Mechanika teoretyczna

Wykład 10

Zwieńczeniem mechaniki lagranżowskiej niech będzie słynne:

Twierdzenie Emmy Noether

Zacznijmy od rzeczy oczywistej:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\dot{q}(t),t)\mathrm{d}t = \int_{t^*_1}^{t^*_2} L(q(q^*(t^*)),\dot{q}(q^*(t^*),\dot{q}^*(t^*)),t(t^*))\frac{\mathrm{d}t(t^*)}{\mathrm{d}t^*}\mathrm{d}t^* =$$

$$\equiv \int_{t^*_1}^{t^*_2} L^*(q^*(t^*),\frac{\mathrm{d}q^*(t^*)}{\mathrm{d}t^*},t^*)\mathrm{d}t^* \qquad (10.1)$$

Dowolna zamiana zmiennych, **w tym zmiennej niezależnej(!)**, jeśli tylko działanie przeliczone jest zgodnie z zasadą zamiany zmiennych, tak jak wyżej, prowadzi do równoważnego sformułowania (w nowych zmiennych) , poprzez zasadę wariacyjną, tego samego ruchu. Wyrażenie podcałkowe jest nowym lagranżianem. Przy zmianie czasu, jest on nawet numerycznie inny od starego, a **z reguły** jest on **inny** jako czysta funkcja. Np

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)$$

Nowa forma kwadratowa ma **zmienne** współczynniki, gdy stara miała stałe! To wszystko wiemy!

Czasami,
nowy lagranżian jest identyczny ze starym.

Zamiana zmiennych (ewentualnie łącznie z czasem, albo samego czasu) nazywa się wtedy:

Symetrią

Typowymi symetriami **uniwersalnymi** będą zmiany współrzędnych i czasu związane ze zmianą inercjalnego układu odniesienia. Wszak nowy obserwator, przystępując do zbadania, na przykład, molekuły wodoru, czy zachowania bąka w polu magnetycznym, wypisze **formę lagranżianu** taką, jaką poznał na wykładach mechaniki, niezależnie od tego czy zrobi to dzisiaj na Ziemi (jakoś tam pędzącej wokół Słońca), czy za pół roku, gdy prędkość Ziemi zmieni się o 60 km/sekundę, czy może w laboratorium kosmicznym, czy na płynącym statku, o którym opinię wyrażał już Galileusz.

Konkretne układy mogą mieć wiele innych symetrii, na przykład bąk symetryczny.
Tam zamiana $\psi \rightarrow \psi^{*} = \psi + \alpha$ nie zmieni w lagranżianie żadnych współczynników.

Przypadek symetrii oznacza, iż we wzorze (10.1) należy **pominąć gwiazdkę przy nowym lagranżianie.** Innymi słowy

$$L^* = L$$

To oznacza, że zamiana zmiennych

$$q(t) \to q^*(t^*) = q(t) + \Delta q(q,t)\ ,\ t \to t^* = t + \Delta t(q,t)$$

jest symetrią .

Symetrie tworzą grupę. Dla grup ciągłych wszystkie konsekwencje symetrii zawarte są już w konsekwencjach przekształceń infinitezymalnych. Dlatego $\Delta q \text{ i } \Delta t$ będę traktował jako małe i pomijał **iloczyny** podobnych wielkości.

Przyrównując do siebie pierwszy i ostatni człon w równaniu (10.1) , z uwzględnieniem tego, że $L^* = L$, dostaję tożsamość wyrażającą symetrię przekształcenia:

$$0 \equiv \int_{t^*_1}^{t^*_2} L\left(q^*(t^*), \frac{\mathrm{d}q^*(t^*)}{\mathrm{d}t^*}, t^*\right)\mathrm{d}t^* - \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\mathrm{d}t \qquad (10.2)$$

Powyższa różnica nosi nazwę **wariacji z wariacją czasu.** Dla symetrii znika ona **tożsamościowo.** I to niezależnie od warunków brzegowych. I niezależnie od tego, czy są spełnione, czy nie jakieś równania ruchu.

