

Mechanika teoretyczna

Wykład 13

$$p_i = \frac{\partial L(v, q, t)}{\partial v_i} \Rightarrow v = v(p, q, t)$$

$$H(p, q, t) = pv(p, q, t) - L(v(p, q, t), q, t)$$

$$v_i(p, q, t) = \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_i}$$

oraz $\frac{\partial L(v, q, t)}{\partial q} = -\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q}$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i}$$

$$L(v) = \max(pv - H(p)) \Big|_{\text{wzgl } p}$$

Zasada wariacyjna w przestrzeni fazowej

Jak widzieliśmy, lagranżian – wchodzący do podstawowej zasady wariacyjnej mechaniki, - sam jest obiektem „stacjonarnym”. Daje to owocną możliwość spojrzenia na zasadę wariacyjną dotychczas poznaną (zwaną zasadą Hamiltona) jako na konsekwencję pewnej **bogatszej** zasady wariacyjnej.

Tę bogatszą zasadę można rozwiązywać wykonując pierwszy etap – prowadzący do zasady Hamiltona z lagranżianem, ale to **oczywiście** żaden powód do radości. Celowość rozszerzenia zasady wariacyjnej Hamiltona bierze się stąd, że można ją rozwiązywać nowymi sposobami „omijającymi” etap równań Lagrange’a.

$$0 = \delta_q \int_{t_1 A}^{t_2 B} L(\dot{q}(t), q(t)) dt = \delta_q \int_{t_1 A}^{t_2 B} \max_p (p\dot{q} - H(p, q)) dt$$

$$0 = \delta_{qp} \int_{t_1 A}^{t_2 B} (p\dot{q} - H(p, q)) dt$$

Podkreślam, że p staje się funkcją prędkości dopiero po nałożeniu żądania ekstremalności.
W samym **nowym funkcjonał**:

$$I(q(t), p(t)) \equiv \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} (p\dot{q} - H(p, q)) dt$$

zależnym od 2f funkcji, zmienne $q(t)$ i $p(t)$ są równorzędne, nijak *a priori* nie powiązane!

Zgodnie z konstrukcją funkcjonał ten musi mieć znikającą wariację względem wariacji p (niczym nie skrępowanych) i znikającą wariację względem wariacji q , **pod warunkiem**, że wariacje współrzędnych znikają na początku i na końcu.

Banalnym jest obliczyć wariację i przyrównać ją do zera:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} (p\dot{q} - H(p, q)) dt = \\ &= \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} (\dot{q} \delta p + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q) dt \end{aligned}$$

W odróżnieniu od ogólnego przypadku zasady wariacyjnej z funkcjonałem zawierającym pod całką pochodne czasowe **wszystkich funkcji** będących obiektem poszukiwania, teraz jest nieco prościej, bo pochodne **połowy funkcji** będących zmiennymi niezależnymi od których zależy funkcjonał, nie występują! Po prostu nie ma pochodnych pędu: $\dot{p}$

Dlatego w dalszej drodze do uzyskania równań „Eulera Lagrange’a” przez części musimy scałkować tylko jeden człon!

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} (\dot{q} \delta p + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q) dt = \\
 &= p \delta q \Big|_1^2 + \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} (\dot{q} \delta p - \dot{p} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q) dt = \\
 &= \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} \left(\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right) dt
 \end{aligned}$$

Dostajemy równania Hamiltona, ale nas to nie dziwi. Dowodzi raczej, iż nie pomyliliśmy się wyprowadzając równania Hamiltona z równań Lagrange'a poprzednio, ani teraz nie popełniliśmy błędu **formułując** nową zasadę wariacyjną.

Trzeba podkreślić, że dwie zasady wariacyjne są **różne**. Operują wszak funkcjonalami w różnych przestrzeniach. One tylko mają wspólne rozwiązanie.

