath_1 = \mathrm{id}_M\,, \qquad\qquad h \circ \jmath_0 = x_0$$

(to drugie to odwzorowanie stałe, przyporządkowujące punkt x_0 każdemu punktowi M), zatem dla dowolnej 1-formy z bazy współrzędniowej $\{\mathsf{d}x^i\}^{i\in\overline{1,n}}$, stowarzyszonej z układem współrzędnych $\{x^i\}^{i\in\overline{1,n}}$, otrzymujemy

$$(h \circ \jmath_1)^*\mathsf{d}x^i = \mathsf{d}x^i\,, \qquad\qquad (h \circ \jmath_0)^*\mathsf{d}x^i = 0\,.$$

Jeśli zatem p-forma $\underset{(p)}{\omega}$ jest zamknięta, to stosując powyższą tożsamość do $h^*\underset{(p)}{\omega}$, otrzymujemy

$$\big(\jmath_1^* - \jmath_0^*\big)h^*\underset{(p)}{\omega} = \big(K_{(p+1)} \circ \mathsf{d}_{\widetilde{M}} + \mathsf{d}_M \circ K_{(p)}\big)h^*\underset{(p)}{\omega} = \mathsf{d}_M\big(K_{(p)}h^*\underset{(p)}{\omega}\big)\,,$$

więc też $(p-1)$-forma

$$\underset{(p-1)}{\eta} := K_{(p)}h^*\underset{(p)}{\omega} \in \Omega^{p-1}(M)$$

spełnia równość

$$\mathsf{d}\underset{(p-1)}{\eta} = \left(\jmath_1^* - \jmath_0^*\right)h^* \underset{(p)}{\omega} = (h \circ \jmath_1)^* \underset{(p)}{\omega} - (h \circ \jmath_0)^* \underset{(p)}{\omega} = \mathrm{id}_M^* \underset{(p)}{\omega} = \underset{(p)}{\omega} \,,$$

jest przeto szukaną formą pierwotną $\underset{(p)}{\omega}$.

Warto dodać, że w sytuacji, gdy M jest zanurzona w rozmaitości o naturalnej strukturze liniowej (a tak jest w przypadku podrozmaitości $\mathbb{R}^n$), często można wykorzystać retrakcję liniową postaci

$$h(t,x) \coloneqq x_0 + t(x - x_0)\,.$$

Przykład: Bez trudu sprawdzamy, że 2-forma na $\mathbb{R}^3$ dana wzorem

$$\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = x^2\,\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y^2\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x - 2z(x+y)\,\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

jest zamknięta, czyli też dokładna. Wykorzystując ściągalność (wręcz gwiaździstość) jej nośnika względem punktu $x_0 = (0,0,0)$ oraz naturalną strukturę $\mathbb{R}$-liniową na nim, stosujemy retrakcję liniową

$$h \;:\; I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;:\; (t,x,y,z) \mapsto (tx, ty, tz)\,.$$

1-forma pierwotna przybiera tu zatem postać

$$\begin{aligned}\underset{(1)}{\eta}(x,y,z) &= \int_0^1 \mathsf{d}t\, t^2\, \partial_t \lrcorner \Big[x^2\,(y\,\mathsf{d}t + t\,\mathsf{d}y) \wedge (z\,\mathsf{d}t + t\,\mathsf{d}z) + y^2\,(z\,\mathsf{d}t + t\,\mathsf{d}z) \wedge (x\,\mathsf{d}t + t\,\mathsf{d}x) \\ &\qquad -2z(x+y)\,(x\,\mathsf{d}t + t\,\mathsf{d}x) \wedge (y\,\mathsf{d}t + t\,\mathsf{d}y)\Big] \\ &= \tfrac{1}{4}\left[x^2\,(y\,\mathsf{d}z - z\,\mathsf{d}y) + y^2\,(z\,\mathsf{d}x - x\,\mathsf{d}z) - 2z\,(x+y)\,(x\,\mathsf{d}y - y\,\mathsf{d}x)\right]\end{aligned}$$

(1.iv) $p \in \mathbb{N}$: może okazać się pomocnym cofnięcie formy danej (zamkniętej) wzdłuż reparametryzacji jej nośnika (czyli transformacji współrzędniowej), w wyniku którego forma przybiera „prost(sz)ą" postać.

