O HOMOTOPIJNEJ NIEZMIENNICZOŚCI KOHOMOLOGII DE RHAMA, UOGÓLNIONYM LEMACIE POINCARÉ ORAZ CZESANIU WYŻSZYCH SFER

(DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO, I DO SPRAWDZENIA)

R∫R

Abstract. Notatki z ćwiczeń do wykładu "Analiza III", za Hitchinem [Hit10].

W poniższych notatkach przedstawiamy, za Hitchinem, elementarne dowody trzech ważnych twierdzeń stanowiących punkt wyjścia do istotnych zastosowań (fizykalnych) rachunku różniczkowego na rozmaitościach (jak np. znajdowanie potencjałów pól elektrycznych i magnetycznych w trzech wymiarach), a zarazem dostarczające doskonałej i przy tym nietrywialnej ilustracji wszystkich niemal pojęć i konstrukcji poznanych na wykładzie.

Jako pierwszego dowiedziemy

Twierdzenie HNKdR (O Homotopijnej Niezmienniczości Kohomologii de Rhama) Niechaj M i N będą rozmaitościami gładkimi, $F : [0,1] \times M \to N : (t,m) \mapsto F(t,m) \equiv F_t(m)$ zaś – gładkim odwzorowaniem (zwanym z uwagi na swą strukturę **homotopią** pomiędzy odwzorowaniami F_0 i F_1). Wówczas odwzorowania $\widehat{F}_0^*, \widehat{F}_1^* : H^p_{\rm dR}(N) \to H^p_{\rm dR}(M)$ indukowane przez homotopijnie równoważne odwzorowania $F_0 \sim F_1$ są tożsamościowo równe,

$$\widehat{F}_0^* = \widehat{F}_1^* .$$

Dowód: Rozważmy cofnięcie dowolnej p-formy $\underset{(p)}{\omega} \in \Omega^p(N)$ względem $F = (F^A)^{A \in \overline{1,\dim_{\mathbb{R}} N}}$ (utożsamiamy funkcję F z jej lokalną reprezentacją współrzędniową $y \circ F = (F^A)^{A \in \overline{1,\dim_{\mathbb{R}} N}}$ stowarzyszoną z lokalną mapą $y = (y^A)^{A \in \overline{1,\dim_{\mathbb{R}} N}} : O \to \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} N}$ określoną na elemencie pokrycia $O \subset N$ zawierającym punkt $n = F(t,m)$). Aby zrozumieć postać cofnięcia, będącego p-formą na $[0,1] \times M$, rozłóżmy $\underset{(p)}{\omega}$ w lokalnej bazie (współrzędniowej) $\Omega^p_n(N)$, $n \in N$ stowarzyszonej z mapą y,

$$\underset{(p)}{\omega}(n) = \omega_{A_1 A_2 \ldots A_p}(n)\, {\sf d}y^{A_1}(n) \wedge {\sf d}y^{A_2}(n) \wedge \cdots \wedge {\sf d}y^{A_p}(n) ,$$

przy czym w powyższym wzorze indeksy powtórzone są wysumowane po pełnym zakresie $A_1, A_2, \ldots, A_p \in \overline{1, \dim_{\mathbb{R}} N}$. Wówczas, zakładając, że $F_t(m) = n \in O$, a ponadto, że na elemencie pokrycia U rozmaitości M zawierającym punkt m jest określona lokalna mapa $x = (x^i)^{i \in \overline{1,\dim_{\mathbb{R}} M}} : U \to \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}} M}$, dostajemy

$$(F^* \underset{(p)}{\omega})(t,m) = \omega_{A_1 A_2 \ldots A_p}(F(t,m))\, {\sf d}F^{A_1}(t,m) \wedge {\sf d}F^{A_2}(t,m) \wedge \cdots \wedge {\sf d}F^{A_p}(t,m) , \tag{1}$$

gdzie

$$\mathsf{d}F^A(t,m) = \frac{\partial F^A}{\partial t}(t,m)\,\mathsf{d}t + \frac{\partial F^A}{\partial x^i}(t,m)\,\mathsf{d}x^i(m)$$

(uwaga na sumę po $i \in \overline{1,\dim_{\mathbb{R}} M}$).

Uwaga: Powyższy wzór (na cofnięcie) to szczególny przypadek wzoru ogólnego:

$$(f^* \underset{(p)}{\omega})(m) = \omega_{A_1 A_2 \ldots A_p}(f(m))\,\frac{\partial f^{A_1}}{\partial x^{i_1}}(m)\,\frac{\partial f^{A_2}}{\partial x^{i_2}}(m)\cdots\frac{\partial f^{A_p}}{\partial x^{i_p}}(m)\,\mathsf{d}x^{i_1}(m)\wedge\mathsf{d}x^{i_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_p}(m)\,,$$

słusznego dla $f : M \to N$ gładkiego (o reprezentacji współrzędniowej $y \circ f = (f^A)^{A \in \overline{1,\dim_{\mathbb{R}} N}}$) i przy oznaczeniach jak wyżej dla $f(m) = n \in O$, $m \in U$. Ten ostatni wzór łatwo sprawdzić wprost z definicji cofnięcia f^* jako odwzorowania sprzężonego (w danym punkcie $m \in M$) do pchnięcia $f_* : \mathsf{T}_m M \to \mathsf{T}_{f(m)} N$ danego wzorem

$$f_* v = v^i\,\frac{\partial f^A}{\partial x^i}(m)\,\partial_A(f(m))\,, \qquad \partial_A(n) = \frac{\partial}{\partial y^A}(n)\,, \quad n \in N\,,$$

zapisanym dla dowolnego wektora stycznego $v = v^i\,\partial_i(m) \in \mathsf{T}_m M$, $\partial_i(m) = \frac{\partial}{\partial x^i}(m)$ do M w punkcie m (uwaga na sumy po powtórzonych indeksach). Istotnie, dla p wektorów $v_\alpha \in \mathsf{T}_m M$, $\alpha \in \overline{1,p}$ dostajemy (sumy!)