Warto uświadomić sobie, iż w każdym problemie wariacyjnym (czy z funkcjonalami, czy zwykłymi funkcjami wielu zmiennych), jeśli wykorzystam część informacji (równań) wyznaczających punkt stacjonarny i potraktuję je jako **więzy** to funkcjonal wyjściowy ograniczony do powierzchni więzów, wśród swoich punktów stacjonarnych **ma też punkt stacjonarny funkcjonału oryginalnego**. Nie zgubimy go rozwiązując problem mniej wymiarowy!

Zasada wariacyjna w przestrzeni fazowej otwiera nowe horyzonty.

Zajmijmy się sytuacją w której obowiązuje zasada zachowania energii. Jak tę informację o rozwiązaniu problemu ruchu wykorzystać do sformułowania **nowej zasady wariacyjnej** „konsumującej” informację o tym, że energia jest stała?

Czy warunek stałości energii można użyć do zredukowania wymiaru problemu wariacyjnego zwykłej zasady najmniejszego działania? Weźmy cząstkę swobodną!

$$0 = \delta \int_{t_1 \vec{r}_1}^{t_2 \vec{r}_2} \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 dt$$

Jeśli energia ma być stała, to i prędkość ma być stała. Wyginać można tor. Ruchy porównawcze „na powierzchni więzów” to ruchy z ustaloną prędkością. Ale ruch porównawczy (względem linii prostej) musi przebyć dłuższą drogę i **nie zdąży dotrzeć do punktu 2 w czasie t_2** .

Startując z zasady wariacyjnej w przestrzeni fazowej, wszystko idzie jak z płatka!

$$0 = \delta \int_{t_1 \vec{r}_1}^{t_2 \vec{r}_2} \left(\vec{p} \dot{\vec{r}} - \frac{p^2}{2m} \right) dt = \delta \left(\int_{t_1 \vec{r}_1}^{t_2 \vec{r}_2} \vec{p} d\vec{r} - E(t_2 - t_1) \right)$$

$$\frac{p^2}{2m} = E$$

Funkcjonał do wariowania przechodzi – dzięki informacji, że trajektorie porównawcze leżą na powierzchni stałej energii – istotną **metamorfozę**.

Po pierwsze, **znika wariacja drugiego członu** bo i E i $t_2 - t_1$ są ustalone!

Wprowadzając w każdym punkcie dowolnej trajektorii jednostkowy wektor $\vec{n}(\vec{r})$

mogę spełnić „warunek więzów” $\vec{p}^2 / 2m = E$ przyjmując:

$$\vec{p} = \sqrt{2mE} \vec{n}(\vec{r})$$

otrzymuję:

$$0 = \delta \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \sqrt{2mE} \vec{n}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Z funkcyjonału wypadła zależność od czasu!

Sam funkcyjonał w powyższej odsłonie nie zawiera żadnej konkretnej zmiennej niezależnej.

Dla jego obliczenia potrzeba znać sam kształt toru i zależność wektora $\vec{n}(\vec{r})$ od miejsca na tym torze.

Chcąc zredukować problem do „zwyčajnego” zadania wariacyjnego, mogę zdecydować się opisywać tor dwiema funkcjami $z(x)$, $y(x)$ i wektor n też dwiema $n_x(x)$, $n_y(x)$

(Trzecia składowa wynika z warunku unormowania)

Formalnie, jest to zagadnienie wariacyjne dla 4 funkcji jednej zmiennej.

W rzeczywistości, zarówno w tym banalnym przykładzie, jak i w ogólności, niezwykle łatwo wyeliminować wektor opisujący kierunek pędu.