Uzyskanie konsekwencji powyższej tożsamości wymaga trochę pracy. Trzeba w pierwszej całce wrócić do starej zmiennej *t*. Zacznijmy od przekształcenia $q^{*}(t^{*})$. Zgodnie z definicją przekształcenia mamy pierwszą równość:

$$q^{*}(t^{*}) = q(t) + \Delta q(q,t) = q^{*}(t+\Delta t(t)) \cong q^{*}(t) + \dot{q}^{*}(t)\Delta t(t) =$$
$$\cong q(t) + \delta q(t) + \dot{q}(t)\Delta t(t) \qquad (10.3)$$

Teraz wyrażamy nową pochodną przez starą:

$$\frac{\mathrm{d}q^{*}(t^{*})}{\mathrm{d}t^{*}} = \frac{\mathrm{d}q^{*}(t+\Delta t(t))}{\frac{\mathrm{d}(t+\Delta t(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t} = (1-\frac{\mathrm{d}\Delta t(t)}{\mathrm{d}t})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q(t)+\delta q(t)+\dot{q}\Delta t(t)) =$$

$$= \dot{q}(t) + \delta\dot{q}(t) + \ddot{q}\Delta t(t) + \dot{q}\frac{\mathrm{d}\Delta t(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Delta t(t)}{\mathrm{d}t}\dot{q} =$$
$$= \dot{q}(t) + \delta\dot{q}(t) + \ddot{q}\Delta t(t) \qquad (10.4)$$

Wracamy do równania (10.2) z wykorzystaniem obliczonych przyrostów zmiennych „gwiazdkowanych" i z zamienioną zmienną niezależną :

$$0 \equiv \int_{t^*_1}^{t^*_2} L\left(q^*(t^*), \frac{\mathrm{d}q^*(t^*)}{\mathrm{d}t^*}, t^*\right)\mathrm{d}t^* - \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \delta q(t) + \dot{q}(t)\Delta t(t), \dot{q}(t) + \delta\dot{q}(t) + \ddot{q}\Delta t(t), t + \Delta t(t))\left(1 + \frac{\mathrm{d}\Delta t(t)}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\,\mathrm{d}t \quad =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(\delta q(t) + \dot{q}(t)\Delta t(t)) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\delta\dot{q}(t) + \ddot{q}\Delta t(t)) + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t(t) + L\frac{\mathrm{d}\Delta t(t)}{\mathrm{d}t} \right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q(t) + L\Delta t\right) \right)\mathrm{d}t \qquad (10.5)$$

Jeśli trajektoria jest **ekstremalą**, czyli, zwyczajnie, w czasie ruchu rzeczywistego, pierwsza grupa wyrazów znika na mocy równań Lagrange'a. Udowodniona tożsamość pociąga więc za sobą **stałość w czasie drugiego nawiasu!! To jest właśnie twierdzenie Noether.**

$$\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) + L\Delta t = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Delta q_i(q,t) - \dot{q}_i \Delta t) + L\Delta t = \mathrm{const} \qquad (10.6)$$

Liczba niezależnych transformacji infinitezymalnych, równa liczbie parametrów grupy (Liego) nazywa się wymiarem grupy. Praw zachowania do których prowadzi tw. Noether jest więc tyle, ile wynosi wymiar grupy symetrii.

Zbadajmy najprostszy przykład. Translacja w czasie:

$$t = t^* + a, \quad \Delta t = -a$$

$$q^*(t^*) = q(t)$$

Dane zdarzenie numerujemy nowym czasem, przesuniętym o *a* , ale tą samą wartością wszystkich współrzędnych uogólnionych. Będzie to przekształcenie symetrii, o ile *L* nie zależy jawnie od czasu. Zachowana wielkość , to oczywiście energia:

$$\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Delta q_i(q,t) - \dot{q}_i \Delta t) + L\Delta t = \mathrm{const} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (0 + \dot{q}_i a) - La = aE$$

Kolejny przykład. Translacja w przestrzeni :

$$\Delta t = 0$$

$$\Delta x_i^A = -a_i$$

Przekształcenie będzie symetrią działania, jeśli w lagranżianie wystąpią wyłącznie różnice współrzędnych ciał (a dla pojedynczego ciała, tylko gdy jest swobodne)

$$\text{const} = -\sum_{A=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^A} a_i = -\vec{a} \sum_{A=1}^{f} \vec{p}^{\,A}$$

Ze względu na dowolność wektora translacji, jest to równoważne stałości : $\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^A}$,
czyli pełnemu pędowi układu.

