

**MONOPOL MAGNETYCZNY DIRACA**

—

**OD RÓWNAŃ MAXWELLA DO WIĄZEK GŁÓWNYCH  
W OPISIE HYPERKOHOMOLOGICZNYM  
(DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO I SPRAWDZENIA)**

RAFAŁ R. SUSZEK

STRESZCZENIE. W niniejszych notatkach omawiamy w zwięzły, lecz możliwie kompletny sposób najprostsza topologicznie nietrywialną konfigurację statycznego pola elektromagnetycznego na czasoprzestrzeni  $\mathbb{R}^{1,3}$ , którego źródłem jest (czysto teoretyczny) punktowy ładunek magnetyczny zwany *monopolem magnetycznym Diraca*.

1. REKWIZYTY GEOMETRYCZNE I ANALITYCZNE

Zacznijmy od przypomnienia elementarnych formuł wektorowego rachunku różniczkowego na  $\mathbb{R}^3$ . Niechaj  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$  będzie dowolnym gładkim polem wektorowym. Z polem tym możemy stowarzyszyć następujące obiekty i niezmienniki różniczkowo-geometryczne:

- **rotacja** (albo **wirowość**):  $\text{rot } \mathcal{V} \equiv \nabla \times \mathcal{V} = (\star d\mathcal{V}^\flat)^\sharp$ ;
- **dywergencja** (albo **źródłowość**):  $\text{div } \mathcal{V} \equiv \nabla \cdot \mathcal{V} = \star d \star \mathcal{V}^\flat$ ;
- **strumień** przez powierzchnię  $\Sigma$  o unormowanym polu normalnym  $\hat{n}$  (na której metryka  $g$  na  $\mathbb{R}^3$  indukuje miarę 2-objętości  $d\mu(\Sigma; g|_\Sigma)$ , współnormowaną z  $\hat{n}$ ):

$$\Phi(\mathcal{V}; \Sigma) = \int_\Sigma d\mu(\Sigma; g|_\Sigma) g(\mathcal{V}, \hat{n}) = \int_\Sigma \star \mathcal{V}^\flat;$$

- **krążenie** wzdłuż krzywej  $\Lambda$  o unormowanym polu stycznym  $\hat{t}$  (na której metryka  $g$  na  $\mathbb{R}^3$  indukuje miarę 1-objętości  $d\mu(\Lambda; g|_\Lambda)$ , współnormowaną z  $\hat{t}$ ):

$$W(\mathcal{V}; \Lambda) = \int_\Lambda d\mu(\Lambda; g|_\Lambda) g(\mathcal{V}, \hat{t}) = \int_\Lambda \mathcal{V}^\flat;$$

Mamy też wygodną reprezentację laplasjanu (funkcji):

$$\Delta = \star d \star d.$$

Przywoławszy twierdzenie Stokes'a, wyprowadzamy przydatne formuły całkowe:

- **Lagrange'a–Gaußa–Ostrogradskiego**:

$$\mathcal{Q}_\mathcal{V}(\Omega) := \int_\Omega \star(\text{div}_{(3)} \mathcal{V}) = \int_{\partial\Omega} \star \mathcal{V}^\flat \equiv \Phi(\mathcal{V}; \partial\Omega),$$

wiązącą całkowity ładunek źródłowy  $\mathcal{Q}_\mathcal{V}(\Omega)$  pola  $\mathcal{V}$  zgromadzony w 3-objętości  $\Omega$  ze strumieniem  $\mathcal{V}$  przez brzeg  $\partial\Omega$  teje 3-objętości;

- **Kelvina–Stokes'a**:

$$\Phi(\text{rot } \mathcal{V}; \Sigma) \equiv \int_\Sigma \star(\text{rot } \mathcal{V})^\flat = \int_{\partial\Sigma} \mathcal{V}^\flat \equiv W(\mathcal{V}; \partial\Sigma),$$

wiązącą strumień pola  $\mathcal{V}$  przez powierzchnię  $\Sigma$  z krążeniem  $\mathcal{V}$  wzdłuż brzegu  $\partial\Sigma$  teje powierzchni.

2. ELEKTROMAGNETYZM MAXWELLA W JĘZYKU FORM RÓŻNICZKOWYCH

Podstawowym obiektem opisu potencjalnego pola elektromagnetycznego w przestrzeni  $\mathbb{R}^{1,3} \ni (x^\mu) \equiv (t, x, y, z)$  (z wyróżnioną współrzędną czasową  $t$ ) jest **tensor Maxwella** dany wzorem

$$F(t, x^l) \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(t, x^i) dx^\mu \wedge dx^\nu =: -E_i(t, x^l) dt \wedge dx^i + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B^i(t, x^l) dx^j \wedge dx^k,$$

którego składowe  $F_{i0} = E_i$  oraz  $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k$  identyfikujemy – odpowiednio – ze składowymi 1-formy natężenia pola elektrycznego  $E(t, x^l) = E_i(t, x^l) dx^i$  oraz składowymi pola indukcji magnetycznej  $B(t, x^l) = B^i(t, x^l) \partial_i$ , znanymi z XIX-wiecznego opisu elektrodynamiki w języku pól wektorowych. Oprócz niego wygodnie jest zdefiniować **dualny tensor Maxwella**

$$\tilde{F} := \star F.$$

Poniżej rozważymy pole elektromagnetyczne w trzech wzajem różnych jakościowo sytuacjach (i rolach) fizycznych:

- dynamika maxwellowska w topologicznie trywialnej próżni (źródła pola w nieskończoności);
- dynamika maxwellowska w próżni z wyróżnionym statycznym (względem wyróżnionego uprzednio czasu  $t$ ) rozkładem osobliwości (ładunków) źródłowych w formie punktu lub struny (których obecność roz-2-spójnia wzgl. roz-1-spójnia nośnik tensora Maxwella);
- tło propagacji naładowanego (elektromagnetycznie) punktu materialnego w próżni, tj. źródło siły Lorentza.

Ich elementarna dyskusja doprowadzi nas naturalnym kursem do pojęcia wiązki głównej o grupie strukturalnej  $U(1)$  nad czasoprzestrzenią.

**2.1. Pole w  $\infty$ -spójnej próżni.** Maxwellowską dynamikę pola elektromagnetycznego w próżni bez osobliwości źródłowych określają jednorodne równania Maxwella

$$\begin{cases} dF = 0 & \text{(MV1)} \\ d\tilde{F} = 0 & \text{(MV2)} \end{cases},$$

z których pierwsze jest równoważne starożytnemu układowi równań wektorowych

$$\begin{cases} \text{rot } E^\sharp + \partial_t B = 0 \\ \text{div}_{(3)} B = 0 \end{cases},$$

drugie zaś – takimuz układowi

$$\begin{cases} \text{rot } B - \partial_t E^\sharp = 0 \\ \text{div}_{(3)} E^\sharp = 0 \end{cases}.$$

Lokalnym rozwiązaniem pierwszego z nich, traktowanego jako rodzaj więzów różniczkowych<sup>1</sup>, jest potencjał elektromagnetyczny

$$A(t, x^l) = \phi(t, x^l) dt + A_i^b(t, x^l) dx^i,$$

o składowych: czasowej  $\phi$  i przestrzennej  $A^b$  wyznaczających – odpowiednio – potencjał skalarny  $\phi$  i wektorowy  $A$  pola  $(E, B)$ , znane z opisu antycznego. Drugie z równań ma interpretację równania Eulera–Lagrange’a wynikającego z Zasady Najmniejszego Działania odniesionej do funkcjonału działania na przestrzeni gładkich potencjałów danego wzorem

$$(2.1) \quad S_{\text{Maxwell}} : \Gamma(T^*\mathbb{R}^{1,3}) \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{1,3}} F \wedge \tilde{F}.$$

Funkcjonał powyższy jest niezmienniczy względem fizycznie nieistotnych (przeto arbitralnych) redefinicji potencjału

$$A \mapsto A + d\Lambda = A^\Lambda$$

określanych przez dowolne funkcje  $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^{1,3}; \mathbb{R})$  znikające w nieskończoności i zwanych **transformatami cechowania**. Niezmienniczość tę określamy mianem **niezmienniczości względem wyboru cechowania** (lub po prostu **symetrią cechowania**) elektromagnetyzmu Maxwella. Wkrótce poznamy inną (kohomologiczną) jej odsłonę.

<sup>1</sup>W istocie więzy te mają charakter kohomologiczny.

