Andrzej Szymacha
Instytut Fizyki Teoretycznej
Wydział Fizyki UW

Szczególna Teoria Względności – 100 lat później

Jest wiele podręczników, a w roku szczególnym 2005, wiele artykułów i referatów okolicznościowych, omawiających odkrycie Einsteina i jego doniosłe konsekwencje dla rozwoju fizyki w okresie minionych 100lat. Wszystkie one są bardzo podobne. Omawiają spory i dylematy trapiące fizyków 100 lat temu i streszczają treść pracy Einsteina zatytułowanej: „O elektrodynamice ciał w ruchu".

Ponieważ owe spory i owe dylematy są mocno zagmatwane, uważam, że najlepiej jest uczcić 100-lecie STW odcinając się od historii i spojrzeć na teorię względności tak by było najprościej, najbliżej tego sedna sprawy, które oczywiste jest dla nas dzisiaj, po stu latach posługiwania się STW. Przy takim podejściu okaże się, że wszystko jest dużo prostsze niż się może wydawać przy czytaniu zwykłych podręczników. W szczególności, by zrozumieć STW, wcale nie trzeba zajmować się elektrodynamiką. Nie trzeba też analizować żadnych szczególnych eksperymentów. Pokażę, że istnienie pewnej uniwersalnej stałej prędkości jest konsekwencją STW, wnioskiem, a więc nie musi być kładzione jako jej fundament. Fundament, który z psychologicznego punktu widzenia jest trudny do przełknięcia dla początkujących adeptów fizyki, powodując uczucie, iż STW jest tajemnicza, trudna i niepojęta.

Gdy Einstein formułował STW, odnosiła się ona do zjawisk elektromagnetycznych. Nie dla wszystkich było jasne, czy teoria z wbudowaną w sposób szczególny rolą światła, ma też bezpośrednie zastosowanie do zjawisk innych niż elektromagnetyczne. Czy znalezione przez Einsteina równania wolno stosować, do właśnie odkrywanych tajemniczych procesów promieniotwórczych? Mówię tajemniczych, bo nawet nie mogę ich nazwać procesami jądrowymi. Hipoteza o istnieniu jądra atomowego została postawiona, gdy STW miała już swoje 6, czy 7 lat. Dla Einsteina, ale nie dla wszystkich, stosowalność STW do „wszystkiego co się rusza" nie ulegała wątpliwości. Bardzo szybko oderwał on odkryte prawa od elektrodynamiki uważając je za własności samego czasu i przestrzeni. Tym samym każdy proces zachodzący w owej czasoprzestrzeni musi te prawa respektować.

Przy podejściu, jakie zaproponuję, zajmiemy się od razu czasem i przestrzenią, a nie światłem. Uzyskane wyniki, będą musiały siłą rzeczy dotyczyć wszystkich procesów w tej czasoprzestrzeni zachodzących. Ta oczywista ogólność, obok prostoty argumentów prowadzących do STW, jest drugim wartościowym aspektem nowoczesnego podejścia, podejścia do „STW, 100 lat później”.

Pojawiło się już słowo czasoprzestrzeń. Zapewne większość z Was słyszała, że czasoprzestrzeń jest czterowymiarowa, co brzmi nieco mistycznie. Ograniczając się do zjawisk zachodzących w jednym kierunku przestrzennym, jak to się zwykle i tak robi przy początkowym nauczaniu kinematyki i dynamiki, mamy do czynienia z czasoprzestrzenią zaledwie dwuwymiarową, a więc płaszczyzną czasoprzestrzenną.

Cóż to fizycznie oznacza? Wyobraźmy sobie długi, wąski, wypełniony w rzeczywistości, czy tylko w naszej wyobraźni, – punktami materialnymi – pozostającymi stale na osi tunelu. Jedne ciała gonią inne. W trakcie zbliżenia, ciała mogą nie zakłócić swego stanu i „minąć” się swobodnie, mogą, jak to czynią niekiedy, zderzyć się i skleić, albo, wreszcie, wyprodukować w wyniku zderzenia kilka ciał, albo zupełnie nowych, albo tożsamych z początkowymi.

Czasoprzestrzeń jest zbiorem zdarzeń, w tym wypadku zdarzeń dziejących się na osi rury, i mówiąc poglądowo takich które się działy, dzieją i dziać będą. Gdy wprowadzimy układ odniesienia, zdarzenie będzie mogło być wskazane przez podanie pewnej współrzędnej x i pewnej wielkości t zwanej współrzędną czasową zdarzenia. Pojęcie zdarzenia, jako punktu w czasoprzestrzeni ma sens i wtedy, gdy żaden układ odniesienia nie jest wybrany. W zarysowanym obrazie, każde minięcie się dwóch konkretnych ciał, to już jest zdarzenie! Zupełnie tak, jak przecięcie się dwóch wskazanych linii na płaszczyźnie (w szczególności dwóch linii prostych) wyznacza jednoznacznie pewien punkt tej płaszczyzny, tak mijanie się dwóch swobodnych nieoddziałujących ciał wyznacza pewne zdarzenie.