Przykład: Nietrudno pokazać, że 2-forma na $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2$ dana wzorem

$$\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = \tfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2}\,\left[-xz\,\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z - yz\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + (x^2+y^2)\,\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y\right]$$

jest zamknięta, więc też dokładna. Wyznaczenie jej 1-formy pierwotnej na podstawie formuły na homotopię jest możliwe, ale nieoczywiste. Cofnąwszy $\underset{(2)}{\omega}$ względem reparametryzacji kulistej

$$\tau \;:\; \mathbb{R}_{>0} \times [0,\pi[\times]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2 \;:\; (r,\theta,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,,$$

znajdujemy

$$\tau^*\underset{(2)}{\omega}(r,\theta,\varphi) = \tfrac{r^2}{\cos^2\varphi}\,\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi \equiv \mathsf{d}\big(\tfrac{r^3}{3}\big) \wedge \mathsf{d}\big(\mathrm{tg}\,\varphi\big)\,,$$

możemy zatem wypisać 1-formę pierwotną w postaci

$$\tau^* \underset{(1)}{\eta}(r,\theta,\varphi) = -r^2 \mathrm{tg}\,\varphi\, \mathsf{d}r$$

i ostatecznie

$$\underset{(1)}{\eta}(x,y,z) = -(x^2+y^2+z^2)\cdot\tfrac{y}{x}\cdot\left(\tfrac{\partial r}{\partial x}\,\mathsf{d}x + \tfrac{\partial r}{\partial y}\,\mathsf{d}y + \tfrac{\partial r}{\partial z}\,\mathsf{d}z\right) = -\tfrac{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x}\,(x\,\mathsf{d}x + y\,\mathsf{d}y + z\,\mathsf{d}z)\,.$$

Kolejnym omówionym przez nas zagadnieniem było wyznaczanie krzywych całkowych równań różniczkowych na (podzbiorach) $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$ dających się zapisać w ogólnej postaci

$$\underset{(1)}{\omega}(x,y) := P(x,y)\,\mathsf{d}x + Q(x,y)\,\mathsf{d}y = 0\,. \tag{4}$$

Związek tego zagadnienia z geometrią różniczkową ustala oczywista obserwacja: Powyższe równanie można traktować jako równanie wyróżniające pewne pole wektorowe $\mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{T}\mathcal{D})$ na dziedzinie $\mathcal{D}$ określoności równania (o ile – rzecz jasna – $\underset{(1)}{\omega}$ nie jest na nim trywialna, co zakładamy), a mianowicie:

$$\langle \mathcal{V} \rangle_{\mathbb{R}} = \ker \underset{(1)}{\omega}\,.$$

Krzywe całkowe tego pola to właśnie krzywe całkowe równania. Są one opisane w sposób uwikłany równaniem

$$F(x,y) = C \in \mathbb{R}\,,$$

w którym F pochodzi z odcałkowania równania, przy czym stałą C określamy na podstawie znajomości dowolnego punktu na krzywej. Krzywe te wyznaczaliśmy w dwóch przypadkach:

(2.i) Ilekroć dane współczynniki funkcjonalne P i Q z równania (4) spełniają warunek

$$\tfrac{\partial P}{\partial y} = \tfrac{\partial Q}{\partial x}\,, \tag{5}$$

dziedzina zaś jest ściągalna, to równanie jest zupełne, tj. istnieje funkcja różniczkowalna $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ o własności

$$P(x,y)\,\mathsf{d}x + Q(x,y)\,\mathsf{d}y = \mathsf{d}F(x,y)\,,$$

którą wyznaczamy w taki sam sposób jak w punkcie (1.i). Istotnie, (5) to warunek zamkniętości $\underset{(1)}{\omega}$, który w połączeniu z warunkiem ściągalności $\mathcal{D}$ implikuje istnienie funkcji pierwotnej F.