$$(f^* \underset{(p)}{\omega})(m)(v_1, v_2, \ldots, v_p) \overset{\text{ex def}}{=} \underset{(p)}{\omega}(f(m))\,(f_* v_1, f_* v_2, \ldots, f_* v_p)$$

$$= \omega_{A_1 A_2 \ldots A_p}(n)\,\mathsf{d}y^{A_1}(f(m))\wedge\mathsf{d}y^{A_2}(f(m))\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}y^{A_p}(f(m))$$
$$\left(v_1^{i_1}\,\frac{\partial f^{B_1}}{\partial x^{i_1}}(m)\,\partial_{B_1}(f(m))\,, v_2^{i_2}\,\frac{\partial f^{B_2}}{\partial x^{i_2}}(m)\,\partial_{B_2}(f(m))\,, \ldots, v_p^{i_p}\,\frac{\partial f^{B_1}}{\partial x^{i_1}}(m)\,\partial_{B_1}(f(m))\right)$$

$$= \omega_{A_1 A_2 \ldots A_p}(n)\,v_1^{i_1}\,\frac{\partial f^{B_1}}{\partial x^{i_1}}(m)\,v_2^{i_2}\,\frac{\partial f^{B_2}}{\partial x^{i_2}}(m)\cdots v_p^{i_p}\,\frac{\partial f^{B_p}}{\partial x^{i_p}}(m)$$
$$\mathsf{d}y^{A_1}(f(m))\wedge\mathsf{d}y^{A_2}(f(m))\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}y^{A_p}(f(m))\,(\partial_{B_1}(f(m))\,, \partial_{B_2}(f(m))\,, \ldots, \partial_{B_1}(f(m)))$$

$$= p!\,\omega_{A_1 A_2 \ldots A_p}(n)\,v_1^{i_1}\,\frac{\partial f^{B_1}}{\partial x^{i_1}}(m)\,v_2^{i_2}\,\frac{\partial f^{B_2}}{\partial x^{i_2}}(m)\cdots v_p^{i_p}\,\frac{\partial f^{B_1}}{\partial x^{i_1}}(m)\,\delta^{A_1}_{B_1}\,\delta^{A_2}_{B_2}\cdots\delta^{A_p}_{B_p}$$

$$= p!\,\omega_{A_1 A_2 \ldots A_p}(n)\,\frac{\partial f^{A_1}}{\partial x^{i_1}}(m)\,\frac{\partial f^{A_2}}{\partial x^{i_2}}(m)\cdots\frac{\partial f^{A_p}}{\partial x^{i_p}}(m)\,v_1^{i_1}\,v_2^{i_2}\cdots v_p^{i_p}$$

$$\equiv \omega_{A_1 A_2 \ldots A_p}(n)\,\mathsf{d}f^{A_1}(m)\wedge\mathsf{d}f^{A_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}f^{A_p}(m)(v_1, v_2, \ldots, v_p)$$

dla

$$\mathsf{d}f^A(m) = \frac{\partial f^A}{\partial x^i}(m)\,\mathsf{d}x^i(m)\,.$$

W rozpatrywanym przypadku współrzędne na $[0,1]\times U$ to (t, x^i), $i \in \overline{1,\dim_{\mathbb{R}} M}$, a stowarzyszona z nimi baza $\mathsf{T}_{(t,m)}([0,1]\times M)$ to $\left\{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i}(m),\ i \in \overline{1,\dim_{\mathbb{R}} M}\right\}$.

Wracając do interesującego nas wzoru (1), przepisujemy (korzystając z antysymetrii iloczynu zewnęntrznego, która implikuje $\mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}t = 0$)

$$(F^* \underset{(p)}{\omega})(t,m)$$
$$= \omega_{A_1 A_2 \ldots A_p}(F(t,m))\,\frac{\partial F^{A_1}}{\partial x^{i_1}}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_2}}{\partial x^{i_2}}(t,m)\cdots\frac{\partial F^{A_p}}{\partial x^{i_p}}(t,m)\,\mathsf{d}x^{i_1}(m)\wedge\mathsf{d}x^{i_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_p}(m)$$
$$+\omega_{A_1 A_2 \ldots A_p}(F(t,m))\,\frac{\partial F^{A_1}}{\partial t}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_2}}{\partial x^{i_2}}(t,m)\cdots\frac{\partial F^{A_p}}{\partial x^{i_p}}(t,m)\,\mathsf{d}t\wedge\mathsf{d}x^{i_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_p}(m)$$

$$+\omega_{A_1A_2\ldots A_p}\left(F(t,m)\right)\,\frac{\partial F^{A_1}}{\partial x^{i_1}}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_2}}{\partial t}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_3}}{\partial x^{i_3}}(t,m)\cdots\frac{\partial F^{A_p}}{\partial x^{i_p}}(t,m)$$
$$\mathrm{d}x^{i_1}(m)\wedge\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x^{i_3}(m)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}(m)$$