Każda z przecinających się linii ma, oprócz tego wspólnego punktu, nieskończenie wiele innych punktów które mogłyby by być punktami przecięcia z innymi liniami. Każde z rozważanych ciał, oprócz tego, że uczestniczy w pewnym momencie swej historii w mijaniu się z wprowadzonym drugim ciałem, ma swoje nieskończenie długie życie, czyli zbiór innych zdarzeń, które mogą być, w szczególności opisane jako mijanie się z drugim, trzecim, czwartym, czy jeszcze innym ciałem.

Gdy jadę szosą, mogę odcinek swego losu, swego bytu poświęcony tej podróży traktować jako jednowymiarowy, ograniczony zbiór zdarzeń scharakteryzowany tym, że właśnie mijam 2, a potem 3, a potem 4 itd. słupek hektametrowy na 7-dmym kilometrze szosy, potem mijam słupki na 8-mym kilometrze itd.

Możecie się dziwić trochę, czemu ja tak komplikuję ten opis, a nie powiem wprost, że rozważam ciała poruszające się wzdłuż jednej prostej z różnymi prędkościami. Dzięki takiemu językowi, unikam na początku wyróżnienia jakiegoś ciała, do którego mógłbym **odnosić** prędkości wszystkich ciał. Jest bardzo niewygodnie i niezręcznie analizować równouprawnienie układów, gdy od początku używamy języka, wyróżniającego, *nolens volens,* jeden z nich. Cała historia fizyki została skażona tym, że, z naszego ludzkiego punktu widzenia, dla naszych mało naukowych, codziennych zachowań, układ odniesienia, w którym spoczywają domy, ulice, drzewa, narzuca się jako rzekomo oczywisty układ względem którego warto mówić o prędkości. Ale już Galileusz odkrył, że chcąc uprawiać fizykę, musimy się od tego uwolnić. Galileusz twierdził, przykładowo, że przebywając na statku płynącym względem spokojnej wody idealnie jednostajnie, nie wykryjemy żadnym doświadczeniem fizycznym czy rzeczywiście płyniemy, czy jeszcze stoimy w porcie. Z tego punktu widzenia układ odniesienia lądu i układ odniesienia statku są zupełnie równoprawne.

Zamiast od początku mówić o ruchu, spróbujmy mówić o czasoprzestrzeni, o zdarzeniach i dopiero potem, spróbujmy wprowadzić układ odniesienia, ale tak, by równoprawność układów odniesienia była oczywista od samego początku, i by z tej równoprawności móc wyciągać użyteczne a doniosłe wnioski. To właśnie jest program STW.

Mamy w naszej rurze *continuum* różnych prawdziwych, czy pomyślanych ciał, i dla każdego z nich *continuum* jego własnych zdarzeń.

Taki zbiór zdarzeń, w którym uczestniczy konkretne ciało, nazywa się linią świata tego ciała. Linie świata wszystkich ciał krzyżują się ze sobą, tak jak linie proste na płaszczyźnie euklidesowej krzyżują się ze sobą.

Linia świata ciała swobodnego może być uważana za linię prostą. Podstawową cechą linii prostych na płaszczyźnie jest to że dwie takie linie albo są równoległe, albo przecinają się w jednym punkcie. Ale dwa ciała swobodne, zgodnie z zasadą bezwładności galileusza, albo są wzajemnie nieruchome i nigdy się nie spotkają, albo jednostajnie się (najpierw) zbliżają, a po minięciu oddalają spotykając się tylko raz i to na nieskończenie krótko

Cała ta nasza czasoprzestrzeń, to niezmiernie prosta sprawa! Ma ona wiele wspólnego ze zwykłą płaszczyzną euklidesową, choć istnieje też głęboka różnica, którą zrozumiemy.

Mamy więc dwuwymiarową czasoprzestrzeń, w niej linie proste, albo się przecinające, albo równoległe, mamy zdarzenia. Możemy konstruować figury, np. trójkąty i zastanawiać się nad związkami między bokami takich trójkątów. Ciekawe. Co można powiedzieć o takich trójkątach?

W zwykłej geometrii sporządzamy rysunek, prowadzimy dedukcję, zgodną z tym co widzimy i dochodzimy, do takiego, np. twierdzenia Pitagorasa. Czasoprzestrzeń i własności trójkątów w niej występujących są inne. Poznamy jakie są. Nie można nanieść zdarzeń dwuwymiarowej czasoprzestrzeni na kartkę papieru by czegoś nie popsuć. Podobnie jak nie można, zrobić wiernej mapy dużego fragmentu Ziemi na płaskim arkuszu. Potrzebny jest globus. Dla czasoprzestrzeni nie umiemy zrobić odpowiednika globusa, by wszystko, co trzeba, dosłownie zobaczyć.