2.2. **Pola źródeł „naturalnych”.** Włączenie źródeł (ładunków) pola elektromagnetycznego do powyższego opisu wymaga rozszerzenia rozpatrywanej dotychczas klasy tensorów Maxwella i odnośnych potencjałów poprzez uwzględnienie 1-form i 2-form gładkich na dopełnieniu  $\mathbb{R}_{J_e}^{1,3} := \mathbb{R}^{1,3} \setminus \text{supp } J_e$  nośnika  $\text{supp } J_e$  **gęstości 4-prądu elektrycznego**

$$J_e(t, x^l) \equiv J_{\mu\nu\rho}(t, x^l) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho =: \rho(t, x^l) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} j^i(t, x^l) dt \wedge dx^j \wedge dx^k$$

o składowej statycznej (w sensie sprecyzowanym powyżej) określonej przez gęstość skalarną  $\rho$  ładunku elektrycznego oraz o składowej prądowej scharakteryzowanej przez gęstość prądu  $j(t, x^l) = j^i(t, x^l) \partial_i$ . Możemy też zdefiniować **dualną gęstości 4-prądu elektrycznego**

$$\tilde{J}_e = \star J_e.$$

Sposób, w jaki źródła elektryczne determinują czasoprzestrzenny profil pola elektromagnetycznego, opisują równania: (MV1)  $\equiv$  (MV1e) w postaci wcześniejszej oraz (MV2) poprawione według schematu

$$d\tilde{F} = \tilde{J}_e \quad (\text{MV2e}).$$

Równanie to stanowi zwięzły zapis pary tzw. **niejednorodnych równań Maxwella**:

$$\begin{cases} \text{rot } B - \partial_t E^\sharp = j \\ \text{div}_{(3)} E^\sharp = \rho \end{cases}.$$

W przypadku, gdy 1-forma potencjału jest określona *globalnie*, można je otrzymać jako równanie Eulera–Lagrange’a dla funkcjonału działania

$$S_{\text{Maxwell}, J_e} = S_{\text{Maxwell}} + S_{J_e},$$

w którym wypisany wcześniej człon maxwellowski został poprawiony o człon źródłowy

$$S_{J_e} : \Gamma(T^*\mathbb{R}^{1,3}) \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \int_{\mathbb{R}^{1,3}} A \wedge \tilde{J}.$$

Jego niezmienniczość względem wyboru cechowania jest teraz równoważna **zasadzie zachowania ładunku**, wyrażanej jako prawo bezźródłowości gęstości 4-prądu elektrycznego,

$$\text{div } J_e = 0,$$

będące natychmiastową konsekwencją równania (MV2e) oraz tożsamości  $d^2 = 0$ .

Najbardziej elementarnym przykładem konfiguracji źródłowej jest pole elektrostatyczne nieruchomego ładunku punktowego o wartości  $e$  spoczywającego w punkcie  $(0, 0, 0)$  dowolnej hiperpowierzchni  $\Sigma_t \equiv \{t\} \times \mathbb{R}^3$  stałego czasu  $t$ . Nośnikiem odnośnej gęstości 4-prądu elektrycznego

$$J(t, x^l) = e \delta_{\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}} dx \wedge dy \wedge dz$$

jest „wertikalna” linia świata  $\mathbb{R} \times \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^{1,3}$  punktu, w którym spoczywa ładunek. Konfiguracja ta jest trywialną translacją czasową przestrzennego (statycznego) profilu pola elektrycznego określonego na  $\Sigma_t$  warunkiem

$$\text{div}_{(3)} E^b = e \delta_{\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}},$$

który możemy przepisać jako dystrybucyjne równanie Poissona

$$\Delta \phi = e \delta_0^{(3)}$$

na potencjał skalarny  $\phi$ . Bez trudu znajdujemy jego klasyczne rozwiązanie

$$\phi(t, x^l) = -\frac{e}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Istotnie, w każdym punkcie  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  zachodzi

$$\Delta \phi(t, x, y, z) = 0,$$

a ponadto ewaluacja dystrybucji  $\Delta \phi$  na dowolnej funkcji próbnej  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$  daje wynik (wykorzystujemy rezultaty wypisane w Rozdz.1, korzystając z operatorów  $d$  i  $\star$  na  $\mathbb{R}^3$ )

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi, \psi \rangle &\equiv \langle \phi, \Delta \psi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus K(0; \epsilon), (\partial_x, \partial_y, \partial_z))} \star (\phi \star d \star d\psi) \\ &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus K(0; \epsilon), (\partial_x, \partial_y, \partial_z))} (\phi d \star d\psi - \psi d \star d\phi) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus K(0; \epsilon), (\partial_x, \partial_y, \partial_z))} [d(\phi \star d\psi - \psi \star d\phi) - (d\phi \wedge \star d\psi - d\psi \wedge \star d\phi)]. \end{aligned}$$

Na mocy tożsamości

$$\omega_1 \wedge \star \omega_2 = \omega_2 \wedge \star \omega_1,$$

ślusznej dla dowolnej pary  $\omega_1, \omega_2$   $k$ -form na rozmaitości metrycznej wyposażonej w operator Hodge'a  $\star$ , 2-forma w drugim nawiasie jest równa zeru, przeto – korzystając z twierdzenia Stokes'a – możemy zapisać wynik ewaluacji w zredukowanej postaci (w naturalnych zmiennych kulistych)

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi, \psi \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{(\partial K(0; \epsilon), (\partial_\varphi, \partial_\theta))} (\phi \star d\psi - \psi \star d\phi) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \partial_\theta \lrcorner \partial_\varphi \lrcorner \left( \partial_r \psi \star dr + \partial_\theta \psi \star d\theta + \partial_\varphi \psi \star d\varphi + \frac{\psi}{\epsilon} \star dr \right) (\epsilon, \theta, \varphi). \end{aligned}$$

Wziąwszy pod uwagę tożsamość<sup>2</sup>

$$X_{n-p} \lrcorner X_{n-p-1} \lrcorner \dots \lrcorner X_1 \lrcorner \star \omega = \star (\omega \wedge X_1^\flat \wedge X_2^\flat \wedge \dots \wedge X_{n-p}^\flat),$$

śluszną dla dowolnej  $p$ -formy  $\omega$  oraz pól wektorowych  $X_1, X_2, \dots, X_{n-p}$  na rozmaitości metrycznej wyposażonej w operator Hodge'a  $\star$ , oraz znaną postać euklidesowego tensora metrycznego na  $\mathbb{R}^3$  w zmiennych kulistych,

$$g(r, \theta, \varphi) = dr \otimes dr + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi),$$

obliczamy

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi, \psi \rangle &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e \epsilon^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \star \left[ \left( \left( \partial_r \psi + \frac{\psi}{\epsilon} \right) dr + \partial_\theta \psi d\theta + \partial_\varphi \psi d\varphi \right) \wedge d\varphi \wedge d\theta \right] (\epsilon, \theta, \varphi) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e \epsilon^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \frac{1}{\epsilon^2 \sin \theta} \left( \partial_r \psi + \frac{\psi}{\epsilon} \right) (\epsilon, \theta, \varphi) \star \Omega_g \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta (\epsilon \partial_r \psi + \psi) (\epsilon, \theta, \varphi), \end{aligned}$$

czyli też ostatecznie – wobec gładkości  $\psi$  w  $(0, 0, 0)$  –

$$\langle \Delta \phi, \psi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta [\psi(\epsilon, \theta, \varphi) - \psi(0)] + e \psi(0) = e \psi(0) \equiv \left\langle e \delta_0^{(3)}, \psi \right\rangle.$$

Koniec końców odnajdujemy zatem znany coulombowski profil pola elektrostatycznego wytworzonego przez źródło punktowe,

$$E(t, r, \theta, \varphi) = \frac{e}{4\pi r^2} dr.$$

**2.3. Pole ładunku magnetycznego.** Nieobecność punktowych ładunków magnetycznych (monopoli magnetycznych), która ma status empirycznego prawa Przyrody, łamie naturalną próżniową symetrię między polem elektrycznym i magnetycznym będącą bezpośrednią konsekwencją samodualnego charakteru równań Maxwella (MV1) i (MV2) (tj. ich niezmienniczości względem zamiany  $F \leftrightarrow \star F$ ). Restytucja samodualności elektromagnetyzmu na gruncie rozważań teoretycznych<sup>3</sup> wymaga uwzględnienia magnetycznych źródłowych równań Maxwella, które otrzymujemy – jak poprzednio – z (MV1) i (MV2), tym razem jednak zachowując drugie z nich, (MV2)  $\equiv$  (MV2m), poprawiając natomiast drugie według schematu

$$dF = j_m \quad (\text{MV1m}).$$

Formalnie rzecz biorąc (i przy tych samych założeniach zawężających co w przypadku źródeł elektrycznych), równania te można traktować jako równania Eulera–Lagrange'a dla funkcjonału działania otrzymanego z funkcjonału Maxwella (2.1) poprzez dodanie członu źródłowego, w którym do 3-formy gęstości 4-prądu magnetycznego  $j_m$  sprzęga się 1-forma potencjału *dualnego* tensora Maxwella – ta istnieje (przynajmniej lokalnie) na mocy równania (MV2m). Zwykle jednak opisuje się pole wytworzone przez 4-prąd magnetyczny przy użyciu tej samej 1-formy potencjału  $A$  co w przypadkach poprzednich, nieosobliwej na dopełnieniu  $\text{supp } j_m$ , rozwiązując równanie dystrybucyjne (MV1m). Zastosujemy ten schemat logiczny do najbardziej elementarnego stacjonarnego rozkładu ładunku magnetycznego, jakim jest **monopol magnetyczny Diraca**, po raz pierwszy rygorystycznie zanalizowany w pracy [Dir31] a opisany formułą

$$j_m(t, x^i) = \mu \delta_{\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\}} dx \wedge dy \wedge dz.$$

<sup>2</sup>Jest to tożsamość definiująca operator Hodge'a w ujęciu J.-L. Koszula, patrz: Ref. [Kos57].

<sup>3</sup>Układem rzeczywistym najbliższym punktowemu ładunkowi magnetycznemu jest pół-nieskończony solenoid wychodzący z punktu, który traktujemy jako położenie ładunku.

