

Fizyka Materii Skondensowanej

Równanie Boltzmana



**Inżynieria
nanostruktur**

Wydział Fizyki UW
Jacek.Szczytko@fuw.edu.pl



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGICZNA SPRAWOŚĆ



EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt: POKL 04.01.01-00-100/10-00 "Chemia, fizyka i biologia na potrzeby społeczeństwa XXI wieku: nowe makroierunki studiów I, II i III stopnia"

Transport

Jednoelektronowe równanie Schrödingera:

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r})\right)\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$$

Jeśli potencjał jest periodyczny, to dobrymi rozwiązaniami są funkcje Blocha:

$$\varphi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) = u_{n,\vec{k}}(\vec{r}) \cdot \exp(i\vec{k}\vec{r})$$

Wektor falowy \vec{k} (a więc i kwazipęd $\hbar\vec{k}$) jest dobrą „liczbą” kwantową. Prędkość grupowa elektronu:

$$\vec{v} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k})$$

Ze względu na symetrię pasm: $E_n(\vec{k}) = E_n(-\vec{k})$ (ogólniej $E_n^+(\vec{k}) = E_n^+(-\vec{k})$), jeśli funkcja rozkładu zależy tylko od energii (w równowadze termodynamicznej), to nie ma żadnych przepływów (transportu).

M. Baj.

2013-06-02 2

Transport

Jeśli mamy dodatkowy potencjał (np. pole elektryczne), to **NIE MA** symetrii translacyjnej $\Rightarrow \vec{k}$ przestaje być dobrą liczbą kwantową, stany blochowskie nie są już funkcjami własnymi hamiltonianu (choć zawsze rozwiązań możemy poszukiwać w postaci ich kombinacji liniowej – w ogólności zależnej od czasu)

$$\vec{F} = \hbar \dot{\vec{k}}$$

zmiana \vec{k} – przejścia pomiędzy stanami blochowskimi, stany o określonym \vec{k} nie są już stanami własnymi hamiltonianu

$$\left\{ \frac{1}{2m} [\hat{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + q\varphi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}, t) \right\} \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{d}{dt} \psi(\vec{r}, t)$$

Pęd kanoniczny \hat{p}

Suma: pęd kinetyczny

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Równanie ciągłości $J(\vec{r}, t) = \frac{\hbar q}{2im} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{q}{m} |\Psi|^2 \vec{A}(\vec{r}, t)$
 albo:
 $J(\vec{r}, t) = \frac{q}{2} \left[\Psi^* \left(\frac{\hat{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)}{m} \Psi \right) + \left(\frac{\hat{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)}{m} \Psi \right)^* \Psi \right]$

M. Baj.

2013-06-02 3

Rozpraszanie

Oprócz sił zewnętrznych, które powodują „uporządkowane” przejścia pomiędzy stanami blochowskimi $\vec{F} = \hbar \dot{\vec{k}}$ istnieją też przyczyny „nieuporządkowanych” przejść pomiędzy tymi stanami – **rozpraszania**

Co może rozpraszac elektrony? – wszelkie niedoskonałości sieci (potencjał rozpraszający V)

- domieszki, defekty (punktowe, liniowe – dyslokacje, ...) – „sztywne” rozpraszacze, potencjały niezależne od czasu
- nieporządek stopowy w kryształach mieszanych (rozpraszanie stopowe)
- międzypowierzchnie (interface roughness)
- fonony – „fluktuujące” rozpraszacze
- inne elektrony (rozpraszanie elektron-elektron) – „fluktuujące” rozpraszacze
- etc.

Prawdopodobieństwo rozproszenia elektronu ze stanu $|n, \vec{k}\rangle$ do stanu $|n', \vec{k}'\rangle$:

$$W(n, \vec{k}, n', \vec{k}') \sim |\langle n', \vec{k}' | V | n, \vec{k} \rangle|^2$$

gdzie V – potencjał rozpraszający

M. Baj.

2013-06-02 4

Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Zachowanie kwazipędu $\vec{k} = \vec{k}' \pm \vec{q} + \vec{G}$

Zachowanie energii $E_{n,\vec{k}} = E_{n',\vec{k}'} \pm E_{\vec{q}}$

gdzie \vec{q} i $E_{\vec{q}}$ – kwazipęd i energia pochłoniętej/emittowanej kwazicząstki

Jeśli w rozproszeniu **nie uczestniczy żadna kwazicząstka** (np. fonon) lub jej energia jest w bilansie do zaniedbania (w porównaniu z kT i średnią energią układu elektronów), to rozproszenie jest elastyczne (lub w przybliżeniu elastyczne).

Przy rozproszeniach wewnątrzpasmowych $n = n'$, jeśli pasmo jest sferyczne, to:

$$|\vec{k}| = |\vec{k}'|$$

Rozproszenia elastyczne – np. na potencjalach domieszek i defektów

M. Baj.

2013-06-02

5

Rozpraszanie

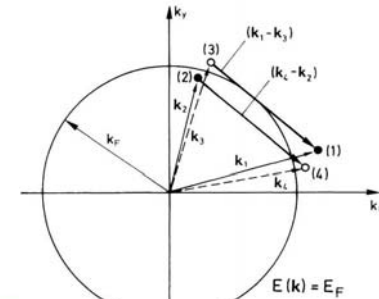
Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Rozproszenia nieelastyczne – np. na fononach (lub innych kwazicząstkach). W przybliżeniu często traktuje się rozproszenie na fononach akustycznych jako elastyczne (bo energie fononów akustycznych są niewielkie). Nawet rozproszenie na fononach optycznych często opisuje się przy założeniu, że rozproszenia są w przybliżeniu elastyczne (w odpowiednio wysokich temperaturach, w których $kT \gg \hbar\omega_0$).

Rozproszenie elektron-elektron – też nieelastyczne, możliwe tylko dla elektronów z okolicy poziomu Fermiego, istotne z punktu widzenia procesów relaksacji fazy funkcji falowej

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4 + \vec{G}$$

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$



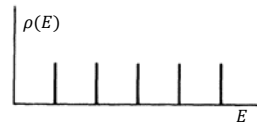
M. Baj., H. Ibach, H. Lüth, Solid-State Physics

2013-06-02

Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

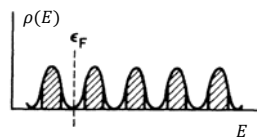
Punkt wyjścia – potencjał ściśle periodyczny. Rozwiązania blochowskie – stany własne hamiltonianu jednoelektronowego \Rightarrow stany odpowiadają ściśle określone energii $\Delta E = 0$ i „żyją” nieskończenie długo $\tau_q = \infty$, gdzie $\Delta E \cdot \tau_q \approx \hbar$ i droga swobodna jest nieskończona



Czas kwantowy τ_q , **średnia droga swobodna** l_q

Każde rozproszenie prowadzi do tego, że czas życia w danym stanie kwantowym (tzw. „czas kwantowy”) jest skończony i poszerzenie $\Delta E \neq 0$. Średnia droga swobodna:

$$l_q = v_F \tau_q$$



Przykład: oscylacje Shubnikova-de Haasa w 2DEG

M. Baj., H. Ibach, H. Lüth, Solid-State Physics

2013-06-02

7

Poziomy Landaua

Poziom Fermiego leży **między** poziomami Landaua – nie ma tam DOS, zmiana E_F nie zmienia DOS – stany **nieściśliwe** (incompressible)

Poziom Fermiego leży **wewnątrz** poziomu Landaua – duża DOS, zmiana E_F mocno wpływa na DOS – stany **ściśliwe** (compressible)

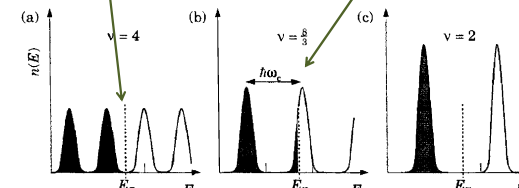


FIGURE 6.8. Occupation of Landau levels in a magnetic field neglecting the spin splitting, showing how the Fermi level moves to maintain a constant density of electrons. The fields are in the ratio 2 : 3 : 4 and give $\nu = 4, \frac{3}{2}$, and 2.

2013-06-02

8

Poziomy Landaua

Poziom Fermiego w polu magnetycznym:

$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_B} = \frac{\hbar n_{2D}}{eB} = \frac{\Phi_0 n_{2D}}{B} = 2\pi l_B^2 n_{2D}$$

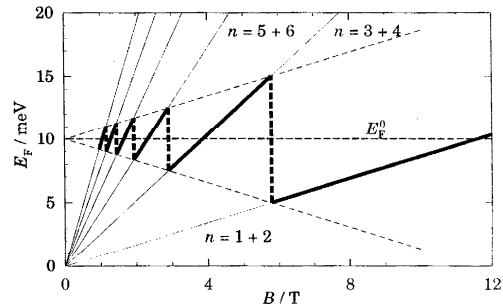


FIGURE 6.9. Variation of the Fermi level as a function of magnetic field for a two-dimensional electron gas in GaAs with $E_F^0 = 10$ meV before the field was applied. Spin splitting is neglected. The fan of thin lines shows the Landau levels, while the discontinuous thick line is E_F .

2013-06-02

9

Efekt Shubnikova-de Haasa

Shubnikov-de Haas effect

Gęstość stanów oscyluje - spada do 0 dla $\nu = n$ i jest największa dla $\nu \approx n + \frac{1}{2}$ - najprościej to zmierzyć w magnetooporze R_{xx} .

Oscylacje zależą od stosunku energii Fermiego E_F do częstości cyklotronowej $\hbar\omega_c = eB/m^*$. Oscylacje są periodyczne w funkcji $1/B$.

$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_B} = \frac{\hbar n_{2D}}{eB} = \frac{\Phi_0 n_{2D}}{B} = 2\pi l_B^2 n_{2D}$$

Z SdH można także wyznaczyć masę efektywną m^* oraz czas kwantowy τ_q . Amplituda oscylacji jest dana przez

$$\Delta\rho_{SDH} = 4\rho_0\delta \cos(4\pi\nu) \frac{\xi(T)}{\sinh(\xi(T))} \exp\left(-\frac{\pi}{\omega_c\tau_q}\right)$$

$\xi(T) = 2\pi^2 kT/\hbar\omega_c$
Zależność temperaturowa daje m^* , tłumienie τ_q .

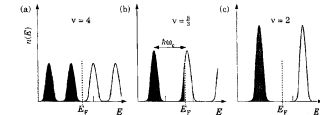
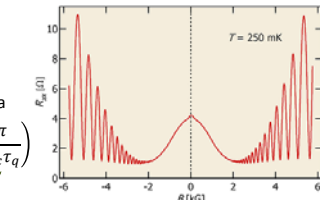


FIGURE 6.8. Occupation of Landau levels in a magnetic field neglecting the spin splitting, showing how the Fermi level moves to maintain a constant density of states. The fields are in the ratio 2 : 1 : 4 and give $\nu = 4, \frac{5}{2}$, and 2.



<http://groups.physics.umn.edu/zudovlab/content/sdho.htm>

2013-06-02

10

Efekt Shubnikova-de Haasa

Shubnikov-de Haas effect

Gęstość stanów oscyluje - spada do 0 dla $\nu = n$ i jest największa dla $\nu \approx n + \frac{1}{2}$ - najprościej to zmierzyć w magnetooporze R_{xx} .

Oscylacje zależą od stosunku energii Fermiego E_F do częstości cyklotronowej $\hbar\omega_c = eB/m^*$. Oscylacje są periodyczne w funkcji $1/B$.

$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_B} = \frac{\hbar n_{2D}}{eB} = \frac{\Phi_0 n_{2D}}{B} = 2\pi l_B^2 n_{2D}$$

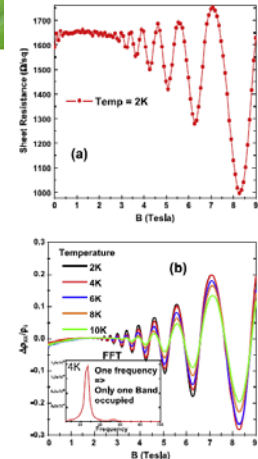
Z SdH można także wyznaczyć masę efektywną m^* oraz czas kwantowy τ_q . Amplituda oscylacji jest dana przez

$$\Delta\rho_{SDH} = 4\rho_0\delta \cos(4\pi\nu) \frac{\xi(T)}{\sinh(\xi(T))} \exp\left(-\frac{\pi}{\omega_c\tau_q}\right)$$

$$\xi(T) = 2\pi^2 kT/\hbar\omega_c$$

Zależność temperaturowa daje m^* , tłumienie τ_q .

