

KRYTERIA SCHLÖMILCHA I RAABEGO ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW LICZBOWYCH (DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO, I DO SPRAWDZENIA)

$$R \int R$$

STRESZCZENIE. Poniższe notatki do ćwiczeń zawierają dowód Tw. Schlömilcha (uogólniającego Tw. Cauchy'ego o zagęszczaniu) i proste jego zastosowanie w dowodzie kryterium Raabego zbieżności szeregu liczbowego. Autor korzystał z książek K. Knoppa pt. "Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen" oraz G.M. Fichtenholza pt. "Rachunek różniczkowy i całkowy" (tom II).

1. REKWIZYTY

Przedmiot rozważań wprowadza następująca

Definicja 1.1. Szereg liczbowy to symbol $S_\infty((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ stowarzyszony z ustalonym ciągiem liczbowym $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i zapisywany w równoznacznych postaciach

$$S_\infty((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x_n \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots.$$

Symbol ten nabiera sensu numerycznego w przypadku, gdy **ciąg sum częściowych**

$$(S_N)_{N \in \mathbb{N}}, \quad S_N := \sum_{n=0}^N x_n$$

jest zbieżny, tj. ilekroć istnieje liczba

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N =: S_\infty((x_n)_{n \in \mathbb{N}}),$$

którą w dalszej części wywodu będziemy dla skrótów oznaczać jako S_∞ .

Szereg, dla którego istnieje granica ciągu sum częściowych, jest określane mianem **zbieżnego**. Szereg nie będący zbieżnym nazywa się **rozbieżnym**.

W kontekście teorii szeregów ogólny wyraz x_n ciągu liczbowego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zyskuje miano **ogólnego wyrazu szeregu** $S_\infty((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

✓

2. KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI

Istnieje wiele kryteriów zbieżności szeregów liczbowych. Zaczniemy od wypisania bez dowodu przedstawionych na wykładzie:

Stwierdzenie 2.1 (Kryterium Cauchy'ego). *Niechaj $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rzeczywistym ciągiem liczbowym o wyrazach nieujemnych dla dostatecznie dużych wartości indeksu n ,*

$$\exists_{N \in \mathbb{N}} : \forall_{n > N} : x_n \geq 0.$$

Wówczas stowarzyszony z nim szereg S_∞ jest zbieżny, jeśli

$$\exists_{q \in \mathbb{R}} : \exists_{N \in \mathbb{N}} : \forall_{n > N} : \sqrt[n]{x_n} \leq q < 1,$$

i jest rozbieżny w przeciwnym przypadku.

oraz

Stwierdzenie 2.2 (Kryterium porównawcze). *Niechaj $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rzeczywistym ciągiem liczbowym o wyrazach dodatnich dla dostatecznie dużych wartości indeksu n ,*

$$\exists_{N \in \mathbb{N}} : \forall_{n > N} : x_n \geq 0.$$

Niech też $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą takimi ciągami, przy czym założymy, że szereg stowarzyszony z pierwszym z nich jest zbieżny, szereg zaś stowarzyszony z $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny. Jeśli teraz spełniony jest warunek

$$\exists_{N \in \mathbb{N}} : \forall_{n > N} : \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n},$$

to także szereg S_∞ stowarzyszony z $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny. Jeśli natomiast spełniony jest warunek

$$\exists_{N \in \mathbb{N}} : \forall_{n > N} : \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n},$$

to S_∞ jest rozbieżny.

Poniżej zajmujemy się dwoma innymi nader przydatnymi kryteriami.

Twierdzenie 2.3 (Schlömlich 1873). *Niechaj $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ściśle malejącym rzeczywistym ciągiem liczbowym o wyrazach dodatnich,*

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : (x_n > 0 \quad \wedge \quad x_{n+1} - x_n < 0),$$

i niech $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych,

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : (g_n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad \Delta g_n := g_{n+1} - g_n > 0),$$

o następującej własności (“temperowanego wzrostu”):

$$\exists_{M \in \mathbb{R}_+} : \forall_{n \in \mathbb{N}^*} : \Delta g_n \leq M \cdot \Delta g_{n-1}.$$

Wówczas

$$S_\infty := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \text{zbieżny} \quad \Longleftrightarrow \quad T_\infty := \sum_{n=0}^{\infty} \Delta g_n x_{g_n} \quad \text{zbieżny}.$$

Dowód: W pierwszej kolejności zmajoryzujemy wyraz ogólny ciągu sum częściowych S_N przy użyciu ciągu sum częściowych T_N . W tym celu ustalmy (dowolnie) indeks naturalny N i wybierzmy (również dowolnie) wyraz $g_{K(N)}$ ciągu $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniający nierówność

$$g_{K(N)} > N.$$

Wobec monotoniczności ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz z uwagi na dodatniość jego wyrazów dostajemy

$$\begin{aligned} S_N \leq S_{g_{K(N)}} &= (x_0 + x_1 + \cdots + x_{g_0-1}) + (x_{g_0} + x_{g_0+1} + \cdots + x_{g_1-1}) + (x_{g_1} + x_{g_1+1} + \cdots + x_{g_2-1}) \\ &\quad + \cdots + (x_{g_{K(N)-1}} + x_{g_{K(N)-1}+1} + \cdots + x_{g_{K(N)}-1}) + x_{g_{K(N)}} \\ &\leq S_{g_0-1} + \Delta g_0 \cdot x_{g_0} + \Delta g_1 \cdot x_{g_1} + \cdots + \Delta g_{K(N)-1} \cdot x_{g_{K(N)-1}} + x_{g_{K(N)}} \\ &\leq S_{g_0-1} + \sum_{m=0}^{K(N)} \Delta g_m \cdot x_{g_m} \equiv S_{g_0-1} + T_{K(N)}. \end{aligned}$$

Z powyższego wypływa oczywisty wniosek: Zbieżność T_∞ pociąga za sobą zbieżność S_∞ .