Definiując wektor styczny do konkretnej trajektorii: $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{t} ds$

otrzymuję:

$$0 = \delta \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \sqrt{2mE} \vec{n}(\vec{r}) \vec{t}(\vec{r}) ds = \delta \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \sqrt{2mE} \cos(\vec{n}, \vec{t}) ds$$

Jeśli przy ustalonym kształcie trajektorii zastanawiam się jaki kierunek $\vec{n}(\vec{r})$ ekstremalizuje cosinus kąta, to odpowiedź jest **oczywista**. To musi być kąt 0 (albo 180). Nie jest to wynik zaskakujący! Gdy nie robimy użytku z zasady zachowania energii, zasada wariacyjna mówi (między innymi – dla takiej cząstki jak nasza) że pęd jest proporcjonalny do prędkości, czyli styczny do toru. Tutaj analogicznie. Ostatecznie dostajemy:

$$0 = \delta \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \sqrt{2mE} ds$$

A jak to jest w polu sił. Wszystko mamy gotowe. W całym wywodzie zmieni się tylko „warunek więzów”:

$$\vec{p}^2 / 2m + V(\vec{r}) = E$$

i jego rozwiązanie:

$$\vec{p} = \sqrt{2m(E - V(r))} \vec{n}(\vec{r})$$

Ustawianie kierunku $\vec{n}(\vec{r})$ względem $\vec{t}$ wymaga tego samego, czyli równoległości, więc ostatecznie:

$$0 = \delta \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \sqrt{2m(E - V(\vec{r}))} \, ds$$

To znana Wam już Zasada Jacobiego. Rok temu byłem w stanie ją udowodnić w ograniczonym zakresie, tj dla problemów dwuwymiarowych z *extra* symetrią (czyli dodatkową, poza energią jawnie znaną całką ruchu). Teraz mamy wynik ogólniejszy.

Nadal dotyczy on przypadku dość szczególnego, w którym warunek więzów dało się łatwo rozwiązać, a następnie równie łatwo spełnić warunek stacjonarności dla wektora $\vec{n}(\vec{r})$

Za chwilę przedstawię uogólnienie daleko idące.

Nim to zrobię zacytuję uwagę z podręcznika mechaniki wydanego w serii Biblioteki Matematycznej

C. Jacobi w wykładach dynamiki z lat 1842-1843 (C. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik, Berlin 1866*) wyraził opinię: „We wszystkich niemal podręcznikach, nawet w tych najlepszych, zasada ta jest przedstawiona w taki sposób, że nie da się jej zrozumieć”. Nie śmiem tu naruszać tej tradycji.

Pouczający „dowód” zasady Maupertuis znajduje się w § 44 cytowanego już podręcznika mechaniki Landaua i Lifszica.

W.I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*.

Aby docenić sens powyższych uwag, radzę zajrzeć do któregośkolwiek podręcznika mechaniki. Nie dość, że wywody są skomplikowane, to nie widać jak można by je uogólnić poza przypadek hamiltonianu kwadratowego w prędkościach.

Wydaje mi się, że sposób wyprowadzenia Zasady Jacobiego jaki za chwilę poznacie, jest wolny od tych wad.

Nałożenie warunku $H(q, p) = E$ na zasadę wariacyjną

$$0 = \delta \int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} (p \dot{q} - H(p, q)) dt$$

proceedzi, niezaleŹnie od liczby stopni swobody i postaci hamiltonianu do podobnych uproszczeŹ jak w przypadku pojedynczej cząstki:

$$0 = \delta \left(\int_{t_1 q_1}^{t_2 q_2} \sum p_i dq_i - E(t_2 - t_1) \right) = \delta \int_{q_1}^{q_2} p_i dq_i$$

$$H(q, p) = E$$

Czas został wyeliminowany. Chodzi o znalezienie takiej krzywej w przestrzeni konfiguracyjnej łączącej ustalone punkty 1 i 2 i takich wartości pędów w każdym punkcie toru (uogólnionego), by **szalenie prosty funkcjonal** był stacjonarny względem dowolnych wariacji, czy to kształtu trajektorii, czy wartości pędów na danej trajektorii, czy i jednego i drugiego.

Bez warunku ubocznego funkcjonal jest za prosty, by mieć jakieś ekstremum. Jest wszak liniowy.

Zadanie jakie przed nami stoi, jest analogiczne do przejścia od zasady wariacyjnej z czasem w przestrzeni fazowej, do zasady Hamiltona, w której pędy zostały wyeliminowane. Eliminacja polegała na znalezieniu ekstremum względem pędów, co zostało osiągnięte zwykłym różniczkowaniem. Teraz jest warunek uboczny, trzeba użyć mnoŹników Lagrange'a.