Konfiguracja pola indukcji magnetycznej, której jest on źródłem, stanowi trywialną translację wzdłuż osi czasu  $t$  profilu pola nad  $\Sigma_t$ , który spełnia równanie dystrybucyjne

$$\operatorname{div}_{(3)} B = \mu \delta_0^{(3)} =: \rho_m.$$

Jego rozwiązaniem jest pole wektorowe

$$(2.2) \quad B(t, x^l) = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{x^i}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \partial_i.$$

Istotnie, w każdym punkcie  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  stwierdzamy równość

$$\operatorname{div}_{(3)} B(t, x, y, z) = 0,$$

ewaluacja zaś dystrybucji  $\operatorname{div}_{(3)} B$  na dowolnej funkcji próbnej  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$  daje wynik

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}_{(3)} B, \psi \rangle &\equiv -\langle B, \lrcorner \operatorname{grad} \psi \rangle = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus K(0; \varepsilon), (\partial_x, \partial_y, \partial_z))} \star(B \lrcorner d\psi) \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus K(0; \varepsilon), (\partial_x, \partial_y, \partial_z))} d\psi \wedge \star B^b \\ &\equiv -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus K(0; \varepsilon), (\partial_x, \partial_y, \partial_z))} (d\psi \wedge \star B^b + \psi d \star B^b) \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{(\mathbb{R}^3 \setminus K(0; \varepsilon), (\partial_x, \partial_y, \partial_z))} d(\psi \star B^b) \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{(\partial K(0; \varepsilon), (\partial_\varphi, \partial_\theta))} \psi \star B^b \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu}{4\pi \varepsilon^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \psi(\varepsilon, \theta, \varphi) \partial_\theta \lrcorner \partial_\varphi \lrcorner \star dr \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu \varepsilon^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \psi(\varepsilon, \theta, \varphi) \star (dr \wedge d\varphi \wedge d\theta) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \psi(\varepsilon, \theta, \varphi) \\ &= \mu \psi(0) \equiv \langle \mu \delta_0^{(3)}, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Możemy zatem – celem dalszej analizy – wypisać tensor Maxwella pola ładunku magnetycznego Diraca w zmiennych kulistych,

$$(2.3) \quad F(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\mu}{4\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\varphi.$$

W poszukiwaniu potencjału powyższego pola magnetostatycznego poza punktem osobliwym  $(0, 0, 0)$  natrafiamy na naturalne pytanie o istnienie *globalnego* takiego obiektu na  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Negatywnej odpowiedzi dostarcza następujące rozumowanie, wykorzystujące formuły całkowe wpisane w Rozdziale 1: Oto założmy istnienie globalnego potencjału wektorowego dla wektora indukcji magnetycznej (2.2) na sferze jednostkowej  $\partial K(0; 1)$ ,

$$B \lrcorner \partial K(0; 1) = \operatorname{rot} A,$$

a wtedy

$$0 \neq \mu = \mathcal{Q}_B(K(0; 1)) = \Phi(B; \partial K(0; 1)) \equiv \Phi(\operatorname{rot} A; \partial K(0; 1)) = W(A; \partial^2 K(0; 1)) \equiv 0. \quad \dagger$$

Nieistnienie globalnego potencjału pola monopola jest konsekwencją nieściągłości (a ściślej – nie-2-spójności) jego nośnika. Minimalnym zabiegiem topologicznym przywracającym ściągłość  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  jest wycięcie z tej rozmaitości dowolnej krzywej pół-nieskończonej o początku w punkcie 0. Jako że wszystkie krzywe rzeczonoego typu (bez samoprzecięć) są homotopijnie równoważne, do dalszych rozważań możemy bez straty ich ogólności wybrać półproste

$$Z_\pm = \{ (0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \mid \pm t \geq 0 \}.$$

Na rozmaitości

$$D_+ := \mathbb{R}^3 \setminus Z_-$$

możemy zdefiniować 1-formę gładką<sup>4</sup>

$$A_+(r, \theta, \varphi) := \frac{\mu}{4\pi} (1 - \cos \theta) d\varphi,$$

<sup>4</sup>Zauważmy, że „prostsza” postać  $-\frac{\mu}{4\pi} \cos \theta d\varphi$  byłaby źle określona na  $Z_+ \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus Z_-$ .

której (dystrybucyjna) pochodna zewnętrzna spełnia równość

$$dA_+(r, \theta, \varphi) = F(t, r, \theta, \varphi) + \mu \delta_{Z_-},$$

zapisaną w terminach prądu (dystrybucyjnego)  $\delta_{Z_-}$  o własności definiującej

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta_{Z_-} \wedge \psi = \int_{Z_-} \psi$$

względem dowolnej 1-formy  $\psi$  na  $\mathbb{R}^3$  o zwartym nośniku<sup>5</sup>. Jak jasno widać,  $A_+$  jest potencjałem pola  $F$  na obszarze  $D_-$ . Dla uczynienia opisu potencjalnego pola monopola na  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  kompletnym wystarczy jeszcze podać jego (lokalny) potencjał na dowolnym obszarze zawierającym  $Z_- \setminus \{0\}$ , np. na rozmaitości

$$D_- := \mathbb{R}^3 \setminus Z_+$$

na której definiujemy 1-formę gładką

$$A_-(r, \theta, \varphi) := -\frac{\mu}{4\pi} (1 + \cos \theta) d\varphi,$$

o pochodnej zewnętrznej

$$dA_-(r, \theta, \varphi) = F(t, r, \theta, \varphi) - \mu \delta_{Z_+},$$

zapisanej w terminach prądu  $\delta_{Z_+}$  zdefiniowanego analogicznie do  $\delta_{Z_-}$ . Podkreślmy dla porządku i dla ustalenia punktu odniesienia dla przyszłych naszych rozważań, że w obszarze  $\mathbb{R}^3 \setminus (Z_+ \cup Z_-)$ , w którym istnieją oba potencjały, ich różnica

$$(A_+ - A_-)(r, \theta, \varphi) := \frac{\mu}{2\pi} d\varphi, \quad r \neq 0, \theta \in ]0, \pi[$$

wyraża się *lokalnie* 1-formą dokładną.

### 3. MONOPOL MAGNETYCZNY – OD OPISU LOKALNEGO DO OPISU GLOBALNEGO

W ostatniej części naszej dyskusji monopola Diraca zmienimy punkt widzenia i potraktujemy wytworzone przezeń pole elektromagnetyczne niestacjonarnie, jako tło propagacji cząstki obdarzonej ładunkiem *elektrycznym*. Wnikliwa analiza konsekwencji nielokalnego charakteru potencjału, możliwego dzięki roz-2-spójnieniu hiperpowierzchni stałego czasu przez punktowe źródło ładunku magnetycznego, doprowadzi nas do pojęcia kołowej wiązki głównej z powiązaniem nad czasoprzestrzenią. Pojęcie to odgrywa fundamentalną rolę w modelowaniu efektów topologicznych w teoriach pola z cechowaniem (do tej kategorii należą wszystkie teorie oddziaływań fundamentalnych konstruowane w paradygmacie oddziaływania punktowego mediowanego przez tzw. bozony pośredniczące, jak również – w sensie szerszym – teoria strun i M-teoria w sformułowaniu lagranżowskim), a nadto stanowi podstawowy instrument formalny w jednym z podejść do zagadnienia kwantowania lagranżowskiej teorii klasycznej, jakim jest *kwantowanie geometryczne*<sup>6</sup>.

Celem naszym będzie zrozumienie struktury różniczkowo-geometrycznej koniecznej do zdefiniowania funkcjonału działania

$$S : C^\infty([t_0, t_1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto S[x]$$

określonego na przestrzeni gładkich ścieżek w rozmaitości pseudoriemannowskiej  $(M, g)$  (z metryką o fizycznej sygnaturze  $(1, 3)$  modelującą pole grawitacyjne), dla którego zasada najmniejszego działania przy warunku brzegowym Dirichleta<sup>7</sup> odtwarza (relatywistyczną) formułę Lorentza

$$m g_{\lambda\mu} \left( \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}(\tau) + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} (x(\tau)) \frac{dx^\nu}{d\tau}(\tau) \frac{dx^\rho}{d\tau}(\tau) \right) = q F_{\lambda\mu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1] =: \Gamma \subset \mathbb{R} \quad (3.1)$$

<sup>5</sup>W zmiennych kartezjańskich możemy zapisać wprost  $\delta_{Z_-}(x, y, z) = \frac{\theta(-z)\delta(x)\delta(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} dx \wedge dy$ , stosując konwencję funkcji uogólnionych

<sup>6</sup>Doskonałego i/bo elementarnego wprowadzenia do tej teorii dostarcza monografia [Woo92].

<sup>7</sup>Można narzucić na odwzorowania także inne warunki brzegowe, które zapewnią stacjonarność funkcjonału działania przy spełnionych równaniach Eulera–Lagrange’a wzdłuż ścieżki.

na 4-siłę działającą na punkt materialny o masie spoczynkowej  $m$  i ładunku elektromagnetycznym  $q$ , z przyczynkiem od nietrywialnego tła grawitacyjnego  $g_{\mu\nu}$  determinowanym przez tzw. **symbole Christoffela**<sup>8</sup>

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} (g^{-1})^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}).$$

Łatwo przekonujemy się, że stosowny funkcjonal w przypadku, gdy w obszarze propagacji dany jest gładki potencjał  $A$  tensora Maxwella, to

$$S[x] = \frac{m}{2} \int_\Gamma \text{Vol}(\Gamma) g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \int_\Gamma x^* A,$$

gdzie  $\widehat{t}(\tau) = \partial_\tau$  to wektor styczny do linii świata  $\Gamma$  w chwili  $\tau$  czasu własnego,  $\text{Vol}(\Gamma)(\tau) = d\tau$  to forma objętości<sup>9</sup> na  $\Gamma$ , natomiast  $q$  jest ładunkiem elektrycznym punktu materialnego. Pojawia się naturalne pytanie o uogólnienie powyższej definicji na przypadek topologicznie nietrywialnego tła elektromagnetycznego. Punktem wyjścia i wskazówką do ustalenia odpowiedzi na to pytanie będzie wypisana powyżej formuła słuszna w szczególnym przypadku tła topologicznie trywialnego. Celem dalszego uproszczenia rozważań przyjmujemy, że obrazem linii świata  $[t_0, t_1]$  względem zanurzenia jest krzywa zamknięta, tj.