Mamy na szczęście inny sposób. Możemy sparametryzować czasoprzestrzeń dwiema liczbami (współrzędnymi zdarzenia) i posłużyć się w analizie nie rysunkiem, lecz algebrą! Dla tych z was, którzy lubią geometrię analityczną równanie $x\hat{}2 + y\hat{}2 = R\hat{}2$, reprezentuje okrąg, co najmniej równie dobrze i wyraziście, jak rysunek tegoż okręgu, a układ równań $Ax + By = C,\ A'x + B'y = C'$ jest równie użyteczny jak rysunek dwóch prostych. Gdy stałe A, B, C, A', B', C' są takie, że równania prostych mają dokładnie jedno rozwiązanie, „widzimy", że proste się przecinają. Gdy równania są sprzeczne, to znaczy, że nasze proste są równoległe itd.

By wprowadzić liczby, których para wartości określi punkt (albo zdarzenie), musimy zacząć od decyzji – którą z nieskończenie wielu linii prostych obierzemy za oś rzędnych. Dotykamy w tym miejscu **prawdziwego sedna teorii względności** (a także samego sedna geometrii Euklidesa!!!). Nie ma wyróżnionego wyboru!!!! To jest sens zasady względności w kinematyce. To jest także sens tzw. izotropowości przestrzeni Euklidesa. (Nieskończona) kartka papieru jest w każdym kierunku „taka sama", podobnie jak każdy z jej punktów jest taki sam. Dokładnie te same dwie własności zakładamy o czasoprzestrzeni.

Może ktoś zapytać, a skąd my to wiemy? Tu można by zacząć długie dywagacje o sensie teorii fizycznych, ich stosunku do twardej rzeczywistości.

Moje osobiste stanowisko jest następujące. Postulat dotyczący poznawalnej rzeczywistości, który jest tak niesłychanie prosty, jak właśnie jednakowość, czy równoprawność czegoś, wyróżniony przez to, że tylko on jeden jest prosty, a zepsuć go można na nieskończenie wiele sposobów, wart jest przynajmniej zbadania! Gdy okaże się, że doskonale pasuje do rzeczywistości, gdy pozwoli przewidzieć rozmaite praktyczne rzeczy, szczęście jest kompletne. Przyjemność, ba radość i rozkosz zajmowania się fizyką – dla mnie – sprowadza się właśnie do czegoś takiego. Naturalne założenie, wyróżnione swą prostotą (można też powiedzieć, **symetrią**), a konsekwencje przebogate. Osiągnięcie takiego stanu oznacza prawdziwe zrozumienie (jakiegoś fragmentu) fizyki. Nie twierdzę, że wszyscy moi koledzy wyznają podobne poglądy, ale dzisiaj akurat ja prowadzę ten wykład!

I jeszcze jedna ogólniejsza uwaga, przed przystąpieniem do konkretów. Otóż zrozumieć STW, to znaczy zrozumieć, dlaczego świat nie jest taki, jakim uznawał go Galileusz, potem Newton, a właśnie taki jaki opisuje STW. Gdybyśmy nie wiedzieli jeszcze nic o STW, wierzyli w absolutność czasu i zwykłe dodawanie prędkości ciała i układu odniesienia, to moglibyśmy też kręcić nosem na samo pojęcie ciała odosobnionego (że to idealizacja), nad pojęciem układu inercjalnego (że i to idealizacja), nad równouprawnieniem układów inercjalnych (bo wydaje się, że istnieje układ odniesienia w którym nasza Galaktyka, średnio spoczywa), czyli ogólnie nad pierwszą zasadą dynamiki. Słyszeli niektórzy z Was o krzywiźnie czasoprzestrzeni, o skończonym czasie, jaki minął od Wielkiego Wybuchu.

STW nie zajmuje się tymi subtelnościami. Dla wielu zjawisk w laboratorium, dla rozmaitych procesów chemicznych, elektrycznych, czy elektronicznych, dla rozmaitych procesów rozpadów jądrowych i procesów z udziałem, mniej czy bardziej egzotycznych cząstek elementarnych, obszar czasoprzestrzeni potrzebny do ich opisu, jest wystarczająco jednorodny, wystarczająco płaski, by idealizujące założenia STW (obecne także w klasycznej mechanice i klasycznej euklidesowej geometrii) były całkowicie wystarczające.

Aby wprowadzić współrzędne zaczynam więc od wyboru pierwszej linii. Myśląc o współrzędnych na płaszczyźnie euklidesowej, np. na jakimś płaskim placu, gdzie zaczynam jakieś przedsięwzięcie budowlane, mogę wziąć lekko napięty, długi sznurek, wybrać dalej jakiś punkt sznurka, zawiązać węzełek i nazwać go węzełkiem zerowym. Następnie wybieram drugi węzełek i nazywam go węzełkiem pierwszym. Sposób wyboru tego drugiego jest w zasadzie dowolny, ale ze względu na konieczność, w przyszłości wielokrotnego odkładania kolejnych węzełków, tak samo położonych na sznurku w stosunku do poprzedniego, jak ten pierwszy był położony w stosunku do zerowego, dobrze jest jakoś tę regułę skodyfikować, wprowadzić praktyczny przepis, a odcinkowi między sąsiednimi węzłami przypisać pojęcie długości jednostkowej. Odległość między węzłami dalszymi wyznaczamy licząc liczbę supełków. (Interpolacja dla odległości ułamkowych jest oczywista). Procedura ta zamieniła sznurek w oś liczbową.