$$+\cdots$$

$$+\omega_{A_1A_2\ldots A_p}\left(F(t,m)\right)\,\frac{\partial F^{A_1}}{\partial x^{i_1}}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_2}}{\partial x^{i_2}}(t,m)\cdots\frac{\partial F^{A_p}}{\partial x^{i_{p-1}}}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_p}}{\partial t}(t,m)$$
$$\mathrm{d}x^{i_1}(m)\wedge\mathrm{d}x^{i_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_{p-1}}(m)\wedge\mathrm{d}t$$

$$=\omega_{A_1A_2\ldots A_p}\left(F(t,m)\right)\,\frac{\partial F^{A_1}}{\partial x^{i_1}}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_2}}{\partial x^{i_2}}(t,m)\cdots\frac{\partial F^{A_p}}{\partial x^{i_p}}(t,m)\,\mathrm{d}x^{i_1}(m)\wedge\mathrm{d}x^{i_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}(m)$$
$$+p\,\omega_{A_1A_2\ldots A_p}\left(F(t,m)\right)\,\frac{\partial F^{A_1}}{\partial t}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_2}}{\partial x^{i_2}}(t,m)\cdots\frac{\partial F^{A_p}}{\partial x^{i_p}}(t,m)\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x^{i_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}(m)\,.$$

W pierwszym wyrazie następującym po ostatnim znaku równości zmienna t występuje w roli parametru (nie różniczkujemy w jej kierunku), można go zatem przepisać w postaci $(F_t^*\underset{(p)}{\omega})(m)$ (należy pamiętać, że $F_t : M\to N$, nasz zaś zapis traktuje p-formy na M parametrycznie zależne od $t\in[0,1]$ jako szczególnego rodzaju p-formy na $[0,1]\times M$, tj. utożsamia je z ich obrazami względem kanonicznego włożenia $\Omega^p(M)\hookrightarrow\Omega^p([0,1]\times M)$). Pozostaje jeszcze zrozumieć strukturę drugiego wyrazu. W tym celu rozważmy $(p-1)$-formę na $[0,1]\times M$ uzyskaną w wyniku obliczenia p-formy $(F^*\underset{(p)}{\omega})(t,m)$ na wektorze $\frac{\partial}{\partial t}$ (wziętym za pierwszy argument odwzorowania wieloliniowego $(F^*\underset{(p)}{\omega})(t,m)$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner(F^*\underset{(p)}{\omega})(t,m)\equiv(F^*\underset{(p)}{\omega})(t,m)\left(\frac{\partial}{\partial t},\cdot,\cdot,\cdots,\cdot\right).$$

Zachodzi oczywiście (wprost z definicji)

$$\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner(F^*\underset{(p)}{\omega})(t,m)=F^*\left(F_*\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\underset{(p)}{\omega}\right)(t,m)=\frac{\partial F^A}{\partial t}(t,m)\,F^*\left(\frac{\partial}{\partial y^A}\lrcorner\underset{(p)}{\omega}\right)(t,m)\,.$$

Rozumując jak poprzednio, łatwo stwierdzamy, że w rozkładzie powyższej $(p-1)$-formy w lokalnej bazie $\Omega^{p-1}_{(t,m)}([0,1]\times M)$ pojawią się składowe w "kierunkach"

$$\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x^{i_2}(m)\wedge\mathrm{d}x^{i_3}(m)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_{p-1}}(m)\qquad\text{oraz}\qquad\mathrm{d}x^{i_1}(m)\wedge\mathrm{d}x^{i_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_{p-1}}(m)\,,$$

jeśli więc teraz wymnożymy ją zewnętrznie przez $\mathrm{d}t$, to otrzymamy (znów z racji $\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}t=0$)

$$\mathrm{d}t\wedge\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner(F^*\underset{(p)}{\omega})(t,m)=\mathrm{d}t\wedge\frac{\partial F^A}{\partial t}(t,m)\,F^*\left(\frac{\partial}{\partial y^A}\lrcorner\underset{(p)}{\omega}\right)(t,m)$$
$$=\frac{\partial F^{A_1}}{\partial t}(t,m)\,\mathrm{d}t\wedge F^*\left(p\,\omega_{A_1A_2\ldots A_p}(\cdot)\,\mathrm{d}y^{A_2}(\cdot)\wedge\mathrm{d}y^{A_3}(\cdot)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{A_p}(\cdot)\right)(t,m)$$
$$=p\,\frac{\partial F^{A_1}}{\partial t}(t,m)\,\omega_{A_1A_2\ldots A_p}\left(F(t,m)\right)\,\mathrm{d}t$$
$$\wedge\left[\frac{\partial F^{A_2}}{\partial x^{i_2}}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_3}}{\partial x^{i_3}}(t,m)\cdots\frac{\partial F^{A_p}}{\partial x^{i_p}}(t,m)\,\mathrm{d}x^{i_2}(m)\wedge\mathrm{d}x^{i_3}(m)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}(m)\right.$$
$$\left.+(p-1)\,\frac{\partial F^{A_2}}{\partial t}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_3}}{\partial x^{i_3}}(t,m)\cdots\frac{\partial F^{A_p}}{\partial x^{i_p}}(t,m)\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x^{i_3}(m)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}(m)\right]$$

$$= p\,\omega_{A_1A_2\ldots A_p}\left(F(t,m)\right)\,\frac{\partial F^{A_1}}{\partial t}(t,m)\,\frac{\partial F^{A_2}}{\partial x^{i_2}}(t,m)\cdots\frac{\partial F^{A_p}}{\partial x^{i_p}}(t,m)\,\mathsf{d}t\wedge\mathsf{d}x^{i_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_p}(m)\,,$$

czyli właśnie drugi człon uzyskanego wcześniej wyrażenia na $(F^*\underset{(p)}{\omega})(t,m)$. Podsumowując nasze wywody, możemy zatem zapisać

$$(F^*\underset{(p)}{\omega})(t,m)=(F_t^*\underset{(p)}{\omega})(m)+\mathsf{d}t\wedge\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,(F^*\underset{(p)}{\omega})(t,m)\,.$$