$$x(t_0) = x(t_1),$$

będąca wynikiem złożenia (w grupoidzie ścieżek w  $M$ ) dwóch ścieżek (czasopodobnych) wzajem przeciwnych, z których jedna zaczyna się w punkcie  $x(t_0)$  i kończy w  $x(t_s)$  dla pewnego  $t_s \in [t_0, t_1]$ , druga zaś zaczyna się w punkcie  $x(t_s)$  i kończy w  $x(t_0)$ . Taka konstrukcja trajektorii  $x(\Gamma)$  oddala podejrzenie o złamanie zasady przyczynowości i tym samym nadaje sens naszemu założeniu. Obliczenie funkcjonału działania na  $x(\Gamma)$  zyskuje więc – wobec addytywności całki Riemanna (względem obszaru całkowania) – interpretację różnicy wartości przyjmowanych przez ten funkcjonal na dwóch trajektoriach łączących punkty  $x(t_0)$  i  $x(t_s)$ . Wyrażenia tego typu odgrywają zasadniczą rolę w rozważaniach kwantomechanicznych dotyczących prawdopodobieństwa wyboru trajektorii przez punkt materialny o dynamice (klasycznej) opisaną przez funkcjonal działania  $S$ . Należy bardzo dobitnie podkreślić, że w rozwijanym przez nas formalizmie możliwy jest także spójny opis trajektorii otwartych (a nie tylko ich różnic), interpretacja geometryczna wyniku wymaga jednak zrozumienia (prostszych) własności funkcjonału  $S$  ograniczonego do pętli  $x \in C^\infty(\mathbb{S}^1; M) \equiv LM$ .

Spróbujmy zatem skonstruować funkcjonal działania na przestrzeni pętli  $LM$  o tej własności (jedynej istotnej), że zasada najmniejszego działania zastosowana do niego daje równania (3.1) jako równania Eulera–Lagrange’a. Przy tym na gruncie naszej dotychczasowej dyskusji nie możemy zakładać, że pętłe leżą w obszarze istnienia gładkiego potencjału pola elektromagnetycznego<sup>10</sup>. Możemy natomiast wybrać otwarte pokrycie  $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  ( $I$  jest zbiorem indeksów) rozmaitości  $M$  (tj.  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i = M$ ) o następującej własności: każde z niepustych przecięć wielokrotnych

$$\emptyset \neq \mathcal{O}_{i_1} \cap \mathcal{O}_{i_2} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{i_n} \equiv \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

elementów pokrycia  $\mathcal{O}$  jest zbiorem ściągającym – takie pokrycie bywa nazywane **dobrym** i daje nam do ręki rodzinę lokalnych potencjałów (w ogólności żaden z nich nie przedłuża się do gładkiej 1-formy na całej rozmaitości  $M$ )

$$F \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} =: dA_i, \quad A_i \in \Gamma(\Gamma^* \mathcal{O}_i).$$

Uczyniwszy to, możemy następnie dokonać takiego podziału linii świata  $\mathbb{S}^1$  na odcinki  $e$  stykające się w punktach  $v$ , zwanego **tesselizacją** i oznaczanego symbolem  $\Delta_{\mathbb{S}^1} = \{e \subset \mathbb{S}^1, v \in \mathbb{S}^1\}$  (zachodzi, rzecz jasna, równość  $\bigcup_{e \in \Delta_{\mathbb{S}^1}} e = \mathbb{S}^1$ ), aby był spełniony warunek

$$\forall_{e \in \Delta_{\mathbb{S}^1}} \exists_{i \in I} : x(e) \subset \mathcal{O}_i.$$

<sup>8</sup>Ich interpretacja geometryczna zostanie przedstawiona w dalszej części wykładu. Na tym etapie ograniczymy się do wysłowienia następującej obserwacji: Wypisane równania ruchu masywnej cząstki naładowanej w szczególnym przypadku  $q = 0$  opisują w sposób parametryczny krzywe geodezyjne metryki  $g$ . Tym samym określają one naturalne geometryczne uogólnienie natężenia pola grawitacyjnego na przypadek pola o nietrywialnej zależności od punktu czasoprzestrzeni.

<sup>9</sup>Wypisana tu postać formy objętości nie uwzględnia nietrywialnej metryki na linii świata. Istnieje ogólniejsze sformułowanie rozważanej teorii, zadawane przez tzw. funkcjonal (typu) Poljakowa, który pozwala uwzględnić metrykę na linii świata (po jej tzw. *wycechowaniu* uzyskujemy wypisaną postać funkcjonału działania), patrz: [Pol98].

<sup>10</sup>Abstrahujemy w tym momencie od przypadku monopola Diraca, w nim bowiem zawsze możemy dobrać potencjał tak, by jego nośnik objął całą pętlę. Myślimy raczej o ogólniejszej sytuacji, kiedy czasoprzestrzeń ma zupełnie dowolną topologię, w szczególności nie musi być 1-spójna. O tym, że rozważania takie nie są bynajmniej pozbawione sensu empirycznego, przekonuje lektura klasycznej pracy [AB59] Aharonova i Bohma.

Zachodzi też oczywiście

$$\forall v \in \Delta_{\mathbb{S}^1} \exists i_v \in I : x(v) \in \mathcal{O}_{i_v}.$$

Triangulację o podanej cesze określimy mianem **podporządkowanej pokryciu**  $\mathcal{O}$ . Tak przygotowani możemy już wypisać pierwszą propozycję funkcjonału działania:

$$S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] := \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in \Delta_{\mathbb{S}^1}} \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e}.$$

Kłopot z powyższą definicją polega na jej zależności od dokonanych przez nas *całkowicie arbitralnych* wyborów: otwartego pokrycia (możemy je np. poddawać dalszemu rozdrabnianiu bez utraty jego „dobroci”), lokalnego potencjału  $A_{i_e}$  (jest on określony jedynie z dokładnością do lokalnie gładkiej 1-fomy dokładnej) oraz tesselizacji podporządkowanej danemu pokryciu dobremu (wszak możemy przesuwając wierzchołki tesselizacji tak, by ich obrazy pozostawały w wyjściowych dwukrotnych przecięciach elementów pokrycia). Okazuje się, że zależności od wszystkich tych wyborów są ze sobą powiązane (ćwiczenie!), skupimy się zatem na tym ostatnim. Rozważmy wierzchołek  $v_{12}$ , w którym spotykają się odcinki  $e_1$  (wchodzący w sensie orientacji indukowanej z  $\mathbb{S}^1$ ) i  $e_2$  (wychodzący). Wybierzmy punkt  $v'_{12} \in e_2 \setminus \{v_{12}\}$  tak, by było  $x(v'_{12}) \in \mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}} (\ni x(v'_{12}))$  i utwórzmy nową tesselizację  $\Delta'_{\mathbb{S}^1}$  zamieniając w  $\Delta_{\mathbb{S}^1}$  trójkę  $(e_1, e_2, v_{12})$  na trójkę  $(e'_1 = e_1 \cup \delta, e'_2 = e_2 \setminus \delta \cup \{v'_{12}\}, v'_{12})$ , gdzie  $\delta$  jest odcinkiem łączącym  $v_{12}$  z  $v'_{12}$ . Porównując wartości funkcjonału działania otrzymane dla każdej z dwu tesselizacji, otrzymujemy

$$S_{\Delta'_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] - S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] = q \int_{\delta} (x \upharpoonright_{\delta})^* (A_{i_{e_1}} - A_{i_{e_2}}).$$

Zważywszy, że  $x(\delta) \subset \mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}$ , mamy w istocie do czynienia z 1-formą  $(A_{i_{e_1}} - A_{i_{e_2}}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}}$ . Jednakowoż wobec ściągłości każdego (niepustego) dwukrotnego przecięcia  $\mathcal{O}_{ij}$ ,  $i, j \in I$  znajdujemy na nim lokalnie gładką funkcję  $f_{ij} = -f_{ji}$  spełniającą równość

$$(3.2) \quad (A_j - A_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} =: df_{ij}, \quad f_{ij} \in C^\infty(\mathcal{O}_{ij}; \mathbb{R}).$$

(Zauważmy, w nawiązaniu do poprzedniej uwagi o zależności naszej definicji funkcjonału działania od dokonanych wyborów, że powyższa dyskusja dostarcza zarazem *pełnej* kwantyfikacji dowolności wyboru potencjału lokalnego  $A_i$  na ustalonym zbiorze  $\mathcal{O}_i$ .) Wykorzystując poczynioną obserwację w połączeniu z twierdzeniem Stokes'a, możemy zatem zapisać

$$S_{\Delta'_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] - S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] = q \int_{\delta} (x \upharpoonright_{\delta})^* df_{i_{e_2} i_{e_1}} = q \int_{\partial \delta} (x \upharpoonright_{\delta})^* f_{i_{e_2} i_{e_1}} \equiv q (f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v_{12})).$$

Wnioskujemy, że różnica porównywanych funkcjonałów zależy w sposób *funkcjonalny* (a nieokreślony) od arbitralnego wyboru położenia wierzchołków tesselizacji, co jest sytuacją niedopuszczalną (taka zależność miałaby wpływ na dynamikę). Zanim ją naprawimy w sposób podpowiadany wprost przez przeprowadzony powyżej rachunek, przyjrzyjmy się bliżej funkcjom  $f_{ij}$ . Oto dla każdego (niepustego) trzykrotnego przecięcia  $\mathcal{O}_{ijk}$ ,  $i, j, k \in I$  otrzymujemy tożsamość

$$d(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = (A_k - A_j - A_k + A_i + A_j - A_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = 0,$$

która wobec ściągłości przecięcia oznacza istnienie lokalnych stałych  $N_{ijk} = N_{[ijk]}$  spełniających równość

$$(3.3) \quad (f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = N_{ijk}, \quad N_{ijk} \in \mathbb{R}.$$