W czasoprzestrzeni postępujemy, niemal identycznie. Bierzemy ciało swobodne, wybieramy zdarzenie dowolne, jako zerowe, i wybieramy inne zdarzenie jako jednostkowe. Przypisujemy odcinkowi zdarzeń pomiędzy długość jednostkową, zwaną, tym razem, jednostką czasu. Algorytm pozwalający wskazywać zdarzenia związane z tym ciałem (leżące na jego linii świata), jednakowo w stosunku do siebie odległe, czyni z naszego ciała „tykający" zegar. Wyróżniona linia świata staje się osią liczbową.

Punkty przy sznurku, lub zdarzenia przy pierwszym zegarze, mogą już być charakteryzowane liczbą. A co z punktami, czy zdarzeniami pozostałymi? Postępowanie jest nadal proste. Wprowadzamy oprócz linii początkowej, której przypiszemy liczbę $x = 0$ linię do niej równoległa, (co w czasoprzestrzeni oznacza zegar spoczywający w stosunku do pierwszego), zamienioną w oś liczbową według tego samego algorytmu (to znaczy z użyciem tych samych jednostek). Nowej linii przypisujemy $x = 1$, linii równoległej po stronie przeciwnej $x = -1$, itd. Tym samym układ współrzędnych na płaszczyźnie możemy kojarzyć z układem równoległych, ponumerowanych sznurków z supełkami, a układ inercjalny w czasoprzestrzeni, z rodziną równoodległych, wzajemnie nieruchomych zegarów, tykających i rejestrujących upływające sekundy.

Teraz jest świetnie. Przy każdym zdarzeniu jest (albo mógłby być) zegar o numerze x wykonujący tyknięcie o numerze t. Na płaszczyźnie, koło każdego punktu znajdujemy sznurek o numerze x, na którym mamy węzełek o numerze y.

Wprowadzony system nazywa się na płaszczyźnie, tradycyjnie, układem współrzędnych, a w czasoprzestrzeni *inercjalnym układem odniesienia.* Jedna jeszcze sprawa wymaga wyjaśnienia. W czasoprzestrzeni nie widać sposobu powiązania algorytmu do definiowania jednostki czasu z algorytmem dla jednostki odległości między kolejnymi zegarami. W przestrzeni euklidesowej, mamy wystarczającą wiedzę, by użyć tej samej jednostki. Nie jest to jednak przymus. Dla zachowania pełnej analogii, nim odpowiemy na pytanie, czy i w czasoprzestrzeni nie dałoby się znaleźć wspólnej jednostki, pomyślmy o zastosowaniu niezależnym jednostki dla wyznaczania współrzędnej y i do wyznaczania x. Piloci w St. Zj., komunikując się z lotniskiem, czy między sobą, wysokość nad poziom morza podają w stopach, a odległość do lotniska (w poziomie) w milach. Zabawne, że gdyby chcieć obliczyć odległość do lotniska, czy między różnymi samolotami w linii prostej, w milach, należałoby zastosować wzór $d = \sqrt{x^2 + y^2/(5280\mathrm{f}/\mathrm{m})^2}$, gdyż jedna mila to 5280 stóp, gdzie x to odległość w milach, a y, to różnica wysokości w stopach (foot). Ten wzór, to twierdzenie Pitagorasa w przebraniu. Powołuję się na nie, bo wszyscyśmy się go uczyli. Poszukując prawdy o STW, odkryjemy to twierdzenie, przy okazji, na nowo.

Gdyby zadać pytanie, czy oś rzędnych na naszej płaszczyźnie jest pochylona, to każdy by się uśmiał. A niby względem czego miałaby być pochylona. Oś rzędnych, czyli sznurek zerowy i wszystkie inne sznurki są do siebie idealnie równoległe. Jeśli przez nachylenie, czy pochylenie, rozumieć odstępstwo od równoległości, to nie ma żadnego pochylenia. Podobnie pytanie o ruch. Czy nasze zegary są w ruchu? Jakim ruchu? Ruch, to zbliżanie, albo oddalanie, a zegary danego układu są w stałej od siebie odległości. Ich linie świata są równoległe.

Wróćmy teraz do dowolności wyboru pierwszego sznurka (zegara). Jest celowe i bardzo owocne, rozważyć wraz z wprowadzonym układem współrzędnych (odniesienia), jakikolwiek **inny** układ współrzędnych i zacząć eksploatować ich równoprawność. Gdy są dwa układy, można mówić o kącie nachylenia, (albo o prędkości). Który z układów jest teraz pochylony? Nadal **żaden**! Ale mamy pełne prawo powiedzieć, że drugi jest pochylony względem pierwszego, ale i że pierwszy jest pochylony względem drugiego. Tylko tak można utrzymać **równoprawność** obu. To, że pochylenie może być tylko względne, i że ruch może być tylko względny, jest synonimem równoprawności dwóch układów (kartezjańskich, albo dwóch układów inercjalnych).

Stwierdzenia powyższe mają uchwytną wartość, dającą się przekuć na konkretne wzory o konkretnych konsekwencjach.