Załóżmy następnie, że $\underset{(p)}{\omega}\in Z^p(N)$, tj. że p-forma ta jest zamknięta, i skorzystajmy z podstawowej tożsamości

$$\mathsf{d}f^*\underset{(p)}{\omega}=f^*\mathsf{d}\underset{(p)}{\omega}\,,$$

a także z tego, że

$$\mathsf{d}\circ\mathsf{d}=0\,,\qquad\qquad \mathsf{d}(\underset{(p)}{\omega}\wedge\underset{(q)}{\eta})=\mathsf{d}\underset{(p)}{\omega}\wedge\underset{(q)}{\eta}+(-1)^{pq}\underset{(p)}{\omega}\wedge\mathsf{d}\underset{(q)}{\eta}\,,$$

aby zapisać

$$0=(F^*\mathsf{d}\underset{(p)}{\omega})(t,m)=\mathsf{d}(F^*\underset{(p)}{\omega})(t,m)=\mathsf{d}(F_t^*\underset{(p)}{\omega})(m)-\mathsf{d}t\wedge\mathsf{d}\left(\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,(F^*\underset{(p)}{\omega})\right)(t,m)\,.$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned}\mathsf{d}_M F^*\underset{(p)}{\omega}(t,m)\ &:=\ \mathsf{d}x^i\wedge\frac{\partial}{\partial x^i}\left(F^*\underset{(p)}{\omega}\right)(t,m)\,,\\ \mathsf{d}_{[0,1]}F^*\underset{(p)}{\omega}(t,m)\ &:=\ \mathsf{d}t\wedge\frac{\partial}{\partial t}\left(F^*\underset{(p)}{\omega}\right)(t,m)\,,\end{aligned}$$

gdzie to w wyrażeniu po prawej stronie znaku równości należy rozumieć, że operator pochodnej cząstkowej względem współrzędnej x^i (suma!) lub – odpowiednio – t działa na współczynnik rozkładu p-formy w bazie współrzędniowej stowarzyszonej z mapą (t,x). Zachodzi oczywista tożsamość (na $[0,1]\times M$)

$$\mathsf{d}=\mathsf{d}_M+\mathsf{d}_{[0,1]}\,,$$

która pozwala (po uwzględnieniu $\mathsf{d}t\wedge\mathsf{d}t=0$ raz jeszcze) przepisać wcześniej otrzymaną równość, jak następuje:

$$\begin{aligned}0\ &=\ \mathsf{d}_M(F_t^*\underset{(p)}{\omega})(m)+\mathsf{d}_{[0,1]}(F_t^*\underset{(p)}{\omega})(m)-\mathsf{d}t\wedge\mathsf{d}_M\left(\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,(F^*\underset{(p)}{\omega})\right)(t,m)\\ &=\ \mathsf{d}_M(F_t^*\underset{(p)}{\omega})(m)+\mathsf{d}t\wedge\left[\frac{\partial}{\partial t}(F_t^*\underset{(p)}{\omega})(m)-\mathsf{d}_M\left(\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,(F^*\underset{(p)}{\omega})\right)(t,m)\right].\end{aligned}$$

Zważywszy liniową niezależność $(p+1)$-form

$$\mathsf{d}t\wedge\mathsf{d}x^{i_1}(m)\wedge\mathsf{d}x^{i_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_p}(m)\qquad\text{oraz}\qquad\mathsf{d}x^{i_1}(m)\wedge\mathsf{d}x^{i_2}(m)\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_{p+1}}(m)\,,$$

wnioskujemy na podstawie ostatniej równości, iż

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_t^*\underset{(p)}{\omega})(m)=\mathsf{d}_M\left(\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,(F^*\underset{(p)}{\omega})\right)(t,m)\,.$$

Odcałkowując obie strony tej równości po przedziale zmienności t (czyniąc przy tym pewne elementarne założenia odnośnie do regularności F oraz współczynników rozkładu $\underset{(p)}{\omega}$ w bazie współrzędniowej, których spełnienie pozwala zastosować twierdzenia o różniczkowaniu całki z parametrem), otrzymujemy

$$\begin{aligned} F_1^* \underset{(p)}{\omega}(m) - F_0^* \underset{(p)}{\omega}(m) &= \int_0^1 \mathsf{d}t \, \frac{\partial}{\partial t} (F_t^* \underset{(p)}{\omega})(m) = \int_0^1 \mathsf{d}t \, \mathsf{d}_M \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \, (F^* \underset{(p)}{\omega}) \right)(t, m) \\ &= \mathsf{d} \int_0^1 \mathsf{d}t \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \, (F^* \underset{(p)}{\omega}) \right)(t, m) \,, \end{aligned}$$

gdzie symbol różniczki po prawej stronie znaku równości reprezentuje pochodną zewnętrzną na $\Omega^{p-1}(M)$.