Wykorzystując ostatnią równość, która implikuje – między innymi –

$$f_{i_{e_2} i_{e_1}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}} = (f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}} + N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}$$

możemy wypisać poprawioną wersję funkcjonału działania:

$$S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] := \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in \Delta_{\mathbb{S}^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right)$$

w następującej konwencji:  $\varepsilon_{ev} = 1$ , gdy  $v$  jest na końcu  $e$  (w sensie indukowanej orientacji  $e$ ) i  $\varepsilon_{ev} = -1$ , gdy  $v$  jest na początku  $e$ . Zmiana położenia wierzchołka tesselizacji zmienia wartość poprawionego działania o stałą

$$\begin{aligned} S_{\Delta'_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] - S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] &= q (f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v_{12})) \\ &+ q (f_{i_{e_1} i_{v'_{12}}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{v'_{12}}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12})) \end{aligned}$$



$$= q (N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v'_{12}}} - N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}) \in \mathbb{R},$$

co w teorii klasycznej jest całkowicie do przyjęcia. Zauważmy, że obecna definicja jest też niezmiennicza (w sensie szerszym, sprecyzowanym wyżej) ze względu na dopuszczalne redefinicje potencjałów lokalnych,  $A_i \mapsto A'_i$ , które wobec ściągłości  $\mathcal{O}_i$  wymagają istnienia lokalnie gładkich funkcji  $g_i$  spełniających równości

$$(3.4) \quad A'_i - A_i =: db_i, \quad b_i \in C^\infty(\mathcal{O}_i; \mathbb{R}).$$

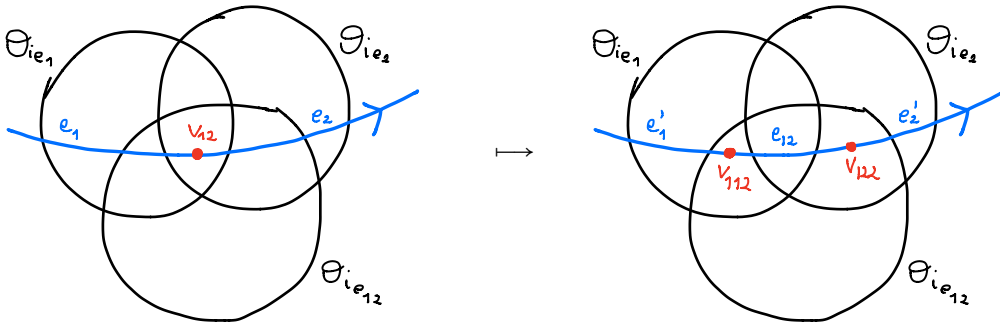
Istotnie, takiej redefinicji musi towarzyszyć redefinicja funkcji  $f_{ij}$ ,

$$(3.5) \quad f'_{ij} = f_{ij} + (b_j - b_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} + d_{ij}, \quad d_{ij} \in \mathbb{R},$$

która pozwala uzgodnić formuły (3.2) z ich odpowiednikami dla obiektów primowanych, a zatem zastąpienie obiektów nieprimowanych primowanymi w zapisie  $S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}$  jest źródłem poprawki

$$\begin{aligned} S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)'}[x] &\equiv \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) g(\hat{t}, \hat{t}) + q \sum_{e \in \Delta_{\mathbb{S}^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A'_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f'_{i_e i_v} \circ x(v) \right) \\ &= S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in \Delta_{\mathbb{S}^1}} \left[ \int_{\partial e} b_{i_e} \circ x + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} ((b_{i_v} - b_{i_e}) \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \right] \\ &\equiv S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in \Delta_{\mathbb{S}^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} (b_{i_e} \circ x(v) + (b_{i_v} - b_{i_e}) \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \\ &\equiv S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in \Delta_{\mathbb{S}^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} (b_{i_v} \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \\ &= S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in \Delta_{\mathbb{S}^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} d_{i_e i_v}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika stąd, że każdy wierzchołek jest zarazem końcem jednego z odcinków tesselizacji ( $\varepsilon_{ev} = 1$ ), jak i początkiem jego następnika ( $\varepsilon_{ev} = -1$ ). Naturalnie, także dopuszczalne redefinicje funkcji  $f_{ij}$  cofniętych do wierzchołków tesselizacji niezwiązane z redefinicjami potencjałów, czyli przesunięcia o stałe (lokalne), nie mają fizycznie obserwowalnych konsekwencji (klasycznie), pozostaje zatem upewnić się, że nasza nowa definicja funkcjonału działania jest niezmiennicza ze względu na rozdrabnianie użytego w niej pokrycia  $\mathcal{O}$  i skorelowane z nim rozdrobnienie tesselizacji linii świata, wzgl. na rozdrabnianie samej tylko tesselizacji na odcinku, którego obraz względem zanurzenia  $x$  leży w przecięciu więcej niż dwóch elementów wyjściowego pokrycia. Rzecz jasna, wystarczy w tym celu sprawdzić zmianę wartości funkcjonału  $S^{(1)}$  przy elementarnym przejściu zilustrowanym na Rys. 1.



RYSUNEK 1. Rozdrobnienie tesselizacji fragmentu (zorientowanej) linii świata w obszarze czasoprzestrzeni pokrytym przez trzy zbiory otwarte:  $\mathcal{O}_{i_{e_1}}, \mathcal{O}_{i_{e_2}}$  i  $\mathcal{O}_{i_{e_{12}}}$ .

Oznaczywszy tesselizację uzyskaną w wyniku zobrazowanego rozdrobnienia (z prawej strony) symbolem  $\Delta_{\mathbb{S}^1}^{\text{ref}}$ , wyznaczamy

$$\begin{aligned} S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}^{\text{ref}}}^{(1)}[x] - S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] &= q \left( \int_{e_{12} \setminus e_2} (x \upharpoonright_{e_{12} \setminus e_2})^* (A_{i_{e_{12}}} - A_{i_{e_1}}) + \int_{e_{12} \setminus e_1} (x \upharpoonright_{e_{12} \setminus e_1})^* (A_{i_{e_{12}}} - A_{i_{e_2}}) \right) \\ &\quad + f_{i_{e_1} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) - f_{i_{e_{12}} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_{12}} i_{v_{122}}} \circ x(v_{122}) - f_{i_{e_2} i_{v_{122}}} \circ x(v_{122}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -f_{i_{e_1} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12})) \\
= & q (f_{i_{e_1} i_{e_{12}}} \circ x(v_{12}) - f_{i_{e_1} i_{e_{12}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_2} i_{e_{12}}} \circ x(v_{122}) - f_{i_{e_2} i_{e_{12}}} \circ x(v_{12})) \\
& + f_{i_{e_1} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) - f_{i_{e_2} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_1} i_{v_{122}}} \circ x(v_{122}) - f_{i_{e_2} i_{v_{122}}} \circ x(v_{122}) \\
& - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_{12}} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) - f_{i_{e_{12}} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12})) \\
= & q (N_{i_{e_1} i_{e_{12}} i_{v_{12}}} - N_{i_{e_2} i_{e_{12}} i_{v_{12}}} - N_{i_{e_1} i_{e_{12}} i_{v_{112}}} + N_{i_{e_1} i_{e_{12}} i_{v_{122}}}) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Możemy zatem uznać otrzymany tu wynik poprawiania wyjściowej definicji funkcjonału działania za satysfakcjonujący i przyjąć jako rygorystyczną definicję tegoż funkcjonału dla zamkniętej linii świata (o wskazanym wcześniej statusie teoretycznym) w ogólnej sytuacji topologicznej formułę

$$(3.6) \quad S[x] = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in \Delta_{\mathbb{S}^1}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right).$$

Z punktu widzenia mechaniki klasycznej problem, przed jakim stanęliśmy na początku niniejszego rozdziału, można uznać za (konstruktywnie) rozwiązany, a uzyskany opis zjawiska propagacji naładowanego elektrycznie punktu materialnego w topologicznie nietrywialnym polu elektromagnetycznym – za rygorystyczny i kompletny. Ażebymy postąpić dalej w rozpoczętej tu rekonstrukcji struktury różniczkowo-geometrycznej stowarzyszonej z polem elektromagnetycznym, musimy wyjść poza ramy formalne teorii klasycznej. Z wielu dostępnych schematów przejścia do opisu zjawisk kwantowych o ustalonej dynamice klasycznej najbardziej adekwatnym i intuicyjnym (choć zarazem w ogólności czysto formalnym, wręcz heurystycznym, więc wymagającym zasadniczego doprecyzowania i nietrywialnych konstrukcji nadających mu sens matematyczny, jak choćby konstrukcji stosownej miary na przestrzeni funkcjonalnej pól klasycznych, czyli w naszym przypadku – przestrzeni Frécheta zanurzeń  $x : \Gamma \rightarrow M$  linii świata w czasoprzestrzeni) jawi się schemat „sumy po historiach” Diraca–Feynmana, zapostulowany pierwotnie przez Diraca w pracy [Dir33] z 1933 r., a następnie podchwycony i rozwinięty przez Feynmana w jego pracy doktorskiej z 1942 r. pt. „The Principle of Least Action in Quantum Mechanics”, patrz: [Bro05], i wreszcie sformułowany w wersji zasadniczo (konceptualnie) kompletnej w pracy [Fey48] tego ostatniego z roku 1948. W tym schemacie w teorii, która w reżymie klasycznym jest opisywana przez funkcjonał działania  $S$ , naturalnej miary prawdopodobieństwa zajścia procesu ewolucji obiektu fizycznego (np. punktu materialnego) od stanu początkowego (np. zadawanego przez położenie i pęd punktu) do stanu końcowego dostarcza suma (lub ogólniej całka) ważona po *wszystkich* konfiguracjach interpolujących między oboma stanami, w tym także po konfiguracjach nieklasycznych (tj. takich, które nie minimalizują funkcjonału działania), przy czym waga, z jaką dana konfiguracja  $x$  wchodzi do sumy, jest dana przez **amplitudę Diraca–Feynmana**<sup>11</sup>

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}[x] := e^{iS[x]},$$

zapisaną tutaj w naturalnych jednostkach, w których  $\hbar = 1$ . W dalszej części wykładu przeanalizujemy konsekwencje dla naszej konstrukcji lokalnego opisu topologicznie nietrywialnego pola elektromagnetycznego przyjęcia paradygmatu Diraca–Feynmana, który wyrażeniu  $\mathcal{A}_{\text{DF}}[x]$  nadaje rangę pierwszoplanową, co w wielu konkretnych modelach fizycznych pozwala przerzucić pomost logiczny między klasycznym opisem zjawisk w terminach kategorii „gładkich” a ich opisem kwantowym.