Weźmy ciało, które minęło zegar centralny naszego układu, gdy pokazywał on akurat 0. Równanie ruchu tego ciała, zgodnie z ową proporcjonalnością, będzie $x = Vt$, z jakąś wartością współczynnika proporcjonalności. Równanie innego ciała o linii równoległej do powyższego, będzie $x = Vt + const$.

Teoria względności ma się zajmować relacjami między dwoma inercjalnymi układami odniesienia. Jeden, nazwijmy go O już mamy (pracowicie skonstruowany). Teraz trzeba skonstruować drugi O', a to już będzie łatwiej. Trzeba powtórzyć konstrukcję biorąc identyczne zegary (wyskalowane według wzorców atomowych nieruchomych względem tych zegarów), rozmieszczonych według identycznej zasady, co zegary układu pierwszego. Linie świata tych zegarów względem naszych zegarów, opisane będą równaniami, jak wyżej: $x = Vt + const$. Są to przecież zegary swobodne.

Unikniemy nieistotnych komplikacji, gdy przyjmiemy, iż nowy zegar „zerowy" mija nasz zegar leżący w początku układu, gdy właśnie pokazuje on zero. Zarazem początek liczenia czasu w nowym układzie jest tak wybrany, że właśnie w momencie mijania się początków, zegar o współrzędnej x'=0, też pokazuje t'= 0.

Zwroty na osiach x i x' można wybrać na różne sposoby (razem 4). Wybierzmy te zwroty przeciwnie, a zarazem tak, by i prędkość O względem O' była dodatnia, jak i O' względem O też była dodatnia. Zegar o x'=1 (na lewo od zegara centralnego), dotrze do początku układu O, po pewnym dodatnim czasie Mamy dla niego $x = V(t - t_0) = Vt - a$. Zegary o większych wartościach x', będą miały stałą wyrażającą opóźnienie proporcjonalnie większą. Zatem ogólnie:

$$x = Vt - ax'$$

Jest to **już połowa poszukiwanej transformacji**. Jest to zarazem nic innego, jak proste równanie ruchu jednostajnego zegarów nowego układu opisane we współrzędnych pierwszego układu.

Dla zdobycia drugiej połowy odwołamy się do równoprawności układów inercjalnych! W połączeniu z przyjętymi zwrotami osi, pozwala ona, ba, **nakazuje** napisać równanie identyczne z powyższym, co **do formy,** ale z zamienionymi rolami współrzędnych. Zestawmy oba równania obok siebie

$$x = Vt - ax'$$

$$x' = Vt' - ax$$

Powyższe dwa równania, to **kamień filozoficzny fizyki**!

W geometrii Euklidesa, równanie linii o ustalonym *x'* (przy zapisie równania nowej osi *y'*: $x = Ky$, oraz przy wyborze jednakowych jednostek na osiach)) odczytujemy z rysunku:

$x = Ky - \sqrt{1+K^2}x'$. Jest też oczywiście $x' = Ky' - \sqrt{1+K^2}x$. Rzuca się w oczy, że jest zupełnie naturalne, iż $a \neq 1$, a jedynie dla bardzo niewielkich pochyleń *K* zbliża się szybko do 1.

Nim przejdziemy do wyznaczenia *a* dla czasoprzestrzeni, zmieńmy zwrot na osi *x'*. Przyjęliśmy zwroty przeciwne, by zasada względności, czyli równouprawnienia, sprowadzająca się do możliwości napisania drugiego równania, była tak dobitna jak tylko to możliwe. Zmiana zwrotu w drugim układzie oznacza zaopatrzenie każdego *x'* w powyższych wzorach znakiem „minus". Jeśli jednocześnie pomnożyć stronami drugie równanie przez –1, dostaniemy:

$$x = Vt + ax' \qquad (1)$$

$$x' = -Vt' + ax \qquad (2)$$

Sens powyższych wzorów, jak wynika z ich wyprowadzenia jest taki, że każda czwórka współrzędnych spełniających oba równania odpowiada numerom i wskazaniom na dwóch **akurat** mijających się zegarach. Gdy zainteresuję się, gdzie i kiedy (według zegarów układu O) jest zegar o numerze *x'*, gdy sam on pokazuje czas *t'*, wystarczy, że rozwiążę powyższy układ dwóch równań traktując zmienne primowane jako znane, a nieprimowane jak poszukiwane. Mogę zresztą robić z powyższymi równaniami, co mi się podoba. Są one po prostu prawdziwe.

Rzecz jasna, brakuje nam jeszcze wartości *a*. Nim przejdziemy do jej wyznaczenia, dodajmy nasze równania stronami i pogrupujmy wyrazy podobne. Dostajemy

$$(x + x')(1 - a) = V(t - t') \qquad (3)$$

Kluczową sprawą dla faktycznego sensu uzyskanej transformacji jest to czy wielkość *a* jest równa 1, czy różna od 1. Dla *a*=1 dostaje się trwale *t* = *t'*, a to właśnie jest sygnałem klasycznej, niutonowsko-galileuszowej fizyki. Równanie ruchu jest *x* = *Vt* + *x'*. Zwie się ono transformacją Galileusza.