Przy obrotach (infinitezymalnych) wokół początku układu z „wektorem obrotu” $\vec{n}$

$$\Delta t = 0$$

$$\Delta x_i^A = -\varepsilon_{ijk} n_j x_k$$

$$\text{const} = -\sum_{A=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^A} \varepsilon_{ijk} n_j x_k^A = -\vec{n} \sum_{A=1}^{f} \vec{r}^{\,A} \times \vec{p}$$

Obroty są symetrią, gdy lagranżian zbudowany jest ze skalarów. Jest to ogólniejszy przypadek niż ten, który zakładaliśmy we wcześniejszych dowodach. Np. taki, dość akademicki przykład potencjału trójciałowego:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$$

nie spełnia ani zasady działania i przeciwdziałania, ani siły nie są centralne, a jednak prowadzi i do zachowania całkowitego pędu i do zachowania całkowitego momentu pędu. Potencjały trójciałowe okazują się niezbędne do fenomenologicznego opisu sił jądrowych.

Są jeszcze 3 transformacje Galileusza. Co z nimi?

$$t^* = t$$

$$\vec{r}^* = \vec{r} - \vec{V}t$$

$$\dot{\vec{r}}^* = \dot{\vec{r}} - \vec{V}$$

Przy transformacji Galileusza potencjały zależne od różnic współrzędnych pozostają niezmiennicze, także dla translacji zależnej od czasu, jak teraz. Ale **energia kinetyczna nie jest niezmiennicza!!**

$$\frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2 = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}^* + \vec{V})^2 = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}^*)^2 + m\vec{V} \cdot \dot{\vec{r}}^* + \frac{m}{2}(\vec{V})^2$$

Dla transformacji **infinitezymalnej** można zapomnieć o członie z kwadratem prędkości, ale i tak coś zostaje:

$$\frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2 = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}^* + \vec{V})^2 \cong \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}^*)^2 + m\vec{V}\cdot\dot{\vec{r}}^*$$

Napotykamy się tu na (paradoksalny) fakt, że teoria nierelatywistyczna jest **bardziej skomplikowana** niż teoria relatywistyczna. Pamiętamy, że swobodna część działania w teorii relatywistycznej:

$$-mc^2\int\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t = -mc^2\int\sqrt{\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}x^2}{c^2}}$$

jest w sposób oczywisty niezmiennicza przy zmianie prędkości układu odniesienia. Prześledźmy co się dzieje złego przy przejściu nierelatywistycznym:

$$-mc^2\int\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t = -mc^2\int\sqrt{1-\frac{v^{*2}}{c^2}}\mathrm{d}t^* \cong \int\left(-mc^2+\frac{v^{*2}}{2}\right)\mathrm{d}t^* \cong \int\left(-mc^2+\frac{mv^2}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Czy wolno teraz położyć $t^* = t$? **Oto jest pytanie!**

Dla infinitezymalnej transformacji Lorentza zachodzi:

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t^* + \frac{\vec{V}}{c^2}\mathrm{d}\vec{r}^* = (1 + \frac{\vec{V}\cdot\vec{v}^*}{c^2})\mathrm{d}t^* \cong (1 + \frac{\vec{V}\cdot\vec{v}}{c^2})\mathrm{d}t^*$$

W granicy $c^2 \longrightarrow \infty$ **wydaje się, że istotnie można zastąpić d*t* przez d*t****. Ale uwaga!!! Niedbale traktowany człon mc^2 **wybucha!** Przejście do granicy nierelatywistycznej nie jest takie proste! Cud, że się udaje! Otóż małe człony w d*t* w iloczynie z mc^2 dają coś skończonego!

$$\int\left(-mc^2 + \frac{mv^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \int\left(-mc^2 + \frac{mv^2}{2}\right)(1 + \frac{\vec{V}\cdot\vec{v}}{c^2})\mathrm{d}t^* \cong$$

$$\cong \int\left(-mc^2 + \frac{mv^2}{2} - mc^2\frac{\vec{V}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)\mathrm{d}t^* \cong \int\left(-mc^2 + \frac{v^{*2}}{2}\right)\mathrm{d}t^*$$

Chcąc skorzystać z twierdzenia Noether dla uzyskania **nierelatywistycznego prawa zachowania** wydaje się, że muszę uzupełnić lagranżian o człon $-mc^2$, a także przyjąć transformację czasu!