Zastosujmy teraz definicję odwzorowania indukowanego (której sensowność wykazaliśmy na ćwiczeniach), aby wyprowadzić tożsamość

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1^* [\underset{(p)}{\omega}]^{(N)}_{\mathrm{dR}} - \widehat{F}_0^* [\underset{(p)}{\omega}]^{(N)}_{\mathrm{dR}} &= [F_1^* \underset{(p)}{\omega}]^{(M)}_{\mathrm{dR}} - [F_0^* \underset{(p)}{\omega}]^{(M)}_{\mathrm{dR}} = [F_1^* \underset{(p)}{\omega} - F_0^* \underset{(p)}{\omega}]^{(M)}_{\mathrm{dR}} \\ &= [\mathsf{d} \int_0^1 \mathsf{d}t \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \, (F^* \underset{(p)}{\omega}) \right)]^{(M)}_{\mathrm{dR}} = 0 \,, \end{aligned}$$

która kończy dowód twierdzenia. □

Możemy obecnie przejść do omówienia konsekwencji Twierdzenia HNKdR. Podstawową taką konsekwencją jest Lemat Poincaré, który my udowodnimy w wersji uogólnionej, (bardziej) przydatnej w analizie zagadnień fizykalnych.

Twierdzenie ULP (Uogólniony Lemat Poincaré) Niechaj M będzie gładką rozmaitością homotopijnie ściągalną do podrozmaitości gładkiej $M_0 \subset M$, tj. niechaj będzie dana (gładka) homotopia

$$F \;:\; [0,1] \times M \to M \;:\; (t, m) \mapsto F(t, m) = F_t(m)$$

o własnościach

$$F_0 = \pi_{M_0} \;:\; M \twoheadrightarrow M_0 \,, \qquad\qquad F_1 = \mathrm{id}_M \,,$$

przy czym π_{M_0} jest tutaj gładką surjekcją. Ponadto niech $\underset{(p)}{\omega} \in Z^p(M)$ i załóżmy dodatkowo, że istnieje $\underset{(p-1)}{\eta} \in \Omega^{p-1}(M_0)$ spełniająca tożsamość

$$\underset{(p)}{\omega}\big|_{M_0} = \mathsf{d} \underset{(p-1)}{\eta}$$

(taką $(p-1)$-formę określimy mianem lokalnego potencjału $\underset{(p)}{\omega}$ na M_0). Wówczas istnieje $\underset{(p-1)}{\chi} \in \Omega^{p-1}(M)$ o własności

$$\underset{(p)}{\omega} = \mathsf{d} \underset{(p-1)}{\chi}$$

(globalny potencjał $\underset{(p)}{\omega}$).

Dowód (konstrukcyjny): Wprowadźmy wygodne oznaczenie

$$I \;:\; \Omega^{p+1}([0,1] \times M) \to \Omega^p(M) \;:\; \underset{(p+1)}{\Omega} \mapsto \int_0^1 \mathsf{d}t \, \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \underset{(p+1)}{\Omega}$$

na wcześniej stosowną operator liniowy i rozważmy operator złożony

$$IF^*\mathsf{d} + \mathsf{d}IF^* \;:\; \Omega^p(M) \to \Omega^p(M) \;:\; \underset{(p)}{\omega} \mapsto (IF^*\mathsf{d} + \mathsf{d}IF^*) \underset{(p)}{\omega} \equiv I\mathsf{d}(F^* \underset{(p)}{\omega}) + \mathsf{d}(IF^* \underset{(p)}{\omega}) \,.$$

Korzystając z wyników wcześniejszych naszych rozważań, wyliczamy bez trudu

$$\begin{aligned} IF^*\mathsf{d}\underset{(p)}{\omega} &= I\mathsf{d}(F^*\underset{(p)}{\omega}) = I(\mathsf{d}_M + \mathsf{d}_{[0,1]})\left(F_\bullet^*\underset{(p)}{\omega} + \mathsf{d}t \wedge \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner (F^*\underset{(p)}{\omega})\right) \\ &= I\left[\mathsf{d}_M(F_\bullet^*\underset{(p)}{\omega}) + \mathsf{d}t \wedge \frac{\partial}{\partial t}F_\bullet^*\underset{(p)}{\omega} - \mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}_M\left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner (F^*\underset{(p)}{\omega})\right)\right] \\ &= \int_0^1 \mathsf{d}t \left[\frac{\partial}{\partial t}F_t^*\underset{(p)}{\omega} - \mathsf{d}_M\left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner (F^*\underset{(p)}{\omega})\right)\right] \\ &= F_1^*\underset{(p)}{\omega} - F_0^*\underset{(p)}{\omega} - \mathsf{d}\int_0^1 \mathsf{d}t\left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner (F^*\underset{(p)}{\omega})\right) \end{aligned}$$

(należy odróżniać $F_\bullet$ od F – pierwszy symbol reprezentuje rodzinę odwzorowań $F_t : M \to M$, drugi zaś – odwzorowanie $F : [0,1] \times M \to M$) , i analogicznie

$$\mathsf{d}(IF^*\underset{(p)}{\omega}) = \mathsf{d}\left[I\left(F_\bullet^*\underset{(p)}{\omega} + \mathsf{d}t \wedge \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner (F^*\underset{(p)}{\omega})\right)\right] = \mathsf{d}\int_0^1 \mathsf{d}t\left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner (F^*\underset{(p)}{\omega})\right).$$