A. Nainani et al. Solid-State Electronics 62 (2011) 138-141



2013-06-02

11

Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Czas kwantowy τ_q , średnia droga swobodna l_q

Każde rozproszenie prowadzi do tego, że czas życia w danym stanie kwantowym (tzw. „czas kwantowy”) jest skończony i poszerzenie $\Delta E \neq 0$. Średnia droga swobodna:

$$l_q = v_F \tau_q$$

Czas transportowy (czas relaksacji pędowej) τ_{tr} , średnia droga swobodna l_{tr}

W makroskopowych przepływach elektronów (np. prąd elektryczny) liczy się nie sam fakt rozproszenia, ale jak w rozproszeniu zmienia się pęd (wektor falowy). Niskokątowe rozproszenia mają mniejszy wpływ na relaksację pędu niż wysokokątowe (rozproszenia elektron-elektron nie dają wkładu do τ_{tr}):

$$\frac{1}{\tau_q} = \int P(\theta) d\Omega$$

$$\frac{1}{\tau_{tr}} = \int P(\theta) (1 - \cos\theta) d\Omega$$

gdzie θ – kąt (elastycznego) rozproszenia. Przeważnie $\tau_{tr} > \tau_q$.

M. Baj,

2013-06-02

12

Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Czas transportowy (czas relaksacji pędowej) τ_{tr} , średnia droga swobodna l_{tr}
 W makroskopowych przepływach elektronów (np. prąd elektryczny) liczy się nie sam fakt rozproszenia, ale jak w rozproszeniu zmienia się pęd (wektor falowy). Niskokątowe rozproszenia mają mniejszy wpływ na relaksację pędu niż wysokokątowe (rozproszenia elektron-elektron nie dają wkładu do τ_{tr}):

$$\frac{1}{\tau_q} = \int P(\theta) d\Omega$$

$$\frac{1}{\tau_{tr}} = \int P(\theta) (1 - \cos \theta) d\Omega$$

gdzie θ – kąt (elastycznego) rozproszenia. Przeważnie $\tau_{tr} > \tau_q$

Ruchliwość - czas transportowy :

$$\mu = \frac{e\tau_{tr}}{m^*}$$

- Przykład:** GaAs, $m^* \approx 0,067 m_0$, $E_F = 10$ meV, $v_F \approx 2,3 \cdot 10^5$ m/s
 1. $T = 300$ K, materiał objętościowy: $\mu \approx 4000$ cm²/Vs, $\tau_{tr} \approx 0,15$ ps, $\tau_{tr}v_F = l_{tr} \approx 35$ nm
 2. $T = 1$ K, 2DEG: $\mu \approx 10^7$ cm²/Vs, $\tau_{tr} \approx 400$ ps, $\tau_{tr}v_F = l_{tr} \approx 90$ μ m

M. Baj.

2013-06-02

13

Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Czas relaksacji fazy (czas koherencji fazowej) τ_ϕ , długość relaksacji fazy (długość koherencji fazowej) l_ϕ

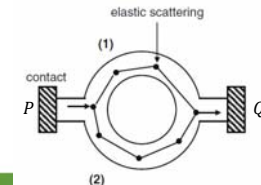
Rozproszenia mogą prowadzić do przypadkowych zmian fazy funkcji falowej elektronu, a więc zaniku jej spójności fazowej, co z kolei uniemożliwia efektywną interferencję. Spójność fazową niszczą rozproszenia nieelastyczne. W relaksacji fazy nie biorą udziału „sztywne rozpraszacze”, a tylko „fluktuujące” (rozpraszanie na fononach, rozpraszanie elektron-elektron, rozpraszanie na domieszkach z „wewnętrznymi stopniami swobody”)

Przykład 1 – efekt Aharonova-Bohma

Elektron poruszający się z punktu 1 do punktu 2 po pewnej drodze P , na której nie znika potencjał wektorowy \vec{A} ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$) doznaje przesunięcia fazowego:

$$\varphi_1 = \frac{e}{\hbar} \int_1^{P \rightarrow Q} \vec{A} d\vec{r}$$

$$\varphi_2 = \frac{e}{\hbar} \int_2^{P \rightarrow Q} \vec{A} d\vec{r}$$



2013-06-02

14

Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Czas relaksacji fazy (czas koherencji fazowej) τ_ϕ , długość relaksacji fazy (długość koherencji fazowej) l_ϕ

Przykład 1 – efekt Aharonova-Bohma

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{e}{\hbar} \left(\int_{(1)} \vec{A} d\vec{r} - \int_{(2)} \vec{A} d\vec{r} \right) = \frac{e}{\hbar} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \frac{e}{\hbar} \Phi_B$$

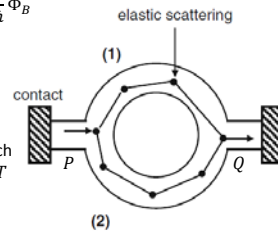
Różnica faz pomiędzy dwiema różnymi drogami jest proporcjonalna do strumienia pola \vec{B} przez powierzchnię S rozpiętą przez obie drogi.

Zachodzi interferencja fal elektronowych poruszających się po obu drogach. Prawdopodobieństwo transmisji T jest okresowe z polem \vec{B} z okresem:

$$\Phi_0 = \frac{e}{\hbar}$$

$$T = 2T_0 \left[1 + \cos \left(\frac{e}{\hbar} \Phi_B + \varphi_0 \right) \right]$$

Amplituda maleje jak $\sim \exp(-\tau/\tau_\phi)$ (τ – czas przelotu przez interferometr)



2013-06-02

15

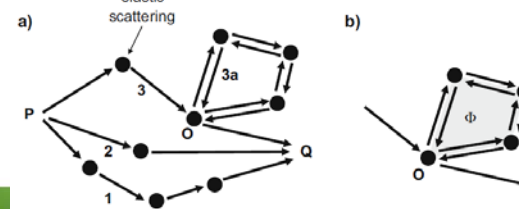
Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Czas relaksacji fazy (czas koherencji fazowej) τ_ϕ , długość relaksacji fazy (długość koherencji fazowej) l_ϕ

Przykład 2 – słaba lokalizacja

Przypadkowo rozłożone rozpraszacze (elastyczne) umożliwiają wystąpienie rozproszenia do tyłu, którego prawdopodobieństwo jest zwiększone ze względu na interferencję konstruktywną pomiędzy dwiema drogami odpowiadającymi ruchom w przeciwnie strony. Prowadzi to do zwiększenia całkowitego prawdopodobieństwa rozproszenia do tyłu, a więc zmniejszenia przewodności elektrycznej. Pole magnetyczne wprowadza przesunięcia fazowe pomiędzy obu drogami, co, ze względu na uśrednienie wkładów bardzo wielu możliwych tego typu par trajektorii, gasi efekt \Rightarrow ujemny magnetoopór.



2013-06-02

16

H. Ibach, H. Lüth, Solid-State Physics

Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Czas relaksacji fazy (czas koherencji fazowej) τ_ϕ , długość relaksacji fazy (długość koherencji fazowej) l_ϕ

Przykład 2 – słaba lokalizacja 2DHG w Si/SiGe QW

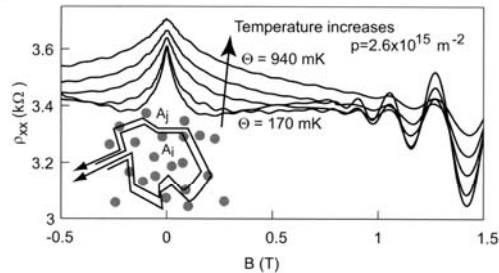


Fig. 8.5 Inset: A fraction of the electronic trajectories in a diffusive 2DEG form closed loops and lead to coherent backscattering. Main figure: WL peak as a function of B , and for various temperatures between 170 and 940 mK. The sample was a Si-SiGe quantum well containing a hole gas. Adapted from [271].

V. Senz et al., Physical Review B, 61, R5082 (2000)

2013-06-02

17

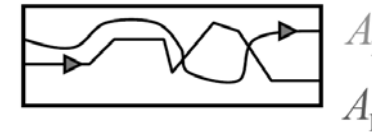
Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Czas relaksacji fazy (czas koherencji fazowej) τ_ϕ , długość relaksacji fazy (długość koherencji fazowej) l_ϕ

Przykład 3 – uniwersalne fluktuacje przewodności (UCF)

Przypadkowo rozłożone rozpraszacze (elastyczne) wyznaczają różne możliwe trajektorie elektronowej paczki falowej. Interferencje pomiędzy tymi trajektoriami prowadzą do **zależności całkowitej przewodności od parametru mogącego modyfikować tę interferencję** (np. pola magnetycznego). Zmiany te są w pełni powtarzalne. Szczegółowy obraz aperiodycznych zależności $G(B)$ zależy jednak od rozkładu domieszek: ogrzanie i ponowne schłodzenie próbki może zmieniać szczegóły zależności $G(B)$ – domieszki mogą trochę przedyfundować.



M. Baj.

2013-06-02

18

Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Czas relaksacji fazy (czas koherencji fazowej) l_ϕ

Przykład 3 – uniwersalne fluktuacje pr.

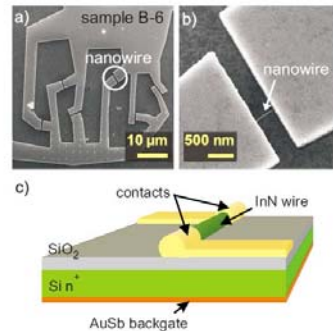


FIG. 1. (Color online) (a) Scanning electron beam micrograph of sample B-6 with six InN wires connected in parallel and (b) detail of a contacted InN nanowire. (c) Schematic illustration of a contacted nanowire. The Si substrate used as a back-gate electrode is isolated from the nanowire by a 100 nm thick SiO₂ layer.

S. Alagha et al., Journal of Applied Physics, 108, 113704 (2010)

M. Baj.

2013-06-02

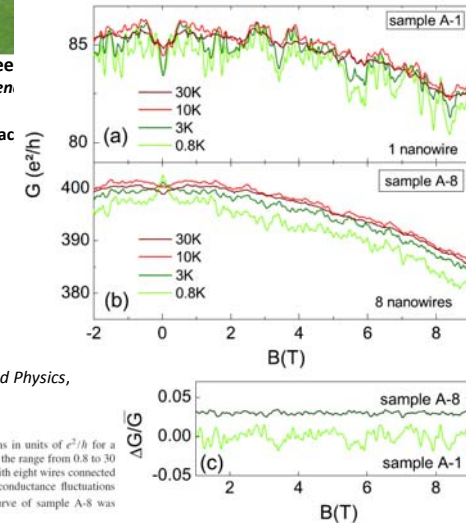
19

Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne

Czas relaksacji fazy (czas koherencji fazowej) l_ϕ

Przykład 3 – uniwersalne fluktuacje



S. Alagha et al., Journal of Applied Physics, 108, 113704 (2010)

FIG. 2. (Color online) (a) Conductance fluctuations in units of e^2/h for a single wire (sample A-1) at various temperatures in the range from 0.8 to 30 K. (b) Corresponding measurements for a sample with eight wires connected in parallel (sample A-8). (c) Comparison of the conductance fluctuations $\Delta G/G$ of samples A-1 and A-8 at 0.8 K. The curve of sample A-8 was shifted by 0.03.

Rozpraszanie

Rozproszenia elastyczne i nieelastyczne - podsumowanie

Czas kwantowy τ_q , **średnia droga swobodna** $l_q = v_F \tau_q$

Czas transportowy (czas relaksacji pędowej) τ_{tr} , **średnia droga swobodna**
 $l_{tr} = v_F \tau_{tr}$

Czas relaksacji fazy (czas koherencji fazowej) τ_ϕ , **długość relaksacji fazy (długość koherencji fazowej)** l_ϕ

Jeśli $\tau_\phi \gg \tau_q$ to:

$$l_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$$

Gdzie $D = \mu k_B T / q$ – stała dyfuzji

M. Baj.

2013-06-02

21

Transport

Skale długości:

Długość fali de Broglie'a elektronu (na poziomie Fermiego) λ_F :

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F}$$

Dla metalu $m^* \approx m_0$ i $E_F \approx 10\text{eV} \Rightarrow \lambda_F \approx 0,4\text{ nm}$

Dla półprzewodnika $m^* \approx 0,067m_0$ (GaAs) i $E_F \approx 10\text{meV} \Rightarrow \lambda_F \approx 47\text{ nm}$

Łatwiej jest uzyskać efekty uwięzienia kwantowego w półprzewodnikach niż w metalach!