Jednak, to nie zasada względności wymusza taką wartość *a*. Zasada względności, tak jak ją wykorzystaliśmy dopuszcza jakieś *a*. Musimy zbadać, jakie możliwości faktycznie istnieją. Wielkość *a*, łatwo wyznaczyć dla prędkości *V* =0. Widać z równania (3), iż w tym wypadku musi być *a* = 1. Czyli $a(V = 0) = 1$. A jak *a* może zmieniać się z prędkością (o ile może?)

Jak dotąd, korzystaliśmy z zasady równoprawności dla wybranej pary układów. Ale musi ona być słuszna dla **każdej** pary układów odniesienia. Weźmy pod uwagę trzeci układ O'', poruszający się względem układu O’ z prędkością *v*’. By wzory były bardziej przejrzyste piszmy $a(V) \equiv a$, $a(v') \equiv a'$

Mamy jednocześnie:

$$x = Vt + ax' \qquad (4)$$

$$x' = -Vt' + ax \qquad (5)$$

$$x' = v't' + a'x'' \qquad (6)$$

$$x'' = -v't'' + a'x' \qquad (7)$$

Wzorów powyższych jest dostatecznie dużo, by wyliczyć z nich (po wyeliminowaniu współrzędnych układu O’) ruch trzeciego względem pierwszego i pierwszego względem trzeciego. Te układy to też para podpadająca pod zasadę względności, więc otrzymany wynik nie może być byle, jaki!!! Musi spełniać te rygory, jakie dotąd znaleźliśmy.

Rachunek jest prosty. Mnożymy stronami równanie (5) przez *v*’, a (6) przez *V* i dodajemy stronami:

$$x'(v' + V) = av'x + a'Vx'' \qquad (8)$$

Wyznaczone z tego równania *x’* wstawiamy do równań pierwszego i ostatniego, porządkujemy wyrazy podobne i porównujemy uzyskane wyniki z tym, co **musi być**

Jest	Musi być
$x = \dfrac{V + v'}{1 + \dfrac{1 - a^2}{V^2} Vv'} t + \dfrac{aa'}{1 + \dfrac{1 - a^2}{V^2} Vv'} x''$	$x = \Omega t + a(\Omega) x''$
$x'' = -\dfrac{V + v'}{1 + \dfrac{1 - a'^2}{v'^2} Vv'} t'' + \dfrac{aa'}{1 + \dfrac{1 - a'^2}{v'^2} Vv'} x$	$x'' = -\Omega t'' + a(\Omega) x$

Uzyskaliśmy bardzo ciekawy wynik. Postać transformacji **nie jest** dla każdego, byle jakiego *a,* tożsamościowo takiej postaci, jaka **musi** być (z jakąś wartością nowej prędkości wypadkowej Ω), ale też, po spełnieniu pewnego warunku **będzie** miała tę postać. Ten extra warunek, to jeszcze jedna **kluczowa** konsekwencje zasady względności.

Uważne przyjrzenie się otrzymanym wzorom transformacji pomiędzy O a O’’, pozwala dostrzec, że we współczynnikach przy czasach *t* i *t’’*, które – poza znakiem – mają być sobie równe, występują w mianownikach: w jednym $\frac{1-a^2}{V^2}$, w drugim zaś $\frac{1-a'^2}{v'^2}$. Warunek, jaki musi być spełniony to właśnie równość tych dwóch wyrażeń: $\frac{1-a^2}{V^2}=\frac{1-a'^2}{v'^2}$, czyli:

$$\frac{1-a(V)^2}{V^2}=\frac{1-a(v')^2}{v'^2} \qquad (9)$$

To jest nasz warunek na wielkość *a*. Rozwiązanie *a*=1 (odpowiadające transformacji Galileusza) spełnia powyższy warunek, ale istnieje też rozwiązanie różne od 1. Musi jednak być tak, że kombinacja $(1-a(V)^2)/V^2$, po zamianie prędkości *V* na jakąkolwiek inną, w powyższym równaniu na *v*', **nie zmieni swojej wartości. Kombinacja ta musi być stałą.**

Oznaczając tę, na razie nieznaną stałą, literą *C* mamy: $(1-a(V)^2)/V^2=C$, czyli :

$$a(V)=\sqrt{1-CV^2} \qquad (10)$$

Wstawiając to wyrażenie do równań ruchu i do wyrażenia na wypadkową prędkość Ω dostajemy:

$$x=Vt+\sqrt{1-CV^2}\,x' \qquad (11)$$

$$x'=-Vt'+\sqrt{1-CV^2}\,x \qquad (12)$$

$$\Omega = \text{"}V+v'\text{"}=\frac{V+v'}{1+CVv'} \qquad (13)$$

Z ostatniego z równań widać, iż prędkość złożona jest mniejsza (dla C>0) od algebraicznej sumy prędkości składanych.