Dodając stronami obie równości, otrzymujemy

$$(IF^*\mathsf{d} + \mathsf{d}IF^*)\underset{(p)}{\omega} = F_1^*\underset{(p)}{\omega} - F_0^*\underset{(p)}{\omega}.$$

Na mocy poczynionych założeń jest zatem

$$\mathsf{d}IF^*\underset{(p)}{\omega} = (IF^*\mathsf{d} + \mathsf{d}IF^*)\underset{(p)}{\omega} = F_1^*\underset{(p)}{\omega} - F_0^*\underset{(p)}{\omega} = \underset{(p)}{\omega} - \pi_{M_0}^*\left(\underset{(p)}{\omega}|_{M_0}\right),$$

czyli

$$\underset{(p)}{\omega} = \mathsf{d}\left(IF^*\underset{(p)}{\omega} + \pi_{M_0}^*\underset{(p-1)}{\eta}\right).$$

Tym samym zidentyfikowaliśmy globalny potencjał p-formy $\underset{(p)}{\omega}$,

$$\underset{(p-1)}{\chi} = IF^*\underset{(p)}{\omega} + \pi_{M_0}^*\underset{(p-1)}{\eta}$$

i tym samym udowodniliśmy lemat. □

<u>**Uwaga:**</u> W szczególnym przypadku $M_0 = \{m\}$ (tj. <u>w przypadku rozmaitości ściągalnej do punktu</u>), w którym w trywialny sposób zachodzą równości $H^p(M_0) = \{0\}$, $p \in \overline{1, \dim_{\mathbb{R}} M}$, dostajemy w ten sposób znany wynik

$$\underset{(p-1)}{\chi} = IF^*\underset{(p)}{\omega}$$

(należy zwrócić uwagę, że $\Omega^p(\{m\}) = \{0\}$ dla $p > 0$ i $\Omega^0(\{m\}) \cong \mathbb{R}$).

Ostatnim zastosowaniem Twierdzenia HNKdR jest uogólnienie twierdzenia o czesaniu (dwuwymiarowej) sfery[1] na przypadek (hiper)sfery dowolnego wymiaru parzystego.

Twierdzenie CSPW (O Czesaniu Sfer Parzystego Wymiaru) Na sferze (jednostkowej)

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{2n} &:= \{\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \quad | \quad S_{2n}(x) = 0\ \}, \\ S_{2n}(x) &:= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n+1}^2 - 1 \end{aligned}$$

[1]W języku rosyjskim twierdzenie to nosi pieszczotliwą nazwę *Twierdzenia o czesaniu jeża.*

dowolnego wymiaru parzystego $2n \in 2\mathbb{N}$ nie istnieje pole wektorowe V spełniające warunek

$$\forall_{x \in \mathbb{S}^{2n}} \; : \; V(x) \neq 0$$

(tj. nigdzie nie znikające).

Dowód (ad absurdum): Załóżmy, przeciwnie, że istnieje pole wektorowe $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n})$ różne od zera w każdym punkcie sfery,

$$V \; : \; \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\} \, .$$

Powyższy zapis oznacza, że pole V traktujemy jako pole na $\mathbb{R}^{2n+1}$ *styczne* do podrozmaitości zanurzonej, tj. spełniające warunek

$$V(x) \in \mathsf{T}_x \mathbb{S}^{2n} \cong \ker \left(\mathsf{d} S_{2n} \right)(x) \subset \mathsf{T}_x \mathbb{R}^{2n+1} \, .$$

Pole nigdzie nie znikające (i tylko takie) można wówczas unormować, tj. zdefiniować pole

$$\widehat{V}(x) := \frac{V(x)}{\|V(x)\|} \, , \qquad \|V(x)\|^2 := \left(V(x) | V(x) \right)$$

zapisane w terminach normy $\| \cdot \|$ na $\mathsf{T}_x \mathbb{S}^{2n}$ indukowanej (poprzez ograniczenie, $\| \cdot \| \equiv \| \cdot \|_{\mathbb{R}^{2n+1}} |_{\mathsf{T}_x \mathbb{S}^{2n}}$) przez standardową normę $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^{2n+1}}$ zadawaną przez strukturę euklidesową $(\mathbb{R}^{2n+1}, (\cdot|\cdot))$ na $\mathsf{T}_x \mathbb{R}^{2n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+1}$, z iloczynem skalarnym

$$(\cdot|\cdot) \; : \; \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \; : \; (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{2n+1} x_i \, y_i \, .$$

Unormowane pole spełnia tożsamość

$$\left(\widehat{V}(x) | \widehat{V}(x) \right) = 1 \, .$$

Warunek styczności do sfery (zanurzonej) zapisujemy w postaci

$$\widehat{V}(x) \in \ker \left(2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_{2n+1} \right) \equiv \ker x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\widehat{V}(x) | x \right) = 0 \, .$$

Następnie rozważmy gładką homotopię

$$F \; : \; [0,1] \times \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+1} \; : \; (t, x) \mapsto \sin(\pi t) \, \widehat{V}(x) + \cos(\pi t) \, x \, .$$