Długość magnetyczna l_B

Promień orbity cyklotronowej najniższego poziomu Landaua:

$$\frac{1}{2} \hbar \omega_c = \frac{1}{2} m^* v^2 = \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 l_B^2 \Rightarrow l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$$

W polu $B = 1\text{ T}$ dostajemy $l_B \approx 26\text{ nm}$

Energia cyklotronowa $E_c = \hbar \omega_c$

Dla półprzewodnika $m^* \approx 0,067m_0$ (GaAs) w $B = 1\text{ T}$ $E_c \approx 1,7\text{ meV}$

M. Baj.

2013-06-02

22

Transport

Skale długości:

Rozmiary układu (kropki kwantowej), dla których **efekty ładowania pojedynczymi elektronami** mogą być widoczne

Energia ładowania pojedynczym elektronem:

$$E = \frac{e^2}{2C}$$

Pojemność „wyspy” (krążka) o promieniu R otoczonej materiałem o stałej dielektrycznej ϵ :

$$C = 8\epsilon\epsilon_0 R$$

Aby móc obserwować efekty związane z ładowaniem pojedynczym elektronem (np. tzw. blokadę kulombowską), energia ładowania nie może być dużo mniejsza od $k_B T$ ($E \approx k_B T$):

- dla $\epsilon = 10$, $T = 300\text{ K}$: $R \approx 4\text{ nm}$
- dla $\epsilon = 10$, $T = 4\text{ K}$: $R \approx 300\text{ nm}$

M. Baj.

2013-06-02

23

Transport

Skale długości:

Transport elektronów przez kropki kwantowe – układ, w którym efekty ładowania muszą być widoczne

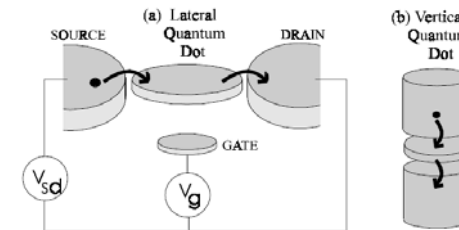


Figure 1.1. Schematic of a quantum dot, in the shape of a disk, connected to source and drain contacts by tunnel junctions and to a gate by a capacitor. (a) shows the lateral geometry and (b) the vertical geometry.

<http://marcuslab.harvard.edu/papers/KouwenhovenReview.pdf>

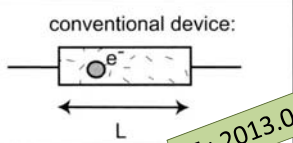
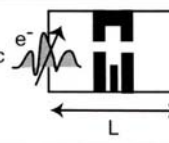
M. Baj.

2013-06-02

24

Transport

Układy makro- i mezoskopowe, reżimy transportu:

 <p>conventional device:</p>	 <p>mesoscopic device:</p>
$L \gg l_e$ diffusive	$L \leq l_e$ ballistic
$L \gg l_\phi$ incoherent	$L \leq l_\phi$ phase coherent
$L \gg \lambda_F$ no size quantization	$L \leq \lambda_F$ size quantization
$e^2/C < k_B \Theta$ no single electron charging	$e^2/C \geq k_B \Theta$ single electron charging effects

Tu 2013.05.13

T. Heinzel, „Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures”, VILEY-VCH, 2007

M. Baj.

2013-06-02

25

Transport dyfuzyjny

Dyfuzyjny transport elektronowy – rozmiary układów (metale bądź półprzewodniki) dużo większe od średniej drogi swobodnej: $L \gg l_q, l_{tr}$

Problem wielu cząstek – metody fizyki statystycznej

Będziemy używać **funkcji rozkładu prawdopodobieństwa obsadzeń stanów elektronowych**. W równowadze była to funkcja rozkładu Fermiego-Diraca f_0 , teraz musi być to inna funkcja, w ogólności może explicitnie zależeć od wektora falowego \vec{k} (niekoniecznie tylko poprzez energię, jak to było w przypadku funkcji f_0), położenia \vec{r} (dopuszczamy zależność od położenia takich parametrów jak np. temperatura – gradient temperatury) i ewentualnie od czasu:

$$f = f(\vec{r}, \vec{k}, t)$$

2013-06-02

26

Transport dyfuzyjny

Dyfuzyjny transport elektronowy – rozmiary układów (metale bądź półprzewodniki) dużo większe od średniej drogi swobodnej: $L \gg l_q, l_{tr}$

Problem wielu cząstek – metody fizyki statystycznej

Będziemy używać **funkcji rozkładu prawdopodobieństwa obsadzeń stanów elektronowych**.

$$f = f(\vec{r}, \vec{k}, t)$$

Jeśli w jakiś sposób potrafilibyśmy znaleźć taką funkcję rozkładu, to byłibyśmy w stanie policzyć rozmaite przepływy, np. (3D): gęstość prądu elektrycznego

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{e}{4\pi^3} \int_{SB} \vec{v}(\vec{k}) f(\vec{r}, \vec{k}, t) d^3\vec{k}$$

gęstość strumienia energii (elektronowy wkład do transportu ciepła):

$$\vec{w}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{SB} [E(\vec{k}) - \mu] \vec{v}(\vec{k}) f(\vec{r}, \vec{k}, t) d^3\vec{k}$$

Przepis na znalezienie funkcji rozkładu $f = f(\vec{r}, \vec{k}, t)$ podał Boltzmann

R. Stępniewski.

2013-06-02

27

Równanie Boltzmana

Jeśli nie ma rozproszeń, to podczas ruchu w przestrzeni fazowej **wszystkie** te elektrony, które w czasie $t + \Delta t$ znalazły się elemencie przestrzeni fazowej opisanej współrzędnymi $\vec{r} + \Delta\vec{r}, \vec{k} + \Delta\vec{k}$, w czasie t były w elemencie przestrzeni fazowej o współrzędnych \vec{r}, \vec{k} . Stąd wniosek, że:

$$f(\vec{r} + \Delta\vec{r}, \vec{k} + \Delta\vec{k}, t + \Delta t) = f(\vec{r}, \vec{k}, t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \nabla_{\vec{r}} f \cdot \Delta\vec{r} + \nabla_{\vec{k}} f \cdot \Delta\vec{k} = 0$$

Ponieważ $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$ i $\Delta\vec{k} = \vec{F}\Delta t/\hbar$ dostajemy

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f = 0$$

Jeśli jednak są rozproszenia, to część elektronów opuszcza rozpatrywany element przestrzeni fazowej (ulegają rozproszeniom **ze** stanów zawartych w tym elemencie na zewnątrz niego), zaś część do niego wchodzi (rozproszenia **do** stanów zawartych w tym elemencie). Wtedy prawa strona powyższego równania nie równa się zeru (tzw. człon zderzeniowy)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd}$$

Co można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{dryf} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd}$$

R. Stępniewski.

2013-06-02

28

Równanie Boltzmana

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd}$$

Co można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{dryf} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd}$$

gdzie człon dryfowy:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{dryf} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{dyfuzja} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{pole} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f$$

człon zderzeniowy:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd} = b - a$$

Dla rozprożeń w obrębie jednego pasma:

$$a = \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f(\vec{k}')] \rho(\vec{k}') f(\vec{k}) d^3 \vec{k}' \quad a - \text{częstość zderzeń przewodzących elektron ze stanu } \vec{k} \text{ do jakiegokolwiek } \vec{k}'$$

$$b = \int_{SB} W(\vec{k}'', \vec{k}) [1 - f(\vec{k})] \rho(\vec{k}'') f(\vec{k}'') d^3 \vec{k}'' \quad b - \text{częstość zderzeń przewodzących elektron do stanu } \vec{k} \text{ z jakiegokolwiek } \vec{k}''$$

2013-06-02

29

Równanie Boltzmana

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

równanie różniczkowo-całkowe, nieliniowe, w ogólnym przypadku niemożliwe do rozwiązania. Opis za pomocą równania Boltzmana jest opisem kwaziklasycznym – ma zastosowanie, gdy paczkę falową elektronu można w przybliżeniu traktować jak cząstkę klasyczną (wymaga podania zmiennych \vec{k} i \vec{r} - 6 niezależnych wymiarów). W stanie stacjonarym $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

W szczególności długość fali de Broglie'a elektronu λ musi spełniać następujące warunki:

- $\lambda \ll L$, gdzie L – typowy rozmiar dla danego problemu
- $\lambda |\vec{F}| \ll \langle E \rangle$ – zmiana energii E wywołana działaniem siły zewnętrznej \vec{F} na drodze λ musi być mała w porównaniu ze średnią energią
- $\lambda \ll l$, gdzie l – średnia droga swobodna
- Pola (elektryczne, magnetyczne i tp). muszą być zapisane klasycznie, np. $\hbar \omega_c \ll \langle E \rangle \Rightarrow \hbar \omega_c \ll k_B T$ (przypadek niezdegenerowany) $\hbar \omega_c \ll E_F$ (dla degeneracji)

R. Stępniewski.

2013-06-02

30

Równanie Boltzmana

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

równanie różniczkowo-całkowe, nieliniowe, w ogólnym przypadku niemożliwe do rozwiązania. Opis za pomocą równania Boltzmana jest opisem kwaziklasycznym – ma zastosowanie, gdy paczkę falową elektronu można w przybliżeniu traktować jak cząstkę klasyczną (wymaga podania zmiennych \vec{k} i \vec{r} - 6 niezależnych wymiarów). W stanie stacjonarym $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

W szczególności długość fali de Broglie'a elektronu λ musi spełniać następujące warunki:

- $\lambda \ll L$, gdzie L – typowy rozmiar dla danego problemu
- $\lambda |\vec{F}| \ll \langle E \rangle$ – zmiana energii E wywołana działaniem siły zewnętrznej \vec{F} na drodze λ musi być mała w porównaniu ze średnią energią
- $\lambda \ll l$, gdzie l – średnia droga swobodna
- Pola (elektryczne, magnetyczne i tp). muszą być zapisane klasycznie, np. $\hbar \omega_c \ll \langle E \rangle \Rightarrow \hbar \omega_c \ll k_B T$ (przypadek niezdegenerowany) $\hbar \omega_c \ll E_F$ (dla degeneracji)

Przykład: w polu elektrycznym o natężeniu \mathcal{E} : $F = e\mathcal{E}$, dla GaAs z $E_F \approx 10$ meV $\lambda \approx 50$ nm powyższy warunek daje: $\mathcal{E} \ll 2 \cdot 10^3$ V/cm - silne pole jak na przewodzące próbki makroskopowe, ale niezbyt silne z punktu widzenia układów w skali mikro (np. przyrządów półprzewodnikowych)

2013-06-02

31

Równanie Boltzmana

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

$$a = \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f(\vec{k}')] \rho(\vec{k}') f(\vec{k}) d^3 \vec{k}' \quad a - \text{częstość zderzeń przewodzących elektron ze stanu } \vec{k} \text{ do jakiegokolwiek } \vec{k}'$$

$$b = \int_{SB} W(\vec{k}'', \vec{k}) [1 - f(\vec{k})] \rho(\vec{k}'') f(\vec{k}'') d^3 \vec{k}'' \quad b - \text{częstość zderzeń przewodzących elektron do stanu } \vec{k} \text{ z jakiegokolwiek } \vec{k}''$$

Człon zderzeniowy równania Boltzmana (tutaj, dla uproszczenia, pomijamy ewentualną zależność od położenia \vec{r}), $W(\vec{k}, \vec{k}') = W(\vec{k}', \vec{k})$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd} = b - a = \int_{SB} [W(\vec{k}', \vec{k}) [1 - f(\vec{k}')] f(\vec{k}') - W(\vec{k}, \vec{k}') [1 - f(\vec{k}')] f(\vec{k})] \rho(\vec{k}') d^3 \vec{k}'$$

$$= - \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}') \rho(\vec{k}') [f(\vec{k}) - f(\vec{k}')] d^3 \vec{k}'$$

2013-06-02

32

Równanie Boltzmana

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = b - a = \int_{SB} [W(\vec{k}', \vec{k})[1 - f(\vec{k})]f(\vec{k}') - W(\vec{k}, \vec{k}')[1 - f(\vec{k}')]f(\vec{k})]\rho(\vec{k}')d^3\vec{k}'$$

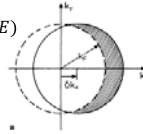
$$= - \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}')\rho(\vec{k}') [f(\vec{k}) - f(\vec{k}')]d^3\vec{k}'$$

Równanie różniczkowo-całkowe, nieliniowe, w ogólnym przypadku niemożliwe do rozwiązania – w pewnych warunkach można je spróbować zlinearyzować:

Zakładamy, że funkcja rozkładu jest bliska stanowi równowagi $f = f_0 + f_1$ i zakładamy specjalną postać $f_1 = \vec{v} \cdot \vec{X}(E)$, gdzie $\vec{X}(E)$ jest funkcją wektorową zależną tylko od energii. Jest to równowazne przyjęcie, że $f(\vec{k}) = f_0(\vec{k} - \vec{\delta})$ (np. przykładamy pole \vec{E} i kula Fermiego przesuwa się o $\vec{\delta}$).