O ile traktowanie funkcjonału działania wyłącznie jako obiektu pomocniczego, którego sens fizyczny wyczerpuje określenie zbioru jego punktów krytycznych (co pozwala utożsamić funkcjonały o tym samym zbiorze punktów krytycznych), dopuszcza redefinicję funkcjonału o *dowolną* stałą addytywną dla skompensowania jego zależności od arbitralnych wyborów, jakich wymaga konstrukcja członu ładunkowego w terminach lokalnych danych pola elektromagnetycznego, o tyle nadanie mu statusu fazy determinującej interferencję rozmaitych historii ewolucji obiektu fizycznego każe nam narzucić dodatkowe więzy na dopuszczalne poprawki do raz wyznaczonej wartości funkcjonału działania dla danej trajektorii. Musimy mianowicie zażądać, iżby funkcjonał przez nas konstruowany był określony jednoznacznie z dokładnością do stałych poprawek z wyróżnionego podzbioru  $2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ , co zapewni ścisłą niezmienniczość kwantomechanicznych amplitud DF. W kontekście dotychczasowych naszych rozważań implikuje to dodatkowe warunki

$$(3.7) \quad \forall \mathcal{O}_{ijk \neq \emptyset} : qN_{ijk} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \wedge \quad \forall \mathcal{O}_{ij \neq \emptyset} : qd_{ij} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

<sup>11</sup>Bezpośredni „dowód” równoważności sformułowania feynmanowskiego z kanonicznym schematem kwantowania w obrazie hamiltonowskim dla *hamiltonianów kwadratowych w pędach* został przedstawiony w pracy [FH65].

Zwykle wyraża się je przy użyciu lokalnie gładkich odwzorowań  $g_{ij}$  oraz  $h_i$  o wartościach w  $U(1) = \{ u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1 \}$  powiązanych z  $f_{ij}$  oraz  $g_i$  wzorami

$$g_{ij} := e^{i q f_{ij}}, \quad h_i := e^{i q b_i},$$

dla których otrzymujemy tożsamości

$$(g_{jk}(\cdot) \cdot g_{ik}(\cdot)^{-1} \cdot g_{ij}(\cdot)) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = 1$$

oraz

$$g'_{ij}(\cdot) = (h_i(\cdot)^{-1} \cdot g_{ij}(\cdot) \cdot h_j(\cdot)) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}.$$

Podkreślmy: wypisane warunki wiążą ze sobą ładunek elektryczny  $q$  punktu materialnego z elementem  $N_{ijk}$  opisu zewnętrzno pola elektromagnetycznego. Ten pierwszy jest w Przyrodzie pewną całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego  $e$  elektronu. Tym drugim zajmiemy się poniżej.

Okazuje się, że pierwszy z wypisanych warunków ma nader prostą interpretację geometryczną, której treść określa się mianem **warunku Diraca skwantowania ładunku**. Otóż wybierzmy dowolną dwuwymiarową powierzchnię zamkniętą  $\Sigma \subset M$ ,  $\partial\Sigma = \emptyset$  i obliczmy strumień pola elektromagnetycznego przez tę powierzchnię, dokonawszy uprzednio jej tesselizacji, tj. podzieliwszy ją na plakietki  $p$  stykające się wzdłuż krawędzi  $e$ , które z kolei łączą się w wierzchołkach  $v$ , przy czym możemy założyć, że w każdym wierzchołku zbiegają się trzy krawędzie<sup>12</sup>, czyli mamy do czynienia z tesselizacją o strukturze plastra miodu. Tesselizację, którą będziemy oznaczać symbolem  $\Delta_\Sigma$ , wybieramy na tyle drobną, aby spełniała ona warunek podporządkowania wybranemu (dowolnie) dobremu pokryciu  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  rozmaitości  $M$ ,

$$\forall p \in \Delta_\Sigma \exists i_p \in I : p \subset \mathcal{O}_{i_p},$$

a zatem także

$$\forall e \in \Delta_\Sigma \exists i_e \in I : e \subset \mathcal{O}_{i_e}.$$

Zachodzi także

$$\forall v \in \Delta_\Sigma \exists i_v \in I : v \subset \mathcal{O}_{i_v}.$$

Tak przygotowani obliczamy

$$\Phi((E, B); \Sigma) = \int_\Sigma F = \sum_{p \in \Delta_\Sigma} \int_p F = \sum_{p \in \Delta_\Sigma} \int_p dA_{i_p} = \sum_{p \in \Delta_\Sigma} \sum_{e \subset \partial p} \int_e A_{i_p}.$$

Ostatnią sumę możemy zamienić na sumę po wszystkich krawędziach tesselizacji – wzdłuż każdej z nich (na której dowolnie ustalamy orientację) całkujemy różnicę potencjałów pochodzących z obu rozdzielanych przez nią plakietek (względny znak „-” dla tych dwóch wkładów wynika stąd, że ustalona orientacja krawędzi z konieczności jest zgodna z jej orientacją indukowaną z wyjściowej orientacji jednej z plakietek, powiedzmy  $p_+(e)$ , a zarazem przeciwna do jej orientacji indukowanej z orientacji drugiej z plakietek, powiedzmy  $p_-(e)$ , co w świetle zastosowanego powyżej twierdzenia Stokes’a prowadzi do rzeczony różnicy znaków obu wkładów),

$$\Phi((E, B); \Sigma) = \sum_{e \in \Delta_\Sigma} \int_e (A_{i_{p_+(e)}} - A_{i_{p_-(e)}}) = \sum_{e \in \Delta_\Sigma} \int_e df_{i_{p_-(e)} i_{p_+(e)}} = \sum_{e \in \Delta_\Sigma} \sum_{v \in \partial e} \int_v f_{i_{p_-(e)} i_{p_+(e)}}.$$

Podobnie jak poprzednio sumę po końcach wszystkich krawędzi tesselizacji możemy zamienić na pojedynczą sumę po wszystkich wierzchołkach, przy czym chwila zastanowienia nad znakami wkładów do wyrazu owej sumy przyporządkowanego ustalonemu wierzchołkowi pochodzących od poszczególnych (zorientowanych dowolnie) zbiegających się w nim krawędzi, w połączeniu z narzuconymi własnościami skośnej symetrii funkcji  $f_{ij}$  względem permutacji indeksów pokrycia prowadzi do wzoru

$$\Phi((E, B); \Sigma) = - \sum_{v \in \Delta_\Sigma} N_{e_1(v) e_2(v) e_3(v)}(v),$$

w którym  $(e_1(v), e_2(v), e_3(v))$  jest trójką wierzchołków zbiegających się w  $v$  uporządkowaną wedle kolejności ich przecinania przy obiegu wierzchołka w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (przy czym wybór punktu startowego jest nieistotny z racji cyklicznej symetrii stałych  $N_{ijk}$  względem permutacji indeksów pokrycia). Ostatecznie więc wnioskujemy, że dla dowolnej liczby

<sup>12</sup>Tesselizację tego typu otrzymujemy ze zwykłej triangulacji powierzchni poprzez utworzenie jej tzw. **grafu dualnego** o ternarnych wierzchołkach w geometrycznych środkach trójkątów i połączonych krawędziami, z których każda przecina transversalnie dokładnie jeden z boków trójkąta, będący krawędzią triangulacji.

całkowitej  $N$  (określającej wartość ładunku elektrycznego  $q = Ne$  cząstki próbnej poruszającej się w tle  $F$ ) spełniona jest relacja

$$Ne \Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z},$$

czyli

$$(3.8) \quad e \Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Używając naturalnego w tym kontekście języka homologii singularnej i kohomologii de Rhama (na których rygorystyczne wprowadzenie nie mamy tutaj dość miejsca), powiedzielibyśmy, że konstrukcja amplitud DF wymaga, iżby (przeskalowany) tensor Maxwella  $\frac{e}{2\pi} F$  miał całkowite okresy (czyli iżby scałkowany po dowolnym 2-cyklu homologicznym zwracał wartość całkowitą). Odnosząc powyższy wynik do pola punktowego ładunku magnetycznego (2.3) i najprostszego (nietrywialnego) 2-cyklu danego przez 2-sferę okalającą punkt położenia monopola, odtwarzamy klasyczny wynik Diraca

$$e\mu \in 2\pi\mathbb{Z},$$

który jest właśnie zapowiedzianym wcześniej warunkiem Diraca skwantowania ładunku.