Przedstawmy całkę wzdłuż toru jako sumę po małych fragmentach (wskaźniki numerujące stopnie swobody niech będą domyślne)

$$\int_{q_1}^{q_2} p dq = \sum_N p^N dq^N$$

$$H(q^N, p^N) = E$$

Wskaźnik N numeruje (w granicy coraz krótsze) segmenty toru w przestrzeni konfiguracyjnej. W przeciwieństwie do przyrostów położeń, które nie są niezależne, bo muszą sumować się do różnicy współrzędnych w punkcie 2 i 1, wszystkie kolejne pędy są **niezależne**. Mamy zmaksymalizować (przy ustalonych wartościach dq) sumę niezależnych zmiennych. Oznacza to maksymalizowanie kolejnych składników sumy.

Jakie jest maksimum $p_i^{(N)} dq_i^{(N)}$ (względem f wielkości p_i), (funkcji liniowej!!!) przy

warunku ubocznym $H(q^N, p^N) = E$?

Dla każdego segmentu wprowadzamy **mnożnik Lagrange'a** λ^N i przyrównujemy do zera pochodną po pędzie wielkości

$$p_i^{(N)} dq_i^{(N)} - \lambda^N H(q^N, p^N)$$

Dostajemy następujący warunek na pędy:

$$dq_i^{(N)} = \lambda^N \frac{\partial H(q^N, p^N)}{\partial p_i^N}$$

Jest jasne, że mnożnik Lagrange'a jest wielkością malejącą do zera, gdy podział krzywej staje się coraz drobniejszy. Ale nie odegra to większej roli. Dzieląc przez λ^N , dostaję na pędy następujące równanie:

$$\frac{dq_i^{(N)}}{\lambda^N} = \frac{\partial H(q^N, p^N)}{\partial p_i^N}$$

Gdybyśmy na chwilę powrócili do pojedynczej cząstki we współrzędnych kartezjańskich, to prawa strona byłaby proporcjonalna do pędu, a to by znaczyło, że pęd (spełniający warunek stacjonarności) musi być równoległy do segmentu dq . Wszystko się zgadza!

Równanie powyższe **POTRAFIMY ROZWIĄZAĆ** jawnie! Jeśli znamy transformatę Legendre'a hamiltonianu, czyli lagranżian. No a my go znamy! Nawet lepiej niż hamiltonian!!!!

$$p_i = \left. \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_i} \right|_{v=\frac{dq}{\lambda}}$$

(Na ekstremali będzie oczywiście $\lambda=dt$ i pęd wyrazi się standardowo przez prędkości. Ale my nie jesteśmy na ekstremali. My badamy funkcjonal dla wszystkich zachowań porównawczych układu, by doprowadzić go do postaci przydatnej do wyznaczania orbit). Podobnie jak w przypadkach poprzednich wstawiamy powyższe pędy i do warunku ubocznego (co dodefiniowuje λ) i do funkcjonału:

$$\int p_i dq_i = \int \left. \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_i} \right|_{v=\frac{dq}{\lambda}} dq_i = \int \left. \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_i} v_i \right|_{v=\frac{dq}{\lambda}} \lambda$$

Może kogoś deprimować brak „różniczki” w powyższym wyrażeniu, ale pamiętamy, że λ jest wielkością infinitezymalną. Można też patrząc na całkę, myśleć o niej jeszcze jako o sumie po N .

Skoro nasze pędy są teraz wyrażone explicite przez lagranżian, to i warunek uboczny chcemy wyrazić przez lagranżian. Mamy

$$E = H(q, p) = \left(v_i \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_i} - L(q, v) \right) \Bigg|_{v=\frac{dq}{\lambda}}$$

Dalszy postęp w uzyskaniu zgrabnej, jawnej, postaci funkcjonału Jacobiego jest możliwy, gdy zawężymy, czyli skonkretyzujemy bardziej postać lagranżianu.