Jako że obraz dowolnego punktu (t, x) względem tej homotopii spełnia tożsamość

$$\begin{aligned} (F(t,x) | F(t,x)) &= \sin(\pi t)^2 \left(\widehat{V}(x) | \widehat{V}(x) \right) + 2 \sin(\pi t) \, \cos(\pi t) \, \left(\widehat{V}(x) | x \right) + \cos(\pi t)^2 \, (x|x) \\ &= \sin(\pi t)^2 + \cos(\pi t)^2 = 1 \, , \end{aligned}$$

przeto jasnym jest, że przeciwdziedziną F jest w istocie $\mathbb{S}^{2n}$,

$$F \; : \; [0,1] \times \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1} \, .$$

W dalszej części dowodu wykorzystamy

Lemat OH (O Orientacji Hiperpowierzchni) Niechaj

$$\Sigma^p := \{ \; x \in \mathbb{R}^{p+1} \quad | \quad S(x) = 0 \; \}$$

będzie hiperpowierzchnią regularną wymiaru p zanurzoną w $\mathbb{R}^{p+1}$ jako przeciwobraz zera funkcji gładkiej $S \; : \; \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}$ spełniającej warunek

$$\forall_{x \in \Sigma^p} \; : \; \mathsf{d} f(x) \neq 0 \, .$$

Wówczas Σ^p jest orientowalna, przy czym orientację zadaje na niej gładkie nigdzie nie znikające pole p-form $\Omega_p^\pm$, które na elemencie

$$\Sigma_i^p := \{ \ x \in \Sigma^p \quad | \quad \partial_i f(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \neq 0 \ \}$$

pokrycia hiperpowierzchni,

$$\bigcup_{i \in \overline{1,p+1}} \Sigma_i^p = \Sigma^p \,,$$

przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \Omega_p^\pm|_{\Sigma_i^p} &:= \pm \frac{(-1)^i}{\partial_i f} \, \mathsf{d}x_1 \wedge \mathsf{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{i-1} \wedge \mathsf{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{p+1} \\ &\equiv \pm \frac{(-1)^i}{\partial_i f} \, \mathsf{d}x_1 \wedge \mathsf{d}x_2 \wedge \underset{\widehat{i}}{\cdots} \wedge \mathsf{d}x_{p+1} =: \Omega_i^\pm \,. \end{aligned}$$

Dowód Lematu OH: Dowód sprowadza się do wykazania, że lokalnie gładkie pola p-form $\Omega_i^\pm$ definiują w istocie globalnie gładkie pole $\Omega_p^\pm$, jak również że w każdym punkcie $x \in \Sigma^p$ istnieje liniowo niezależny układ p wektorów, na których $\Omega_p^\pm$ przyjmuje wartość różną od zera.

Pierwsze z powyższych stwierdzeń jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in \Sigma_i^p \cap \Sigma_{j \neq i}^p} \ : \ \Omega_i^\pm(x) = \Omega_j^\pm(x) \,.$$

Dowód wykorzystuje tutaj bezpośrednio definicję zbiorów Σ_i^p, która dla dowolnego $x \in \Sigma_i^p \cap \Sigma_{j \neq i}^p$ pozwala zapisać

$$\mathsf{d}x_j = -\frac{\partial_i f}{\partial_j f} \, \mathsf{d}x_i - \sum_{k \in \overline{1,p+1} \setminus \{i,j\}} \frac{\partial_k f}{\partial_j f} \, \mathsf{d}x_k$$

(tym razem powtarzający się indeks i *nie* jest wysumowany), a stąd (przy czysto porządkowym założeniu $i < j$ i wobec $\mathsf{d}x^i \wedge \mathsf{d}x^i = 0$)

$$\begin{aligned} \Omega_i^\pm(x) &= \pm \frac{(-1)^i}{\partial_i f} \, \mathsf{d}x_1 \wedge \mathsf{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{i-1} \wedge \mathsf{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^j \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{p+1} \\ &= -\pm \frac{(-1)^i}{\partial_i f} \, \mathsf{d}x_1 \wedge \mathsf{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{i-1} \wedge \mathsf{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j-1} \\ &\quad \wedge \left(\frac{\partial_i f}{\partial_j f} \, \mathsf{d}x_i + \sum_{k \in \overline{1,p+1} \setminus \{i,j\}} \frac{\partial_k f}{\partial_j f} \, \mathsf{d}x_k \right) \wedge \mathsf{d}x^{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{p+1} \\ &= -\pm \frac{(-1)^i}{\partial_i f} \, \mathsf{d}x_1 \wedge \mathsf{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{i-1} \wedge \mathsf{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j-1} \wedge \frac{\partial_i f}{\partial_j f} \, \mathsf{d}x_i \wedge \mathsf{d}x^{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{p+1} \\ &= \pm \frac{(-1)^{i+1}}{\partial_j f} \, (-1)^{(j-2)-(i-1)} \, \mathsf{d}x_1 \wedge \mathsf{d}x_2 \wedge \underset{\widehat{j}}{\cdots} \wedge \mathsf{d}x_{p+1} \\ &= \Omega_j^\pm(x) \,, \end{aligned}$$

co też należało pokazać.

