

DOWODY NIERÓWNOŚCI HÖLDERA I MINKOWSKIEGO (DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO, I DO SPRAWDZENIA)

$$\mathbb{R} \int \mathbb{R}$$

Tematem niniejszych notatek jest zbadanie warunków istnienia normy na pewnej przestrzeni funkcji rzeczywistych określonych na przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathcal{F}^\sigma, \mu)$. Będziemy się oto zajmować klasami $[f]_\mu$ funkcji (rzeczywistych) Σ -mierzalnych $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ względem relacji równoważności

$$f \sim_\mu g \iff \mu\left(\left((f-g)^{-1}(\{0\})\right)^c\right) = 0,$$

o własności

$$\int_\Omega d\mu |f|^p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Przestrzeń takich klas oznaczamy symbolem $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ lub $L_p(\Omega, d\mu)$ i określamy mianem przestrzeni (klas) funkcji Lebesgue'a klasy p . W dalszej części notatek będziemy badać własności odwzorowania

$$L_p(\Omega, \Sigma, \mu) \rightarrow \mathbb{R} : [f]_\mu \mapsto \left(\int_\Omega d\mu |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} =: \|[f]_\mu\|_p.$$

Tw. 1. [Nierówność Höldera] Niechaj $[f]_\mu \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ i $[g]_\mu \in L_q(\Omega, \Sigma, \mu)$, przy czym liczby p i q są hoelderowsko sprzężone, tj. spełniają relację

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Wówczas $f \cdot g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ i zachodzi nierówność

$$\|[f \cdot g]_\mu\|_1 \leq \|[f]_\mu\|_p \cdot \|[g]_\mu\|_q.$$

Dowód: Dowód nierówności Höldera zasadza się na następującym lemacie.

Lemat 1. [Nierówność Younga] Niechaj $A, B \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ i $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ będą hoelderowsko sprzężone. Wówczas zachodzi nierówność

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q},$$

przy czym nierówność jest wysycona wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony

warunek

$$A^p = B^q.$$

Dowód lematu: Ilekroć $A = 0$ lub $B = 0$, lemat trywializuje się, będziemy go przeto dowodzić dla $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$. Wybierzmy (dowolnie) $\alpha \in]0, 1[$ i rozważmy funkcję

$$\varphi(t) := \alpha t - t^\alpha,$$

określoną dla $t > 0$. Jako że

$$\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} \equiv \alpha (1 - t^{\alpha-1}),$$

więc też

$$\varphi'(t) \begin{cases} < 0, & \text{gdy } 0 < t < 1 \\ = 0, & \text{gdy } t = 1 \\ > 0, & \text{gdy } t > 1 \end{cases},$$

a stąd $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ oraz $(\varphi(t) = \varphi(1) \iff t = 1)$. Jest zatem

$$\alpha t - t^\alpha = \varphi(t) \geq \varphi(1) = \alpha - 1,$$

$$t^\alpha = \alpha t + (1 - \alpha) \iff t = 1.$$

Zapiszmy $t \in [0, \infty[$ w postaci ilorazu $t = \frac{a}{b}$ pewnych dodatnich liczb $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Powyższy wynik możemy teraz przepisać w postaci

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha) b,$$

$$a^\alpha b^{1-\alpha} = \alpha a + (1 - \alpha) b \iff a = b.$$

Zdefiniujmy $p = \frac{1}{\alpha}$, $p \in]1, \infty[$ i dobierzmy hölderowsko sprzężone $q (= \frac{1}{1-\alpha})$, a wtedy powyższa nierówność przyjmie postać

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Oznaczając $A := a^{\frac{1}{p}}$ i $B := b^{\frac{1}{q}}$, dostajemy żadaną nierówność, warunek zaś konieczny i wystarczający jej wysycenia jest jak w treści lematu. $\square$

Wracamy teraz do dowodu twierdzenia. Po pierwsze zauważamy, że $\| [f]_\mu \|_p = 0$ implikuje $|f| = 0$ μ -prawie wszędzie, a wtedy także $|f \cdot g| = 0$ μ -prawie

wszędzie, czyli też $\| [f \cdot g]_\mu \| = 0$. Dowodzona nierówność trywializuje się w tym przypadku i analogicznie to samo dotyczy sytuacji, w której $\| [g]_\mu \|_q = 0$. Będziemy więc odtąd zakładać, że $\| [f]_\mu \|_p, \| [g]_\mu \|_q \neq 0$. Skoro jednak zarówno f jak i g są Σ -mierzalne, to tę własność ma także $f \cdot g$, co wynika z tożsamości $f \cdot g = \frac{1}{4} [(f + g)^2 - (f - g)^2]$ oraz z prostego Lematu 2.6 dowiedzonego w [Bar95]. Skoro jednak funkcja $f \cdot g$ jest Σ -mierzalna, to pozostaje pokazać, że jej moduł jest funkcją całkowalną, i na koniec udowodnić nierówność wypisaną w treści twierdzenia. Połóżmy

$$A := \frac{|f(x)|}{\| [f]_\mu \|_p}, \quad B := \frac{|g(x)|}{\| [g]_\mu \|_q},$$

a wtedy wykazana wcześniej nierówność Younga przybierze postać

$$\frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\| [f]_\mu \|_p \cdot \| [g]_\mu \|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \| [f]_\mu \|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \| [g]_\mu \|_q^q}.$$

Prawa strona powyższej nierówności jest całkowalna (z założenia), a to pociąga za sobą (w świetle lematu dowodzonego na ćwiczeniach) także całkowalność strony lewej. Stąd całkowalna jest również funkcja $f \cdot g$ (na mocy twierdzenia dowiedzonego na ćwiczeniach). Przy tym zachodzi