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k} - \vec{\delta}) = f_0(\vec{k}) - \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E \cdot \vec{\delta} = f_0(E) + \vec{v} \cdot \vec{X}(E)$$

$$(\nabla_{\vec{k}} E = \hbar \vec{v})$$



2013-06-02

Równanie Boltzmana

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k} - \vec{\delta}) = f_0(\vec{k}) - \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E \cdot \vec{\delta} = f_0(E) + \vec{v} \cdot \vec{X}(E)$$

Dostajemy

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = - \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}')\rho(\vec{k}') [f(\vec{k}) - f(\vec{k}')]d^3\vec{k}'$$

$$= - \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}')\rho(\vec{k}')\vec{X}(E) [\vec{v}(\vec{k}) - \vec{v}(\vec{k}')]d^3\vec{k}'$$

Dla pasma parabolicznego i sferycznego $\rho(\vec{k}) = \frac{2}{(2\pi)^3} = \frac{1}{4\pi^3}$ oraz $\vec{v} = \frac{\hbar}{m^*} \vec{k}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = - \frac{1}{4\pi^3} \frac{\hbar}{m^*} \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}')\vec{X}(E) [\vec{k} - \vec{k}']d^3\vec{k}'$$

2013-06-02

34

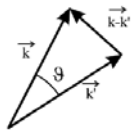
Równanie Boltzmana

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = - \frac{1}{4\pi^3} \frac{\hbar}{m^*} \int_{SB} W(\vec{k}, \vec{k}')\vec{X}(E) [\vec{k} - \vec{k}']d^3\vec{k}'$$

Właściwości $W(\vec{k}, \vec{k}')$:

- Zakładamy, że proces rozpraszania jest izotropowy (nie zawsze!)
- Zderzenia są elastyczne $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$



$$W(\vec{k}, \vec{k}') = \delta(k - k')\Theta(k, \theta), \text{ gdzie } \theta - \text{kąt między } \vec{k} \text{ i } \vec{k}'.$$

Całkujemy w zmiennych sferycznych (składowa $\perp \vec{k}$ po wyciąkowaniu po φ daje 0)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = - \frac{1}{4\pi^3} \frac{\hbar}{m^*} \int_{\vec{BZ}} W(\vec{k}, \vec{k}')\vec{X}(E)(\vec{k} - \vec{k}')d^3\vec{k}' = - \frac{1}{4\pi^3} \frac{\hbar}{m^*} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta(k - k')\Theta(k, \vartheta)\vec{X}(E)(\vec{k} - \vec{k}')k^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dk$$

$$= - \frac{\hbar}{2\pi^2 m^*} \int_0^\pi \Theta(k, \vartheta)\vec{X}(E)k(\cos \vartheta - 1)k^2 \sin \vartheta d\vartheta = - \frac{\hbar \vec{X}(E)k}{2\pi^2 m^*} \int_0^\pi \Theta(k, \vartheta)(\cos \vartheta - 1)k^2 \sin \vartheta d\vartheta$$

R. Stępniewski.

2013-06-02

35

Równanie Boltzmana

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{X}(E)}{2\pi^2} \int_0^\pi \Theta(k, \theta)(\cos \theta - 1)k^2 \sin \theta d\theta$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} \equiv \frac{f_1}{\tau(E)} = f_1 \cdot \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \Theta(k, \theta)(\cos \theta - 1)k^2 \sin \theta d\theta$$

$\tau(E)$ - to czas relaksacji – po wyłączeniu przyczyny zaburzenia funkcji rozkładu:

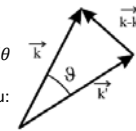
$$f_1(t) = f_1(0)e^{-\frac{t}{\tau(E)}}$$

zmaleje e-razy

W tym przybliżeniu równanie Boltzmana ma postać:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Gdzie $f_1 = f - f_0$.



2013-06-02

36

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \Theta(k, \theta), \text{ gdzie } \theta - \text{kąt między } \vec{k} \text{ i } \vec{k}'.$$

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \Theta(k, \theta) (\cos \theta - 1) k^2 \sin \theta d\theta$$

$$f_1(t) = f_1(0) e^{-\frac{t}{\tau(E)}}$$

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Czas relaksacji:

- Zależy od energii. Nie zależy od rodzaju i wielkości zaburzenia, zależy tylko od energii nośnika (elektronu lub dziury) – jest więc dobrym parametrem charakteryzującym dany materiał
- Dla różnych mechanizmów ta zależność może być różna
- Jeśli istnieje szereg niezależnych mechanizmów rozpraszania, to:

$$\frac{1}{\tau(E)} = \sum_i \frac{1}{\tau_i(E)}$$

M. Baj

2013-06-02

37

Równanie Boltzmana

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

$$f_1(t) = f_1(0) e^{-\frac{t}{\tau(E)}}$$

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \Theta(k, \theta) (\cos \theta - 1) k^2 \sin \theta d\theta$$

Podsumowanie – TRANSPORT DYFUZYJNY:

Rozwiązanie otrzymaliśmy przy założeniach:

- $|f_1| \ll f_0$
- $f_1(\vec{k}) = \vec{v} \vec{X}(E)$
- rozproszenia można uważać za elastyczne i nie wyprowadzają poza pasmo
- Rozproszenia są izotropowe
- Pasma jest sferyczne

Złożony problem rozwiązania nieliniowego równania różniczkowo-całkowego (równania Boltzmana) został sprowadzony do 2 rozdzielnych problemów:

- znalezienia zależności czasu relaksacji od energii
- rozwiązania liniowego równania różniczkowego

M. Baj

2013-06-02

38

Równanie Boltzmana

W ogólności zależności $\tau(E)$ dla różnych mechanizmów rozpraszania mogą być skomplikowane (np.: B.M. Askerov, „*Electron transport phenomena in semiconductors*”, World Scientific 1994, D. K. Ferry, „*Semiconductor transport*”, Taylor & Francis 2000).

Dla **pasma parabolicznego** w wielu przypadkach czas relaksacji daje się opisać zależnością potęgową od energii:

$$\tau(E) = \tau_{0,r}(T) \left(\frac{E}{k_B T} \right)^{(r-\frac{1}{2})}$$

$$l_{tr}(E) = v\tau \sim E^{\frac{1}{2}} E^{(r-\frac{1}{2})} = E^r$$

Czynnik $\tau_{0,r}(T)$ zależy od temperatury z powodu:

- wyłączenia $k_B T$ we wzorze opisującym $\tau(E)$
- dodatkowej zależności – np. poprzez liczbę fononów

Jeśli półprzewodnik jest niezdegenerowany i można stosować rozkład Boltzmana, to $\langle E \rangle \sim k_B T$ i τ zależy od temperatury wyłącznie poprzez czynnik $\tau_{0,r}(T)$

M. Baj

2013-06-02

39

Równanie Boltzmana

fonony akustyczne	p=0	$\tau(E) = A E^{-1/2}$	E – rośnie \Rightarrow τ – maleje
neutrale domieszki	p=1/2	$\tau(E) = A$	τ – stałe
fonony optyczne (dla $E \gg E_d$) (problem z wprowadzeniem pojęcia czasu relaksacji pędowej – istotna zmiana energii)	p=1	$\tau(E) = A E^{1/2}$	E – rośnie \Rightarrow τ – rośnie
zjonizowane domieszki	p=2	$\tau(E) = A E^{3/2}$	E – rośnie \Rightarrow τ – rośnie

R. Stępniewski,

2013-06-02

40

Równanie Boltzmana

Scattering mechanism	Scattering parameter r	$\tau_{or}(T)$	A_{or}
Point defects (short-range potential)	0	$\frac{\pi \hbar^4}{m_e(2m_e k_0 T)^{3/2} U_0^2 N_d}$	$\frac{\pi}{\hbar} U_0^2 N_d$
Acoustic phonons (deformation potential)	0	$\frac{2\pi \hbar^4 \rho v_0^2}{E_1^2 (2m_e k_0 T)^{3/2}}$	$\frac{\pi E_1^2 k_0 T}{\hbar \rho v_0^2}$
Nonpolar optical phonons at high temperatures ($k_0 T \gg \hbar \omega_0$)*	0	$\frac{2}{\pi} \left(\frac{\hbar \omega_0}{E_0} \right)^2 \frac{\hbar^2 a^2 \rho}{(2m_e k_0 T)^{3/2}}$	$\pi^3 \hbar \left(\frac{E_0}{\hbar \omega_0} \right)^2 \frac{k_0 T}{\rho a^2}$
Polar optical phonons at high temperatures ($k_0 T \gg \hbar \omega_0$)	1	$\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\hbar}{\omega_0 k_0 T} \right)^{1/2}$	$\frac{2\pi^2 e^2 k_0 T}{\alpha^* \hbar}$
Piezoacoustic phonons	1	$\frac{2\pi \hbar^2 \kappa}{e^2 \Pi_0^2} \left(\frac{2}{m_e k_0 T} \right)^{1/2}$	$\frac{\pi e^2 k_0 T \Pi_0^2}{2\hbar \kappa}$
Impurity ions	2	$\frac{\kappa^2 (2m_e)^{3/2} (k_0 T)^{3/2}}{\pi e^4 N_i F_{imp}(e)}$	$\frac{2\pi^3 N_i F_{imp}(k)}{\hbar \kappa^2}$

* At low temperatures ($k_0 T < \hbar \omega_0$) in the case of scattering by polar or nonpolar optical phonons τ does not depend on energy ($r = 1/2$), and for a parabolic band it is given by the formulae (11.63) and (11.84) respectively.

$$\tau^{-1} = A_{or} k^{-2r} (e) g(k(e))$$

B. M. Askerov, "Electron transport phenomena in semiconductors"

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \Theta(k, \theta), \text{ gdzie } \theta - \text{k} \text{ \u0105t mi\u0119dzy } \vec{k} \text{ i } \vec{k}'.$$

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \Theta(k, \theta) (\cos \theta - 1) k^2 \sin \theta d\theta$$

$$f_1(t) = f_1(0) e^{-\frac{t}{\tau(E)}}$$

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Czas relaksacji:

- Zale\u017cy od energii. Nie zale\u017cy od rodzaju i wielko\u015bci zaburzenia, zale\u017cy tylko od energii no\u015bnika (elektronu lub dziury) – jest wi\u0119c dobrym parametrem charakteryzuj\u0105cym dany materia\u0142
- Dla r\u00f3\u017cnnych mechanizm\u00f3w ta zale\u017ano\u015b\u0107 mo\u017ce by\u0107 r\u00f3\u017ana
- Je\u015bli istnieje szereg niezale\u017cnych mechanizm\u00f3w rozpraszania, to:

$$\frac{1}{\tau(E)} = \sum_i \frac{1}{\tau_i(E)}$$

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + b - a$$

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \Theta(k, \theta), \text{ gdzie } \theta - \text{k} \text{ \u0105t mi\u0119dzy } \vec{k} \text{ i } \vec{k}'.$$

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \Theta(k, \theta) (\cos \theta - 1) k^2 \sin \theta d\theta$$

$$f_1(t) = f_1(0) e^{-\frac{t}{\tau(E)}}$$

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Pole elektryczne:

Pole elektryczne $\vec{F} = q\vec{E}$ dla \u0142adunku $q = \pm e$ zak\u0142adamy, \u017ce uk\u0142ad jest jednorodny w ca\u0142ej swojej obj\u0119to\u015bci: $\nabla_{\vec{r}} f = 0$

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k} - \vec{\delta}) = f_0(\vec{k}) - \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E \cdot \vec{\delta} = f_0(E) + \vec{v} \cdot \vec{X}(E)$$

$$\nabla_{\vec{k}} f = \nabla_{\vec{k}} (f_0 + f_1) = \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E + \nabla_{\vec{k}} f_1$$

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Pole elektryczne:

- Pole elektryczne $\vec{F} = q\vec{E}$ dla \u0142adunku $q = \pm e$
- zak\u0142adamy, \u017ce uk\u0142ad jest jednorodny w ca\u0142ej swojej obj\u0119to\u015bci: $\nabla_{\vec{r}} f = 0$, wprowadzili\u015bmy

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k} - \vec{\delta}) = f_0(\vec{k}) - \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E \cdot \vec{\delta} = f_0(E) + \vec{v} \cdot \vec{X}(E)$$

$$\nabla_{\vec{k}} f = \nabla_{\vec{k}} (f_0 + f_1) = \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E + \nabla_{\vec{k}} f_1$$

C\u0142on:

$$\frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f = \frac{1}{\hbar} q\vec{E} \cdot \left(\frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E + \nabla_{\vec{k}} f_1 \right)$$

Odrzucamy cz\u0142ony nieliniowe w zaburzeniu

(odrzucaj\u0105my cz\u0142ony nieliniowe w zaburzeniu, bo zaraz poka\u017cemy, \u017ce $f_1 \propto \vec{E}$ i b\u0119d\u0105my z równania Boltzmana dostawali zjawiska zale\u017c\u0105ce nie tylko liniowo od \vec{E} (np. prawo Ohma) tak\u017ce cz\u0142ony $\propto \vec{E}^2$.)

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Pole elektryczne:

- Pole elektryczne $\vec{F} = q\vec{E}$ dla ładunku $q = \pm e$
- zakładamy, że układ jest jednorodny w całej swojej objętości: $\nabla_{\vec{r}} f = 0$, wprowadziliśmy

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k} - \vec{\delta}) = f_0(\vec{k}) - \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E \cdot \vec{\delta} = f_0(E) + \vec{v} \cdot \vec{X}(E)$$

$$\nabla_{\vec{k}} f = \nabla_{\vec{k}}(f_0 + f_1) = \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E + \nabla_{\vec{k}} f_1 \quad (*)$$

Odrzucamy człony nieliniowe w zaburzeniu

$$0 + \frac{q}{\hbar} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E + \frac{f_1}{\tau(E)} = \frac{q}{\hbar} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial E} \hbar \vec{v} + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Stąd

$$f_1 = q \cdot \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{X}(E)$$

Czyli f_1 zależy od pola \vec{E} . Równanie różniczkowe na f (*) można dalej rozwiązywać iteracyjnie znajdując człony proporcjonalne do $\vec{E}^2, \vec{E}^3, \vec{E}^4$ itd.

2013-06-02

45

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Pole elektryczne:

- Pole elektryczne $\vec{F} = q\vec{E}$ dla ładunku $q = \pm e$
- zakładamy, że układ jest jednorodny w całej swojej objętości: $\nabla_{\vec{r}} f = 0$, wprowadziliśmy

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k} - \vec{\delta}) = f_0(\vec{k}) - \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E \cdot \vec{\delta} = f_0(E) + \vec{v} \cdot \vec{X}(E)$$

$$\nabla_{\vec{k}} f = \nabla_{\vec{k}}(f_0 + f_1) = \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E + \nabla_{\vec{k}} f_1$$

Odrzucamy człony nieliniowe w zaburzeniu

$$0 + \frac{q}{\hbar} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial E} \nabla_{\vec{k}} E + \frac{f_1}{\tau(E)} = \frac{q}{\hbar} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial E} \hbar \vec{v} + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Stąd

$$f_1 = q \cdot \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{X}(E)$$

gęstość prądu można policzyć licząc całkę po całej strefie Brillouina z funkcją f_1 (f_0 jako funkcja równowagowa nie daje wkładu do prądu).

2013-06-02

46

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

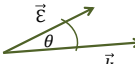
Pole elektryczne:

- $f_1 = q \cdot \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{E} \cdot \vec{v}$
- gęstość prądu można policzyć licząc całkę po całej strefie Brillouina z funkcją f_1 (f_0 jako funkcja równowagowa nie daje wkładu do prądu):

$$\vec{j} = \int_{SB} q \vec{v} \cdot f_1 \cdot \rho(\vec{k}) d^3k = \frac{1}{4\pi^3} \int_{SB} q \vec{v} \cdot q \cdot \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{E} \cdot \vec{v} \cdot d^3k$$

Znika prąd $\vec{v} \perp \vec{E}$

wprowadzając układ współrzędnych sferycznych z osią biegunową skierowaną wzdłuż wektora \vec{E} natężenia pola elektrycznego, wykonując całkowania po kątach i zamieniając zmienną całkowania z \vec{k} na E (w przybliżeniu pasma sferycznego, $\vec{k} \parallel \vec{v}$, biorąc $\vec{v} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E$) otrzymujemy:

$$\vec{j} = \frac{e^2}{m^*} \left[\frac{1}{3\pi^2} \int_{SB} \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) \cdot dE \right] \cdot \vec{E}$$


2013-06-02

47

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

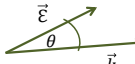
Pole elektryczne:

- $f_1 = q \cdot \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{E} \cdot \vec{v}$
- gęstość prądu można policzyć licząc całkę po całej strefie Brillouina z funkcją f_1 (f_0 jako funkcja równowagowa nie daje wkładu do prądu):

$$\vec{j} = \int_{SB} q \vec{v} \cdot f_1 \cdot \rho(\vec{k}) d^3k = \frac{1}{4\pi^3} \int_{SB} q \vec{v} \cdot q \cdot \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{E} \cdot \vec{v} \cdot d^3k$$

Znika prąd $\vec{v} \perp \vec{E}$

wprowadzając układ współrzędnych sferycznych z osią biegunową skierowaną wzdłuż wektora \vec{E} natężenia pola elektrycznego, wykonując całkowania po kątach i zamieniając zmienną całkowania z \vec{k} na E (w przybliżeniu pasma sferycznego, $\vec{k} \parallel \vec{v}$, biorąc $\vec{v} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E$) otrzymujemy:

$$\vec{j} = \frac{e^2}{m^*} \left[\frac{1}{3\pi^2} \int_{SB} \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) \cdot dE \right] \cdot \vec{E}$$


Przy tablicy!
 $\int_0^\pi \sin x \cos^2 x dx = \frac{2}{3}$

48

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Pole elektryczne:

$$\vec{j} = \frac{e^2}{m^*} \left[\frac{1}{3\pi^2} \int_{SB} \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE \right] \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

Wartość oczekiwana (przypomnienie):

$$\langle A(E) \rangle = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty A(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE$$

Wartość średnia (przypomnienie):

$$\langle \tilde{A}(E) \rangle = \frac{\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty A(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE}{\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE} = \frac{\langle A(E) \rangle}{n}$$

$$\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE = n$$

Przy tablicy!
 $\frac{\partial f_0}{\partial E} \approx -\delta(E - E_F)$

2013-06-02

49

Równanie Boltzmana

$$\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE = n$$

Przy tablicy!
 $\frac{\partial f_0}{\partial E} \approx -\delta(E - E_F)$

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle &= \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty 1 \cdot \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE = -\frac{f_0 k^3}{3\pi^2} \Big|_0^\infty + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty f_0 3k^2(E) \frac{dk}{dE} dE = \\ &= 0 + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty f_0 k^2 dk = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty 4\pi f_0 k^2 dk = \int_0^\infty \rho(k) f_0 d^3k = n \end{aligned}$$

bo $f_0(\infty) = 0, k^3(0) = 0$

2013-06-02

50

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Pole elektryczne:

$$\vec{j} = \frac{e^2}{m^*} \left[\frac{1}{3\pi^2} \int_{SB} \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE \right] \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

Wartość średnia (przypomnienie):

$$\langle \tilde{A}(E) \rangle = \frac{\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty A(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE}{\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE}$$

$$\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE = n$$

Przy tablicy!
 $\frac{\partial f_0}{\partial E} \approx -\delta(E - E_F)$

$$\langle \tilde{A}(E) \rangle = \frac{\langle A(E) \rangle}{n} = \frac{1}{3\pi^2 n} \int_0^\infty A(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE$$

$\langle \tilde{A}(E) \rangle$ jest to wielkość $\langle A(E) \rangle$ przypadająca na jeden elektron

2013-06-02

51

Równanie Boltzmana

Wnioski – TRANSPORT DYFUZYJNY:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

Pole elektryczne:

$$\vec{j} = \frac{e^2}{m^*} \left[\frac{1}{3\pi^2} \int_{SB} \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE \right] \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

Wartość średnia (przypomnienie):

$$\langle A(E) \rangle = \frac{\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty A(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE}{\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE}$$

$$\langle \tilde{\tau}(E) \rangle = \frac{\langle \tau(E) \rangle}{n} = \frac{1}{3\pi^2 n} \int_0^\infty \tau(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^3(E) dE$$

$$\vec{j} = \frac{e^2}{m^*} \langle \tau(E) \rangle \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{e^2 n}{m^*} \langle \tilde{\tau}(E) \rangle \cdot \vec{\mathcal{E}} \equiv \sigma \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

2013-06-02

52

Równanie Boltzmana

Pole elektryczne:

$$\mathbf{j} = \frac{e^2}{m^*} \langle \tau(E) \rangle \cdot \vec{E} = \frac{e^2 n}{m^*} \langle \tau(E) \rangle \cdot \vec{E} \equiv \sigma \cdot \vec{E}$$

Zatem przewodnictwo σ :

$$\sigma = n \frac{e^2}{m^*} \langle \tau(E) \rangle = ne\mu \Rightarrow \mu = \frac{e}{m^*} \langle \tau(E) \rangle$$

W przypadku metalu $\frac{\partial f_0}{\partial E} \approx -\delta(E - E_F)$ i wtedy $\mu = \frac{e}{m^*} \tau(E_F)$

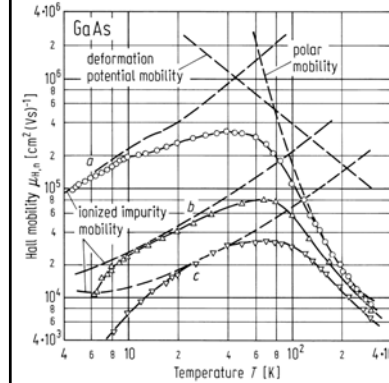
- w przypadku niezdegenerowanym w niskich temperaturach można się spodziewać $\mu(T) \sim T^{3/2}$ (rozpraszanie zdominowane przez zjonizowane domieszki)
- w przypadku niezdegenerowanym w wysokich temperaturach można się spodziewać $\mu(T) \sim T^{-3/2}$ (jeśli rozpraszanie zdominowane przez fonony akustyczne, potencjał deformacyjny)

2013-06-02

53

Równanie Boltzmana

Pole elektryczne:



Mamy do czynienia z różnymi mechanizmami rozpraszania zależnymi od temperatury

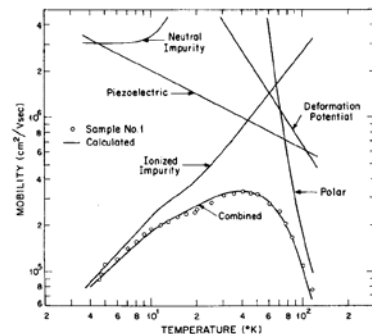
C.M. Wolfe et al., *Journal of Applied Physics*, **41**, 3088 (1970)

2013-06-02

54

Równanie Boltzmana

Pole elektryczne:



Mamy do czynienia z różnymi mechanizmami rozpraszania zależnymi od temperatury

FIG. 1. Temperature dependence of the mobility for the highest purity sample showing the mobility curves calculated for each scattering process, the calculated combined mobility curve, and the experimental points.