Największe znaczenie, w każdym razie w mechanice klasycznej, ma przypadek lagranżianu kwadratowego w prędkościach.

Przyjmijmy więc

$$L = \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q)$$

$$E = \left(v_i \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_i} - L(q, v) \right) \bigg|_{v = \frac{dq}{\lambda}} = a_{ij} \frac{dq_i}{\lambda} \frac{dq_j}{\lambda} + V$$

$$\begin{aligned} \int p_i dq_i &= \int \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_i} v_i \bigg|_{v = \frac{dq}{\lambda}} \lambda = \int 2a_{ij} \frac{dq_i}{\lambda} \frac{dq_j}{\lambda} \lambda = \\ &= \int \sqrt{2a_{ij} \frac{dq_i}{\lambda} \frac{dq_j}{\lambda}} \sqrt{2a_{ij} \frac{dq_i}{\lambda} \frac{dq_j}{\lambda}} \lambda = \int \sqrt{2a_{ij} \frac{dq_i}{\lambda} \frac{dq_j}{\lambda}} \sqrt{2a_{ij} dq_i dq_j} \\ &= \int \sqrt{2(E - V(q))} \sqrt{2a_{ij}(q) dq_i dq_j} \end{aligned}$$

Niewiele bardziej kłopotliwy jest przypadek, gdy lagranżian nie jest wprowadzie kwadratowy w prędkościach, ale istnieje pewna forma kwadratowa prędkości, która jest z kolei argumentem dowolnej funkcji.

$$Q(q, v) = \sum a_{ij}(q) v_i v_j$$

$$L = L(q, Q(q, v))$$

$$\begin{aligned} E &= \left(v_i \frac{\partial L(q, Q(q, v))}{\partial v_i} - L(q, Q(q, v)) \right) \bigg|_{v=\frac{dq}{\lambda}} \\ &= \left(2Q(q, v) \frac{\partial L(q, Q(q, v))}{\partial Q(q, v)} - L(q, Q(q, v)) \right) \bigg|_{v=\frac{dq}{\lambda}} = \\ &= 2Q_E \frac{\partial L(q, Q_E)}{\partial Q_E} - L(q, Q_E) \Rightarrow Q_E(q) = a_{ij}(q) \frac{dq_i}{\lambda} \frac{dq_j}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int p_i dq_i &= \int \frac{\partial L(q, Q)}{\partial v_i} v_i \bigg|_{v=\frac{dq}{\lambda}} \lambda = \int 2Q \frac{\partial L(q, Q)}{\partial Q} \lambda = \\
&= \int 2 \frac{\partial L(q, Q)}{\partial Q} \sqrt{Q} \sqrt{a_{ij} \frac{dq_i}{\lambda} \frac{dq_j}{\lambda}} \lambda = \int 2 \frac{\partial L(q, Q_E)}{\partial Q_E} \sqrt{Q_E(q)} \sqrt{a_{ij}(q) dq_i dq_j} \\
&\quad E = 2Q_E \frac{\partial L(q, Q_E)}{\partial Q} - L(q, Q_E)
\end{aligned}$$

Szkoda by było nie zastosować tego wyniku do ruchu w polu Szwarzschilda.

$$\begin{aligned}
L &= -mc^2 \sqrt{g_{00} - g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j / c^2} = -mc^2 \sqrt{g_{00} - Q / c^2} \\
E &= 2Q \frac{\partial L}{\partial Q} - L = \frac{mQ}{\sqrt{g_{00} - Q / c^2}} + mc^2 \sqrt{g_{00} - Q / c^2} = \frac{g_{00} mc^2}{\sqrt{g_{00} - Q / c^2}} = \\
&= \sqrt{g_{00}(q)} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} g_{ij} \frac{dq^i dq^j}{g_{00} dt^2}}}
\end{aligned}$$

Warto (na marginesie) zwrócić uwagę na dwie rzeczy. Po pierwsze, że prawo zachowania energii dla ciał próbnych w polu grawitacyjnym ma charakter **multiplikatywny** a nie addytywny. Nie ma sumy energii kinetycznej i potencjalnej! Jest natomiast **iloczyn** „zwykłej” energii szczególnej teorii względności i czynnika zmiany rytmu zegarów.