Przykład: W bezpośrednim rachunku sprawdzamy, że równanie postaci

$$\left(\tfrac{\sin y}{x} + \log\tfrac{x}{y} + 1\right)\mathsf{d}x + \left(\cos y\,\log\tfrac{x}{y} - \tfrac{x+\sin y}{y}\right)\mathsf{d}y = 0\,,$$

określone na $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$, jest zamknięte, po czym poprzednio zilustrowaną techniką wyprowadzamy

$$F(x,y) = (x+\sin y)\,\log\tfrac{x}{y}\,,$$

skąd równanie krzywej całkowej:

$$(x+\sin y)\,\log\tfrac{x}{y} = C\,.$$

I tak, na przykład, krzywa całkowa przechodząca przez punkt (e,π) jest opisana równaniem

$$(x+\sin y)\,\log\tfrac{x}{y} = e\,\log\tfrac{e}{\pi}\,.$$

(2.ii) Jeśli współczynniki w równaniu (4) nie spełniają wprawdzie warunku (5), ale można dobrać funkcję różniczkowalną

$$\mu \,:\, \mathcal{D} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

zwaną czynnikiem całkującym, tak by był spełniony warunek

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}\,,$$

to wówczas wobec równości

$$\ker \underset{(1)}{\omega} = \ker\left(\mu \cdot \underset{(1)}{\omega}\right)$$

krzywe całkowe równania wyjściowego są zarazem krzywymi całkowymi równania

$$(\mu P)(x,y)\,\mathsf{d}x + (\mu Q)(x,y)\,\mathsf{d}y = 0\,, \tag{6}$$

a tych ostatnich szukamy już metodą z punktu (2.i).

Proste postaci szczególne czynnika całkującego to (f, g to dowolne funkcje różniczkowalne)

$$\mu_{(1)}(x,y) = f(ax+by)\,, \qquad \mu_{(2)}(x,y) = g(x^a y^b)\,, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

Przykład: Czynnika całkującego dla równania

$$(2x^3y^2 - y + x^2)\,y\,\mathsf{d}x + x^3\,(xy^2 - 1)\,\mathsf{d}y = 0\,,$$

którego nie-zamkniętość sprawdzamy bez trudu, szukamy w postaci

$$\mu(x,y) = f(xy)\,.$$

Równość (6) przybiera teraz postać

$$\frac{f'}{f}(xy) = \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)}{x\,P(x,y) - y\,Q(x,y)}\,,$$

zatem *warunkiem* jej spełnienia jest stałość prawej jej strony (danej!) na krzywych $xy = \mathrm{const}$, albo – równoważnie – zależności tejże prawej strony od zmiennych x i y wyłącznie poprzez ich iloczyn. Warunek ten sprawdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)}{x\,P(x,y) - y\,Q(x,y)} = \frac{4x^3y^2 - 3x^2 - 6x^3y^2 + 2y - x^2}{xy\,(2x^3y^2 - y + x^2) - yx^3\,(xy^2 - 1)} = -\frac{2}{xy}\,.$$

Widzimy więc, że warunek jest spełniony, a jego rozwiązaniem jest czynnik całkujący postaci

$$\mu(x,y) = \frac{A}{(xy)^2}\,, \qquad A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Rzecz jasna, wartość stałej A nie ma żadnego znaczenia dla naszych rozważań, możemy przeto położyć (np.) $A = 1$.