C.M. Wolfe et al., *Journal of Applied Physics*, **41**, 3088 (1970)

2013-06-02

55

Tensor przewodnictwa

Tensor przewodnictwa: $\vec{j}_{sw} = \hat{\sigma} \vec{E}$

Tensor oporności: $\vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}_{sw}$

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

Tensor przewodnictwa: $\vec{j}_{sw} = \hat{\sigma} \vec{E}$

W ośrodku izotropowym $J_x = \sigma_{xx} E_x$

Równanie Boltzmana:

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

w obecności pól elektrycznego i magnetycznego w układzie jednorodnym ($\nabla_{\vec{r}} f = 0$) ma postać:

$$0 + \frac{1}{\hbar} [\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})] \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{\vec{v} \cdot \vec{X}(E)}{\tau(E)} = 0$$

Rozwiązanie \vec{X} daje

$$\vec{X} = \frac{\vec{X}_0 + s(\vec{X}_0 \times \vec{b}) + s^2 \vec{b}(\vec{b} \cdot \vec{X}_0)}{1 + s^2}$$

Dla wersora w kierunku pola $\vec{b} = \vec{B}/B$, $s = q\tau B/m^* (q = \pm e)$,

Rozwiązanie bez pola $\vec{X}_0 = q\tau \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right) \vec{E}$

2013-06-02

56

Tensor przewodnictwa

Rozwiązanie \vec{X} daje

$$\vec{X} = \frac{\vec{X}_0 + s(\vec{X}_0 \times \vec{b}) + s^2 \vec{b}(\vec{b} \cdot \vec{X}_0)}{1 + s^2}$$

Dla wersora w kierunku pola $\vec{b} = \vec{B}/B$,

$$s = \frac{q\tau B}{m^*}, \quad q = \pm e$$

$s \ll 1$ – słabe pola
 $s \gg 1$ – silne pola

Rozwiązanie bez pola $\vec{X}_0 = q\tau \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E}\right) \vec{E}$

Wektorowa funkcja $\vec{X}(E)$ zależy od znanej, zależnej tylko od pola elektrycznego funkcji $\vec{X}_0(E)$, ale w polu magnetycznym kierunki tych obu wektorów są różne ($\vec{X}(E) \neq \vec{E}$).

Tensor przewodnictwa: $\hat{\sigma} = \partial \vec{E}$ jest antysymetrycznym tensorem drugiego rzędu.

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ -\sigma_{yx} & \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{ne^2}{m^*} \begin{pmatrix} \frac{\tau}{1+s^2} & \frac{s\tau}{1+s^2} & 0 \\ \frac{-s\tau}{1+s^2} & \frac{\tau}{1+s^2} & 0 \\ 0 & 0 & \langle \tau \rangle \end{pmatrix}$$

$\sigma_{xy} = \frac{ne^2}{m^*} \left(\frac{s\tau}{1+s^2}\right)$ może być dodatnie albo ujemne, σ_{zz} nie zależy od pola magnetycznego.

2013-06-02

57

Tensor przewodnictwa

$$s = \frac{q\tau B}{m^*} \equiv \omega_c \tau, \quad q = \pm e$$

$s \ll 1$ – słabe pola
 $s \gg 1$ – silne pola

ω_c - częstość cyklotronowa

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ -\sigma_{yx} & \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{ne^2}{m^*} \begin{pmatrix} \frac{\tau}{1+s^2} & \frac{s\tau}{1+s^2} & 0 \\ \frac{-s\tau}{1+s^2} & \frac{\tau}{1+s^2} & 0 \\ 0 & 0 & \langle \tau \rangle \end{pmatrix}$$

$\sigma_{xy} = \frac{ne^2}{m^*} \left(\frac{s\tau}{1+s^2}\right)$ może być dodatnie albo ujemne, σ_{zz} nie zależy od pola magnetycznego.

Dla słabych pól $s \ll 1$

$$\sigma_{xx} = \frac{ne^2}{m^*} \left(\frac{\tau}{1+s^2}\right) \approx \frac{ne^2}{m^*} (\tau(1 - s^2 + 0(s^4))) = \frac{ne^2}{m^*} [\langle \tau \rangle - \omega_c^2 \langle \tau^3 \rangle]$$

Czyli σ_{xx} nie zależy od pola + dodatek kwadratowy

$$\sigma_{xy} = \frac{ne^2}{m^*} \left(\frac{s\tau}{1+s^2}\right) \approx \frac{ne^2}{m^*} \langle \tau s \rangle = \frac{ne^2}{m^*} \omega_c \langle \tau^2 \rangle$$

Czyli σ_{xy} jest liniowe w polu.

2013-06-02

58

Tensor przewodnictwa

$$s = \frac{q\tau B}{m^*} \equiv \omega_c \tau, \quad q = \pm e$$

$s \ll 1$ – słabe pola
 $s \gg 1$ – silne pola

ω_c - częstość cyklotronowa

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ -\sigma_{yx} & \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{ne^2}{m^*} \begin{pmatrix} \frac{\tau}{1+s^2} & \frac{s\tau}{1+s^2} & 0 \\ \frac{-s\tau}{1+s^2} & \frac{\tau}{1+s^2} & 0 \\ 0 & 0 & \langle \tau \rangle \end{pmatrix}$$

$\sigma_{xy} = \frac{ne^2}{m^*} \left(\frac{s\tau}{1+s^2}\right)$ może być dodatnie albo ujemne, σ_{zz} nie zależy od pola magnetycznego.

Dla silnych pól $s \gg 1$

$$\sigma_{xx} = \frac{ne^2}{m^*} \left(\frac{\tau}{1+s^2}\right) \approx \frac{ne^2}{m^*} \left(\frac{\tau}{s^2}\right) = \frac{nm^*}{B^2} \left(\frac{1}{\tau}\right)$$

Czyli σ_{xx} maleje w polu

$$\sigma_{xy} = \frac{ne^2}{m^*} \left(\frac{s\tau}{1+s^2}\right) \approx \frac{ne^2}{m^*} \left(\frac{\tau}{s}\right) = \frac{qn}{B}$$

Czyli σ_{xy} jest liniowe w polu.

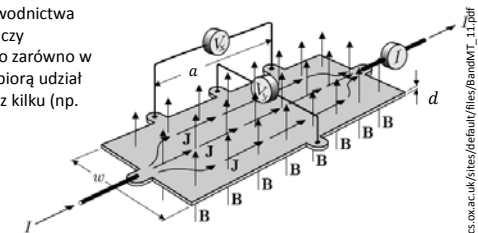
2013-06-02

59

Efekt Halla

Przykład:

Znajomość postaci tensora przewodnictwa pozwala wyjaśnić zjawisko Halla czy magnetooporu poprzecznego i to zarówno w przypadku, kiedy w transporcie biorą udział nośniki z jednego pasma czy też z kilku (np. elektrony i dziury)



Na ćwiczeniach

2013-06-02

60

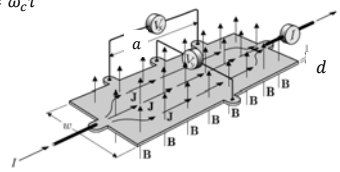
Efekt Halla

Pełny tensor przewodnictwa

$$\sigma = ne\mu \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ \frac{1}{1+s^2} & \frac{1}{1+s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s = \frac{eB\tau}{m^*} = \omega_c \tau$$

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*}$$



Pełny tensor oporności

$$\rho = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{zz}} \end{pmatrix}$$

Oporność poprzeczna $\rho_H = R_H \cdot B$ gdzie R_H współczynnik Halla.

Współczynnik Halla w obszarze niskich pól magnetycznych $B \rightarrow 0$, $\sigma_{xy} \ll \sigma_{xx}$:

$$R_{H0} \cong \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2} = \frac{1}{qn} \frac{\langle \tau^2 \rangle}{(\tau)^2} = \frac{r}{\pm en}$$

hallowski czynnik rozproszeniowy

2013-06-02

61

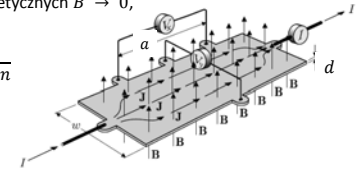
Efekt Halla

Oporność poprzeczna $\rho_H = R_H \cdot B$ gdzie R_H współczynnik Halla.

Współczynnik Halla w obszarze niskich pól magnetycznych $B \rightarrow 0$, $\sigma_{xy} \ll \sigma_{xx}$:

$$R_{H0} \cong \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2} = \frac{1}{qn} \frac{\langle \tau^2 \rangle}{(\tau)^2} = \frac{r}{\pm en}$$

r - hallowski czynnik rozproszeniowy



- w przypadku silnej degeneracji $\tau \rightarrow \tau(E_F)$ i $r = 1$
- w przypadku niezdegenerowanym, opisywalnym rozkładem Boltzmana, po zastosowaniu wprowadzonej wcześniej zależności czasu relaksacji od energii: $\tau(E) \sim E^{(p-1/2)}$ otrzymujemy:

$$r_H = \frac{\Gamma(2p + \frac{3}{2}) \cdot \Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma^2(p + 2)}$$

Gdzie f. Eulera $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

2013-06-02

62

Efekt Halla

$$R_{H0} \cong \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2} = \frac{1}{qn} \frac{\langle \tau^2 \rangle}{(\tau)^2} = \frac{r}{\pm en}$$

r - hallowski czynnik rozproszeniowy

- w przypadku silnej degeneracji $\tau \rightarrow \tau(E_F)$ i $r = 1$
- w przypadku niezdegenerowanym, opisywalnym rozkładem Boltzmana, $\tau(E) \sim E^{(p-1/2)}$

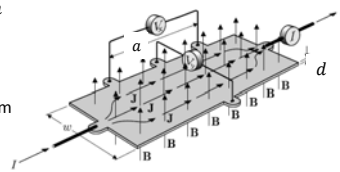
$$r_H = \frac{\Gamma(2p + \frac{3}{2}) \cdot \Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma^2(p + 2)}$$

Jeśli:

- $p = 0$ (rozpraszanie na fononach, potencjał deformacyjny) $r \approx 1,18$
- $p = 1$ (rozpraszanie na fononach optycznych, mechanizm polarny, rozpraszanie na fononach akustycznych, mechanizm piezo) $r \approx 1,10$
- $p = 2$ (rozpraszanie na zjonizowanych domieszkach) $r \approx 1,93$

mierząc współczynnik Halla w obszarze niskich pól B i przewodnictwo elektryczne σ bez pola magnetycznego można z dokładnością do hallowskiego czynnika rozproszeniowego wyznaczyć koncentrację i ruchliwość nośników

$$n = \frac{r}{e|R_H|} \quad \mu = \frac{|R_H|\sigma}{r}$$



2013-06-02

63

Efekt Halla

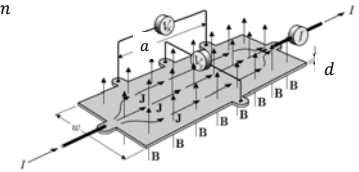
$$R_{H0} \cong \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2} = \frac{1}{qn} \frac{\langle \tau^2 \rangle}{(\tau)^2} = \frac{r}{\pm en}$$

r - hallowski czynnik rozproszeniowy

$$n = \frac{r}{e|R_H|} \quad \mu = \frac{|R_H|\sigma}{r}$$

W przypadku silnych pól magnetycznych:

$$R_H \cong \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \xrightarrow{s \gg 1} \frac{1}{B} \frac{1}{\sigma_{xy}} \approx \frac{1}{\pm en} = R_{H\infty}$$



2013-06-02

64

Efekt Halla

Siła Lorentza: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

Model Drudego: $m^* \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} \right) = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

τ – czas relaksacji pędowej (scattering time)

$$m^* \left\{ \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{\tau} \right\} = qE_x + qv_y B$$

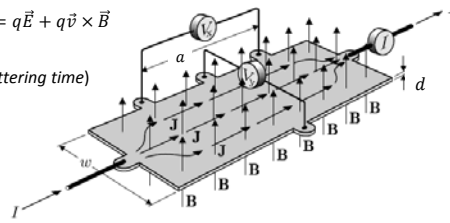
$$m^* \left\{ \frac{dv_y}{dt} + \frac{v_y}{\tau} \right\} = qE_y - qv_x B$$