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t^* + \frac{\vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{c^2}, \quad t = t^* + \frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{c^2}, \quad \Delta t = -\frac{\vec{V}\cdot\vec{r}}{c^2}, \quad \Delta\vec{r} = -\vec{V}t$$

$$\sum_{A=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^A}(\Delta x_i^A(x,t)-\dot{x}_i^A\Delta t)+L\Delta t=\mathrm{const}=\sum_{A=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^A}(-V_i t)+(-m^A c^2)\frac{-\vec{V}\cdot\vec{r}^{\,A}}{c^2}=$$

$$=M\vec{V}\left(\vec{R}_{CM}-\vec{P}t/M\right)$$

Otrzymujemy ostatnie 3 całki ruchu związane z symetriami grupy Galileusza. Galileusza **podpartego(!) Lorentzem!!!!** Współczynnikami przy parametrach grupy są:

$$\sum_A m^A\vec{r}^{\,A}-t\sum_A m^A\dot{\vec{r}}^{\,A}=M_{\mathrm{total}}\vec{R}_{0CM}$$

Sens fizyczny tej stałej jest jasny. Jest to (mnożony przez masę) wektor położenia środka masy w chwili *t* = 0.
Jest to dość rzadki przypadek całki ruchu **jawnie zależnej od czasu.**

Podobnego „wsparcia” ze strony Lorentza wymaga funkcja falowa spełniająca równanie Schroedingera. Dla cząstki swobodnej:

$$\Psi(\vec{r},t) = e^{-iEt/\hbar} \cdot e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

(Litera *E* oznacza energię nierelatywistyczną $mv^2/2$.) Jeśli „beztrosko” wyrazimy czas i położenie przez czas i położenie w innym układzie inercjalnym, dostaniemy

$$\Psi^*(\vec{r}^*,t^*) \equiv \Psi(\vec{r},t) = e^{-iEt^*/\hbar} \cdot e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}^*+\vec{V}t^*)/\hbar} = e^{-i(E-\vec{p}\cdot\vec{V})t^*/\hbar} \cdot e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}^*/\hbar}$$

W układzie, w którym „gonimy” za cząstką, ma ona mniejszą energię, i to się zgadza, ale co z pędem????? Ma taki sam???????? Bzdura!!!!!!!!!
Zupełnie co innego dostaniemy, gdy pamiętamy o szczególnej transformacji Lorentza. Uwzględniając mc^2 w energii i poprawkę w prawie transformacji czasu, dostanę:

$$\Psi(\vec{r},t) = e^{-imc^2t/\hbar} \cdot e^{-iEt/\hbar} \cdot e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

$$\Psi^*(\vec{r}^*,t^*) \equiv \Psi(\vec{r},t) = e^{-imc^2(t^*+\vec{V}\cdot\vec{r}^*/c^2)/\hbar} \cdot e^{-iEt^*/\hbar} \cdot e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}^*+\vec{V}t^*)/\hbar} =$$

$$= e^{-imc^2t^*/\hbar} \cdot e^{-i(E-\vec{p}\cdot\vec{V})t^*/\hbar} \cdot e^{i(\vec{p}-m\vec{V})\cdot\vec{r}^*/\hbar}$$

Współczynniki mnożące czas i położenie zmieniły się. To zupełnie naturalne. Wszak nowy obserwator będzie miał do czynienia z cząstką powolniejszą, a więc i o mniejszej energii i o mniejszym pędzie. Oznaczając :

$$\vec{p}^{\,*} = m\vec{v}^{\,*} = m(\vec{v} - \vec{V})$$

$$E^{*} = mv^{2}/2 - m\vec{v}\cdot\vec{V} \cong \frac{1}{2}m(\vec{v}-\vec{V})^{2} = mv^{*2}/2$$

mamy ostatecznie:

$$\Psi^{*}(\vec{r}^{\,*}, t^{*}) = e^{-imc^{2}t^{*}/\hbar} \cdot e^{-i(E-\vec{p}\cdot\vec{V})t^{*}/\hbar} \cdot e^{i(\vec{p}-m\vec{V})\cdot\vec{r}^{\,*}/\hbar} =$$

$$= e^{-imc^{2}t^{*}/\hbar} \cdot e^{-iE^{*}t^{*}/\hbar} \cdot e^{i\vec{p}^{\,*}\cdot\vec{r}^{\,*}/\hbar}$$