W następnym kroku odcałkowujemy „poprawione" równanie,

$$\mathsf{d}F(x,y) = (\mu P)(x,y)\,\mathsf{d}x + (\mu Q)(x,y)\,\mathsf{d}y \equiv \left(2xy - \tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{y}\right)\mathsf{d}x + x\left(x - \tfrac{1}{y^2}\right)\mathsf{d}y$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xy - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x\left(x - \frac{1}{y^2}\right) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} F(x,y) = x^2 y + \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + G(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x\left(x - \frac{1}{y^2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad F(x,y) = x^2 y + \tfrac{1}{x} + \tfrac{x}{y} + C\,.$$

Wnioskujemy zatem, że krzywe całkowe wyjściowego równania są zadane w sposób uwikłany przez równania

$$x^2 y + \tfrac{1}{x} + \tfrac{x}{y} + C = 0\,.$$

Zadanie 1. Wyznacz funkcję pierwotną dla danej 1-formy $\underset{(1)}{\omega}$ określonej na obszarze $\mathcal{O}$, o ile funkcja ta istnieje.

(i) $\underset{(1)}{\omega}(x,y,z) = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\mathsf{d}x + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)\mathsf{d}y - \frac{xy}{z^2}\,\mathsf{d}z$ dla $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2_{>0}$;

(ii) $\underset{(1)}{\omega}(x,y) = \frac{x\,\mathsf{d}y - y\,\mathsf{d}x}{x^2+xy+y^2}$ dla $\mathcal{O} = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ lub $\mathcal{O} = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x+y>0\ \}$;

(iii) $\underset{(1)}{\omega}(x,y,z) = (y^2\,\mathrm{e}^{xy^2} - \cos x\,\log z)\,\mathrm{arctg}\,z\,\mathsf{d}x + (2y\,\mathrm{e}^{xy^2}\,\mathrm{arctg}\,z - z\,y^{z-1})\,\mathsf{d}y + \Big(\frac{\mathrm{e}^{xy^2} - \sin x\,\log z}{z^2+1} - \frac{\sin x\,\mathrm{arctg}\,z}{z} + y^z\,\log y\Big)\mathsf{d}z$ dla $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2_{>0}$;

(iv) $\underset{(1)}{\omega}(x,y) = \frac{\mathrm{sh}\,y\,\mathsf{d}x + \sin x\,\mathsf{d}y}{\cos x + \mathrm{ch}\,y}$ dla $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Niechaj f i g będą gładkimi funkcjami na pewnym obszarze $\mathcal{O}$, o tej własności, że 1-forma $\underset{(1)}{\omega} = \mathsf{d}f + f\,\mathsf{d}g$ jest różna od zera w każdym punkcie $\mathcal{O}$. Znajdź ogólną postać funkcji $F \in C^\infty(\mathcal{O};\mathbb{R})$ spełniającej warunek $\mathsf{d}(F\,\underset{(1)}{\omega}) = 0$.

Zadanie 3. Zdefiniujmy 1-formę na $\mathbb{R}^3$ wzorem

$$\vartheta(x,y,z) = x\,\mathsf{d}y + y\,\mathsf{d}z + z\,\mathsf{d}x\,.$$

Udowodnij stwierdzenie:

$$\forall_{f \in C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})}\ :\ \big(\ \mathsf{d}(f \cdot \vartheta) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0\ \big)\,.$$

Zadanie 4. Oblicz całkę z 1-formy danej wzorem

$$\underset{(1)}{\omega}(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\ [\mathrm{ch}\,(xy)\,\mathsf{d}x + \mathrm{sh}\,(xy)\,\mathsf{d}y]$$

po brzegu kwadratu $[0,a] \times [0,b] \subset \mathbb{R}^2$ (dla $a,b>0$) zorientowanym przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara.

Zadanie 5. Dla 2-formy na $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} =: \mathcal{O}$ danej wzorem

$$\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = \tfrac{1}{z^3}\,(x\,\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + z\,\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y)$$

wyznacz 1-formę

$$\underset{(1)}{\eta} = \int_0^1 \mathsf{d}t\,\big(\partial_t \lrcorner H^* \underset{(2)}{\omega}\big)(t,\cdot)$$

i sprawdź w bezpośrednim rachunku pradziwość równości

$$\mathsf{d}\underset{(1)}{\eta} = \underset{(2)}{\omega}$$

dla poniższych gładkich odwzorowań $H : I \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$,

(i) $H(t,x,y,z) = (tx, ty, 1-t+tz)$, (ii) $H(t,x,y,z) = (tx, ty, z^t)$.