Dostajemy:

$$v_y \{1 + \omega_c^2 \tau^2\} = \frac{q\tau}{m^*} (E_y - \omega_c \tau E_x)$$

$$\omega_c = \frac{qB}{m^*} \quad \mu = \frac{q\tau}{m^*} \quad j_y = 0 = \sum_i q_i n v_y^i$$

Na ćwiczeniach



Efekt Halla

Zaniedbując $\omega_c^2 \tau^2 \ll 1$ i biorąc pod uwagę przewodnictwo elektronów n i dziur p :

$$j_y = 0 = \sum_i q_i n v_y^i$$

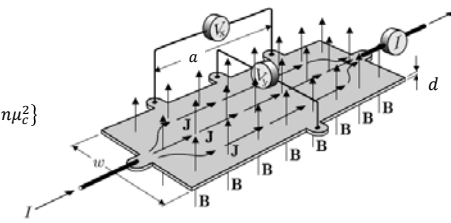
$$E_y \{n\mu_c + p\mu_h\} = E_x B \{p\mu_h^2 - n\mu_c^2\}$$

Dostajemy tzw. stałą Halla:

$$R_H = \frac{j_x}{E_x B} = \frac{1}{|e|} \frac{p\mu_h^2 - n\mu_c^2}{(n\mu_c + p\mu_h)^2}$$

Np. dla $p = 0$ mamy $R_H = -\frac{1}{en}$

Na ćwiczeniach



Efekt Halla

Biorąc $\sigma_0 = n e \mu = n e^2 \tau / m$ $\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$

W przypadku efektu Halla $E = [E_x, 0, 0]$:

$$j_x = \sigma_{xx} E_x \quad j_y = \sigma_{yx} E_x$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

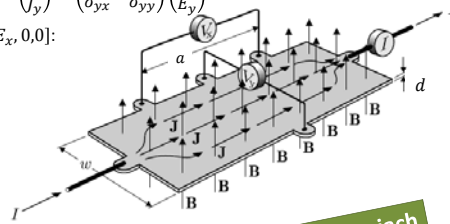
$$\sigma_{yx} = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

Tensor przewodnictwa:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_L & -\sigma_T \\ \sigma_T & \sigma_L \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$$

Tensor oporności: $\rho = \frac{1}{\sigma_L^2 + \sigma_T^2} \begin{pmatrix} \sigma_L & \sigma_T \\ -\sigma_T & \sigma_L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}$

Na ćwiczeniach



Efekt Halla

Pełny tensor przewodnictwa

$$\sigma = ne\mu \begin{pmatrix} \frac{1}{1+s^2} & \frac{-s}{1+s^2} & 0 \\ \frac{s}{1+s^2} & \frac{1}{1+s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s = \frac{eB\tau}{m^*} = \omega_c \tau$$

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*}$$

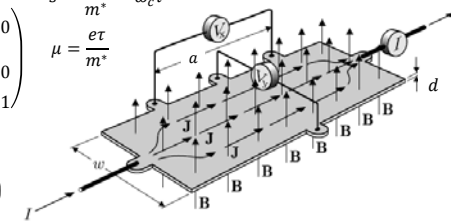
Pełny tensor oporności

$$\rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{ne\mu} \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \rho \vec{j} = \begin{bmatrix} \frac{j_x}{ne\mu} \\ -\frac{j_x B}{ne} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{xy} = E_y w = \frac{I_x B}{wd ne} w = \frac{I_x}{d ne} B = R_H \frac{I_x B}{d}$$

$$R_H = \frac{1}{ne} \text{ stała Halla}$$



Efekt Gaussa

Magnetoopór poprzeczny – efekt Gaussa

słowo „poprzeczny” odnosi się do sytuacji, kiedy przepływ prądu zachodzi w kierunku prostopadłym do kierunku pola magnetycznego

zjawiskiem magnetooporu nazywamy względną zmianę oporności ρ_{xx} w funkcji pola magnetycznego

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_0} - 1 = \frac{\sigma(0)\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^2 - \sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

magnetoopór w obszarze niskich pól magnetycznych $s \ll 1$:

stosując standardowe przybliżenia i ograniczając się do wyrazów najniższego rzędu w B otrzymujemy:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \omega_c^2 \left[\frac{\langle \tau^3 \rangle}{\langle \tau \rangle} - \frac{\langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle^2} \right] = \mu^2 B^2 \left[\frac{\langle \tau^3 \rangle}{\langle \tau \rangle^3} - \frac{\langle \tau^2 \rangle^2}{\langle \tau \rangle^4} \right] = \mu^2 B^2 \cdot A$$

- magnetopór jest kwadratowy w B
- jest proporcjonalny do μ^2
- współczynnik proporcjonalności A zależy od mechanizmu rozpraszania: np. w przypadku niezdegenerowanym (rozkład Boltzmanna) dla $p = 0$ (fony akustyczne, potencjał deformacyjny) $A = 0,13$, dla $p = 2$ (zjonizowane domieszki) $A = 2,41$

M. Baj.

2013-06-02

69

Efekt Gaussa

Magnetoopór poprzeczny – efekt Gaussa

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_0} - 1 = \frac{\sigma(0)\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^2 - \sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

magnetoopór w obszarze wysokich pól magnetycznych $s \gg 1$:

$$\frac{\Delta\rho_{\infty}}{\rho} = \frac{\sigma(0)\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}^2} - 1 = \langle \tau \rangle \left(\frac{1}{\tau} \right) - 1$$

magnetopór nasycy się na wartości zależnej od mechanizmu rozpraszania. Dla rozkładu Boltzmanna:

- dla $p = 0$ (fony) dostajemy $\frac{\Delta\rho_{\infty}}{\rho} = 0,38$
- dla $p = 2$ (zjonizowane domieszki) dostajemy $\frac{\Delta\rho_{\infty}}{\rho} = 2,98$

W przypadku pasma sferycznego magnetoopór podłużny nie pojawia się (na ładunek poruszający się wzdłuż linii pola B nie działa siła). W przypadku pasma niesferycznego przewodnictwo jest tensorowe nawet bez pola B i w tym przypadku magnetoopór podłużny występuje.

- efekt Halla – pierwszego rzędu w polu B
- efekt Gaussa – drugiego rzędu w polu B

M. Baj.

2013-06-02

70

Tensor przewodnictwa

Wiele rodzajów nośników:

- półprzewodnik bliski samoistnemu – w transporcie biorą udział elektrony w paśmie przewodnictwa i dziury w paśmie walencyjnym
- degeneracja kilku dolin jednego pasma – nośniki obsadzające różne doliny mają różne koncentracje i ruchliwości
- heterostruktura w której występuje kilka warstw zawierających różne swobodne nośniki

Standardowym założeniem jest to, że każda i -ta „grupa” nośników czuje ten sam rozkład pola elektrycznego oraz że nośniki w swoim ruchu sobie nawzajem „nie przeszkadzają”. W takim przypadku, całkowita gęstość prądu jest sumą gęstości prądu od poszczególnych grup nośników i : tzn. tensor przewodnictwa jest addytywny:

$$\hat{\sigma}^{tot} = \sum_i \hat{\sigma}_i$$

M. Baj.

2013-06-02

71

Tensor przewodnictwa

Wiele rodzajów nośników, przykłady:

$$\hat{\sigma}^{tot} = \sum_i \hat{\sigma}_i$$

$$\text{elektrony: } \sigma_{xx}^e = \frac{ne^2}{m_e^*} \left(\frac{\tau_e}{1 + s_e^2} \right), \quad \sigma_{xy}^e = \frac{ne^2}{m_e^*} \left(\frac{s_e \tau_e}{1 + s_e^2} \right)$$

$$\text{dziury: } \sigma_{xx}^h = \frac{ne^2}{m_h^*} \left(\frac{\tau_h}{1 + s_h^2} \right), \quad \sigma_{xy}^h = \frac{ne^2}{m_h^*} \left(\frac{s_h \tau_h}{1 + s_h^2} \right)$$

$$\hat{\sigma}^{tot} = \hat{\sigma}^e + \hat{\sigma}^h$$

Dostajemy:

$$R_H^{tot} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\sigma_{xy}^{tot}}{(\sigma_{xx}^{tot})^2 + (\sigma_{xy}^{tot})^2}$$

W małych polach $s_e, s_h \ll 1$:

$$R_{H0} = \frac{j_x}{E_x B} = \frac{1}{|e|} \frac{r_h p \mu_h^2 - r_e n \mu_c^2}{(n \mu_c + p \mu_h)^2} \xrightarrow{r_h = r_e = r} \frac{r}{e} \frac{p - nb^2}{(p + nb)^2}$$

W dużych polach $s_e, s_h \gg 1$:

$$R_{H\infty} = \frac{1}{e(p - n)}$$

M. Baj.

2013-06-02

72

Tensor przewodnictwa

Wiele rodzajów nośników, przykłady:

W małych polach $s_e, s_h \ll 1$:

$$R_{H0} = \frac{j_x}{E_x B} = \frac{1}{|e|} \frac{r_h p \mu_h^2 - r_e n \mu_e^2}{(n \mu_e + p \mu_h)^2} \xrightarrow{r_h=r_e=r} \frac{r}{e} \frac{p - nb^2}{(p + nb)^2}$$

W dużych polach $s_e, s_h \gg 1$:

$$R_{H\infty} = \frac{1}{e(p-n)}$$

- W małych polach magnetycznych dominujący wkład do współczynnika Halla mogą mieć nośniki bardziej ruchliwe, nawet jeśli ich koncentracja jest istotnie mniejsza.
- W wysokich polach magnetycznych o znaku współczynnika Halla decydują nośniki o większej koncentracji.
- Z powyższego wynika, że znak współczynnika Halla może w funkcji pola B się zmieniać

M. Baj.

2013-06-02

73

Tensor przewodnictwa

Widmo ruchliwości:

Nie wiemy ile różnych rodzajów (grup) nośników bierze udział w transporcie

Staramy się opisać doświadczalną zależność składowych tensora przewodnictwa od pola magnetycznego $\sigma_{xx}(B)$ i $\sigma_{xy}(B)$ jako złożenie wielu różnych wkładów – kanałów przewodnictwa (w ogólności – dowolnie wielu) pochodzących od grup nośników (numerowanych wskaźnikiem i) charakteryzujących się daną masą efektywną m_i^* , ładunkiem $q_i (= \pm e)$ oraz czasem relaksacji τ_i

dla każdej z takich grup możemy napisać:

$$s_i = \frac{q_i \tau_i}{m_i^*} B \equiv \mu_i B$$

$$\sigma_{xx}^i(B) = \frac{e^2 n_i}{m_i^*} \frac{\tau_i}{1 + s_i^2} = \frac{\sigma_{0i}}{1 + s_i^2} = \frac{\sigma_{0i}}{1 + (\mu_i B)^2}$$

$$\sigma_{xy}^i(B) = \frac{\sigma_{0i}}{1 + (\mu_i B)^2} \cdot (\mu_i B)$$

M. Baj.

2013-06-02

74

Tensor przewodnictwa

Widmo ruchliwości:

$$s_i = \frac{q_i \tau_i}{m_i^*} B \equiv \mu_i B$$

$$\sigma_{xx}^i(B) = \frac{e^2 n_i}{m_i^*} \frac{\tau_i}{1 + s_i^2} = \frac{\sigma_{0i}}{1 + s_i^2} = \frac{\sigma_{0i}}{1 + (\mu_i B)^2}$$

$$\sigma_{xy}^i(B) = \frac{\sigma_{0i}}{1 + (\mu_i B)^2} \cdot (\mu_i B)$$

Sumaryczny wkład od wszystkich kanałów przewodnictwa (grup nośników):

$$\sigma_{xx}^{tot}(B) = \sum_i \frac{\sigma_{0i}}{1 + (\mu_i B)^2} = \int_{\mu} \left(\frac{d\sigma_0(\mu)}{d\mu} \right) \frac{1}{1 + (\mu B)^2} d\mu$$

$$\sigma_{xy}^{tot}(B) = \sum_i \frac{\sigma_{0i}}{1 + (\mu_i B)^2} \cdot (\mu_i B) = \int_{\mu} \left(\frac{d\sigma_0(\mu)}{d\mu} \right) \frac{\mu B}{1 + (\mu B)^2} d\mu$$

Rozwiązanie problemu polega na takim dobraniu wkładów poszczególnych kanałów przewodnictwa, aby zgodność pomiędzy wyliczonymi zależnościami i i doświadczeniem była jak najlepsza

M. Baj.

2013-06-02

75

Tensor przewodnictwa

Widmo ruchliwości:

Sumaryczny wkład od wszystkich kanałów przewodnictwa (grup nośników):

$$\sigma_{xx}^{tot}(B) = \sum_i \frac{\sigma_{0i}}{1 + (\mu_i B)^2} = \int_{\mu} \left(\frac{d\sigma_0(\mu)}{d\mu} \right) \frac{1}{1 + (\mu B)^2} d\mu$$

$$\sigma_{xy}^{tot}(B) = \sum_i \frac{\sigma_{0i}}{1 + (\mu_i B)^2} \cdot (\mu_i B) = \int_{\mu} \left(\frac{d\sigma_0(\mu)}{d\mu} \right) \frac{\mu B}{1 + (\mu B)^2} d\mu$$

Rozwiązanie problemu polega na takim dobraniu wkładów poszczególnych kanałów przewodnictwa, aby zgodność pomiędzy wyliczonymi zależnościami i i doświadczeniem była jak najlepsza.