Z kolei we wzorach 11 i 12 zawarta jest geometria trójkątów w czasoprzestrzeni. Rozważmy następujący trójkąt w czasoprzestrzeni. Jeden wierzchołek w początku układu. Jeden bok to zbiór zdarzeń w chwili 0 na odcinku (w rozpatrywanym układzie odniesienia) od 0 do *x*. Drugi bok, to zbiór zdarzeń w punkcie o współrzędnej *x*, trwający t sekund. I wreszcie zbiór zdarzeń ciągnący się od punktu 0 w chwili 0 do punktu *x* w chwili *t*. Ten zbiór zdarzeń może być zbiorem zdarzeń jakiegoś ciała, które zaczęło ruch w punkcie 0 i skończyło go po czasie *t* w punkcie *x*. Musiało poruszać się więc z prędkością $V=x/t$. Jaka jest długość tego boku? Z punktu widzenia układu współwędrującego z naszym ciałem, jest to czas trwania tego odcinka historii ciała. Inaczej współrzędna *t'* końcowego punktu. Obliczmy to *t'*, czyli długość owej „przyprostokątnej”. Ponieważ *x'* końcowego punktu jest 0, wzór (12) daje nam

$$t' = \sqrt{1-CV^2}\, x/V = t\sqrt{1-CV^2} = \sqrt{t^2 - Cx^2}$$

Zauważmy, że dla uzyskania równań dla płaszczyzny euklidesowej, i euklidesowego twierdzenia Pitagorasa, musielibyśmy przyjąć $C=-1$, lub inną wartość ujemną, gdybyśmy jednostki dla osi *x* i *y* wybrali odmiennie. Dla *C=0* dostaje się Galileusza. Jak się wszyscy domyślają, świat rzeczywisty, istota STW polegała na odkryciu, iż w czasoprzestrzeni *C*>0. Ile konkretnie *C* wynosi, zależy od wyboru jednostek dla czasu i przestrzeni. W zwykłych jednostkach *C* jest małe ($1.1\cdot 10^{-17} s^2/m^2$) – inaczej nie trzeba by tak długo czekać na odkrycie, że jest to wielkość w ogóle różna od zera.

Konsekwencje powyższych wzorów są bardzo bogate. Obecność różnicy pod pierwiastkiem oznacza, że istnieje górne ograniczenie na prędkość zegarów *V*: $1-CV^2 > 0$, czyli $V < 1/\sqrt{C}$.

Sama prędkość $1/\sqrt{C}$ (oznaczana $c \equiv 1/\sqrt{C}$) jest niezmiennicza. To znaczy $"V+c" = \dfrac{V+c}{1+Vc/c^2} = c\dfrac{1+V/c}{1+V/c} = c$. Jak obiecałem, tak udowodniłem.

Na zakończenie odrobina wglądu w dynamikę. Jak wiadomo równania Newtona ulegają ruinie. Pytanie jak odbudować dynamikę, od czego zacząć. Centralną rolę zaczyna pełnić pęd. Mógłby już i w klasycznej mechanice. Jest to temat na oddzielny wykład.

Rozważmy zderzenie dwóch **identycznych** ciał w układzie SM (w którym ciała lecą na wprost siebie z równymi prędkościami: u, oraz $-u$), prowadzące do ich sklejenia w jedno. Jasne, że nowe ciało musi spoczywać w tym układzie, co wynika z samej symetrii problemu. Jeśli układ CM ma prędkość *V* względem innego, zwanego LAB, którym wygodniej nam się posłużyć, to możemy napisać: $v_1 = \dfrac{V+u}{1+CVu}$ $v_2 = \dfrac{V-u}{1-CVu}$, $v_3 = V$.

Równań tych jest wystarczająco dużo, by ze znajomości prędkości początkowych ciał 1 i 2 wyliczyć prędkość końcową ciała 3. Zauważmy, że nie użyliśmy pojęcia pędu, energii, masy, czy prawa zachowania. Sama geometria czasoprzestrzeni (w tym prostym przypadku) wystarczy by przewidzieć przyszłość. Ona postać tych praw zachowania sama narzuca. W wersji napisanej powyżej tego jeszcze nie widać.

Dla lekkiego treningu przejdźmy do świata Galileusza – Newtona, gdzie wzory są prostsze, a równania łatwiejsze do rozwiązania: $v_1 = V + u$ oraz $v_2 = V - u$. Interesujący rezultat otrzymamy dodając zwyczajnie prędkości stronami (i pisząc v_3 zamiast V):

$1v_1 + 1v_2 = 2v_3$.

Jeśli dopisać do tego

1+1=2,

rozpoznajemy (adekwatne dla tego procesu) dwa **prawa zachowania**: pędu i masy. Jeślibyśmy nie chcieli masy (równej) ciał początkowych uważać za jednostkową, a przypisać jej jakąkolwiek wartość m, pomnożenie otrzymanych równań stronami da nam:

$mv_1 + mv_2 = m_3 v_3$, oraz $m + m = m_3$.

Jasne, że korzystając z dokładnego wzoru na „sumę" prędkości nie dostaniemy powyższych wzorów, a jakieś inne.