W tym momencie pozostaje wskazać wektory o żądanych własnościach. Zdefiniujmy w punkcie $x \in \Sigma_i^p$ wektory

$$V_{(m)} := \partial_i f(x) \, \partial_m - \partial_m f(x) \, \partial_i \,, \quad m \in \overline{1, p+1} \setminus \{i\} \,.$$

Łatwo widać, że tworzą one układ liniowo niezależny (a to z racji $\partial_i f(x) \neq 0$) i są styczne do Σ^p, gdyż

$$\begin{aligned} V_{(m)} \lrcorner \, \mathsf{d} f(x) &= \partial_k f(x) \, \mathsf{d} x^k \left(\partial_i f(x) \, \partial_m - \partial_m f(x) \, \partial_i\right) = \partial_k f(x) \, \partial_i f(x) \, \delta^k_m - \partial_k f(x) \, \partial_m f(x) \, \delta^k_i \\ &= \partial_m f(x) \, \partial_i f(x) - \partial_i f(x) \, \partial_m f(x) = 0 \, . \end{aligned}$$

Zachodzi też, zgodnie z zapowiedzią, relacja

$$\begin{aligned} \Omega^\pm_p(x) \Big(V_{(1)}, V_{(2)}, \underset{\widehat{i}}{\ldots}, V_{(p+1)} \Big) &= \Omega^\pm_p(x) \Big(\partial_i f(x) \, \partial_1, \partial_i f(x) \, \partial_2, \underset{\widehat{i}}{\ldots}, \partial_i f(x) \, \partial_{p+1} \Big) \\ &= \pm (-1)^i \, \left(\partial_i f\right)^{p-1} \neq 0 \, , \end{aligned}$$

która kończy dowód lematu. □

Powracając do dowodu zasadniczego, możemy teraz wypisać formę objętości na $\mathbb{S}^{2n}$ w jawnej postaci

$$\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)(x) = c_n \cdot \frac{(-1)^i}{x_i} \, \mathsf{d} x_1 \wedge \mathsf{d} x_2 \wedge \underset{\widehat{i}}{\cdots} \wedge \mathsf{d} x_{2n+1} \, , \qquad x \in \mathbb{S}^{2n}_i \, ,$$

przy czym

$$\mathbb{S}^{2n}_i := \{ \; x \in \mathbb{S}^{2n} \quad | \quad x_i \neq 0 \; \} \, ,$$

a $c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest stałą normalizacyjną dobraną tak, by zachodziło

$$\int_{\mathbb{S}^{2n}} \mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) = V\left(\mathbb{S}^{2n}\right) \, ,$$

gdzie $V\left(\mathbb{S}^{2n}\right)$ jest (standardową) objętością sfery wymiaru $2n$.

Na mocy Twierdzenia HNKdR stwierdzamy, że

$$\left[F_1^* \mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)\right]^{(\mathbb{S}^{2n})}_{\mathrm{dR}} = \widehat{F}_1^* \left[\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)\right]^{(\mathbb{S}^{2n})}_{\mathrm{dR}} = \widehat{F}_2^* \left[\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)\right]^{(\mathbb{S}^{2n})}_{\mathrm{dR}} = \left[F_2^* \mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)\right]^{(\mathbb{S}^{2n})}_{\mathrm{dR}} \, ,$$

co oznacza, że istnieje gładkie pole $(2n-1)$-form $\eta \in \Omega^{2n-1}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)$ o własności

$$F_1^* \mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) - F_0^* \mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) = \mathsf{d}\eta \, .$$

Z drugiej strony

$$F_0(x) = x \qquad \Longrightarrow \qquad F_0 \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{2n}}$$

i

$$F_1(x) = -x \qquad \Longrightarrow \qquad F_1 \equiv \kappa \; : \; x \mapsto -x$$

(odwzorowanie κ bywa nazywane odbiciem antypodalnym), a nadto

$$\mathrm{id}^*_{\mathbb{S}^{2n}} \mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) = \mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)$$

i (dla dowolnego $x \in \mathbb{S}^{2n}_i$, $i \in \overline{1, 2n+1}$)

$$\begin{aligned} \kappa^* \mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)(x) &= c_n \cdot \frac{(-1)^i}{(-x_i)} \, \mathsf{d}(-x_1) \wedge \mathsf{d}(-x_2) \wedge \underset{\widehat{i}}{\cdots} \wedge \mathsf{d}(-x_{2n+1}) \\ &= (-1)^{2n+1} c_n \cdot \frac{(-1)^i}{x_i} \, \mathsf{d} x_1 \wedge \mathsf{d} x_2 \wedge \underset{\widehat{i}}{\cdots} \wedge \mathsf{d} x_{2n+1} = -\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)(x) \, , \end{aligned}$$

czyli

$$\kappa^* \mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) = -\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)$$

(w tym właśnie punkcie kluczową rolę odgrywa parzystość wymiaru sfery). Koniec końców otrzymujemy równość

$$-2\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) = F_1^*\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) - F_0^*\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right) = \mathsf{d}\eta\,.$$

Całkując obustronnie po $\mathbb{S}^{2n}$ i wykorzystując Twierdzenie Stokesa (w połączeniu z wiadomym faktem $\partial\mathbb{S}^{2n} = \varnothing$), dochodzimy do sprzeczności

$$0 \neq -2V\left(\mathbb{S}^{2n}\right) = \int_{\mathbb{S}^{2n}} \left(-2\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)\right) = \int_{\mathbb{S}^{2n}} \mathsf{d}\eta = \int_{\partial\mathbb{S}^{2n}} \eta = 0\,,$$

która dowodzi fałszywości wyjściowego założenia o istnieniu normalizowalnego pola wektorowego na $\mathbb{S}^{2n}$. □

Literatura

[Hit10] N. Hitchin, *"Differentiable Manifolds. Course* ***C3.2b*** *2010"*, lecture notes.

Warszawa, 25. października 2011 r.