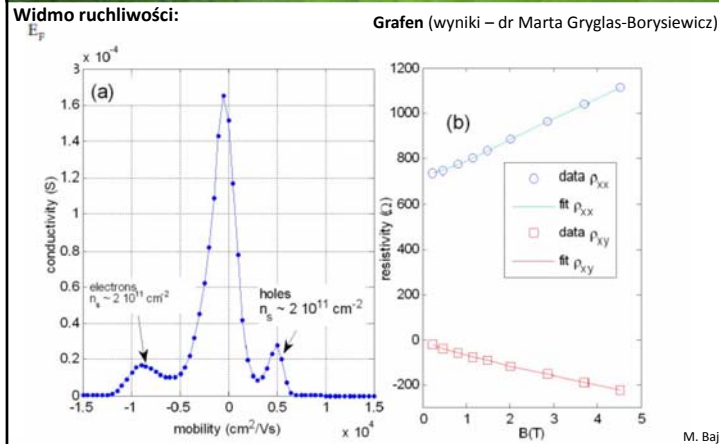
można albo próbować dopasować sumę wkładów od kilku kanałów $\mu_i - \sigma_{0i}$ przewodnictwa, albo stosować kwaziciągły rozkład $\frac{d\sigma_0(\mu)}{d\mu}$. Wyniku dostajemy tzw. **widmo ruchliwości**.

M. Baj.

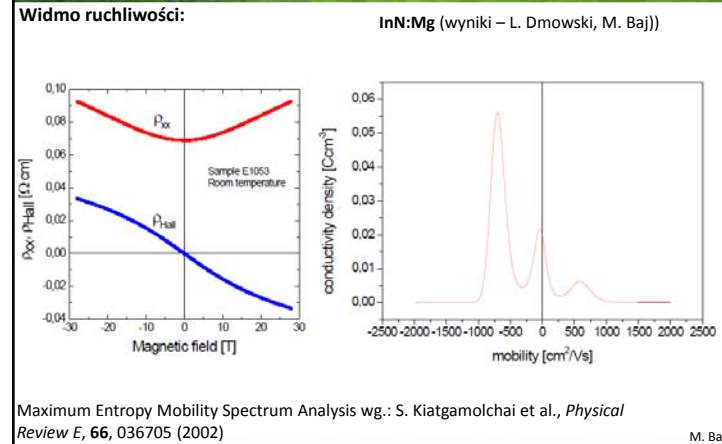
2013-06-02

76

Tensor przewodnictwa



Tensor przewodnictwa



Tensor przewodnictwa

Układy niskowymiarowe:
 Układy niskowymiarowe – uwięzienie kwantowe w r wymiarach (1, 2 lub 3) prowadzi do tego, że elektrony (dziury) mają swobodę ruchu tylko w pozostałych $d = 3 - r$ wymiarach ⇒ układy 2D, 1D, 0D

W przypadkach 2D i 1D transport równoległy (lateralny) w płaszczyźnie gazu 2D lub wzdłuż drutu kwantowego (w odróżnieniu np. do transportu poprzecznego, wertykalnego, w poprzek warstw heterostruktuury), w przypadku kiedy $L \gg l_e$ (gdzie l_e – średnia droga swobodna) może być rozpatrywany w taki sam sposób jak transport dyfuzyjny w 3D – równanie Boltzmanna, przybliżenie czasu relaksacji, etc.

- Różnice w stosunku do przypadku 3D:
- wynikające z różnej, w zależności od wymiaru d , gęstości stanów
 - różnych, w szczególności także takich, które nie występowały w układach 3D mechanizmów rozpraszania nośników

Tensor przewodnictwa

Układy niskowymiarowe:
 W układach o różnej wymiarowości przy liczeniu prawdopodobieństwa rozpraszania (co doprowadziło nas w przypadku 3D do wyrażenia na czas relaksacji) trzeba teraz: wziąć gęstość stanów właściwą dla wymiarowości problemu policzyć prawdopodobieństwo rozpraszania z właściwymi funkcjami falowymi całkowania dokonać w przestrzeni **d-wymiarowej**

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{zd} = -\rho(k) \frac{\hbar}{m^*(k)} \int_{SB} \delta(k - k') \Theta(k, \theta) \vec{X}(E) \cdot (k - k') d^3k'$$

(W.13, slajd ok. 35)

przy takim samym potencjale rozpraszającym w układach o różnej wymiarowości czasy relaksacji będą w inny sposób zależały od energii.

Tensor przewodnictwa

Układy niskowymiarowe:

przy takim samym potencjale rozpraszającym w układach o różnej wymiarowości czasu relaksacji będą w inny sposób zależały od energii.

Przy liczeniu wartości średnich funkcji $A(E)$ zależnych od energii, ze względu na wymiar przestrzeni $d = 1, 2, 3$ w której całkujemy będziemy mieli:

$$\langle \tilde{A}(E) \rangle_d = \frac{\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty A(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^d(E) dE}{\frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) k^d(E) dE}$$

Przy obniżeniu wymiarowości układu pojawiają się nieciągłości gęstości stanów, rośnie gęstość stanów na krawędzi podpasma \Rightarrow w 1D prawdopodobieństwo rozproszenia może mieć osobliwość.

Przy obniżaniu wymiarowości układu dramatycznie zmniejsza się liczba początkowych i końcowych stanów elektronowych w rozpraszaniu – w 1D w obrębie danego podpasma rozpraszanie elastyczne może prowadzić tylko do stanów z $k' = \pm k$ (do przodu albo do tyłu)

Różnice w ekranowaniu – potencjały są 3D, ekranowanie zaś odbywa się w obszarach d -wymiarowych

M. Baj.

2013-06-02

81

Zjawiska termoelektryczne

Siła termoelektryczna

gradient temperatury i pole elektryczne, bez pola magnetycznego

funkcja rozkładu *musi* zależeć od położenia (gradient temperatury!), od położenia będzie zależeć potencjał chemiczny

Równanie Boltzmanna

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{\hbar} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{k}} f + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Pomijamy f_1 w czlonie $\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f = \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} (f_0 + f_1) \approx \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_0$, podobnie $\nabla_{\vec{k}} f \approx \nabla_{\vec{k}} f_0$

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_0 + \frac{1}{\hbar} q \vec{E} \cdot \nabla_{\vec{k}} f_0 + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

człon dyfuzyjny – zawiera gradient f_0 po współrzędnych przestrzennych

$$\nabla_{\vec{r}} f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial T} \nabla_{\vec{r}} T$$

f_0 zależy od temperatury poprzez zależność explicite od T oraz poprzez zależność poziomu Fermiego ξ od T :

$$f_0 = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - \xi(T)}{k_B T}}}$$

2013-06-02

82

Zjawiska termoelektryczne

Siła termoelektryczna

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_0 + \frac{1}{\hbar} q \vec{E} \cdot \nabla_{\vec{k}} f_0 + \frac{f_1}{\tau(E)} = 0$$

człon dyfuzyjny – zawiera gradient f_0 po współrzędnych przestrzennych

$$\nabla_{\vec{r}} f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial T} \nabla_{\vec{r}} T$$

Wprowadzamy zmienną $\zeta = \frac{E - \xi(T)}{k_B T}$, wtedy

$$\frac{\partial f_0}{\partial T} = \frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \left(-\frac{E - \xi(T)}{k_B T^2} - \frac{1}{k_B T} \frac{d\xi}{dT} \right) = \frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \left(-\frac{E - \xi(T)}{T} - \frac{d\xi}{dT} \right)$$

Człon polowy

$$\frac{1}{\hbar} q \vec{E} \cdot \nabla_{\vec{k}} f_0 = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \nabla_{\vec{k}} E \cdot q \vec{E} = q \left(\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{v} \cdot \vec{E}$$

stąd otrzymujemy rozwiązanie na funkcję f_1 :

$$f_1 = \tau \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{v} \cdot \left[q \vec{E} - \frac{E - \xi(T)}{T} \nabla_{\vec{r}} T - \frac{d\xi}{dT} \nabla_{\vec{r}} T \right]$$

$$\vec{j} = \int_{SB} q \vec{v} \cdot f_1 \cdot \rho(\vec{k}) d^3 k = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3$$

2013-06-02

83

Zjawiska termoelektryczne

Siła termoelektryczna

$$f_1 = \tau \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{v} \cdot \left[q \vec{E} - \frac{E - \xi(T)}{T} \nabla_{\vec{r}} T - \frac{d\xi}{dT} \nabla_{\vec{r}} T \right]$$

$$\vec{j} = \int_{SB} q \vec{v} \cdot f_1 \cdot \rho(\vec{k}) d^3 k = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3$$

\vec{j}_1 już policzyliśmy:

$$\vec{j}_1 = \frac{e^2 n(\tau)}{m^*} \vec{E}$$

Dokładnie tak samo możemy postąpić z \vec{j}_2 (tym razem wprowadzając układ współrzędnych sferycznych z osią biegunową skierowaną wzdłuż wektora gradientu temperatury):

$$\vec{j}_2 = -\frac{qn k_B}{m^*} [(\epsilon \tau) - \eta(\tau)] \cdot \nabla_{\vec{r}} T$$

$$\epsilon = E/k_B T, \quad \eta = \xi/k_B T$$

W czlonie z \vec{j}_3 wykorzystujemy $\frac{d\xi}{dT} \nabla_{\vec{r}} T = \nabla_{\vec{r}} \xi$

$$\vec{j}_3 = -\frac{qn(\tau)}{m^*} \nabla_{\vec{r}} \xi$$

2013-06-02

84

Zjawiska termoelektryczne

Siła termoelektryczna

$$f_1 = \tau \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \vec{v} \cdot \left[q\vec{\mathcal{E}} - \frac{E - \xi(T)}{T} \nabla_{\vec{r}} T - \frac{d\xi}{dT} \nabla_{\vec{r}} T \right]$$

$$\vec{j} = \int q\vec{v} \cdot f_1 \cdot \rho(\vec{k}) d^3k = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3$$

$$\vec{j} = \frac{e^2 n^{SB}}{m^*} \left[\vec{\mathcal{E}} - \frac{k_B}{q} \left[\frac{\langle \varepsilon \tau \rangle}{\langle \tau \rangle} - \eta \right] \cdot \nabla_{\vec{r}} T - \frac{1}{q} \nabla_{\vec{r}} \xi \right]$$

jeśli mierzymy pojawiającą się na końcach próbki różnicę potencjałów przy braku przepływu prądu, to $j = 0$:

$$\vec{\mathcal{E}} - \frac{k_B}{q} \left[\frac{\langle \varepsilon \tau \rangle}{\langle \tau \rangle} - \eta \right] \cdot \nabla_{\vec{r}} T - \frac{1}{q} \nabla_{\vec{r}} \xi = 0$$

zjawisko występowania pola elektrycznego w materiale, wskutek występowania gradientu temperatury nazywa się zjawiskiem Seebecka (siłą termoelektryczną).

Natężenie pola elektrycznego w powyższym wzorze nie jest wielkością, którą się bezpośrednio mierzy poprzez dołączenie 2 kontaktów umieszczonych na próbce wzdłuż gradientu temperatury i zmierzenie napięcia elektrycznego między nimi!