Zadanie 6. Sprawdź, że dana 2-forma $\underset{(2)}{\omega}$ na obszarze $\mathcal{O}$ jest zamknięta, a następnie wyznacz jej formę pierwotną.

(i) $\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + \frac{\partial g}{\partial z}\,\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x - \big(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\big)\,\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y$ na $\mathcal{O} = \mathbb{R}^3$, określona dla dowolnych funkcji $f,g \in C^\infty(\mathcal{O};\mathbb{R})$;

(ii) $\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = \frac{1}{xy^2z}\,(zt\,\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y + tx\,\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + xy\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}t + yz\,\mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}x)$ na $\mathcal{O} = \mathbb{R}^4_{>0}$;

(iii) $\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = (z\,\mathrm{e}^y - 21x^2\,y^2)\,\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y - \frac{y+2}{y+1}\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + x\,\Big(\mathrm{e}^y + \frac{1}{(y+1)^2}\Big)\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}y$ na $\mathcal{O} = \mathbb{R}\times]-1,\infty[\times\mathbb{R}$;

(iv) $\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = \Big[z^2\,(1-2xyz) + \frac{3y}{(x+1)^2}\Big]\,\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y + \Big(3xy^2z^2 - \frac{1}{y+2}\Big)\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + \Big[\frac{z-x}{(y+2)^2} - 2xz\Big]\,\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z$ na $\mathcal{O} =]-1,\infty[\times]-2,\infty[\times\mathbb{R}$;

(v) $\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = (z\,\mathrm{sh}\,x\,\cos y - \mathrm{e}^z\,\sin(2y))\,\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y + (\mathrm{e}^z\,\sin^2 y + z^2\,\mathrm{e}^{-x})\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x - \mathrm{ch}\,x\,\cos y\,\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z$ na $\mathcal{O} = \mathbb{R}^3$;

(vi) $\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,(x\,\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + y\,\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + z\,\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y)$ na $\mathcal{O} = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ x^2+y^2>0\ \}$;

(vii) $\underset{(2)}{\omega}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\big[(y\,\partial_z f - z\,\partial_y f)\,\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + (z\,\partial_x f - x\,\partial_z f)\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + (x\,\partial_y f - y\,\partial_x f)\,\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y\big]$ na $\mathcal{O} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$;

Zadanie 7. Wyprowadź warunki, jakie muszą spełniać funkcje P i Q w formule (4), ażeby istniał czynnik całkujący szczególnej postaci (f i g są dowolnymi funkcjami gładkimi)

(i) $\mu(x,y) = f(ax+by)$ dla pewnych stałych $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

(ii) $\mu(x,y) = f(x^a y^b)$ dla pewnych stałych $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

(iii) $\mu(x,y) = f(x^2+y^2)$;

(iv) $\mu(x,y) = f(x)\,g(y)$.

Wykorzystaj wynik z punktu (i) w celu odcałkowania równań

$$(x + \sin x + \sin y)\,\mathsf{d}x + \cos y\,\mathsf{d}y = 0 \quad \text{dla} \quad (a,b) = (1,0)$$

oraz

$$\left(\tfrac{2}{xy} - 4y^2 - \tfrac{3}{x^2}\right)\mathsf{d}x + \left(\tfrac{3}{xy} - 12y^2 - 4xy - \tfrac{2}{y^2}\right)\mathsf{d}y = 0 \quad \text{dla} \quad (a,b) = (2,3)\,,$$

a następnie wynik z punktu (iv) do odcałkowania równania

$$(3x^3y + y^2)\,\mathsf{d}x + (x^4 + xy)\,\mathsf{d}y = 0\,.$$

Powodzenia!