Pewien niedosyt może budzić konieczność ograniczenia się do infinitezymalnych prędkości *V,* małych nie tylko w stosunku do *c* , ale i do *v*. Można to ograniczenie łatwo pokonać zauważając, że w wyrażeniu na czas jest jeszcze jeden człon zawierający $1/c^2$, pochodzący z pierwiastka w mianowniku transformacji Lorentza.

Dokładniej licząc: $t = t^{*}(1 + \frac{V^{2}}{2c^{2}}) + \vec{V}\cdot\vec{r}^{\,*}/c^{2}$, co by dało akurat $E^{*} = mv^{*\,2}/2$

Fizycy przeszłości poradzili sobie z powiązaniem całki środka masy z symetrią Galileusza bez odwoływania się do szczególnej teorii względności.
Niezmienniczość działania względem wariacji z wariacją czasu przy transformacji symetrii jest **warunkiem dostatecznym niezmienniczości równań ruchu, ale nie koniecznym.**
Jeśli lagranżian „z gwiazdką”, tj. po zamianie zmiennych jest różny od wyjściowego (co do **formy!!)** ale różnica ogranicza się do **pochodnej zupełnej** dowolnej funkcji położeń i czasu, to otrzymane z niego równania są **identyczne ze starymi.**
Część kinetyczna lagranżianu, przy transformacji Galileusza, „psuje się” właśnie o pochodną zupełną

$$\frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2 = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}^* + \vec{V})^2 = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}^*)^2 + m\vec{V}\cdot\dot{\vec{r}}^* + \frac{m}{2}(\vec{V})^2 =$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}^*)^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{V}\cdot\vec{r} + \frac{m}{2}(\vec{V})^2 t\right) \cong \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}^*)^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\vec{V}\cdot\vec{r}$$

Wariacja działania we wzorze (10.2), a w konsekwencji i we wzorze (10.5) nie będzie zerem, a całką (z minusem) owej pochodnej zupełnej. Dlatego całką ruchu będzie

$$\sum_{A=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^A} \Delta x_i^A(x,t) + \sum_{A=1}^{f} m^A\,\vec{V}\cdot\vec{r}^{\,A} = \mathrm{const}$$

Granica nierelatywistyczna **psuje niezmienniczość działania** jednak na tyle miękko, by nie zepsuć ani niezmienniczości równań, ani nie zlikwidować całki ruchu. Cierpi elegancja.

Nie należy mylić całki ruchu wynikającej z niezmienniczości Galileusza z całką pędu. Niemożność zmiany położenia środka masy działaniami wewnętrznymi nie jest konsekwencją samej zasady zachowania pędu.
Najwyraźniej tę różnicę można dostrzec przez porównanie zasady zachowania pędu z zasadą zachowania momentu pędu. Podobnie jak nie można samoistnie się „rozpędzić" od stanu spoczynku, tak nie można się (na trwałe) „rozkręcić". O ile jednak nie można także doprowadzić do globalnego przemieszczenia wszystkich elementów układu zamkniętego początkowo spoczywającego, to można doprowadzić do globalnego obrócenia (wokół środka masy) w przestrzeni wszystkich elementów układu. W końcowym, obróconym stanie, wszystkie elementy są ponownie nieruchome, a wzajemne położenia niezmienione! W fazie przejściowej różne elementy miały różne prędkości, zmieniały się przejściowo wzajemne odległości, ale i pęd i moment pędu były **stale równe zeru.**
Doprowadzić do stanu końcowego **obróconego** można dlatego, że nie istnieje dla obrotów analog prawa zachowania położenia środka masy. Kot może spadać na 4 łapy!