Dla osiągnięcia tego celu potrzeba odrobinę algebry.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - Cv_{\substack{1\\2}}^{\,2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - C\left(\dfrac{V \pm u}{1 \pm CVu}\right)^2}} = \frac{1 \pm CVu}{\sqrt{(1 \pm CVu)^2 - C(V \pm u)^2}} = \frac{1 \pm CVu}{\sqrt{1 - CV^2}\sqrt{1 - Cu^2}} \quad (19)$$

Mnożąc powyższy wzór przez $v_{\substack{1\\2}}$ dostaniemy:

$$\frac{v_{\substack{1\\2}}}{\sqrt{1 - Cv_{\substack{1\\2}}^{\,2}}} = \frac{(1 \pm CVu)\dfrac{V \pm u}{1 \pm CVu}}{\sqrt{1 - CV^2}\sqrt{1 - Cu^2}} = \frac{V \pm u}{\sqrt{1 - CV^2}\sqrt{1 - Cu^2}} \quad (15)$$

Użycie powyższych kombinacji z pierwiastkiem ma tę zaletę, że znak $\pm$ wywędrował z mianownika, co pozwala istotne uproszczenia po dodaniu tych wzorów dla dwóch cząstek.

Dodając do siebie oba warianty znakowe równania (14), i to samo dla (15) dostajemy:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - Cv_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - Cv_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - Cu^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - CV^2}} \quad (16)$$

$$\frac{v_1}{\sqrt{1 - Cv_1^2}} + \frac{v_2}{\sqrt{1 - Cv_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - Cu^2}} \frac{V}{\sqrt{1 - CV^2}} \quad (17)$$

Jeśli wskutek umowy, czy porównania z wzorcem, znamy masę (wspólną) dla jednakowych ciał początkowych m, i jeśli oznaczymy $m_3 = 2m/\sqrt{1-Cu^2}$, możemy równania (16) i (17) zapisać w postaci:

$$\frac{m}{\sqrt{1-Cv_1^{\ 2}}} + \frac{m}{\sqrt{1-Cv_2^{\ 2}}} = \frac{m_3}{\sqrt{1-Cv_3^{\ 2}}} \qquad (18)$$

$$\frac{mv_1}{\sqrt{1-Cv_1^{\ 2}}} + \frac{mv_2}{\sqrt{1-Cv_2^{\ 2}}} = \frac{m_3 v_3}{\sqrt{1-Cv_3^{\ 2}}} \qquad (19)$$

Dostajemy tyle samo równań wyrażających prawa zachowania, ale same zachowujące się wielkości zależą nieco inaczej od prędkości, niż to zostało rozpoznane w fizyce klasycznej

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-Cv^2}} \qquad (20)$$

Zmiana wyrażenia na pęd, jaką wprowadza STW jest istotna dla ciał szybkich, dla fizyki nierelatywistycznej ma niewielkie znaczenie.

Zupełnie inaczej ma się sprawa z „modyfikacją" klasycznego prawa zachowania masy. Zamiast relacji nie zawierającej prędkości, jaką jest klasyczne prawo zachowania masy, dostajemy równanie wikłające kwadrat prędkości!

Aby wyjaśnić związek równania (18) z prawem zachowania energii, rozłóżmy zachowaną w trakcie oddziaływania wielkość $m/\sqrt{1-Cv^2}$ na wartość spoczynkową i przyrost

$$\frac{m}{\sqrt{1-Cv^2}} = m + \left(\frac{m}{\sqrt{1-Cv^2}} - m\right) = m + m\frac{1-\sqrt{1-Cv^2}}{\sqrt{1-Cv^2}} = m + C\frac{mv^2}{1-Cv^2+\sqrt{1-Cv^2}} \qquad (21)$$

Pojawił się w liczniku iloczyn mv^2 , a w mianowniku dwa składniki, które dla małych prędkości (małych w porównaniu z c), sumują się do 2. Ponieważ to ta wielkość (wraz ze stałą m) wchodzi do odkrytego tutaj, ścisłego prawa zachowania, **musimy** tę wielkość nazwać **energią kinetyczną** T, a nie $mv^2/2$:

$$T = \frac{mv^2}{1-Cv^2+\sqrt{1-Cv^2}} = \frac{1}{C}\left(\frac{m}{\sqrt{1-Cv^2}} - m\right) \approx \frac{mv^2}{2} \qquad \text{(w granicy nierelatyw.)}$$

Skoro wielkość $m/\sqrt{1-Cv^2}$ podlega prawu zachowania, to po podzieleniu jej przez C, dostaniemy wielkość też podlegającą prawu zachowania. Ponieważ jest ona sumą składnika stałego (dla danej cząstki) i energii kinetycznej nazywa się ją **po prostu** energią:

$$E = \frac{1}{C}\frac{m}{\sqrt{1 - Cv^2}} = \frac{m}{C} + T \qquad (22)$$

Jeżeli w ogólnym prawie zachowania przeniesiemy na jedną stronę składniki z energiami kinetycznymi, a na drugą wyrażenia z energiami spoczynkowymi, dostaniemy bilans:

$$\sum_{\text{konc}} T - \sum_{\text{pocz.}} T = -\frac{\sum\limits_{\text{konc}} m - \sum\limits_{\text{pocz.}} m}{C} = \sum_{\text{pocz.}} mc^2 - \sum_{\text{konc}} mc^2 = c^2 \Delta m \qquad (23)$$

To jest to słynne mc^2 !