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} d\mu |f(x) \cdot g(x)|}{\| [f]_\mu \|_p \cdot \| [g]_\mu \|_q} &\equiv \int_{\Omega} d\mu \frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\| [f]_\mu \|_p \cdot \| [g]_\mu \|_q} \leq \int_{\Omega} d\mu \left(\frac{|f(x)|^p}{p \| [f]_\mu \|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \| [g]_\mu \|_q^q} \right) \\ &= \frac{\int_{\Omega} d\mu |f(x)|^p}{p \| [f]_\mu \|_p^p} + \frac{\int_{\Omega} d\mu |g(x)|^q}{q \| [g]_\mu \|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

co odtwarza żadaną nierówność i tym samym kończy dowód twierdzenia. $\square$

Korolariusz 1. [Nierówność Cauchy'ego–Bunyakovski'ego–Schwarza] Dla dowolnych $f, g \in L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ zachodzi

$$\left| \int_{\Omega} d\mu f \cdot g(x) \right| \leq \int_{\Omega} d\mu |f \cdot g(x)| \leq \| [f]_\mu \|_2 \cdot \| [g]_\mu \|_2.$$

Nierówność Höldera okazuje się być pomocną przy dowodzeniu istotnego

Tw. 2. [Nierówność Minkowskiego] Niechaj $[f]_\mu, [g]_\mu \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $p \geq 1$. Wówczas także $[f + g]_\mu \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ i spełniona jest nierówność

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p.$$

Dowód: Przede wszystkim należy zauważyć, że Σ -mierzalność funkcji f i g pociąga za sobą natychmiast Σ -mierzalność ich sumy, a to na mocy wcześniej cytowanego Lematu 2.6. z [Bar95]. Zachodzi także

$$|f + g|^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \equiv 2^p (\max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p),$$

co pokazuje, iż $[f + g]_\mu \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Rozpatrzmy najpierw oddzielnie przypadek $p = 1$. Wobec monotoniczności całki Lebesgue'a (dowodzonej na ćwiczeniach) oraz jej liniowości stwierdzamy

$$\begin{aligned} \|[f + g]_\mu\|_1 &= \int_\Omega d\mu |(f + g)(x)| \leq \int_\Omega d\mu (|f(x)| + |g(x)|) = \int_\Omega d\mu |f(x)| + \int_\Omega d\mu |g(x)| \\ &= \|[f]_\mu\|_1 + \|[g]_\mu\|_1, \end{aligned}$$

co jest treścią twierdzenia. Pozostaje wykazać nierówność w przypadku $p > 1$.

Spełnione są oczywiste relacje

$$|f + g|^p \equiv |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \leq (|f| + |g|) \cdot |f + g|^{p-1} \equiv |f| \cdot |f + g|^{p-1} + |g| \cdot |f + g|^{p-1}.$$

Przyjrzymy się uważniej każdemu ze składników po prawej stronie ostatniej równości z osobna.

Po pierwsze skoro $[f + g]_\mu \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, to oczywiście $[|f + g|^p]_\mu \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, a ponieważ $p = q(p - 1)$, przeto $[|f + g|^{p-1}]_\mu \in L_q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Możemy zatem zastosować nierówność Höldera, jak następuje:

$$\begin{aligned} \int_\Omega d\mu |f| \cdot |f + g|^{p-1} &\leq \|[f]_\mu\|_p \cdot \left(\int_\Omega d\mu |f + g|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \equiv \|[f]_\mu\|_p \cdot \left[\left(\int_\Omega d\mu |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{p}{q}} \\ &\equiv \|[f]_\mu\|_p \cdot \|[f + g]_\mu\|_p^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy słuszności relacji

$$\int_\Omega d\mu |g| \cdot |f + g|^{p-1} \leq \|[g]_\mu\|_p \cdot \|[f + g]_\mu\|_p^{\frac{p}{q}},$$

co w połączeniu z wcześniejszymi wynikami prowadzi do

$$\begin{aligned} \|[f + g]_\mu\|_p^p &\equiv \int_\Omega d\mu |f + g|^p \leq \int_\Omega d\mu |f| \cdot |f + g|^{p-1} + \int_\Omega d\mu |g| \cdot |f + g|^{p-1} \\ &\leq (\|[f]_\mu\|_p + \|[g]_\mu\|_p) \cdot \|[f + g]_\mu\|_p^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Jeśli teraz $\|[f + g]_\mu\|_p = 0$, to nierówność Minkowskiego jest trywialnie spełniona, bo $\|[f]_\mu\|_p, \|[g]_\mu\|_p \geq 0$. W przypadku przeciwnym, $\|[f + g]_\mu\|_p \neq 0$, możemy podzielić obie strony powyższej nierówności przez $\|[f + g]_\mu\|_p^{\frac{p}{q}}$, a wtedy dostajemy żądaną nierówność

$$\| [f]_{\mu} \|_p + \| [g]_{\mu} \|_p \geq \| [f + g]_{\mu} \|_p^{p - \frac{p}{q}} \equiv \| [f + g]_{\mu} \|_p. \quad \square$$

Wniosek: (który wymaga jeszcze kilku dowodów, przedstawionych – bez wątpienia – na wykładzie) $(L_p(\Omega, \Sigma, \mu), \| \cdot \|_p)$ jest przestrzenią $\mathbb{R}$ -liniową z normą.

LITERATURA

[Bar95] R.G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Interscience, 1995.

Warszawa, 11. maja 2011 r.