W następnym kroku dokonujemy majoryzacji odwrotnej. Ustaliwszy (dowolnie) liczbę naturalną g_K oraz indeks $N(K)$ o własności

$$N(K) > g_K ,$$

wykorzystujemy raz jeszcze dodatniość i monotoniczność $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ażeby zapisać

$$\begin{aligned} S_{N(K)} &\geq S_{g_K} = (x_0 + x_1 + \cdots + x_{g_0}) + (x_{g_0+1} + x_{g_0+2} + \cdots + x_{g_1}) + (x_{g_1+1} + x_{g_1+2} + \cdots + x_{g_2}) \\ &\quad + \cdots + (x_{g_{K-1}+1} + x_{g_{K-1}+2} + \cdots + x_{g_K}) \\ &\geq (x_{g_0+1} + x_{g_0+2} + \cdots + x_{g_1}) + (x_{g_1+1} + x_{g_1+2} + \cdots + x_{g_2}) \\ &\quad + \cdots + (x_{g_{K-1}+1} + x_{g_{K-1}+2} + \cdots + x_{g_K}) \\ &\geq \Delta g_0 \cdot x_{g_1} + \Delta g_1 \cdot x_{g_2} + \cdots + \Delta g_{K-1} \cdot x_{g_K} . \end{aligned}$$

Mnożąc obie strony nierówności przez stałą dodatnią $M \in \mathbb{R}_{>0}$ i wykorzystując założenie o temperowanym wzroście $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dostajemy w ten sposób

$$M \cdot S_{N(K)} \geq \Delta g_1 \cdot x_{g_1} + \Delta g_2 \cdot x_{g_2} + \cdots + \Delta g_K \cdot x_{g_K} = T_K - T_0 ,$$

czyli

$$T_K \leq M \cdot S_{N(K)} + T_0 ,$$

skąd wniosek: Zbieżność S_∞ pociąga za sobą zbieżność T_∞ . $\square$

Korolariusz 2.4 (Tw. o zagęszczaniu, Cauchy 1821). *Przy założeniach i oznaczeniach Tw. Schlömilcha, prawdziwą jest równoważność*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \text{zbieżny} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n} \quad \text{zbieżny}.$$

Dowód: Wystarczy położyć $g_n := 2^n$ (jawnie rosnący, o $M = 2$) w rzeczonym twierdzeniu. $\square$

Stwierdzenie 2.5 (Raabe 1832). *Niechaj $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rzeczywistym ciągiem liczbowym o wyrazach dodatnich,*

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : x_n > 0 ,$$

i utwórzmy stowarzyszony z nim ciąg Raabego

$$\mathfrak{R}_n := n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) .$$

Wówczas szereg $S_\infty((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ jest zbieżny, gdy

$$\exists_{R>1} : \exists_{N \in \mathbb{N}} : \forall_{n>N} : \mathfrak{R}_n \geq R ,$$

i jest on rozbieżny, gdy

$$\exists_{N \in \mathbb{N}} : \forall_{n>N} : \mathfrak{R}_n \leq 1 .$$

Dowód: Załóżmy, że zachodzi pierwsza ewentualność, tj. począwszy od pewnego $N \in \mathbb{N}$,

$$\forall_{n>N} : \mathfrak{R}_n \geq R > 1 ,$$

czyli

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 + \frac{R}{n}.$$

Wybierzmy (dowolnie) $s \in \mathbb{R}$ o własności $R > s > 1$. Wtedy dostajemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^s - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1+y)^s - 1}{y} \stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{s(1+y)^{s-1}}{1} = s,$$

a zatem – dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ –

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < R,$$

czyli

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{R}{n}.$$

Jest więc spełniona nierówność

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s,$$

czyli też równoważna jej

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{\frac{1}{(n+1)^s}}.$$

Ale $h_n^{(s)} := \frac{1}{n^s}$ to wyraz ogólny szeregu harmonicznego rzędu s , do którego możemy odnieść Tw. Schlömilcha w wersji Cauchy’ego w połączeniu z kryterium Cauchy’ego. Oto więc sprawdzamy zbieżność szeregu zagęszczonego o wyrazie ogólnym

$$\tilde{h}_n^{(s)} := 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = 2^{n(1-s)}.$$

Zachodzi

$$\sqrt[n]{\tilde{h}_n^{(s)}} = 2^{1-s} < 1,$$

wnioskujemy zatem, że szereg harmoniczny rzędu s jest zbieżny i – co za tym idzie – jest także zbieżny (w świetle kryterium porównawczego) szereg S_∞ .

Jeśli, dla odmiany, zachodzi druga ewentualność, tj. począwszy od pewnego $N \in \mathbb{N}$,

$$\forall_{n > N} : \Re_n \leq 1,$$

czyli

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Powyższą nierówność można przepisać w równoważnej postaci

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}}.$$

Po prawej stronie tej nierówności odnajdujemy iloraz dwóch kolejnych wyrazów $h_n^{(1)} := \frac{1}{n}$ szeregu harmonicznego (rzędu 1). Powtarzając wcześniejsze rozumowanie, stwierdzamy, że ten ostatni jest rozbieżny na mocy kryterium Cauchy’ego, a to pociąga za sobą rozbieżność szeregu S_∞ . $\square$

Warszawa, 24. stycznia 2012 r.

Adres: KATEDRA METOD MATEMATYCZNYCH FIZYKI, WYDZIAŁ FIZYKI UNIWERSYTETU
WARSZAWSKIEGO, UL. HOŻA 74, PL-00-682 WARSZAWA, POLAND

Adres mejlowy: `suszek@fuw.edu.pl`