W podsumowaniu dotychczasowych naszych rozważań możemy stwierdzić, że spójny opis propagacji naładowanego elektrycznie punktu materialnego w (topologicznie nietrywialnym) zewnętrznym polu elektromagnetycznym jest możliwy, o ile tensor Maxwella tego pola spełnia warunek Diraca (3.8). Funkcjonał działania porównujący propagację punktu po dwóch różnych ścieżkach łączących parę punktów w czasoprzestrzeni  $(M, g)$  jest przy tym dany wzorem (3.6), który prowadzi do wyrażenia na amplitudę Diraca-Feynmana

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}[x] = e^{\frac{im}{2} \int_{S^1} \text{Vol}(S^1) g(\hat{t}, \hat{t})} \prod_{e \in \Delta_{S^1}} e^{q \int_e (x \uparrow_e)^* A_{i_e}} \prod_{v \in \partial e} (g_{i_e i_v} \circ x)(v)^{\varepsilon_{ev}}, \quad x \in \text{LM}.$$

Zastanowimy się obecnie, jak przejść od zrozumianego już dokładnie opisu *pary* trajektorii klasycznych do opisu pojedynczej takiej trajektorii, wykorzystując przy tym wyznaczone w niniejszym paragrafie lokalnie gładkie obiekty różniczkowe  $A_i$  oraz  $f_{ij}$  (wzgl.  $g_{ij}$ ). Po pierwsze zauważmy, że trajektoria nieskończona, więc otwarta nie wymaga żadnych dodatkowych struktur ani zabiegów formalnych, gdyż wypisana przez nas formuła na funkcjonal działania jest niezależną od arbitralnych wyborów także w tym przypadku. Inaczej rzecz się ma w przypadku trajektorii skończonej, dla której

$$\forall_{t \in ]t_0, t_1]} : x(t) \neq x(t_0).$$

Kierując się wcześniej stosowaną logiką, przyjmijmy jako punkt wyjścia do dalszych rozważań wyznaczoną wcześniej formułę (3.6), którą następnie poprawimy w sposób, jaki podpowie nam analiza jej zależności od naszych dowolnych wyborów. W pierwszej kolejności dokonujemy redefinicji danych lokalnych tła elektromagnetycznego wedle schematu (3.4)-(3.5), co daje (przy orientacji linii świata  $\Gamma = [t_0, t_1]$  od  $t_0$  do  $t_1$ )

$$S'[x] - S[x] = q \left( \sum_{e \in \Delta_{S^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} d_{i_e i_v} + b_{i_{t_1}} \circ x(t_1) - b_{i_{t_0}} \circ x(t_0) \right).$$

O ile pierwszy człon powyższego wyrażenia jest nieobserwowalny, o tyle dwa ostatnie człony mają – wobec jawnej zależności od  $x$  – bezpośredni wpływ na dynamikę (a ściślej – na współokreślające ją warunki brzegowe). Naturalnym sposobem na ich zneutralizowanie jest wprowadzenie dodatkowych stopni swobody pola tła na podrozmaitościach<sup>13</sup>  $D_n \subset M$ ,  $n \in \{0, 1\}$ , do których uwiązane są końce trajektorii wedle schematu

$$x(t_0) \in D_0, \quad x(t_1) \in D_1.$$

Przyjmijmy, że wybrane przez nas dobre pokrycie  $\mathcal{O}$  indukuje (poprzez przecięcie) także pokrycia  $\mathcal{U}^{(n)} = \{\mathcal{U}_i^{(n)}\}_{i \in J^{(n)} \subset I}$ ,  $\mathcal{U}_i^{(n)} := \mathcal{O}_i \cap D_n \neq \emptyset$  podrozmaitości  $D_n$ , co zawsze można osiągnąć dokonując

<sup>13</sup>O konieczności ograniczenia położenia końców trajektorii przekona nas dalsza część dyskusji, tymczasem zauważmy, że w ogólności moglibyśmy rozważyć sytuację, w której końce linii świata są zanurzane w rozmaitościach nie mających *a priori* nic wspólnego z  $M$ . Takie bardziej ogólne podejście okazuje się szczególnie przydatne, a czasami wręcz nieodzowne w lagranżowskim modelu kawałkami gładkich zanurzeń linii świata w rozłącznej sumie rozmaitości, w szczególności zaś – w modelu propagacji masywnego punktu naładowanego elektrycznie na tzw. orbifoldzie. Szczegółowa dyskusja tego zagadnienia wykracza poza ramy niniejszego opracowania.

stosownego rozdrobienia  $\mathcal{O}$ . Załóżmy ponadto istnienie na  $D_n$  rodziny lokalnie gładkich funkcji  $\phi_i^{(n)} \in C^\infty(\mathcal{U}_i^{(n)}; \mathbb{R})$  określonych z dokładnością do redefinicji<sup>14</sup>

$$\phi_i^{(n)} \mapsto \phi_i^{(n)'} = \phi_i^{(n)} - q b_i \upharpoonright_{D_n} + \epsilon_i^{(n)}, \quad \epsilon_i^{(n)} \in \mathbb{R},$$

uzgodnionych z omawianymi wcześniej redefinicjami lokalnych potencjałów  $A_i$  oraz funkcji  $f_{ij}$ , i cofnijmy je na brzeg linii świata według przepisu

$$\begin{aligned} S_{D_0 D_1}[x] &= \frac{m}{2} \int_{\Gamma} \text{Vol}(\Gamma) g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in \Delta_{\Gamma}} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right) \\ &\quad + \phi_{i_{t_1}}^{(1)} \circ x(t_1) - \phi_{i_{t_0}}^{(0)} \circ x(t_0). \end{aligned}$$

Tak zdefiniowany funkcjonal działania z wyrazami brzegowymi nie zależy w sposób obserwowalny od wyboru reprezentantów klas równoważności lokalnych potencjałów, funkcji  $f_{ij}$  oraz  $\phi_i^{(n)}$ . Niezależność amplitud DF

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}^{D_0 D_1}[x] = e^{i S_{D_0 D_1}[x]}$$

od rzezonego wyboru wymaga dodatkowego założenia

$$\epsilon_i^{(n)} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Na koniec wreszcie ustalamy konsekwencje narzucenia wymogu niezależności amplitud DF od wyboru elementu pokrycia  $\mathcal{U}^{(n)}$ , z którego cofamy do  $t_n$  funkcję  $\phi_i^{(n)}$ , w sytuacji, gdy istnieją (lub wprowadzamy poprzez rozdrobienie) przynajmniej dwa elementy tego pokrycia,  $\mathcal{U}_{i_{t_n}}^{(n)}$  i  $\mathcal{U}_{i'_{t_n}}^{(n)}$ , zawierające  $x(t_n)$ . Porównując wartości przyjmowane przez amplitudę DF dla tych dwóch wyborów i wykorzystując po drodze relacje (3.3) i (3.7), otrzymujemy wynik

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{DF}}^{D_0 D_1'}[x] &= \mathcal{A}_{\text{DF}}^{D_0 D_1}[x] \cdot e^{q(f_{i_{e_+(t_1)}} i'_{t_1}} - f_{i_{e_+(t_1)}} i_{t_1}) + \phi_{i'_{t_1}}^{(1)} - \phi_{i_{t_1}}^{(1)}}(x(t_1)) \\ &\quad \cdot e^{-q(f_{i_{e_-(t_0)}} i'_{t_0}} - f_{i_{e_-(t_0)}} i_{t_0}) - \phi_{i'_{t_0}}^{(0)} + \phi_{i_{t_0}}^{(0)}}(x(t_0)) \\ &= \mathcal{A}_{\text{DF}}^{D_0 D_1}[x] \cdot e^{q f_{i_{t_1}} i'_{t_1}} + \phi_{i'_{t_1}}^{(1)} - \phi_{i_{t_1}}^{(1)}}(x(t_1)) \cdot e^{-q f_{i_{t_0}} i'_{t_0}} - \phi_{i'_{t_0}}^{(0)} + \phi_{i_{t_0}}^{(0)}}(x(t_0)), \end{aligned}$$

z którego odczytujemy dodatkowe więzy

$$(\phi_i^{(n)} - \phi_j^{(n)}) \upharpoonright_{\mathcal{U}_{ij}^{(n)}} + q f_{ij} \upharpoonright_{D_n} =: \nu_{ij}^{(n)} \in 2\pi\mathbb{Z},$$

jakie trzeba narzucić na wprowadzone wcześniej elementy opisu lokalnego, aby zapewnić dobrą określoność amplitud DF. Podobnie jak poprzednio, więzy te można zapisać w sposób związany przy użyciu funkcji o wartościach w  $U(1)$  określonych wzorami

$$\chi_i^{(n)} := e^{i \phi_i^{(n)}},$$

oto bowiem otrzymujemy relacje

$$g_{ij}(\cdot) \upharpoonright_{D_n} \cdot \chi_j^{(n)}(\cdot) \cdot \chi_i^{(n)}(\cdot)^{-1}.$$

Zauważmy, że więzy te implikują równość

$$(qA_j - d\phi_j^{(n)}) \upharpoonright_{\mathcal{U}_{ij}^{(n)}} = (qA_i - d(\phi_j^{(n)} - qf_{ij})) \upharpoonright_{\mathcal{U}_{ij}^{(n)}} = (qA_i - d\phi_i^{(n)}) \upharpoonright_{\mathcal{U}_{ij}^{(n)}},$$

z której wynika wprost, że lokalnie gładkie 1-formy  $qA_i \upharpoonright_{D_n} - d\phi_i^{(n)}$  są w istocie ograniczeniami globalnie gładkiej 1-formy

$$\omega_n \in \Gamma(\mathbb{T}^* D_n), \quad \omega_n \upharpoonright_{\mathcal{U}_i^{(n)}} = qA_i \upharpoonright_{D_n} - d\phi_i^{(n)},$$

spełniającej tożsamość

$$qF \upharpoonright_{D_n} = d\omega_n.$$

Ta obserwacja dostarcza uzasadnienia *a posteriori* przyjętego opisu rozmaitości  $D_n$  jako *podrozmaitości*  $M$  – wszak w ogólności tensor Maxwella nie jest 2-formą dokładną, i to właśnie sytuacje, w których  $F$  nie ma globalnie gładkiego potencjału wymagają rozwijanego tutaj lokalnego opisu różniczkowego.