Druga ciekawostka polega na tym, że 2-ga prędkość kosmiczna jest formalnie dana takim wzorem jak u Newtona.

$$mc^2 = \sqrt{g_{00}(q)} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} g_{ij} \frac{dq^i dq^j}{g_{00} dt^2}}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{c^2} g_{ij} \frac{dq^i dq^j}{g_{00} dt^2} = g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \Rightarrow v^2 = \frac{2GM}{r}$$

$$E = \frac{g_{00} m c^2}{\sqrt{g_{00} - Q_E / c^2}}$$

$$Q_E = c^2 \left(g_{00} - \frac{g_{00}^2 m^2 c^4}{E^2} \right), \quad 2\sqrt{Q_E} \frac{\partial L}{\partial Q_E} = \frac{E}{c} \sqrt{\frac{1}{g_{00}} - \frac{m^2 c^4}{E^2}}$$

$$0 = \delta \frac{E}{c} \int \sqrt{\frac{1}{g_{00}(q)} - \frac{m^2 c^4}{E^2}} \sqrt{g_{ij}(q)} dq^i dq^j$$

$$\sqrt{\frac{E^2}{g_{00}(q)} / c^2 - m^2 c^2} = p(q)$$

$$0 = \delta \int p(q) \sqrt{g_{ij}(q)} dq^i dq^j = \delta \int p(q) ds \qquad 0 = \delta \int \frac{ds}{\lambda(q)}$$

Dla światła:

$$0 = \delta \frac{E}{c} \int \sqrt{\frac{1}{g_{00}(q)}} \sqrt{g_{ij}(q) dq^i dq^j}$$

Wygodnie zbadać zmieniając zmienną radialną na inną:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dr^2}{1 - r_0/r} + r^2 d\varphi^2 = \left(\frac{dr}{d\rho} \right)^2 \frac{d\rho^2}{1 - r_0/r} + \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \rho^2 d\varphi^2 = \\ &= \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 \left(\left(\frac{dr}{d\rho} \right)^2 \frac{\rho^2}{r^2 - rr_0} d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{r^2 - rr_0}} = \frac{d\rho}{\rho}$$

$$r = r_0 + \frac{(\rho - r_0)^2}{4\rho} \cong \rho/4$$

$$ds = \left(\frac{\rho + r_0}{2\rho} \right)^2 \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}$$

$$\frac{1}{g_{00}} = \frac{1}{1 - r_0/r} = \frac{(\rho + r_0)^2}{(\rho - r_0)^2}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \frac{E}{c} \int \sqrt{\frac{1}{g_{00}(q)}} \sqrt{g_{ij}(q) dq^i dq^j} = \\
&= \delta \frac{E}{4c} \int \frac{1+r_0/\rho}{1-r_0/\rho} (1+r_0/\rho)^2 \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2} \cong \\
&\cong \delta \frac{E}{4c} \int (1+r_0/\rho)^2 (1+r_0/\rho)^2 \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2} \cong \\
&= \delta \frac{E}{4c} \int \sqrt{1+8r_0/\rho} \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2} = \\
&= \delta \sqrt{2 \frac{E}{c^2}} \sqrt{\frac{E}{c^2}} \int \sqrt{\frac{c^2}{2} - 2 \frac{-GM}{\rho/4}} \sqrt{(d\rho/4)^2 + (\rho/4)^2 d\varphi^2} = \\
&= \delta \int \sqrt{2\mu \left(\mu \frac{c^2}{2} - 2 \frac{-GM\mu}{\rho/4} \right)} \sqrt{(d\rho/4)^2 + (\rho/4)^2 d\varphi^2}
\end{aligned}$$