<sup>14</sup>Myślmy tu zatem w istocie, jak poprzednio, o klasach równoważności rodzin funkcji lokalnie gładkich.

Uniwersalny charakter wysoce nietrywialnej struktury różniczkowej utworzonej z lokalnych obiektów  $A_i, f_{ij}$  (wzgl.  $g_{ij}$ ) i  $\phi_i^{(n)}$  (wzgl.  $\chi_i^{(n)}$ ), znajdujący odzwierciedlenie w pierwszoplanowej roli, jaką odgrywa ona w rozmaitych rozważaniach fizykalnych (począwszy od definicji szczególnego i szczególnie pięknego schematu kwantowania dynamiki lagranżowskiej, zwanego kwantowaniem geometrycznym, poprzez uznane modele oddziaływań fundamentalnych, aż po wyrafinowane konstrukcje fizyki matematycznej, jak choćby tzw. topologiczne teorie pola), usprawiedliwia jej rekapitulację w formie osobnej

**Definicja 3.1.** Niechaj  $M$  będzie rozmaitością różniczkową i niech  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie jej pokryciem (otwartym). **Kołowa wiązka główna z powiązaniem o krzywiznie**  $F$ , będącej zamkniętą 2-formą na  $M$  o okresach w  $2\pi\mathbb{Z}$ , to rodzina

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\text{loc.}} (A_i, f_{ij}, N_{ijk})$$

lokalnie gładkich 1-form  $A_i$  na  $\mathcal{O}_i$ , lokalnie gładkich funkcji  $f_{ij}$  o wartościach rzeczywistych na dwukrotnych przecięciach  $\mathcal{O}_{ij} = \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$  oraz lokalnie stałych funkcji  $\frac{1}{2\pi} N_{ijk}$  o wartościach całkowitych na trzykrotnych przecięciach  $\mathcal{O}_{ijk} = \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \cap \mathcal{O}_k$ , które spełniają układ tożsamości

$$F \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} = dA_i,$$

$$(A_j - A_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = df_{ij}, \quad (f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = N_{ijk}.$$

Odwzorowania  $g_{ij} = e^{if_{ij}}$  określamy w tym kontekście mianem **funkcji przejścia** wiązki  $\mathcal{L}$ . Wiazkę nazywamy **trywialną**, jeśli istnieje *globalnie* gładka 1-forma  $\omega$  na  $M$  spełniająca warunki

$$A_i = \omega \upharpoonright_{\mathcal{O}_i}.$$

Wiazkę taką oznaczamy symbolem  $J_\omega$ .

Dla dowolnych dwóch kołowych wiązek głównych z powiązaniem

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\text{loc.}} (A_i, f_{ij}, N_{ijk}) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}' \xrightarrow{\text{loc.}} (A'_i, f'_{ij}, N'_{ijk})$$

stowarzyszonych z tym samym pokryciem (co zawsze można osiągnąć biorąc wspólne rozdrobnienie wyjściowych dwóch pokryć) **izomorfizm wiązek z powiązaniem** to rodzina

$$\chi \xrightarrow{\text{loc.}} (b_i, d_{ij})$$

lokalnie gładkich funkcji  $b_i$  o wartościach rzeczywistych na  $\mathcal{O}_i$  oraz lokalnie stałych funkcji  $\frac{1}{2\pi} \nu_{ijk}$  o wartościach całkowitych na dwukrotnych przecięciach  $\mathcal{O}_{ij} = \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ , które spełniają układ tożsamości

$$A'_i - A_i =: db_i, \quad f'_{ij} = f_{ij} + (b_j - b_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} + d_{ij},$$

dla których warunkiem koniecznym jest równość krzywizn obu wiązek,

$$F' = F.$$

Stosujemy zapis

$$\chi : \mathcal{L} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}'.$$

**Trywializacja wiązki**  $\mathcal{L}$  to izomorfizm wiązek z powiązaniem

$$\tau : \mathcal{L} \xrightarrow{\cong} J_\omega,$$

określony dla pewnej globalnie gładkiej 1-formy  $\omega$  o własności

$$F = d\omega.$$

◇

Powyższych pojęć fundamentalnych użyjemy następnie do zdefiniowania pojęć pochodnych, o kluczowym znaczeniu fizykalnym.

**Definicja 3.2.** W dotychczasowej notacji i dla dowolnej krzywej gładkiej  $x : \Gamma \rightarrow M$ ,  $\Gamma \equiv [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$  **operator transportu w kołowej wiązce głównej**  $\mathcal{L}$  **wzdłuż**  $x$  to wyrażenie funkcjonalne

$$\text{Trans}_{\mathcal{L}}(x) := e^{i \sum_{e \in \Delta_\Gamma} \left( \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{ie} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{ieiv} \circ x(v) \right)},$$

zapisane w terminach dowolnej tesselizacji  $\Delta_\Gamma = \{e, v\}$  odcinka  $\Gamma$  podporządkowanej pokryciu  $\mathcal{O}$ . Operator transportu wzdłuż krzywej zamkniętej,  $x(t_0) = x(t_1)$ , nosi miano **holonomii kołowej wiązki głównej**  $\mathcal{L}$  **wzdłuż**  $x$  i jest oznaczany symbolem

$$\text{Hol}_{\mathcal{L}}(x) \equiv \text{Trans}_{\mathcal{L}}(x), \quad x \in LM.$$

Powyższe definicje pozwalają nam wysłowić wynik naszych dociekań w dość zwartej i przejrzystej formie:

**Corollarium 3.3.** *Spójny kwantowomechaniczny opis, według schematu Diraca–Feynmana, relatywistycznej propagacji naładowanego elektrycznie punktu materialnego w zewnętrznym polu elektromagnetycznym wymaga istnienia na czasoprzestrzeni struktury kołowej wiązki głównej z powiązaniem o krzywiznie określonej przez tensor Maxwella tła elektromagnetycznego oraz ładunek punktu materialnego. Człon topologiczny (tzw. **człon Wessa–Zumino**) amplitudy Diraca–Feynmana, opisujący wpływ rzeczonoego tła na ruch punktu, to operator transportu w wiązce wzdłuż trajektorii punktu, który w przypadku trajektorii otwartej wymaga „udekorowania” cofnięciami danych lokalnych trywializacji wiązki na podrozmaitościach czasoprzestrzeni, do których uwiązane są końce trajektorii.*

Warto podkreślić, że opisane tu struktury różniczkowe poddają się naturalnej geometryzacji, w ramach której lokalna prezentacja kołowej wiązki głównej z powiązaniem jest używana do wyindukowania bogatej struktury geometrycznej i algebraicznej na pewnej wyróżnionej surjektywnej submersji nad  $M$ , i która – odwrotnie – jest przez każdą taką strukturę indukowana. Wynikiem geometryzacji jest obiekt noszący miano **wiązki włóknistej z powiązaniem nad  $M$  o włóknie typowym izomorficznym z  $S^1$** , przy czym w rozpatrywanym kontekście mamy do czynienia tzw. **główną wiązką włóknistą z powiązaniem o grupie strukturalnej  $U(1)$** . Tego typu struktury geometryczne stowarzyszone z zamkniętymi 2-formami o całkowitych okresach pojawiają się w dalszej części wykładu z Geometrii Różniczkowej II.

#### 4. EPILOG: HIPERKOHOMOLOGICZNY OPIS POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Właściwego języka formalnego do opisu obiektów lokalnych dyskutowanych dotychczas dostarcza *teoria snopów różniczkowych* oraz *hyperkohomologia Čecha–Deligne’a*, które zostały po raz pierwszy użyte w rozpatrywanym kontekście w pracy Alvareza [Alv85] oraz późniejszej, lecz strukturalnie o wiele bogatszej i głębszej pracy Gawędzkiego [Gaw88]. Wkrótce przedstawię szczegółową transkrypcję naszych wyników na język kohomologii snopowej oraz hiperkohomologii Čecha–Deligne’a. CDN.

#### LITERATURA

- [AB59] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory”, Phys. Rev. **115** (1959), 485–491.
- [Alv85] O. Alvarez, “Topological quantization and cohomology”, Commun. Math. Phys. **100** (1985), 279–309.
- [Bro05] L.M. Brown, *Feynman’s Thesis – A New Approach to Quantum Theory*, World Scientific, 2005.
- [Dir31] P.A.M. Dirac, “Quantised singularities in the electromagnetic field”, Proc. R. Soc. Lond. **A133** (1931), 60–72.
- [Dir33] ———, “The Lagrangian in quantum mechanics”, Phys. Z. Sowjet. **3** (1933), 64–72.
- [Fey48] R.P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics”, Rev. Mod. Phys. **20** (1948), 367–387.
- [FH65] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965.
- [Gaw88] K. Gawędzki, “Topological Actions in Two-Dimensional Quantum Field Theory”, Nonperturbative Quantum Field Theory (G. ’t Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. Mitter, and R. Stora, eds.), Plenum Press, 1988, pp. 101–141.
- [Kos57] J.-L. Koszul, *Variétés Kähleriennes*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada do C. N. Pq., 1957.
- [Pol98] J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, vol. 1, Cambridge University Press, 1998.
- [Woo92] N.M.J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1992.

R.R.S.: KATEDRA METOD MATEMATYCZNYCH FIZYKI, WYDZIAŁ FIZYKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO, UL. PASTEURA 5, PL-02-093 WARSZAWA, POLAND  
Adres mejlowy: suszek@fuw.edu.pl